УДК 372.851:51

С. П. Семенець

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЯК ЗАСІБ ВВЕДЕННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ У КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

У статті наведено спосіб введення елементарних функцій, що вивчаються в курсі алгебри і початків аналізу загальноосвітньої школи, як розв'язків деяких функціональних рівнянь.

Одним із важливих завдань курсу алгебри і початків аналізу є систематизація та поглиблення знань учнів про функцію – одне із фундаментальних понять математики. У цьому ж аспекті розглядаються в курсі показникова, логарифмічна і степенева функції. Аналіз навчально-методичної літератури показує, що введення показникової функції дійсного аргументу здійснюється конкретно-індуктивним [1] або абстрактно-дедуктивним [2] методами. Для розвитку продуктивного мислення учнів (особливо в класах фізико-математичного профілю) доцільно іти одним із двох шляхів.

При першому варіанті увага учнів звертається на те, що функція може бути задана перерахуванням її характеристичних властивостей. Такий підхід для учнів є принципово новим, оскільки до цього часу всі основні функції задавались аналітично або оперативно: вказувались операції, які потрібно було виконати над значенням аргументу, щоб одержати відповідне значення функції. Так, показниковою функцією із основою a, визначеною на множині R, назвемо функцію, для якої:

1) $f(1)=a$, де $a>0$ і $a\neq 1$;

2) для будь-яких $x,y\in R$ $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ (характеристичне функціональне рівняння для показникової функції);

3) функція f - неперервна на множині R.

Далі вчитель організовує колективне дослідження з допомогою методу евристичної бесіди. Учні знаходять $f(0)$. У силу пункту 2: $f(0+1)=f(0)\cdot f(1)$ або $f(1)=f(0)\cdot f(1)$ Звідки $f(0)=1$. Далі знаходять $f(2)$, $f(3)$, ..., $f(n)$: $f(2)=f(1+1)=f(1)\cdot f(1)=a\cdot a=a^2$; $f(3)=f(2+1)=f(2)\cdot f(1)=a^2\cdot a=a^3$.

Очевидно, що $f(n)=a^n$ (у фізико-математичних класах учні доводять це самі з допомогою методу математичної індукції). Після цього одержують $f(1/2)$, $f(1/3)$, $f(1/n)$, $f(m/n)$, $f(-m/n)$, де $m,n\in N$: $a=f(1)=f(1/2+1/2)=f(1/2)\cdot f(1/2)=f^2(1/2)$, звідки $f(1/2)=a^{1/2}$; $a=f(1)=f(1/3+1/3+1/3)=f(1/3)\cdot f(1/3)\cdot f(1/3)=f^3(1/3)$, звідки $f(1/3)=a^{1/3}$. Очевидно, що $f(1/n)=a^{1/n}$; $f(m/n)=f^m(1/n)=a^{m/n}$; $1=f(0)=f(-m/n+m/n)=f(-m/n)\cdot f(m/n)$, тому $f(-m/n)=1/f(m/n)=1/a^{m/n}=a^{-m/n}$.

На основі проведеного дослідження учні роблять висновок, що властивості 1-3 однозначно визначають функцію, значення якої у всіх раціональних точках обчислюються за формулою $f(x)=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$). Потім учитель показує, що аналітичний вигляд функції такий же й тоді, коли x – ірраціональне число. Для цього розглядається послідовність раціональних чисел $\{r_n\}$ така, що $r_n\to x$ ($n\to\infty$). Тоді $f(r_n)\to f(x)$ ($n\to\infty$) в силу неперервності функції f. Але $f(r_n)=a^{r_n}$ ($r_n\in Q$). Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}=a^x$. Оскільки границя єдина, то $f(x)=a^x$, де $x\in R$.

Таким чином, учні знайомляться ще з одним способом задання функції як функції, яка є розв'язком деякого функціонального рівняння (його ще називають характеристичним), а також із одним із відомих методів розв'язування функціональних рівнянь - аналітичним (або методом Коші).

При другому варіанті означення показникової функції увага учнів звертається на поняття функції як математичної моделі різних явищ природи. За такого підходу вчитель підводить учнів до того, щоб відшукати, побудувати, "відкрити" функцію, властивості якої відображають властивості деяких природних процесів, тобто знову ж таки, виходячи із властивостей, знайти правило обрахування значень функції за значеннями аргументу.

Розглянемо конкретний природний процес. Нехай є колонія клітин. У початковий момент часу кількість клітин приймемо за одиницю. За одиницю часу кількість клітин змінюється в a разів. Нехай цією одиницею часу є доба. Як змінюється чисельність клітин залежно від часу?

