ГРУППОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОМЕРНОЙ СОВОКУПНОСТИ ПАРАМЕТРОВ СПОРТСМЕНОВ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗА РЕЗУЛЬТАТИВНОСТИ

Ахметов Р.Ф.

Житомирський державний педагогічний університет імені Івана Франка

Аннотация. В статье рассматриваются актуальные вопросы выделения наиболее информативных обобщенных параметров прыгунов в высоту из некоторой полной совокупности спортивных параметров для решения в последующем важной задачи прогноза результативности.
Ключевые слова: вектор спортивных параметров, корреляционный эллипсоид, алгебраическая спектральная задача.
Анотація. Ахметов Р.Ф. Групові статистичні характеристики і факторний аналіз багатомірної сукупності параметрів спортсменів у задачах прогнозування результативності. У статті розглядаються актуальні питання виділення найбільш інформативних узагальнених параметрів стрибунів у висоту з деякої повної сукупності спортивних параметрів для вирішення надалі важливого завдання прогнозу результативності.
Ключові слова: вектор спортивних параметрів, кореляційний еліпсоїд, алгебраїчна спектральна задача.
Annotation. Akhmetov R.F. Group and statistic data as well as factor analysis of multimetric unity of athletes' parameters in prognosticating the performance of high-jumping. The paper considers urgent issues of singling out the more important parameters of high-jumping to further prognosticate the performance.
Key words: parameters' vector, correlation ellipsoid, algebraic spectral problem.

Постановка проблемы: прогнозирование – разработка прогнозов в спорте – является формой конкретизации предвидении перспектив развития того или иного процесса или явления, характерного для спортивной деятельности [4; 7]. Задача прогнозирования сводится к выявлению вероятного развития того конкретного явления, которое в наибольшей степени соответствует научному значению, отражает передовые тенденции и, в конечном счёте, определяет процесс и достижение заданного эффект. В системе подготовки большая роль отводится прогнозу роста технико-тактических и функциональных возможностей отдельных спортсменов и спортивных групп [1; 5]. В связи с этим, весьма актуальным является разработка методики выделения наиболее информативных параметров спортсменов из некоторой полной совокупности спортивных параметров для решения в последующем важной задачи прогноза результативности.

Анализ последних исследований и публикаций: прогнозирование основывается на использовании метода экстраполяции, предполагающего распространение выводов, полученных из наблюдения над одной частью какого-либо явления, на другие его части [1; 4; 5]. В условиях спорта экстраполяция позволяет осуществить прогнозы роста результативности на основе изучения соответствующих закономерностей в предшествующие годы.

Проведенный в некоторых работах [1; 5] детерминированный анализ полной совокупности антропометрических, технических и специальных физических параметров спортсменов вскрывает их физический смысл и показывает, что все они являются важными характеристиками, которые в совокупности и определяют, в конечном счете, спортивный результат (целевую функцию). Однако детерминированный анализ не отвечает на весьма существенный вопрос, каким образом оценивать количественно степень влияния на результат отдельных параметров или некоторой группы параметров. Это влияние различно для различных параметров, и оно зависит от возраста группы [1]. Поскольку конкретные значения параметров зависят от конкретного спортсмена, постольку они всегда имеют некоторый случайный разброс, который можно описать методами математической статистики [3; 6]. При этом особое значение имеет факторный анализ [6; 8; 9], т.к. основной целью факторного анализа является выделение наиболее информативных и значимых параметров из некоторого множества случайных параметров.

Цель статьи: на основе разработанной нами программы выделить наиболее информативные обобщенные параметры прыгунов в высоту из некоторой полной совокупности спортивных параметров для решения в последующем важной задачи прогноза результативности.

Результаты исследований. В отличие от большинства известных работ в данной работе факторный анализ рассматривается с позиций анализа ориентации и размеров многомерного корреляционного эллипсоида полного вектора спортивных параметров (ВСП). При этом выделяется т.н. принцип локализации ВСП в ограниченных подпространствах меньшей размерности, когда размеры корреляционного эллипсоида в некоторых главных направлениях становятся пренебрежимо малыми величинами. Следует, однако, подчеркнуть одну специфическую особенность статистической обработки параметров в малой группе спортсменов, а как известно, группы мастеров спорта не бывают большими. Это принципиальная ограниченность числа спортсменов в группе (М=12), что может привести, строго говоря, к большим относительным погрешностям среднеарифметических оценок неизвестных статистических средних (при М=12 они составляют 30-47 % [6]). В связи с этим необходимо, прежде всего, уточнить, а с какой основной целью оцениваются групповые статистические параметры? И какой вообще имеют смысл «арифметические» статистические характеристики? Данная работа ориентирована на решение в последующем задач прогноза результативности по некоторой совокупности информативных параметров спортсменов в зависимости от методики тренировки. Поэтому на первом этапе исследований вопросы влияния погрешностей арифметических оценок самих статистических характеристик в данной работе пока опускаются, а арифметическое усреднение рассматривается просто, как аналог или частный случай статистического усреднения (с равномерным распределением вероятности) для решения вопросов локализации и факторного анализа ВСП. Обоснованием и критерием полезности такого подхода является достаточно приемлемое для практики решение конечной задачи прогноза результативности.

