ДО ПИТАННЯ ПРОГНОЗУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТИВНОСТІ СТРИБУНІВ У ВИСОТУ

Ахметов Рустам
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Постановка проблеми. Прогнозування результативності спортсменів є однією з важливих задач спортивної педагогіки [4]. Проблема полягає в тому, що серед великої сукупності спортивних параметрів необхідно вибрати найбільш інформативні, які б вирішували задачу прогнозу результативності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проведений у деяких роботах детермінований аналіз повної сукупності параметрів спортсменів (антропометричних, технічних і спеціалізованих) показує, що всі вони в сукупності визначають спортивний результат [1; 5]. Однак, детермінований аналіз не відповідає на дуже істотне питання: а яким чином оцінювати кількісно ступінь впливу на результат окремих параметрів чи деякої групи параметрів? Конкретні значення параметрів завжди мають деякий випадковий розкид, який можна описати методами математичної статистики [3; 6] для наступного упорядкування цієї сукупності за ступенем інформативності.

Ціль статті. Стаття носить постановочний і програмний характер. Її основна мета – обґрунтування методики виділення найбільш інформативних параметрів стрибунів у висоту в задачах прогнозу їх результативності.

Результати досліджень

Векторні й матричні статистичні характеристики для групи спортсменів

Повна сукупність параметрів, включаючи і спортивний результат (Н), представляється у вигляді деякого N-мірного вектора $\vec{x}_N$ (матриці-стовпця):

$$\vec{x}_N^T = (x_1, x_2, ..., x_N),$$

де „Т” – операція матричного транспонування, $\vec{x}_N^T$ – рядок, $\vec{x}_N$ – стовпець. У цій роботі дослідження обмежується випадком N=21: x_1 = H – спортивний результат (висота стрибка; називається також цільовою функцією (ЦФ)).

Антропометричні параметри ($x_2 ... x_7$): x_2 – зріст; x_3 – довжина гомілки; x_4 – довжина стегна; x_5 – окружність стегна; x_6 – окружність литкового м'яза; x_7 – вага.

Технічні параметри ($x_8 ... x_{14}$): x_8 – швидкість розбігу перед відштовхуванням; x_9 – швидкість вильоту ЗЦТ (у момент відриву); x_{10} – кут вильоту ЗЦТ; x_{11} – тривалість фази відштовхування; x_{12} – висота вильоту ЗЦТ; x_{13} – імпульс сили відштовхування.

Спеціалізовані параметри ($x_{14} ... x_{21}$): x_{14} – ступінь використання силових можливостей при відштовхуванні (%); x_{15} – біг на 30 м з високого старту (час, секунди); x_{16} – швидкість спринтерського бігу (10 м з ходу); x_{17} – стрибок угору з двох ніг із місця; x_{18} – стрибок у довжину з місця; x_{19} – потрійний стрибок із місця; x_{20} – стрибок угору з штовхової ноги (махом іншої); x_{21} – стрибок угору з трьох кроків.

Векторний параметр спортсмена (ВПС) $\vec{x}_N$ залежить від конкретного спортсмена m=1,2,…,M у групі з M спортсменів (у даній роботі M=12). Залежність ВПС від спортсмена (його номера) і від часу (віку) представляється у вигляді :

$$\vec{x}_N = \vec{x}_N^m(t),\ t = t_1, t_2, ..., t_L, t_0\text{; m=1,2,…,M,}$$

$$t_n = 10 + (n-1), \quad n = 1,2,...,8,$$

де n – число вікових груп (у даній роботі n=8); t_0 – умовний вік провідних спортсменів. Для простоти залежність ВПС від часу поки-що опускається і вікова група цілком характеризується M-мірним набором N-мірних ВПС спортсменів і подається у вигляді прямокутної матриці X_{NM}, яка називається далі груповою параметричною матрицею (ГПМ):

$$X_{NM} = (\vec{X}_N^1 \vec{X}_N^2 \ldots \vec{X}_N^M) = (x_{nm})_{NM}, \quad x_{nm} = \vec{X}_N^m[n],$$

$$X_{NM} = \begin{pmatrix} x_{11}x_{12}\ldots x_{1M} \\ x_{21}x_{22}\ldots x_{2M} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{N1}x_{N2}\ldots x_{NM} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де N – число рядків; M – число стовпців матриці; x_{nm} – елементи матриці (n-а компонента (координата) вектора $\vec{X}_N^m$).