Учні (за допомогою вчителя) з'ясовують, що: $f(0)=1$; $f(1)=a$; $f(2)=a\cdot f(1)=a\cdot a=a^2$; $f(3)=a\cdot f(2)=a\cdot a^2=a^3$, очевидно, $f(n)=a^n$, де $n\in N$. Значення $f(-1)$, тобто чисельність клітин за добу до початку відліку часу змінюється в $1/a$ разів, тобто $f(-1)=f(0)/a=1/a=a^{-1}$; $f(-2)=f(-1)/a=a^{-2}$; $f(-3)=f(-2)/a=a^{-3}$; очевидно, $f(-n)=a^{-n}$, де $n\in N$. Після цього знаходять $f(1/n)$ ($1/n$ - це n-та частина доби). Нехай $f(1/n)=t$, тоді $f(2/n)=t\cdot t=t^2$, $f(3/n)=t\cdot t^2=t^3$, очевидно, $f(n/n)=f(1)=t^n$. Звідки $t=f(1/n)a^{1/n}$. Тоді $f(m/n)=f^m(1/n)=a^{m/n}$ і $f(-m/n)=f(0)/f(m/n)=1/a^{m/n}=a^{-m/n}$.

Із проведеного дослідження учні роблять висновок, що цей процес описує функція $y = a^x$, де $x \in Q$. Оскільки розглянутий природний процес можна вважати неперервним, то далі аналогічно, як це було показано вище, доводиться, що і при $x \in R$ такою функцією буде функція $y = a^x$.

Логарифмічна функція в курсі алгебри і початків аналізу розглядається як функція, яка є оберненою до показникової. Майже всі властивості логарифмічної функції випливають із властивостей показникової і теореми про обернену функцію. Щоб розумова діяльність учнів на уроці була продуктивною, необхідні знання основних властивостей показникової функції, при цьому добре засвоєння питання про існування та властивості оберненої функції до заданої. Ставлячи за мету розвиток продуктивного мислення (особливо у класах фізико-математичного профілю), доцільно запропонувати учням спробувати показати, що логарифмічну функцію можна задати ще й так. Для того, щоб функція $y = f(x)$ була логарифмічною, необхідно і достатньо, щоб вона задовольняла такі вимоги:

1) існує таке a, що $f(a) = 1$, де $a > 0$, $a \neq 1$;

2) для будь-яких $x, y \in R_+$ $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ (характеристичне функціональне рівняння логарифмічної функції);

3) $f(x)$ - неперервна на множині R_+ функція.

Дійсно, в умові 2 покладемо $x = y$, тоді $f(x^2) = 2f(x)$, $f(x^3) = f(x^2) + f(x) = 3f(x)$. Очевидно, що $f(x^n) = n \cdot f(x)$, $n \in N$ (строго це доводимо методом математичної індукції). В останній рівності покладемо $x = x^{1/n}$, у результаті одержимо $f\left(x^{1/n}\right) = \dfrac{1}{n} f(x)$. Тоді $f\left(x^{m/n}\right) = f\left(\left(x^{1/n}\right)^m\right) = \dfrac{m}{n} f(x)$, $m, n \in N$. Нехай в умові 2 $x = y = 1$, тоді $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, отже, $f(1) = 0$. Використовуючи це, одержимо $0 = f(1) = f\left(x^{m/n} \cdot x^{-m/n}\right) = f\left(x^{m/n}\right) + f\left(x^{-m/n}\right)$. Звідки $f\left(x^{-m/n}\right) = -f\left(x^{m/\ n}\right) = -\dfrac{m}{n} f(x)$. Отже, для будь-якого $r \in Q$ $f(x^r) = r \cdot f(x)$.

Доведемо, що для довільного ірраціонального α $f(x^\alpha) = \alpha \cdot f(x)$. Розглянемо послідовність раціональних чисел $\{r_n\}$ таку, що $r_n \to \alpha$ ($n \to \infty$). Тоді $x^{r_n} \to x^\alpha$ ($n \to \infty$) у зв'язку з неперервністю показникової функції. Але $f\left(x^{r_n}\right) \to f(x^\alpha)$ ($n \to \infty$) в силу неперервності функції $y = f(x)$. За вище доведеним $f(x^r) = r \cdot f(x)$, тому $f\left(x^{r_n}\right) = r_n \cdot f(x)$. Перейдемо до границі $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(x^{r_n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} r_n f(x) = \alpha \cdot \lim\limits_{n \to \infty} f(x) = \alpha \cdot f(x)$. Оскільки границя єдина, то $f(x^\alpha) = \alpha \cdot f(x)$ для довільного $\alpha \in R$. Тоді $f(x) = f\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \cdot f(a) = \log_a x$.

Легко показати, що і, навпаки, функція $y = \log_a x$ задовольняє умови 1-3. Отже, умови 1-3 однозначно визначають логарифмічну функцію.