Векторные и матричные характеристики для группы спортсменов

Понятие групповой параметрической матрицы (ГМП).

Полная совокупность параметров, включая и спортивный результат (Н), представляется в виде некоторого N-мерного вектора $\vec{x}_N$ (матрицы-столбца): $\vec{x}_N^T = (x_1, x_2, ..., x_N)$, где «Т» – операция матричного транспонирования, $\vec{x}_N^T$ – строка, $\vec{x}_N$ – столбец. В данной работе исследование ограничивается случаем N=21: x_1=Н – спортивный результат (высота прыжка; называется также целевой функцией (ЦФ)).

Антропометрические параметры ($x_2 \ldots x_7$):

x_2 – рост; x_3 – длина голени; x_4 – длина бедра; x_5 – окружность бедра; x_6 – окружность икроножной мышцы; x_7 – вес;

Технические параметры ($x_8 \ldots x_{14}$):

x_8 – скорость разбега перед отталкиванием; x_9 – скорость вылета ОЦТ (в момент отрыва); x_{10} – угол вылета ОЦТ; x_{11} – длительность фазы отталкивания; x_{12} – высота вылета ОЦТ; x_{13} – импульс силы отталкивания ($x_{13} = x_7 x_9$).

Специализированные параметры ($x_{14} \ldots x_{21}$):

x_{14} – степень использования силовых возможностей при отталкивании (%); x_{15} – бег на 30 м с высокого старта (время, секунды); x_{16} – скорость спринтерского бега (10 м с хода); x_{17} – прыжок вверх с двух ног с места; x_{18} – прыжок в длину с места; x_{19} – тройной прыжок с места; x_{20} – прыжок вверх с толчковой ноги (махом другой); x_{21} – прыжок вверх с трех шагов.

Векторный параметр спортсмена (ВПС) $\vec{x}_N$ зависит от конкретного спортсмена m=1,2,…,M в группе из M спортсменов (в данной работе M=12). Зависимость ВПС от спортсмена (его номера) и от времени (возраста) представляется в виде:

$$\vec{x}_N = \vec{x}_N^m(t),\ t = t_1, t_2, ..., t_L, t_0;\ \text{m}=1,2,\ldots,\text{M},$$

$$t_n = 10 + (n-1), \quad n = 1,2,...,8,$$

где L – число возрастных групп (в данной работе L=8); t_0 – условный возраст ведущих спортсменов. Для простоты зависимость ВПС от времени пока опускается и возрастная группа полностью характеризуется M-мерным набором N-мерных ВПС спортсменов и представляется в виде прямоугольной матрицы X_{NM}, которая называется далее групповой параметрической матрицей (ГМП):

$$X_{NM} = (\vec{X}_N^1 \vec{X}_N^2 ... \vec{X}_N^M) = (x_{nm})_{NM}, \quad x_{nm} = \vec{X}_N^m[n],$$

$$X_{NM} = \begin{pmatrix} x_{11}x_{12}\dots x_{1M} \\ x_{21}x_{22}\dots x_{2M} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{N1}x_{N2}\dots x_{NM} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где N – число строк; M – число столбцов матрицы; x_{nm} – элементы матрицы (n-я компонента (координата) вектора $\vec{X}_N^m$).

Выделяя отдельно спортивный результат $x_1 = H$, ВПС $\vec{x}_N$ можно представить также в блочном виде:

$$\vec{x}_N = \begin{pmatrix} H \\ \vec{y}_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_{N-1} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\vec{y}_{N-1}$ – (N-1) – мерный вектор физических параметров (ВФП) спортсмена.