Виділяючи окремо спортивний результат $x_1 = H$, ВПС $\vec{x}_N$ можна представити також у блоковому вигляді:

$$\vec{x}_N = \begin{pmatrix} H \\ \vec{y}_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_{N-1} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де $\vec{y}_{N-1}$ – (N-1) – мірний вектор фізичних параметрів (ВФП) спортсмена.

У рамках статистичної термінології будемо вважати, що кожний із параметрів x_n (для кожної вікової групи) є деякою випадковою величиною, а ВПС $\vec{x}_N$ – випадковим вектором. Статистичні характеристики ВПС визначаються шляхом арифметичного усереднення:

$$\vec{a}_N = \bar{\vec{x}}_N = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \vec{X}_N^m, \quad a_n = \bar{x}_n = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} x_{nm}, \quad (3)$$

$$D(x_n) = \sigma_n^2 = \overline{\Delta x_n^2} = \overline{x_n^2} - \overline{x_n}^2, \quad \Delta x_n = x_n - \overline{x_n}, \quad (4)$$

$$\Phi_{nk} = \overline{x_n x_k} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} x_{nm}x_{km}, \quad (5)$$

$$\Psi_{nk} = \overline{\Delta x_n \Delta x_k} = \Phi_{nk} - \overline{x_n}\,\overline{x_k}, \quad (6)$$

$$\Psi_{nk} = \sigma_n \sigma_k \rho_{nk}, \quad \rho_{nk} = \frac{\Psi_{nk}}{\sigma_n \sigma_k}, \quad (7)$$

де a_n, σ_n^2 – середні значення і дисперсії параметрів x_n ($\sigma_n = \sqrt{D(x_n)}$ – СКО); Δx_n – флуктуації параметрів щодо середніх значень; Φ_{nk}, Ψ_{nk} – взаємні кореляції та коваріації параметрів x_n, x_k; ρ_{nk} – взаємні коефіцієнти кореляції ($/\rho/ \le 1$).

Відповідні кореляційні та коваріаційні матриці представляються в алгебраїчному вигляді:

$$\Phi_{NN} = \frac{1}{M} X_{NM} X_{NM}{}^T = \overline{\vec{X}_N^m \vec{X}_N^{mT}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \vec{X}_N^m \vec{X}_N^{mT}, \tag{8}$$

$$\Psi_{NN} = \overline{\Delta \vec{X}_N^m \Delta \vec{X}_N^{mT}}, \tag{9}$$

де риска зверху означає арифметичне усереднення за номером m $(m = 1,2,\dots,M)$, тобто статистичне усереднення по спортсменах у групі з рівномірним дискретним розподілом імовірностей $p_m = 1/M$.

Відзначимо, що вихідна ГПМ X_{NM} містить інформацію не тільки про зв'язок різних параметрів x_n між собою, але і ступеня „схожості" чи параметричної близькості спортсменів між собою в групі. Для цього досить розглянути близькість чи кореляцію векторів $\vec{X}_N^m$, оцінюючи скалярні добутки векторів [2]:

$$B_{mk} = \frac{1}{N} (\vec{X}_N^m, \vec{X}_N^k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \vec{X}_N^m[n] \vec{X}_N^k[n]. \tag{10}$$

Матрицю скалярних добутків (МСП) можна представити через ГПМ X_{NM}:

$$B_{MM} = \frac{1}{N} X_{NM}^T X_{NM}. \tag{11}$$

Мірою параметричної близькості спортсменів у групі може служити алгебраїчна кореляція $\vec{X}_N^m$ векторів чи так званий косинус кута між векторами:

$$R_{mk} = \cos\varphi_{mk} = \frac{(\vec{X}_N^m, \vec{X}_N^k)}{// \vec{X}_N^m // * // \vec{X}_N^k //}, \tag{12}$$

$$// \vec{X}_N // = \sqrt{(\vec{X}_N, \vec{X}_N)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} x_n^2},$$

де $//\vec{X}_N//$ – норма вектора в N-мірному евклідовому просторі [2].

