

В.О. ШВЕЦЬ
А.В. ПРУС

**ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА
ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНOSTІ
ШКІЛЬНОГО КУРСУ СТЕРЕОМЕТРІЇ**



В.О. ШВЕЦЬ, А.В. ПРУС

**ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА
ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНOSTІ
ШКІЛЬНОГО КУРСУ
СТЕРЕОМЕТРІЇ**

Навчальний посібник

Вид-во ЖДУ ім. І. Франка
Житомир
2007

ББК 22.151.0р
Ш35
УДК 373.5.016: 514.113

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Національного педагогічного університету імені Н.П.Драгоманова
(Протокол №6 від 01 лютого 2007 року)*

Рецензенти: Бурда М.І. – доктор педагогічних наук, професор,
заступник директора Інституту педагогіки АПН України;
м. Київ;
Ігнатенко М.Я. – доктор педагогічних наук, професор,
проректор з навчально-методичної роботи Республіканського
вищого навчального закладу «Кримський гуманітарний
університет»; м. Ялта;
Дачук М.В. – вчитель вищої категорії, вчитель-методист,
вчитель математики загальноосвітньої школи №20, м. Київ

Ш35 Швель В.О., Прус А.В.
Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного
курсу стереометрії: Навчальний посібник. – Житомир: Вид-во
ЖДУ ім. І. Франка, 2007. – 156 с.
ISBN 978-966-8456-98-5

Посібник містить як теоретичні відомості так і конкретні
практичні матеріали, які дають можливість реалізувати прикладну
спрямованість стереометрії в старшій школі з довільним профілем
навчання

Для вчителів математики та учнів, викладачів і студентів фізико-
математичних факультетів, а також для тих, хто лише підручники з
геометрії для старшої школи

22.151.0р

ISBN 978-966-8456-98-5

© Швель В.О., 2007.
© Прус А.В., 2007

ЗМІСТ

Список скорочень.....	4
Передмова.....	5
Розділ 1. Поняття прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії та концептуальна модель її реалізації.....	7
1.1. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії.....	7
1.1.1. Періоди розвитку теоретичного і прикладного напрямів математичної науки і шкільної математики.....	7
1.1.2. Формування ідеї прикладної спрямованості математики у науково-методичних роботах.....	11
1.1.3. Відображення ідеї прикладної спрямованості стереометрії у збірниках задач, посібниках, підручниках та аналіз прикладних задач.....	16
1.2. Концептуальна модель реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії.....	31
1.2.1. Системно-структурний розподіл матеріалу шкільного курсу стереометрії на основі методу математичного моделювання.....	33
1.2.2. Огляд навчально-математичних теорій (НМТ) курсу стереометрії в старшій школі.....	39
1.3. Психолого-педагогічні особливості реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії.....	44
1.3.1. Психологічні особливості реалізації прикладної спрямованості.....	44
1.3.2. Дидактичні особливості реалізації прикладної спрямованості.....	47
Розділ 2. Методичні рекомендації реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії.....	57
2.1. Аксиоми стереометрії. Паралельність і перпендикулярність прямих і площин.....	57
2.2. Координати і вектори у просторі.....	67
2.3. Перетворення у просторі.....	71
2.4. Геометричні тіла та їх комбінації.....	76
2.5. Призма.....	96
2.6. Піраміда.....	112
2.7. Циліндр.....	120
2.8. Конус.....	131
2.9. Куля.....	138
Список використаної літератури.....	148

- В атмосфері у вигляді пари знаходиться близько 13 тис. м³ води. Загальна маса води, що випаровується в атмосферу, дорівнює приблизно 355 тис. м³ у рік. Проте конденсується та повертається у Світовий океан лише 320 тис. м³ води.

- Незважаючи на порівняно невелику концентрацію, загальна кількість солей у водах Світового океану обчислюється астрономічно великим числом, що дорівнює 4,8·10²¹ т. Тому добування їх для побутових потреб не впливає на склад морської води. У цьому сенсі океан невичерпний.

- Морську воду слід вважати найкращим джерелом для отримання магнію, оскільки в кожному її кубічному метрі міститься 1,3 кг цього металу.