Значний вплив на розвиток продуктивного мислення учнів справляє навчальний матеріал, що передбачає узагальнення та систематизацію знань, яких учні набули раніше. Це насамперед стосується теми про узагальнення поняття степеня і степеневу функцію. Учні знайомляться з поняттям степеня з раціональним та ірраціональним показниками, переконуються, що для будь-якого $p \in R$ і довільного $x \in R_+$ визначено число x^p, а отже, для таких x і p визначена функція, яку називають степеневою. Важливо, щоб учитель наголосив на тому, що область визначення і зміни степеневої функції, а також її властивості залежать від того, яким числом є показник p, і розглянув можливі випадки: p - натуральне, ціле від'ємне, дробове (раціональне), ірраціональне.

У класах із поглибленим вивченням математики та фізико-математичного профілю степеневу функцію можна означити так:

1) функція, яка тотожно не рівна нулю і одиниці;

2) функція, яка є неперервною на множині R_+;

3) для довільних $x, y \in R_+$ $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ (характеристичне функціональне рівняння степеневої функції).

Покажемо, що це дійсно так. Покладемо $x = a^t$, $y = a^s$, де $t, s \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$, тоді згідно з умовою 3 $f\left(a^t \cdot a^s\right) = f\left(a^{t+s}\right) = f\left(a^t\right) \cdot f\left(a^s\right)$. Введемо допоміжну функцію $g(z) = f\left(a^z\right)$, яка, очевидно, буде неперервною на всій множині R. Із останнього співвідношення одержуємо $g(t + s) = g(t) \cdot g(s)$, що є характеристичним функціональним рівнянням показникової функції. Отже, $g(z) = b^z$, де $b > 0$ і $b \neq 1$ (при $b = 1$ $f(x) \equiv 1$, що суперечить умові 1).

Таким чином, $f\left(a^z\right) = b^z$. Нехай $a^z = x$, звідки $z = \log_a x$.

Або $f(x) = b^{\log_a x} = \left(a^{\log_f b}\right)^{\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\log_a b} = x^{\log_a b}$. Таким чином, справді $f(x) = x^p$, де $p = \log_a b$ - стала.

Відомо, що в шкільному курсі математики тригонометричні функції задаються геометрично, але шкільний курс геометрії не завжди задовольняє вимоги строгості, а тому і ряд доведень, що використовуються в тригонометрії, теж є недостатньо строгими. Тому було б бажано (особливо для використання в аналізі) задати тригонометричні функції без використання геометрії. В основу задання тригонометричних функцій покладемо деякі характерні і незалежні одна від одної властивості тригонометричних функцій і приймемо їх як аксіоми тригонометрії. Зрозуміло, що такого роду задання тригонометричних функцій може бути використано в класах із поглибленим вивченням математики або в класах фізико-математичного профілю. Наведемо приклад.

Нехай $S(x)$, $C(x)$ – деякі функції, визначені на множині R, що задовольняють наступним властивостям:

$$S(x-y)=S(x)\cdot C(y)-S(y)\cdot C(x), \text{ для-будь якого } x,y\in R,$$

$$C(x-y)=C(x)\cdot C(y)+S(x)\cdot S(y), \text{ для-будь якого } x,y\in R,$$

$$C(\pi/2)=0,\ C(x)>0 \text{ на } (0;\pi/2).$$

Можна показати, що $S(x)\equiv sin\,x$ і $C(x)\equiv cos\,x$, де $y=sin\,x$ і $y=cos\,x$ означені звичайним (шкільним) способом.

Розв'язком функціонального рівняння

$$f(x+y)=(f(x)+f(y))/(1-f(x)\cdot f(y)),$$

де f - диференційовна функція, що задовольняє це рівняння при довільних x,y, для яких воно має зміст, і така, що $f'(0)=1$, є функція $y=tg\,x$.

Варто підкреслити, що процес розв'язування функціональних рівнянь, який був показаний вище, – це непроста, цікава пошукова робота, це фактично процес "відкриття" деякої функції за її характеристичними властивостями, що ілюструє прикладну значимість методів математики, адже, знаючи деякі характеристики природних явищ, можна знайти функцію (математичну модель), що описує цей процес, а отже, і вивчити та пояснити ще невідоме і непізнане. Тому в класах із поглибленим вивченням математики, фізико-математичного профілю, при роботі зі здібними та обдарованими з математики учнями у звичайних класах, ставлячи завдання розвитку продуктивного мислення при вивченні курсу алгебри і початків аналізу, варто розглядати функціональні рівняння й відомі способи їх розв'язування: аналітичний (метод Коші), способи підстановки, ітерацій, диференціювання та інші.

Доцільно, щоб тема "Функціональні рівняння та способи їх розв'язування" увійшла до обов'язкового курсу алгебри і початків аналізу в класах із поглибленим вивченням математики та класах фізико-математичного профілю.

1. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу 10-11. - К.: "Зодіак-Еко", 1995. - 330 с.
2. А.М.Колмогоров. Алгебра і початки аналізу 10-11. - К.: Рад. школа, 1990. - 220 с.

Семенець Сергій Петрович - кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та інформатики Житомирського державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Наукові інтереси:

– теорія та методика навчання математики (реалізація розвиваючої функції навчання при навчанні математики).