Багатомірний нормальний закон розподілу та кореляційний еліпсоїд вектора спортивних параметрів. Задача факторного аналізу

Нормальна щільність імовірності ВСП представляється в стандартному вигляді [2]:

$$W(\vec{X}_N / \bar{\vec{X}}_N, \Psi_{NN}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\Psi_{NN})}} \exp\{-\frac{1}{2}(\Psi_{NN}^{-1}\Delta\vec{X}_N, \Delta\vec{X}_N)\},$$

де $\det(\Psi_{NN})$ – визначник коваріаційної матриці Ψ_{NN}.

Перетин щільності ймовірності визначає у просторі ВСП так званий кореляційний еліпсоїд:

$$W(\vec{X}_N /.) = const \quad \Rightarrow \quad (\Psi_{NN}^{-1}\Delta\vec{X}_N, \Delta\vec{X}_N) = const'. \qquad (13)$$

Зокрема, у випадку незалежних параметрів x_n рівняння кореляційного еліпсоїда представляється у вигляді:

$$\left(\frac{x_1 - \bar{x}_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \bar{x}_2}{\sigma_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_N - \bar{x}_N}{\sigma_N}\right)^2 = const'.$$

Відзначимо, що при належному виборі постійної $const'$ ВСП $\vec{X}_N$ знаходиться з високою ймовірністю всередині свого кореляційного еліпсоїда. У загальному випадку багатомірний кореляційний еліпсоїд характеризується своїми розмірами й орієнтацією, що визначаються в результаті рішення задачі про приведення квадратичної форми (13) до канонічного вигляду. На малюнку 1 приведено кореляційний еліпсоїд ВСП на площині двох параметрів:

На відміну від більшості відомих робіт, у даній роботі факторний аналіз розглядається з позицій аналізу орієнтації та розмірів багатомірного кореляційного еліпсоїда повного вектора спортивних параметрів (ВСП). При цьому виділяється так званий принцип локалізації ВСП в обмежених підпросторах меншої розмірності, коли розміри кореляційного еліпсоїда в деяких головних напрямках стають нехтувано малими величинами. Потрібно, однак, підкреслити одну специфічну особливість статистичної обробки параметрів у малій групі спортсменів. Це принципова обмеженість числа спортсменів у групі (M = 12), що може призвести до великих відносних погрішностей середньоарифметичних оцінок невідомих статистичних середніх (при M = 12 вони складають 30-47% [6]). У зв'язку з цим необхідно, насамперед, уточнити, а з якою основною метою оцінюються групові статистичні параметри? І який узагалі мають сенс „арифметичні" статистичні характеристики? У цій роботі основною метою є вирішення завдання прогнозу результативності за деякою сукупністю інформативних параметрів спортсменів у залежності від методики тренування. Тому на першому етапі досліджень питання впливу погрішностей арифметичних оцінок самих статистичних характеристик у цій роботі поки опускаються, а арифметичне усереднення розглядається просто, як аналог і окремий випадок статистичного усереднення (з рівномірним розподілом імовірності) для вирішення питань локалізації та факторного аналізу ВСП. Обґрунтуванням і критерієм корисності такого підходу є досить прийнятне для практики вирішення кінцевого завдання прогнозу результативності.

Сингулярні числа ГПМ і максимальне число найбільш інформативних параметрів спортсменів

У більшості випадків число аналізованих фізичних параметрів перевищує кількість спортсменів у групі: N > M .

У цьому випадку ранги симетричних матриць Φ_{NN} і B_{MM} збігаються на рівні M :

$$Rank\Phi_{NN} = Rank\mathrm{B}_{MM} = M \ . \tag{3.18}$$

Це випливає з того, що строкові та стовпцеві ранги довільних матриць збігаються [5]. Більше того, можна показати, що ненульові власні числа матриць $(X_{NM} X^{T}_{NM})_{NN}$ і $(X^{T}_{NM} X_{NM})_{MM}$ збігаються та дорівнюють квадратам сингулярних чисел ГМП X_{NM} [2].

Таким чином, у випадку N=21 і M=12 серед двадцяти фізичних параметрів можна методами математичної статистики виділити для задач прогнозу не більш дванадцяти інформативних параметрів. У наступних науково-дослідних роботах представляється доцільним формувати об'єднані групи спортсменів з декількох автономних груп для забезпечення нерівності M>N. Тоді для задач прогнозу результативності можна використовувати всі N параметрів.

