УДК 371.212.51

О. А. Чемерис,
кандидат педагогічних наук, старший викладач
(Житомирський державний університет імені Івана Франка)

МЕТОДИКА АЛГОРИТМІЗАЦІЇ НАВЧАННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

У статті охарактеризовано алгоритмізацію навчання як категорію, що дозволить практично засвоювати навчальний матеріал на репродуктивному та продуктивному рівнях. Дано рекомендації щодо використання алгоритмів на заняттях та описано форми в роботі викладача. Підібрано приклади подачі студентам готового алгоритму та складання власного на заняттях з аналітичної геометрії.

Інтенсивний розвиток сучасної освіти та науки наповнив зміст традиційного методу навчання динамічністю, тому перед вищим навчальним закладом поряд з передачею стабільної системи знань висувається завдання навчити мислити й самостійно здобувати знання. Однією з найважливіших задач стає розвиток логіки мислення майбутніх фахівців, вміння користуватися знаннями та бути здатним до самоосвіти.

Реалізація виділеного завдання передбачена Законом України "Про вищу освіту" (нова редакція) [1] та для математичної освіти спрямована на її особистісну орієнтацію, утвердження новітніх інформаційних технологій; посилення практичності та прикладної спрямованості у навчанні, надання пріоритету розвивальній функції навчання [2].

Згідно з принципами розвивальної освіти [3: 45-48], зміст навчального матеріалу має забезпечувати інтенсивне та самостійне навчання студентів, обсяг засвоєної інформації повинен приводити до чіткого вироблення вмінь її використання, до інтелектуального розвитку кожного студента. Такий підхід передбачає не тільки засвоєння готових знань, але й способів цього засвоєння, способів міркувань, що використовуються в математиці. Тому навчальний матеріал повинен містити загальні схеми розв’язування задач, загальні підходи до моделювання прикладних ситуацій, відомості про суть задач, їх склад і структуру. Навчальний матеріал має містити алгоритми та евристики, якими визначається процес переходу від вихідних даних до шуканого результату, а також завдання на самостійні пошуки алгоритмів і евристик шляхом узагальнення розв’язань певних груп задач.

Мета статті – описати прийоми використання елементів алгоритмізації на практичних заняттях з аналітичної геометрії.

Передумовою для алгоритмізації навчання є теорія поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна [4: 37-39]. Слабкість існуючих методик, на думку П. Я. Гальперіна, полягає в тому, що знання, навички засвоюються не в процесі раціонально організованих дій, а як довільне механічне запам'ятовування або унаслідок спроб та помилок. Основним інструментом виховання алгоритмічного мислення є організація на заняттях процесу алгоритмізації – створення алгоритмів, що сприяють розумовому розвитку й формуванню логічного мислення студентів.

Під алгоритмом у педагогічній психології [4: 122] зазвичай розуміють точний, загальнозрозумілий опис певної послідовності мислительних операцій, необхідних і достатніх для вирішення будь-якого завдання.

Серед психологічних досліджень, спрямованих на вдосконалення навчального процесу, важливе місце належить розробці способів алгоритмізації навчання (С. Л. Прессі, Б. Ф. Скіннер, Н. А. Краудер, Р. Ф. Маджер, П. Я. Гальперін, А. М. Матюшкін, Н. Ф. Тализіна тощо) [5]. Розробкою загальної теорії задач займались Г. О. Балл, Г. П. Бевз, Ю. М. Колягін, Д. Пойя, Л. М. Фрідман тощо.

Дослідження вітчизняних психологів показують, що студенти, які добре пам’ятають усі формули, роблять помилки саме тому, що не знають, як ці правила застосовувати, не знають відповідних методів дій та міркувань.

Усякий розумовий процес складається з ряду мислительних операцій. Психологи підкреслюють, що для ефективного навчання ці операції потрібно виявити і спеціально їм навчати. Це не менш необхідно, аніж навчання самим правилам. Без опанування операційної сторони мислення знання правил виявляється даремним, бо студент чи учень не в змозі їх застосувати. У даному випадку виконання розумових дій аналогічно виконанню дій трудових. Насправді, виконати те або інше трудове завдання, наприклад, зробити деталь, неможливо, не виробляючи тих або інших трудових операцій. Так само не можна розв’язати граматичну, математичну, фізичну, взагалі будь-яку інтелектуальну задачу, не виконавши ряд інтелектуальних операцій.