- Незважаючи на те, що в морській воді брому відносно мало – 65 г на 1 м³, але з інших джерел цей елемент отримати не можна – він не зустрічається в жодному мінералі. Морська вода містить навіть золото – всього 0,00001 г на 1 м³. Німецькі хіміки підраховали, що у Світовому океані розчинено біля 10 млн т золота. Проте вартість затрат на отримання золота з морської води виявилася в багато разів більшою від вартості самого добытого золота. У кожній тонні морської води міститься 30 г вуглецю, 17 г азоту та 0,1 г фосфору.

- Якщо уявити, що під впливом певних причин раптом розтопить лід Антарктиди, об'єм якого 25 млн км³, то рівень океану підніметься на 40 м. На морському дні опиняться більшість великих міст світу, найгустонаселеніші частини материків, а також багато островів.

2.6. Піраміда

Дана НМТ (як і всі НМТ, які пов'язані із вивченням конкретних геометричних тіл) містить прикладний матеріал, багатий цікавими фактами. Подачу його можна здійснювати як у формі розповіді вчителя, так і бесіди з учнями. У випадку бесіди доцільно матеріал розмежовувати запитаннями як: «Що означає термін *піраміда*?»; «З чим асоціюється у вас *піраміда*?»; «Як часто можна спостерігати тіла пірамідальної форми у природі, побуті, архітектурі тощо? Чим це зумовлено?».

Про походження терміна «піраміда»

За свідченням деяких дослідників, слово «піраміда» походить від єгипетського «перемус», що означає діагональ основи. Форму

правильних чотирикутних пірамід мають легендарні єгипетські піраміди, які видатний французький архітектор Ле Корбюзьє назвав «піримі трактатом з геометрії». З Єгипту, можливо, походить і сам термін «піраміда». За однією з гіпотез, відповідне грецьке слово «пураміс» утворилося від давньоєгипетського «перо», що означало «великий будинок» – саме так називали єгиптяни усипальниці своїх фараонів. Інша гіпотеза виникла в середні віки. Середньовічні вчені, услід за Платоном, пов'язували з пірамідою форму найактивнішої стихії – вогню. Вони вважали, що термін «пураміс» утворився від грецького слова «пор», тобто «вогонь», і називали піраміду «вогненне тіло».

Слід зауважити, що у підручниках такої інформації мало. Підведення до створення та вивчення математичної моделі – піраміди – краще проводити у вигляді розповіді вчителя з використанням заздалегідь підготовлених повідомлень учнів.

Учитель починає: «Де ми зустрічаємося з реальними прообразами геометричних пірамід? Дахи пірамідальної форми прикрашають різні кіоски, альтанки, «грибочки» на пляжі тощо. Намети (циркові, туристичні) часто мають форму піраміди. Форму правильної шестикутної піраміди (зокрема і зрізаної) мають бетонні стовпці, що є уздовж шляху в небезпечних для транспорту місцях – на поворотах з крутими схилами, поблизу ярів. У формі правильної чотирикутної піраміди роблять кояпаки над димовими трубами (такі кояпаки потрібні для того, щоб атмосферні опади не попадали всередину труби). Урни, тачки, бункери для піску або розчину, що застосовуються на будівництві та в промисловості, часто виготовляють у вигляді правильної зрізаної чотирикутної піраміди (вибір такої форми зумовлений зручним завантаженням і вивантаженням матеріалів). Наведіть інші приклади».

Далі учні наводять свої приклади. Учителю варто доповнити їх відповіді, наприклад, інформацією про піраміду в архітектурі та природі.

Про піраміду в архітектурі та природі

Тіла пірамідальної форми досить поширені в архітектурі.

Шатро – завершення центричних споруд (дзвіниць, храмів, башт) у вигляді високої багатогранної піраміди (найчастіше чотиригранної).

Боробудур – буддистське святилище на півдні острова Ява, що було задумано як грандіозний символ Всесвіту. Його побудовано

в кінці VIII на початку IX ст. з блоків каменю — андезиту; має вигляд ступінчатої десятиярусної піраміди, висота якої дорівнює 31,5 м, а довжина квадратної основи — 123 м.

Гирька — фігурна деталь у вигляді піраміди з цегли або каменю. Служить опорою для декоративних арок; використовувалась у російській архітектурі XVI–XVII ст. для декору воріт, вікон.