Феноменологическая постановка задачи прогноза результативности спортсменов

Важнейшей оперативной характеристикой является зависимость ЦФ от физических параметров спортсмена:

$$H = H(\vec{y}_{N-1}) = H(y_1, y_2, ..., y_{N-1}). \quad (3)$$

Значения ВФП зависят как от индивидуума, так и тренировочного процесса во времени:

$$\vec{y}_{N-1} = \vec{y}_{N-1}(t). \quad (4)$$

Поэтому одной из основных системных задач тренера является исследование параметрической и временной зависимости ЦФ (динамики развития ЦФ):

$$H = H(t) = H[\vec{y}_{N-1}(t)] \quad , \quad t \in \mathrm{T} , \tag{5}$$

где Т – некоторый ограниченный интервал времени

Т=t1 , (t1 ,t2) , (t1 ,t2 ,t3), …, (t1 ,t2 ,…tL) .

После решения задачи (3.5) в некотором приближении представляется возможным поставить и решать фундаментальную задачу прогноза (предсказания) спортивного результата на некоторый момент времени t_0 за пределами данного интервала Т (на будущее):

$$\lim_{t \to t_0} H(t) = H_0 - ? \tag{6}$$

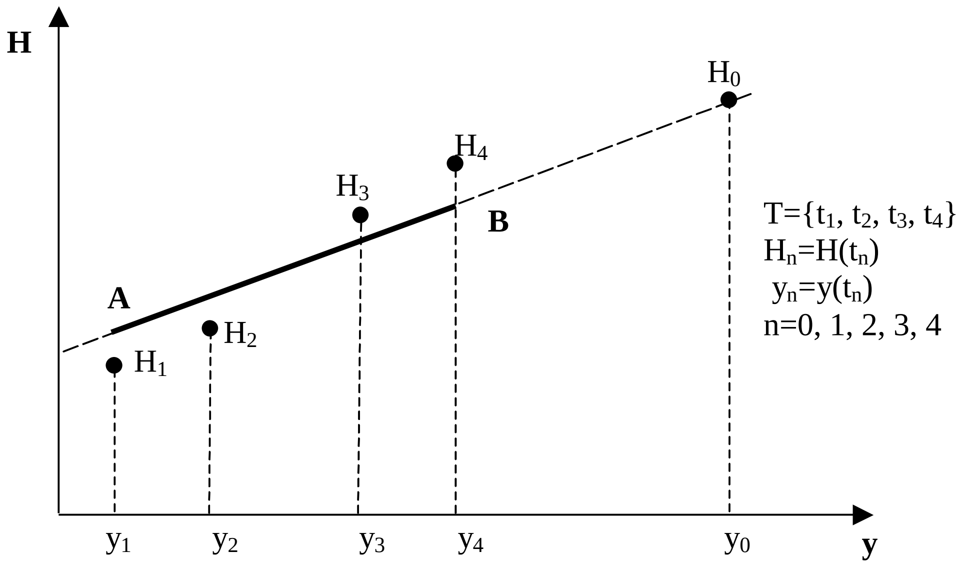

Рис. 1. Решение одномерной задачи прогноза результативности Н по параметру у.

Частное, иллюстративное решение задачи прогноза результативности по одному из параметров (у) приводится на рисунке 1, где на плоскости (у, Н) нанесены четыре «выборочные» точки $M_n(t_n, H_n),\ n = 1,2,3,4$ по четырем возрастным группам t_1, t_2, t_3, t_4; АВ – линия регрессии, построенная, например, методом наименьших квадратов [3] (когда точки M_n наименее уклоняются от линии АВ); $y_0 = y(t_0)$ – прогнозное значение параметра (y) на некоторый момент времени $t_0 > t_4; H_0$ – прогнозное значение результата.

Задача прогноза (6) может быть решена методами регрессионного анализа [3; 6]. В данной работе рассматривается по существу необходимый подготовительный этап к задаче прогноза – это выделение среди большой 20-ти мерной совокупности физических параметров $\vec{y}_{20}$ наиболее информативной подгруппы параметров. Дело в том, что, во-первых, компоненты ВФП $\vec{y}_{20}$ в той или иной степени связаны между собой, а, во-вторых, ЦФ (Н) связана с параметрами по разному – «сильно или слабо». В связи с этим для решения задачи выделения наиболее информативных параметров требуется разработка специальной методики. Анализ литературы по подобным вопросам показывает, что на сегодняшний день наиболее подходящим является математический аппарат корреляционного и факторного анализа в математической статистике [6; 8; 9].