За В. П. Беспалько [6: 75], алгоритм – це такий припис, який визначає зміст і послідовність операцій, що перетворюють початкові дані на шуканий результат, а алгоритмом навчання називають таку логічну побудову, яка розкриває зміст і структуру розумової діяльності того, хто навчається, при розв’язанні завдань даного типу й служить практичним посібником для вироблення навичок або формування понять.

Математика виникла як наука завдяки алгоритму, точному припису, інструкції для виконання послідовних дій, направлених на розв'язання будь-якої задачі. Перший алгоритм зафіксовано у Вавілоні (додавання, віднімання цілих чисел тощо).

Переважна більшість шкільних задач, зокрема алгебраїчних вправ, базових геометричних задач, вправ на дослідження функції виконується за певними алгоритмами. Оволодіння учнями цими алгоритмами – важливе завдання навчання математики. Наприклад, для закріплення доведення теорем важливу роль відіграє покрокове повторення. При розв'язуванні задач на обчислення після записування відповідної формули, за якою обчислюється шукана величина, далі здійснюється пошук невідомих величин, які входять до формули. У процесі розв'язування будь-якого типу задач здійснюється як алгоритмічна, так і евристична діяльність. Розв'язування творчих, нестандартних задач зводиться, врешті-решт, до виконання відомих базових задач, які розв'язуються за певними алгоритмами.

Водночас, навчити учнів розв'язанню задач і вправ алгоритмічного характеру не можна шляхом лише пропонування їм готових алгоритмів. Доцільніше організувати на зразках розв'язання однієї двох задач колективний пошук алгоритму [7].

Гарний приклад використання алгоритмічного підходу до розв'язування задач на побудову, що складається з наступних кроків: 1) аналіз задачі, мета якого встановити зв'язок між шуканими й даними з умови задачі, знаходження плану виконання побудови; 2) власне побудова за знайденим планом; 3) доведення вірності міркувань; 4) дослідження умов, при яких існує розв'язок та їх кількості.

Головною метою курсу "Аналітична геометрія", як і інших розділів вищої геометрії, є формування у майбутнього вчителя широкого погляду на геометрію та її методи; озброєння його конкретними знаннями, які б дали можливість викладати геометрію в середній школі, проводити кваліфіковано факультативні заняття, причому виробити здатність здійснювати це на базі довільного навчального посібника або підручника; сформувати у студентів знання, навички та вміння з курсу аналітичної геометрії, які необхідні студенту при подальшому вивченні фізико-математичних дисциплін.

Озброєння студентів прийомами алгоритмізації значно спрощує засвоєння та закріплення нового матеріалу на прикладі розв'язування задач. Навчання алгоритмам можна здійснювати по-різному: на репродуктивному рівні давати готовий, на продуктивному – спрямовувати студентів до творчого складання плану дій.

Для закріплення кроків дослідження рівняння лінії другого порядку у відповідній самостійній контрольній роботі з аналітичної геометрії [8] наводимо готовий алгоритм та пропонуємо кожному студенту розв'язати типову задачу.

Алгоритм зведення рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

1) скласти характеристичне рівняння лінії:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ і знайти його корені } \lambda_1, \lambda_2;$$

2) знайти кут повороту системи координат за формулами:

$$tg\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \ cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \ sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}};$$

3) записати формули повороту системи координат: $\begin{array}{l} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha, \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{array}$

і, підставивши їх у відповідне рівняння лінії, знайти коефіцієнти a'_{13}, a'_{23}, беручи до уваги, що коефіцієнти при квадратах змінних дорівнюють λ_1, λ_2, а коефіцієнт при добутку $x'y'$ дорівнює 0. Записати рівняння лінії в новій системі координат:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0;$$

4) паралельним перенесенням системи координат одержати канонічне рівняння лінії.

Приклад розв'язання типової задачі на поданий вище алгоритм

Задача 1. *Визначити тип лінії другого порядку, скласти її канонічне рівняння та зробити рисунок:* $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

Розв'язання

1) Складемо характеристичне рівняння лінії і знайдемо його корені:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ (1-\lambda)^2 - 1 = 0, \ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2;$$

2) Знайдемо кут повороту системи координат:

$$tg\alpha = \frac{0-1}{-1} = 1 \text{, отже, } \alpha = \frac{\pi}{4}\text{, } \cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

3) Запишемо формули повороту системи координат: $\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{aligned}$

Запишемо рівняння лінії в новій системі координат $OX'Y'$:

$$0\cdot(x')^2 + 2\cdot(y')^2 - 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + 25 = 0;$$

$$2\cdot(y')^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 25 = 0$$

4) Виділимо повний квадрат по y', згрупуємо лінійний доданок з x' з вільним членом і отримаємо:

$$\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Здійснивши паралельне перенесення за формулами

$$x'' = x' - \frac{3\sqrt{2}}{2},\ y'' = y' + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

або $x' = x'' + \frac{3\sqrt{2}}{2},\ y' = y'' - \frac{\sqrt{2}}{2}$,

дістанемо $(y'')^2 - 4\sqrt{2}x'' = 0$, або $(y'')^2 = 4\sqrt{2}x''$.