Зіккурат — в архітектурі давньої Месопотамії культова ярусна башта, яка складається із 3–7 ярусів у формі зрізаних пірамід або паралелепіпедів, що виготовлені з сирцю.

Обеліск — меморіальна споруда, що виникла у Давньому Єгипті. Має вигляд гранованого кам'яного стовпа (в перерізі найчастіше — квадрат), що звужується доверху, із загостреною пірамідалльною верхівкою. Форму правильних пірамід мають гострокінцеві дахи на баштах Кремля у Москві. Пам'ятник Вічної Слави в Києві — це обеліск, верхня частина якого має форму правильної чотирикутної піраміди, а нижня — правильної зрізаної чотирикутної піраміди.

У природі тіла пірамідальної форми зустрічаються рідко. Відома груша пірамідальної форми. Це груша-кайон із Західного Паміру. Її плоди схожі на трикутні пірамідки, що мають масу до 700 г.

Повідомлення про таємниці пірамід

Тисячоліттями піраміди гордо зберігають таємниці про своє походження та призначення. Але інтерес людей до них не зменшується. За кількістю пірамід, що припадають на одиницю площі, безперечно лідирує Єгипет. Але піраміди та їх залишки є в Індії, Пакистані, на Мальдівських та Канарських островах, у Китаї, Південній та Латинській Америці. Більшість пірамід має ступінчасту форму. Правильні, такі як Великі піраміди в Гізі (Хеопса, Хефрена, Мікеріна), будували рідко. Крім того, більшість правильних пірамід є зрізаними, тобто не мають гострокінцевої верхівки — ніби недобудовані. Не обійшлися без пірамід і засновники США. Правда, до побудови справа не дійшла. Вони обмежилися лише прийняттям Конгресом США в 1776 р. ескізу державної печатки зі зрізаною пірамідою. Якщо подивитися на американську купюру номіналом в 1\$, то на її звороті й нині можна побачити зрізану піраміду, а над нею — трикутник із оком посередині.

Мабуть, найбільше таємниць пов'язано з єгипетськими пірамідами. Численна кількість учених намагалися довести, що в пропорціях Великої піраміди (піраміда Хеопса) заховані наукові відомості та пророцтва.

Зокрема, королівський астроном Шотландії Чарльз Сміт детально дослідив цю піраміду та опублікував у 1860 р. результати. Наприклад, периметр піраміди вказує на довжину сонячного року; відношення периметра до висоти основи дорівнює π ; висота, помножена на 10° , є відстанню від Сонця до Землі. Ці відомості справили велике враження на всіх, проте під час перевірки наведених фактів було виявлено деякі неточності.

Такими самими суперечливими були й повідомлення про силу пірамід. Усе почалося з того, що в 1930 році турист із Франції Антуан Боніс звернув увагу на те, що тіла тварин, які померли всередині пірамід, не розклалися, незважаючи на високу вологість. Повернувшись додому, він став експериментувати та виявив, що овочі краще зберігаються в картонних коробках пірамідальної форми.

Радіоінженер із Чехії Карел Дрбал пішов іншим шляхом. Він поклав у пірамідальні коробки використані леза для гоління. У результаті леза знову стали гострими. У 1959 р., після детальних перевірок, йому видали патент за винахід для заточування лез! До цього часу в Чехії продаються такі пірамідки. Причому для кращого результату повздовжня вісь леза має бути напрямлена вздовж магнітного поля Землі.

Схожі повідомлення про силу піраміди опубліковували й інші автори. Зауважимо, що пропорції цих пірамід повторювали пропорції Великої піраміди. Механізм подібних явищ не вивчено. Хоча існує припущення, що піраміда може утворювати власне магнітне поле, що і викликає ріст кристалів на краю леза.