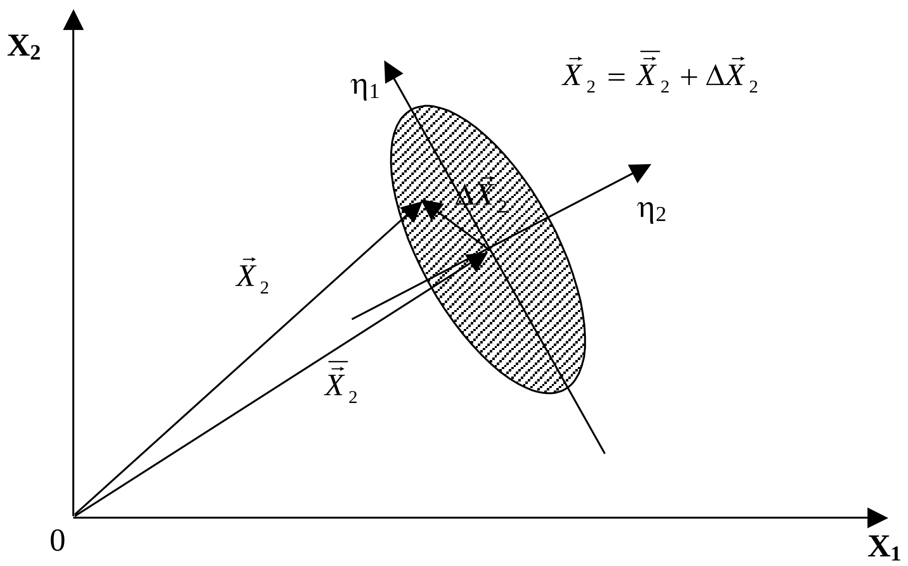

Рис. 1. Кореляційний еліпсоїд (еліпс) на площині двох (N=2) параметрів (X_1, X_2).

Висновки

Отримані результати дозволяють зробити такі висновки:

1. Задача факторного аналізу про виділення найбільш інформативних параметрів спортсменів означає, власне кажучи, розкриття області локалізації вектора фізичних параметрів (ВФП) у деякому обмеженому підпросторі повного багатомірного евклідового простору параметрів. При цьому базисом підпростору є набір перших „значимих" власних векторів коваріаційної матриці ВФП, які визначають орієнтацію кореляційного еліпсоїда ВФП. Власні значення коваріаційної матриці ВФП визначають розмір кореляційного еліпсоїда, у якому локалізується ВФП.

2. Спектральний аналіз кореляційних матриць параметрів підтверджує теоретичний висновок про максимальне число інформативних параметрів, яке дорівнює числу спортсменів у групі (М = 12). При цьому спостерігається різке падіння власних чисел матриць, починаючи з номерів 4-7. Звідси випливає, що для завдань прогнозу ЦФ на першому етапі достатньо обмежитися трьома-шістьма найбільш інформативними параметрами: x_{12} (висота вильоту ЗЦТ); x_9 (швидкість вильоту ЗЦТ); x_{21} (стрибок угору з трьох кроків розбігу); x_5 (швидкість розбігу перед відштовхуванням); x_{15} (біг на 30 м з високого старту); x_{14} (ступінь використання силових можливостей при відштовхуванні).

Література

1. Баландин В.И., Блудов Ю.М., Плахтиенко В.А. Прогнозирование в спорте. – М.: Физкультура и спорт, 1986. – 193 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 4-е изд.– М.: Наука, 1988. – 552 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики/ Пер.с англ. Под ред. академика А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
4. Платонов В.Н. Общая теория подготовки спортсменов в олимпийском спорте. – К.: Олимпийская литература, 1997. – 583 с.
5. Плахтиенко В.А., Мельник В.Г. Прогнозирование в спорте. – Л.: ВДКИФК, 1980. – 79 с.
6. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496 с.

Annotation. The paper considers urgent issues of singling out the more important parameters of high-jumping to further prognosticate the performance.

Аннотация. В статье рассматриваются актуальные вопросы выделения наиболее информативных обобщенных параметров прыгунов в высоту из некоторой полной совокупности спортивных параметров для решения в последующем важной задачи прогноза результативности.