Отже, дана лінія – це парабола з параметром $p = 2\sqrt{2}$ (рис. 1).

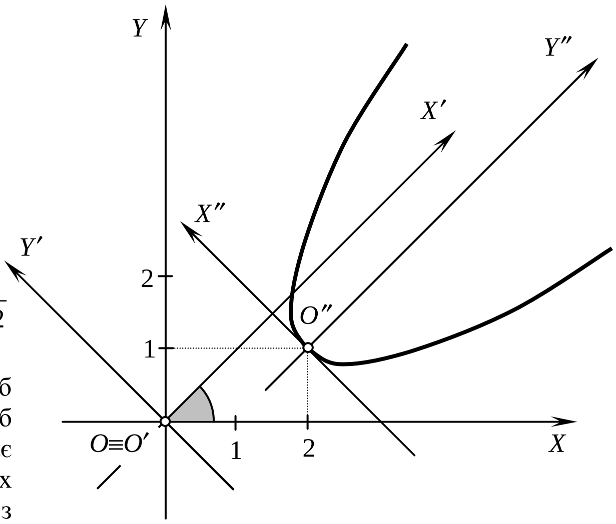

Рис. 1

Але можна й так організувати навчальний процес, щоб алгоритми "відкривалися" студентам. Цей спосіб найбільш цінний у дидактичному плані, проте вимагає великих витрат часу. Прикладом складання так званих "творчих" алгоритмів може бути розв'язання задач з аналітичної геометрії на пряму на площині та в просторі. Для формування уміння складати алгоритми студентів потрібно навчити: знаходити загальний спосіб дії; виділяти основні, елементарні дії, з яких складається умова; планувати послідовність виділених дій; правильно записувати алгоритм.

Основними в роботі з опорою на алгоритми є наступні форми:

- розв'язування простих задач на одну дію;
- розв'язування опорних (базових) задач теми;
- підведення студентів до розуміння алгоритму, його структури і техніки застосування;
- тренування в післяопераційному застосуванні алгоритму;
- виконання самостійної контрольної роботи.

Наведемо приклад розв'язання задач 2 та 3 з опорою на алгоритм.

Задача 2. *Знайти координати точки А, симетричної до точки Р (2, -5, 7) відносно прямої, що проходить через точки М (5, 4, 6) і Т (-2, -17, -8).*

Розв'язання

Зробимо схематичний рисунок до задачі 2 (рис. 2).

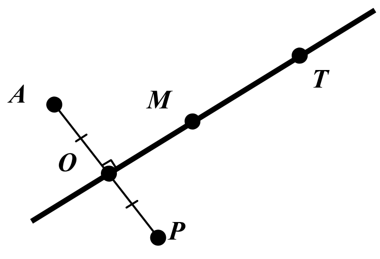

Рис. 2

Геометрично ця задача розв'язується таким чином: в площині, заданій точкою *Р* і прямою *МТ*, через точку *Р* проводимо перпендикуляр до прямої *МТ*; знаходимо точку перетину даного перпендикуляра і прямої *МТ* (це буде точка *О*); відкладаючи *РО* = *АО*, знайдемо шукану точку *А*.

Але в нашому випадку для знаходження точки *О* використаємо наступне: в просторі точку можна задати перетином прямої і площини.

Ми це можемо зробити, провівши площину через точку *Р* і перпендикулярно до прямої *МТ*.

Отже, наш алгоритм знаходження точки *A* буде таким:

1) проводимо площину ρ через точку *P* і перпендикулярно до прямої *MT* (вектор *MT* буде вектором нормалі для шуканої площини);
2) складемо рівняння прямої *MT*;
3) шукаємо точку перетину площини ρ з прямою *MT* (це буде точка *O*);
4) $PO = AO$ (за серединою і одним із кінців відрізка шукаємо нашу точку *A*).