Средние значения, дисперсии и корреляционные матрицы совокупности параметров

В рамках статистической терминологии будем считать, что каждый из параметров x_n (для каждой возрастной группы) является некоторой случайной величиной, а ВПС $\vec{x}_N$ – случайным вектором. Статистические характеристики ВПС определяются путем арифметического усреднения:

$$\vec{a}_N = \bar{\vec{x}}_N = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\vec{X}_N^m \quad , \quad a_n = \bar{x}_n = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}x_{nm} \tag{7}$$

$$D(x_n) = \sigma_n^2 = \overline{\Delta x_n^2} = \overline{x_n^2} - \overline{x_n}^2 \;, \quad \Delta x_n = x_n - \overline{x_n} \quad , \tag{8}$$

$$\Phi_{nk} = \overline{x_n x_k} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}x_{nm}x_{km} \; , \tag{9}$$

$$\Psi_{nk} = \overline{\Delta x_n \Delta x_k} = \Phi_{nk} - \overline{x_n}\,\overline{x_k} \; , \tag{10}$$

$$\Psi_{nk} = \sigma_n\sigma_k\rho_{nk} \quad , \quad \rho_{nk} = \frac{\Psi_{nk}}{\sigma_n\sigma_k} \; , \tag{11}$$

где a_n, σ_n^2 – средние значения и дисперсии параметров x_n ($\sigma_n = \sqrt{D(x_n)}$ – СКО);

Δx_n – флуктуации параметров относительно средних значений;

Φ_{nk}, Ψ_{nk} – взаимные корреляции и ковариации параметров x_n, x_k;

ρ_{nk} – взаимные коэффициенты корреляции ($/\rho/ \le 1$).

Соответствующие корреляционные и ковариационные матрицы представляются в алгебраическом виде:

$$\Phi_{NN} = \frac{1}{M} X_{NM} X_{NM}{}^T = \overline{\vec{X}_N^m \vec{X}_N^{mT}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \vec{X}_N^m \vec{X}_N^{mT}, \tag{12}$$

$$\Psi_{NN} = \overline{\Delta\vec{X}_N^m \Delta\vec{X}_N^{mT}}, \tag{13}$$

где черта сверху означает арифметическое усреднение по номеру m $(m = 1,2,...,M)$, т.е. статистическое усреднение по спортсменам в группе с равномерным дискретным распределением вероятностей $p_m = 1/M$.

Отметим, что исходная ГПМ X_{NM} содержит информацию не только о связи различных параметров x_n между собой, но и степени «схожести» или параметрической близости спортсменов между собой в группе. Для этого достаточно рассмотреть близость или корреляцию векторов $\vec{X}_N^m$, оценивая скалярные произведения векторов [2]:

$$B_{mk} = \frac{1}{N} (\vec{X}_N^m, \vec{X}_N^k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \vec{X}_N^m[n] \vec{X}_N^k[n]. \tag{14}$$

Матрицу скалярных произведений (МСП) можно представить через ГМП X_{NM}:

$$B_{MM} = \frac{1}{N} X_{NM}^T X_{NM}. \tag{15}$$

Мерой параметрической близости спортсменов в группе может служить алгебраическая корреляция векторов $\vec{X}_N^m$ или т.н. косинус угла между векторами:

$$R_{mk} = \cos\varphi_{mk} = \frac{(\vec{X}_N^m, \vec{X}_N^k)}{//\vec{X}_N^m // * // \vec{X}_N^k //}, \tag{16}$$

$$//\vec{X}_N // = \sqrt{(\vec{X}_N, \vec{X}_N)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} x_n^2},$$

где $// \vec{X}_N //$ – норма вектора в N-мерном евклидовом пространстве [2].

Многомерный нормальный закон распределения и корреляционный эллипсоид вектора спортивных параметров

Нормальная плотность вероятности ВСП представляется в стандартном виде [6]:

$$W(\vec{X}_N / \bar{\vec{X}}_N, \Psi_{NN}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\Psi_{NN})}} \exp\{-\frac{1}{2}(\Psi_{NN}^{-1}\Delta\vec{X}_N, \Delta\vec{X}_N)\},$$

где $\det(\Psi_{NN})$ – определитель ковариационной матрицы Ψ_{NN}.

Сечение плотности вероятности определяет в пространстве ВСП т.н. корреляционный эллипсоид:

$$W(\vec{X}_N /.) = const \quad \Rightarrow \quad (\Psi_{NN}^{-1}\Delta\vec{X}_N, \Delta\vec{X}_N) = const'. \tag{17}$$

В частности, в случае независимых параметров x_n уравнение корреляционного эллипсоида представляется в виде:

$$\left(\frac{x_1 - \bar{x}_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \bar{x}_2}{\sigma_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_N - \bar{x}_N}{\sigma_N}\right)^2 = const'.$$

Отметим, что при надлежащем выборе постоянной $const'$ ВСП $\vec{X}_N$ находится с высокой вероятностью внутри своего корреляционного эллипсоида. В общем случае многомерный корреляционный эллипсоид характеризуется своими размерами и ориентацией, которые определяются в результате решения задачи о приведении квадратичной формы (17) к каноническому виду. На рисунках 2-3 приведены корреляционные эллипсоиды ВСП соответственно на плоскости (N=2) и в трёхмерном пространстве (N=3):

Сингулярные числа ГМП и максимальное число наиболее информативных параметров спортсменов

В большинстве случаев число анализируемых физических параметров превышает количество спортсменов в группе: N > M .