Нині інтерес до пірамід не зменшується. Цікавими є повідомлення та гіпотези севастопольських учених В. Гоха та І. Котелянца про знайдені ними унікальні об'єкти (піраміди) в Криму. Усі виявлені піраміди розташовані на одній прямій у північно-західному напрямі та знаходяться на тій лінії, що і тибетські піраміди, Бермудський трикутник і острів Пасхи. Вони також мають характерні для більшості пірамід співвідношення довжини основи до висоти, що відповідає золотому перерізу. Учені висунули таку гіпотезу: всі піраміди світу пов'язані з ядром

Землі і мають певну місію. На думку вчених, у давнину Земля зазнавала великих бід через нестабільність руху, що призводило до великих катаклізмів, зокрема і повеней. Хтось розраховував і розробив «великий пірамідальний стабілізатор Землі», і почалось одне з найбільших будівництв. Нині у різних районах земної кулі (Австралії, Великій Британії, Тибеті, Мавританії, Намібії) виявлено комплекси пірамід. Кримські (їх біля 30) – їх невіддільна частина. Можливо, майбутнє розкриє нам усі секрети пірамід.

Отримані відомості приводять до створення нової математичної моделі – піраміди, яка буде центральним об'єктом НМТ. На ступені СММ потрібно ввести поняття висоти піраміди, різних кутів, представлених у ній, зрізаної піраміди тощо. Їх вивчення буде пов'язано з поняттями, що опрацьовувалися в НМТ «Базова». На перших заняттях цієї НМТ доцільно виготовити кілька моделей пірамід (кожен учень має зробити власну).

Для здобуття навичок зображати піраміду на площині учні повинні спочатку звернутися до узагальнених відомостей про зображення просторових фігур на площині. Оскільки піраміда вивчається після призми, то учні вже мають певний досвід і тому можуть самостійно спробувати утворити правила зображення різних видів пірамід на площині. Після розгляду питання про поверхню піраміди та її площу можна переходити до розв'язування абстрактних задач із поступовим переходом до прикладних.

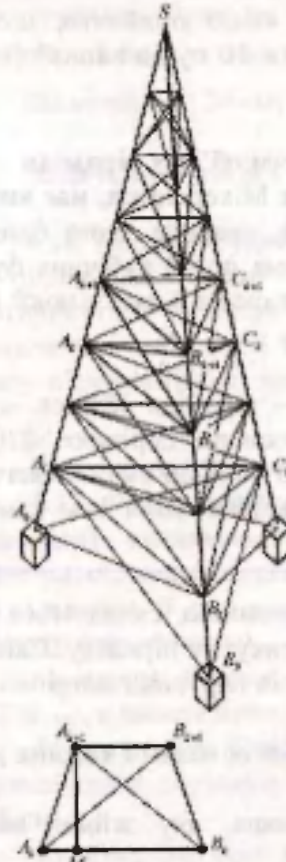
Для четвертого ступеня (прикладання математичної моделі) пропонуємо добірку прикладних задач. Їх доцільно використовувати як дидактичні матеріали для розв'язування (групового чи індивідуального) в аудиторії, для домашніх завдань, а також як доповнення до текстів самостійних і контрольних робіт.

Задачі, пов'язані з обчисленням площі поверхні піраміди або окремих її елементів

6.1. Томатна паста «Чумаки» розфасована у пакети, що мають форму правильної трикутної піраміди, бічні ребра якої становлять 14 см, а периметр основи – 42 см. Скільки матеріалу йде на виготовлення однієї пакети? На шви додати 2 % матеріалу. Який об'єм пасту в одній пакеті?

Відповідь. 340 см²; 320 см³.

6.2. Щогла антени радіостанції має форму правильної трикутної піраміди. Висота щогли $SO = h$. Відстань між опорними точками $A_0B_0 = B_0C_0 = C_0A_0 = a$. Для міцності опорні стрижні щогли сполучені між собою за допомогою горизонтальних і косих стрижнів, причому яруси горизонтальних стрижнів поділяють кожний з опорних стрижнів на n рівних частин. Визначити довжини стрижнів щогли.



Відповідь. $A_0B_0 = \frac{1}{n} \sqrt{h^2 + a^2 \left(\frac{1}{n} + (n-k)(n-k-1) \right)}$. Щоб визначити довжини всіх горизонтальних стрижнів, треба у формулі надати k таких значень: $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Щоб визначити довжини всіх косих стрижнів, треба у формулі надати k таких значень: $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$.

6.3. Купол дзвіниці має форму правильної восьмикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 8 футів, апофема –

7 сажнів і 5 футів. За скільки днів зможуть покрити цей купол 4 робітники, якщо для покриття 27 квадратних футів поверхні даху один робітник витрачає четверть дня? (1 м = 0,47 сажня = 3,28 фута.)