Тепер знайдемо координати точки *A* за складеним алгоритмом.

1. Рівняння площини ρ записуємо як рівняння площини через точку і вектор нормалі:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0$$

Як точку візьмемо точку P (2, -5, 7), як вектор – вектор MT (-2 – 5, -17 – 4, -8 – 6) = (-7, -21, -14) або (1, 3, 2).

$$1\,(x - 2) + 3\,(y - (-5)) + 2\,(z - 7) = 0.$$

Розкриємо дужки і отримаємо $x + 3y + 2z - 1 = 0$.

2. Рівняння прямої *MT* запишемо як рівняння прямої через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Підставимо координати точок *M* і *T*: $\frac{x-5}{-2-5} = \frac{y-4}{-17-4} = \frac{z-6}{-8-6}$. Спростимо і отримаємо

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{2}.$$

3. Щоб знайти координати точки *O*, розв'яжемо систему рівнянь з пункту (1) і (2):

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-6}{2} = t \end{cases}$$, звідки $t = -2$, отже $O\,(3, -2, 2)$.

4. Для знаходження координат точки *A* використаємо формулу середини відрізка:

$x_A = 2\,x_0 - x_P = 2\,3 - 2 = 4,$

$y_A = 2\,y_0 - y_P = 2\,(-2) - (-5) = 1,$

$z_A = 2\,z_0 - z_P = 2\,2 - 7 = -3,$

Відповідь: шукана точка *A* має координати *(4, 1, -3)*.

Задача 3. *Дано рівняння двох медіан трикутника $x + y - 5 = 0$, $3x + y - 7 = 0$ і рівняння однієї з його сторін $2x + y - 5 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника і знайти координати його вершин.*

Розв'язання

Зробимо схематичний рисунок (рис. 3), поклавши, що $x + y - 5 = 0$ – рівняння медіани *AM*, $3x + y - 7 = 0$ – рівняння медіани *BT*, $2x + y - 5 = 0$ – рівняння сторони *AC*.

Для того, щоб скласти рівняння невідомих сторін трикутника, потрібно знати координати двох точок на цих прямих. Для знаходження невідомих вершин скористаємось заданням точки як перетину двох прямих та використаємо означення та властивості медіани.

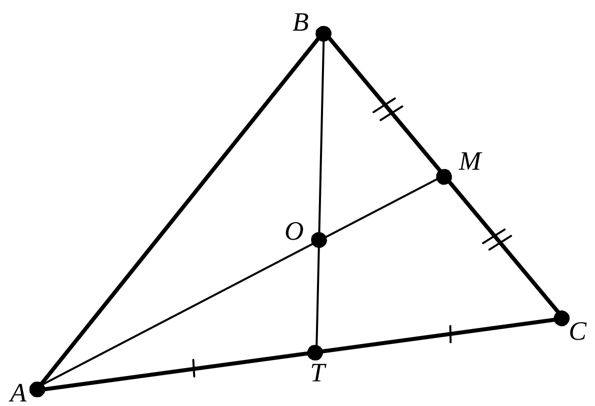

Рис. 3

Тому план розв'язання задачі буде наступним:

1) шукаємо координати точки *A* (перетин *AM* і *AC*);
2) шукаємо координати точки *O* (перетин *AM* і *BT*);
3) шукаємо координати точки *M* (медіани діляться у відношенні 2:1, починаючи з вершини);
4) шукаємо координати точки *T* (перетин *AC* і *BT*);
5) шукаємо координати точки *C* (медіана *BT* ділить сторону *AC* навпіл);
6) шукаємо координати точки *B* (медіана *AM* ділить сторону *BC* навпіл);
7) записуємо рівняння *AB*;
8) записуємо рівняння *BC*.

Тепер зробимо обчислення за складеним алгоритмом.

1. Розв'яжемо систему $\begin{cases} x+y-5=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$ Звідки $x = 0, y = 5$ – координати точки *A*.

2. Розв'яжемо систему $\begin{cases} x+y-5=0 \\ 3x+y-7=0 \end{cases}$ Звідки $x = 1, y = 4$ – координати точки *O*.

3. Використаємо формули складного відношення: $x = \dfrac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_2 + \lambda_1}$, $y = \dfrac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_2 + \lambda_1}$.

У нашому випадку $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Отже $1 = \dfrac{2x_M + 1\cdot 0}{2+1}$, $4 = \dfrac{2y_M + 1\cdot 5}{2+1}$.

Звідки $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{7}{2}$ – координати точки *M*.