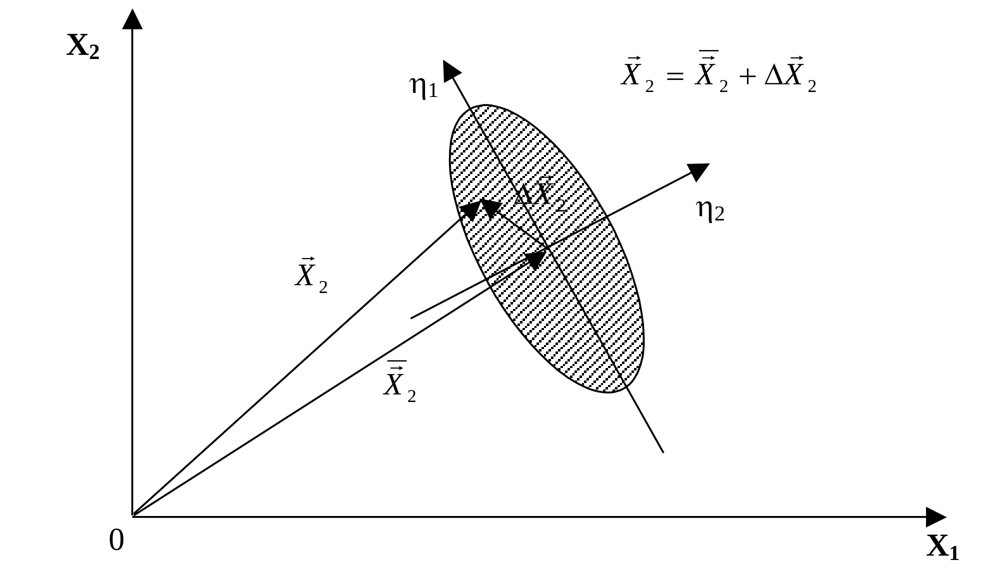

Рис. 2. Корреляционный эллипсоид (эллипс) на плоскости двух (N=2) параметров (X_1, X_2).

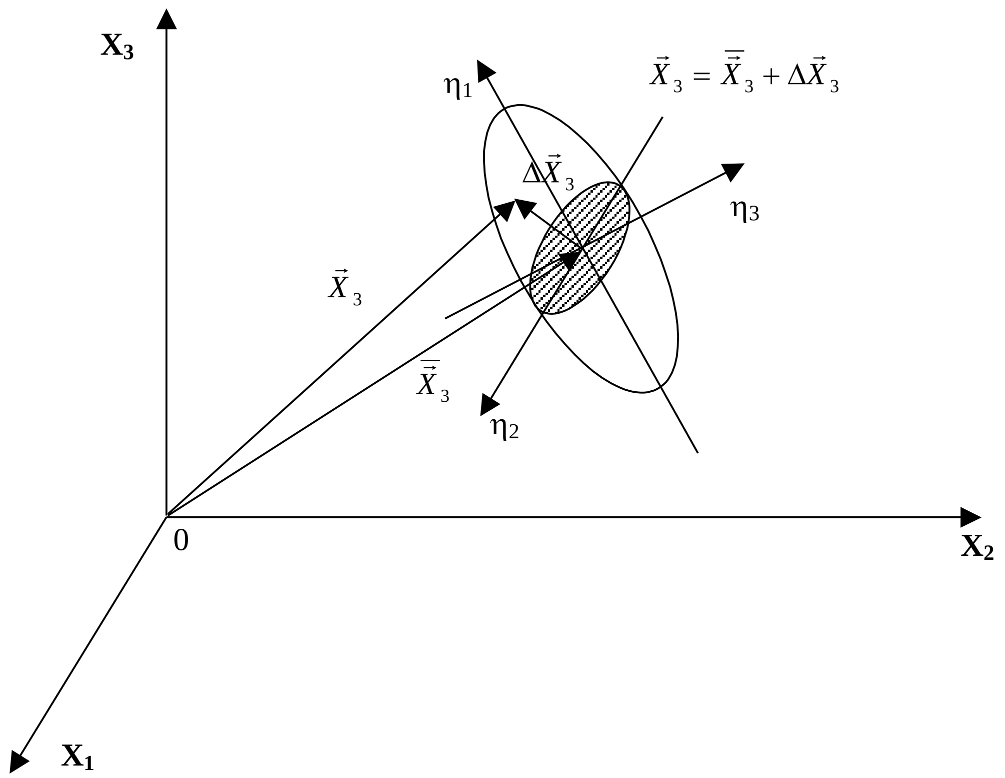

Рис. 3. Корреляционный эллипсоид в трехмерном пространстве (N=3) параметров (X_1, X_2, X_3).