Відповідь 4 дні.

6.4. Відома піраміда Хеопса спочатку мала висоту 147 м і займала квадратну площу 34 300 м². Скільки тонн вапна потрібно було для облицювання цієї споруди, якщо прийняти, що на кожний квадратний метр використовують 10 пудів вапна? (1 т = 61 пуд.)

Відповідь 11 000 т.

Задачі, пов'язані з обчисленням об'єму піраміди

6.5. Менша з пірамід Гізи – піраміда Мікереніуса, має висоту близько 30 сажнів. Її основа – квадрат, сторона якого близько 58 сажнів. Визначити, скільки глиб, кожна по 40 кубічних футів, пішло на спорудження піраміди, якщо вважати її суцільною? (1 м = 0,47 сажня = 3,28 фута.)

Відповідь 270 000 глиб.

6.6. Найвища єгипетська піраміда – піраміда Хеопса – має висоту 144 м; сторона її квадратної основи дорівнює 230 м. Внутрішні ходи та кімнати займають 30 % її об'єму. Визначити масу каменю, який пішов на її спорудження. Маса 1 м³ каменю дорівнює 2,5 т.

Відповідь 4 400 000 т.

6.7. Каркас намету, обтягнутий парусиною, складається із 4 жердин, що утворюють правильну чотирикутну піраміду. Скільки повітря міститься в наметі і скільки метрів парусини потрібно для виготовлення намету, якщо:

а) висота намету 2,4 м, а відстань між основами кожних двох найближчих жердин дорівнює 2 м;

б) довжина жердини 3,6 м, а площа, яку займає намет, дорівнює 4,41 м²?

Врахувати, що ширина парусини 70 см, і на дно намету її не використовували.

Відповідь а) 3,2 м³; 15 м; б) 4,7 м³; 20 м.

6.8. Фільтр виготовлено у вигляді правильної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 17,5 см, а ребро основи – на 40 % менше. Скільки води може вмістити фільтр, якщо він має форму:

а) шестикутної піраміди;

б) трикутної піраміди;

в) п'ятикутної піраміди?

Відповідь а) 1310 см³; б) 256 см³; в) 950 см³.

6.9. Десяток залізних корабельних цвяхів мають масу 2 кг 304 г. Визначити:

а) довжину цвяха;

б) поверхню цвяха, якщо він цвях має форму правильної чотирикутної піраміди і периметр цвяха у самій широкій його частині – 8 см. Густина заліза 7,2 г/см³.

Відповідь а) 24 см; б) 100 см².

Задачі, пов'язані з обчисленням площі поверхні або об'єму зрізаної піраміди

6.10. Поряд із будинками на дитячих майданчиках побудували 5 пісочниць. Кожна з них має форму правильної зрізаної чотирикутної піраміди зі сторонами основ 200 см та 160 см, висота пісочниці на 85 % менша від довжини меншої сторони. Яку масу піску потрібно привезти, щоб їх наповнити? Густина піску 1,5 г/см³.

Відповідь 1,9 т.

6.11. Форма для сирної ласки (правильна чотирикутна зрізана піраміда) складається із 4-х бічних дощечок, сполучених гачечками, дна (менша основа) та дощечки (більша основа) для підкладання її під прес, яким надавлюють на сир. Визначити висоту форми, якщо:

а) площа бічних дощечок 1700 см², площа всіх дощечок 2376 см², а висота бічної дощечки – 25 см;

б) сума площ бічних стінок форми дорівнює 2304 см², висота бічної грані дорівнює її середній лінії, а бічне ребро цієї грані 25 см;

в) поверхня всіх граней форми дорівнює 954 см², поверхня бічних стінок – 288 см². Ребро верхньої дощечки довше від ребра дна на 6 дм.

Відповідь а) 24 см; б) 23 см; в) 26 см.

6.12. Зруб колодязя має форму правильної зрізаної чотирикутної піраміди. Поверхня зрубу всередині колодязя дорівнює 90,5 м², ширина стінки колодязя внизу на 142 см більша, ніж ширина стінки отвору зрубу зверху. Визначити, на скільки