4. Розв'яжемо систему $\begin{cases} 3x+y-7=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$. Звідки $x = 2, y = 1$ – координати точки *T*.

5. Використаємо формули середини відрізка: $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Для нашого випадку $2 = \dfrac{0+x}{2}$, $1 = \dfrac{5+y}{2}$. Отже, $x = 4, y = -3$ – координати точки *C*.

6. Використаємо формули середини відрізка: $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Для нашого випадку $\dfrac{3}{2} = \dfrac{4+x}{2}$, $\dfrac{7}{2} = \dfrac{-3+y}{2}$. Отже, $x = -1, y = 10$ – координати точки *B*.

7. Використаємо рівняння прямої через дві точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Підставимо координати точок *A* і *B*: $\dfrac{x-0}{-1-0} = \dfrac{y-5}{10-5}$.

Спростимо і отримаємо $5x + y - 5 = 0$ – рівняння сторони *AB*.

8. Аналогічно підставимо координати точок *B* і *C*: $\dfrac{x-(-1)}{4-(-1)} = \dfrac{y-10}{-3-10}$.

Спростимо і отримаємо $13x + 5y - 37 = 0$ – рівняння сторони *BC*.

Відповідь: координати вершин трикутника A (0, 5), B (-1, 10), C (4, -3); рівняння сторони AB: 5x + + $y - 5 = 0$; рівняння сторони *BC*: $13x + 5y - 37 = 0$.

Висловлюється побоювання, що навчання алгоритмам може привести до стандартизації мислення та до пригнічення творчих сил студентів. Але, як відповідають прибічники алгоритмізації, потрібно виховувати не лише творче мислення. Величезне місце в навчанні займає вироблення різних автоматизованих дій – навичок, що є необхідним компонентом творчого процесу, без них він просто неможливий.

Правильне навчання алгоритмам не зводиться до їх заучування. Воно припускає самостійне відкриття та побудову алгоритмів, а це є творчий процес. Таким чином, алгоритмізація може бути прекрасним засобом навчання творчому мисленню. Нарешті, алгоритмізація охоплює далеко не увесь учбовий процес, а лише ті його компоненти, де вона представляється доцільною.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Проект Закону України "Про вищу освіту" (нова редакція) [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.mon.gov.ua/main.php?query=newstmp/2010/10_06/4.
2. Стратегія та сучасні тенденції розвитку університетської освіти України в контексті Європейського простору вищої освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.mon.gov.ua/education/higher/bolpr/strateg.doc.
3. Семенець С. П. Наукові засади розвивального навчання в системі методичної підготовки майбутніх учителів математики : [монографія] / С. П. Семенець. – Житомир : Волинь, 2010. – 504 с.
4. Вікова та педагогічна психологія : [навч. посіб.] / [Скрипченко О. В., Долинська Л. В., Огороднійчук З. В. та ін.]. – К. : Просвіта, 2001. – 416 с.
5. Ланда Л. Н. Алгоритмизация в обучении / Л. Н. Ланда. – М. : Просвещение,1966. – 523 с.
6. Беспалько В. П. Педагогика и прогрессивные технологии обучения / В. П. Безпалько. – М., 1995. – 412 с.
7. Капуста В. Алгоритмізація навчання в геометрії [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.donnu.edu.ua/math/heuristic/dist_conf/%D0%9A%D0%B0%D0%BF%D1%83%D1%81%D1%82%D0%B0.pdf.
8. Мосіюк О. О. Лінії другого порядку : [навчальний посібник] / Мосіюк О. О., Прус А. В., Чемерис О. А. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 16 с.

Матеріал надійшов до редакції 20.01. 2011 р.

Чемерис О. А. Методика алгоритмизации обучения аналитической геометрии.

В статье охарактеризована алгоритмизация учебы как категория, которая позволит практически усваивать учебный материал на репродуктивном и производительном уровнях. Даны рекомендации относительно использования алгоритмов на занятиях и описаны формы в работе преподавателя. Подобраны примеры подачи студентам готового алгоритма и составления собственного на занятиях по аналитической геометрии.

Chemerys O. A. Algorithmization Methodology in the Analytical Geometry Education.

The article describes the algorithmization education as a category which will allow practically to master the educational material on the reproductive and productive levels, gives the recommendations regarding the use of algorithms during classes, depicts the forms in the teacher's work. The patterns of the finished algorithm presentation to the students as well as the personal algorithm construction while analytical geometry classes are presented.