В этом случае ранги симметричных матриц Φ_{NN} и B_{MM} совпадают и равны M:

$$Rank\Phi_{NN} = Rank\mathrm{B}_{MM} = M \quad (18)$$

Это следует из того, что строковые и столбцовые ранги произвольных матриц совпадают [2]. Более того, можно показать, что ненулевые собственные числа матриц

$$(X_{NM} X_{NM}^T)_{NN} \text{ и } (X_{NM}^T X_{NM})_{MM}$$

совпадают и равняются квадратам сингулярных чисел ГМП X_{NM} [6].

Таким образом, в случае N=21и M=12 среди двадцати физических параметров можно методами математической статистики выделить для задач прогноза не более двенадцати информативных параметров. В перспективных научно-исследовательских работах представляется целесообразным формировать объединенные группы спортсменов из нескольких автономных групп для обеспечения неравенства M>N. Тогда для задач прогноза результативности можно использовать все N параметров.

Ориентация корреляционного эллипсоида и факторный анализ ВСП в задачах выделения наиболее информативных параметров. Принцип локализации вектора спортивных параметров в ограниченном подпространстве

Полной алгебраической характеристикой симметричной ковариационной матрицы ВСП является её спектральное представление [2]:

$$\Psi_{NN} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \vec{\mathrm{H}}_N^m \vec{\mathrm{H}}_N^{mT}, \tag{19}$$

$$\Psi_{NN} \vec{\mathrm{H}}_N^m = \lambda_m \vec{\mathrm{H}}_N^m, \quad m = 1,2,\ldots,N,$$
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_M > 0, \quad \lambda_{M+1} = \lambda_{M+2} = \ldots = \lambda_N = 0, \tag{20}$$

$$\mathrm{P}_N(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_{NN} - \Psi_{NN}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_m,$$
$$(\vec{\mathrm{H}}_N^m, \vec{\mathrm{H}}_N^k) = \delta_{mk} = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \tag{21}$$

где $\lambda_m, \vec{\mathrm{H}}_N^m$ – собственные числа и собственные вектора матрицы Ψ_{NN}; $\mathrm{P}_N(\lambda)$ – характеристический многочлен; $\left\{\vec{\mathrm{H}}_N^m, m = 1,2,\ldots,N\right\}$ – ортонормированная совокупность собственных векторов; δ_{mk} – символ Кронекера.

Фундаментальным свойством собственных векторов симметричной ковариационной матрицы Ψ_{NN} является то, что с их помощью можно выделить группу линейных преобразований физических параметров по степени их значимости и информативности (факторный анализ [6]):

$$\eta_k = (\Delta\vec{X}_N, \vec{\mathrm{H}}_N^k) = \vec{\mathrm{H}}_N^{kT}\Delta\vec{X}_N \quad \Rightarrow \quad \overline{\eta_m\eta_k} = \delta_{mk},$$

где использовано свойство ортогональности (21). Отметим, что в базисе из собственных векторов ковариационной матрицы ВСП корреляционный эллипсоид (17) представляется в виде:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\eta_n^2}{\lambda_n} = const'.$$

При этом собственные вектора $\vec{H}_N^n$ – определяют ориентацию корреляционного эллипсоида.

Таким образом, исходную совокупность параметров можно так скомбинировать, что преобразованные параметры η_k оказываются упорядоченными и в минимальном количестве, равном числу спортсменов в группе:

$$\overline{\eta_m^2} = \lambda_m(\Psi_{NN}), \quad m = 1,2,\ldots,M.$$

В частности, для выбранной группы спортсменов в составе из M=12 спортсменов среди 20-ти физических параметров можно выделить не более 12 линейных комбинаций параметров по степени их значимости. При этом мерой информативности комбинации является величина соответствующего собственного числа и, если оно мало (не значимо), то им можно практически пренебречь. Полученные в данной работе результаты показывают, что значимых собственных чисел ковариационных матриц оказывается значительно меньше максимального числа M=12 (K=3-6). Если число значимых собственных чисел равно K<M, то это означает, что многомерный вектор $\vec{x}_N$ распределяется не по всему возможному «объему» N-мерного пространства E^N, а локализуется (концентрируется) на самом деле в некотором «меньшем» K-мерном подпространстве $L_N^K \subset E^N$ с базисом из первых K собственных векторов ковариационной матрицы:

$$\Psi_{NN} \cong \sum_{m=1}^{K} \lambda_m \vec{H}_N^m \vec{H}_N^{mT},\ K \le M \Rightarrow \Delta\vec{x}_N \in L_N^K(\vec{H}_N^m, m = 1,2,\ldots, K) = \{\Delta\vec{x}_N : \Delta\vec{x}_N = \sum_{m=1}^{K} \alpha_m \vec{H}_N^m\},$$

где подпространство L_N^K называется также К-мерной линейной оболочкой, натянутой на К базисных векторов $\vec{H}_N^m, m = 1,2,\ldots,K.$ Принцип локализации ВСП $\vec{x}_N$ иллюстрируется на рисунках 4,5. Так, на рисунке 4 ВСП $\vec{x}_2$ локализуется на линии $L_2^1(\vec{H}_2^1)$, а на рисунке 5 ВСП $\vec{x}_3$ локализуется в плоскости $L_3^2(\vec{H}_3^1, \vec{H}_3^2)$.

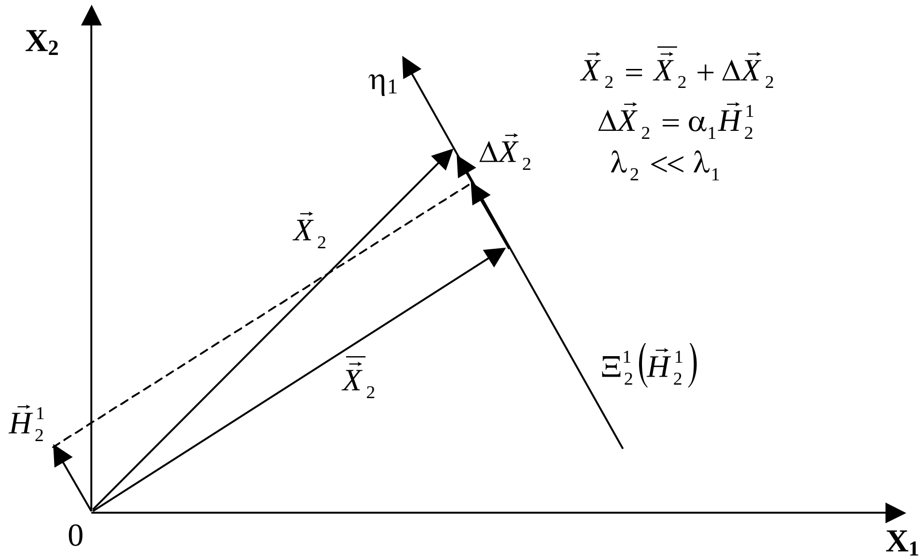

Рис. 4. Локализация двухмерного ВФП $\vec{X}_2$ на линии $\Xi_2^1(\vec{H}_2^1)$.

Непосредственное использование матричной методологии выделения наиболее информативных физических параметров спортсменов наталкивается на специфические трудности различной размерности этих параметров. Для преодоления указанной трудности целесообразно проводить факторный анализ нормированных безразмерных параметров

$$x_n^{\wedge} = \frac{x_n - \bar{x}_n}{\sigma_n}.$$

Для расчета статистических характеристик и факторного анализа параметров путем спектрального анализа корреляционных матриц была разработана специальная программа fakPS в среде Turbo Pascal, которая может быть использована практически на любом компьютере, совместимом с IBM, начиная с серии AT-286.

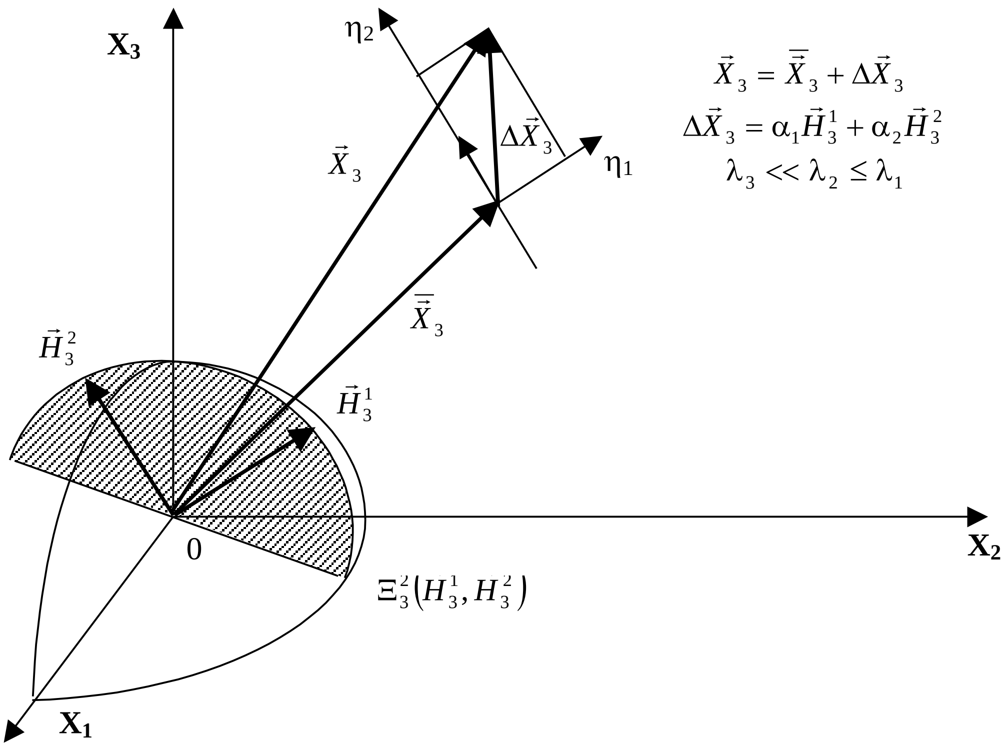

Рис. 5. Локализация трехмерного ВФП $\vec{X}_3$ в плоскости $\Xi_3^2\left(\vec{H}_3^1, \vec{H}_3^2\right)$.

Выводы

1. При исследовании группы мастеров спорта наблюдается весьма однородный состав группы в смысле параметрической близости спортсменов в группе. Физические параметры оказываются «квазидетерминированными» с малой дисперсией, – что и обусловливает их параметрическую близость. Последнее обстоятельство предъявляет повышенные требования к точности спектрального алгебраического анализа корреляционных матриц параметров (eps<10^{-12}).

2. Задача факторного анализа о выделении наиболее информативных параметров спортсменов означает, по существу, вскрытие области локализации вектора физических параметров (ВФП) в некотором ограниченном подпространстве полного многомерного евклидового пространстве параметров. При этом базисом подпространства является набор первых «значимых» собственных векторов ковариационной матрицы ВФП, которые определяют ориентацию корреляционного эллипсоида ВФП . Собственные значения

ковариационной матрицы ВФП определяют размер корреляционного эллипсоида, в котором локализуется ВФП.

3. Спектральный анализ корреляционных матриц параметров подтверждает теоретический вывод о максимальном числе информативных параметров, равном числу спортсменов в группе (M=12). При этом наблюдается резкое падение собственных чисел матриц, начиная с номеров 4-7. Откуда следует, что для задач прогноза ЦФ на 1-ом этапе достаточно ограничиться тремя-шестью наиболее информативными параметрами: x_{12} (высота вылета ОЦТ); x_9 (скорость вылета ОЦТ); x_{21} (прыжок вверх с трех шагов разбега); x_5 (скорость разбега перед отталкиванием); x_{15} (бег на 30 м с высокого старта); x_{14} (степень использования силовых возможностей при отталкивании).

4. Состав наиболее информативных комбинаций параметров зависит от возрастной группы. Поэтому вопрос о единой совокупности наиболее информативных параметров для других групп остаётся, строго говоря, пока открытым и здесь требуется провести ещё дополнительные самостоятельные исследования в рамках отдельных НИР.

Литература

1. Баландин В.И., Блудов Ю.М., Плахтиенко В.А. Прогнозирование в спорте. – М.: Физкультура и спорт, 1986. – 193 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 4-е изд.– М.: Наука, 1988. – 552 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики/ Пер.с англ. Под ред. академика А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
4. Платонов В.Н. Общая теория подготовки спортсменов в олимпийском спорте. – К.: Олимпийская литература, 1997. – 583 с.
5. Плахтиенко В.А., Мельник В.Г. Прогнозирование в спорте. – Л.: ВДКИФК, 1980. – 79 с.
6. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496 с.

7. Саати Т.Л. Взаимодействия в иерархических системах // Техническая кибернетика. – 1979. – № 1. – С. 68-74.
8. Harman H.H. Modern factor analysis. – University of Chicago Press, 1960. Русский перевод: Современный факторный анализ. – М.: Статистика, 1972. – 516 с.
9. Lawley D.N., Maxwell A.E. Factor analysis as a statistical method. – Butterworths. – London, 1963. Русский перевод: Факторный анализ как статистический метод. – М.: Мир, 1967. – 413 с.