УДК 378.147:515.4

І.Г. Ленчук,
кандидат технічних наук, доцент
(Житомирський педуніверситет)

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ПОГОДЖЕННЯ В НАОЧНІЙ СТЕРЕОМЕТРІЇ З ПРАКТИКОЮ ТЕОРІЇ КОМБІНАЦІЙ ДВОХ ТІЛ

Подаються обґрунтовані поради з приводу якісного виконання наочних проеційних креслень до типових задач шкільного курсу стереометрії.

На етапі формування тривких навичок і вмінь виконання на плоскому екрані якісних зображень комбінацій двох стереометричних тіл важливо дотримуватися таких позицій.

По-перше, навчитися професійно окремо будувати зображення <u>кулі, конуса, циліндра, піраміди та призми</u> визначеної форми і певних розмірів. По-друге, зображення вписана-описана пара виконувати лише в ортогональній проекції і за стандартними (аксонометричними) спряженими напрямами в координатних площинах. По-третє, принципово дотримуватися схеми дій: 1) скориставшись як допоміжними проекціями Г. Монжа або начерками проеційних креслень, зробленими нашвидку, або ж, уявляючи комбінацію у думці, – провести її ретельний аналіз і визначитися щодо методу побудови зображення (графічний чи графоаналітичний); 2) за розумним вибором побудувати зображення поверхні одного із заданих тіл; 3) встановити на ньому спільні елементи обох поверхонь - точки (лінії) дотику; 4) побудувати зображення іншого тіла обов'язково з урахуванням того, що точки (лінії) дотику належать і його поверхні. До цього зауважимо, що інколи просто неможливо чітко розмежувати третій і четвертий кроки (див. [1], гл.III, §4, задача №2). Але ж і за таких обставин варто пам'ятати, що завжди визначальною з точки зору вірності зображення є обґрунтована побудова точок (ліній) дотику заданих поверхонь. Нарешті, по-четверте, ретельно виконати обводку проеційного креслення за умов, що описана поверхня є прозорою по відношенню до вписаної в неї поверхні і кожна з них непрозора по відношенню до себе. Видимість обох поверхонь встановити незалежно одна від одної.

Якщо в комбінації обов'язково бере участь куля, пропонуємо на першому кроці будувати зображення сфери. Якщо ж в задачі фігурує конус без кулі, спочатку будуйте зображення конічної поверхні. І, у випадку побудови зображення вписана-описана пара за участю циліндра без кулі і конуса, варто у першу чергу зайнятися зображенням циліндричної поверхні.

Найбільш трудомісткими, як свідчить досвід, є побудова комбінацій двох тіл за участю кулі, хоча куля є найпростішим тілом, адже вона визначається лише одним своїм параметром - радіусом. Тут доцільно розпочинати побудову саме з кулі, однак не завжди. В іншому ж варіанті надто важливо точно встановити взаєморозташування центра кулі і елементів тіла - партнера кулі у даній комбінації.

<u>Призма і куля</u>

<u>Означення 1.</u> Куля називається описаною навколо призми, якщо всі вершини призми належать поверхні кулі.

<u>Теорема 1.</u> Для того, щоб навколо призми можна було описати кулю, необхідно і досить, щоб навколо кожної її грані можна було описати коло.[1]

Якщо призма вписана в кулю, то всі її вершини належать поверхні кулі. Але ж площина кожної грані призми перетинає сферу по колу, в яке відповідна грань буде вписаною.

Як відомо, у загальному випадку бічними гранями призми є паралелограми. Однак описати коло навколо паралелограма можна лише тоді, коли він є прямокутником чи квадратом. Таким чином, призма обов'язково має бути прямою.

За умови, коли на картинній площині ви в першу чергу будуєте зображення кулі, то наступним побудуйте зображення двох рівних паралелей, симетрично розташованих на її поверхні відносно екваторіальної площини, і в одну з них впишіть відповідний многокутник. Бічні ребра проводьте паралельно осі кулі NS до перетину з іншою паралеллю, потім накресліть другу основу. У випадку, коли призма метрично визначена, піввисота останньої має аналітично виражатися через довжину радіуса кулі.

<u>Наслідок.</u> Навколо будь-якої правильної призми можна описати кулю.

Очевидно, що центром кулі, описаної навколо призми, є середина відрізка, що з'єднує центри кіл, описаних навколо верхньої та нижньої основ призми. Ці кола, як пояснювалося вище, є рівними паралелями сфери.

<u>Означення 2.</u> Куля називається вписаною в призму, якщо її поверхня дотикається до всіх граней многогранника.

<u>Теорема 2.</u> Для того, щоб у призму можна було вписати кулю, необхідно і досить, щоб у нормальний переріз призми можна було вписати коло і щоб висота призми була рівна діаметру цього кола.

Якщо куля вписана у деяку призму, то вона дотикається до кожної бічної грані, причому радіуси кулі, проведені в точки дотику, перпендикулярні до відповідних бічних граней і, отже, до бічних ребер призми, тобто всі ці радіуси розташовані в площині нормального перерізу многогранника. Сторони многокутника у нормальному перерізі рівновіддалені (на R) від центра кулі, тому в цей многокутник можна вписати коло з радіусом R. Нарешті, вписана куля дотикається до кожної основи призми своїми полюсами N і S, через що висота описаної призми дорівнює осі кулі NS ($d=2R$).

---

[1] Принагідно строгі доведення теорем можна знайти у книзі [2].

При побудові зображення описаної ***прямої*** призми опишіть навколо екваторіального еліпса многокутник, рівний многокутнику основи; через його вершини проведіть бічні ребра призми паралельно осі кулі *NS* і рівні їй за довжиною. Дію вимірювання піввисоти і відкладання її на ребрах інколи (в залежності від наявних креслярських інструментів) доцільно замінити на проведення паралельних, а саме: спочатку через центр кулі і кожну вершину многокутника, описаного навколо екватора, проведіть прямі, а потім через полюси кулі проведіть прямі, паралельні останнім, до перетину з напрямками відповідних бічних ребер.

Наслідок. У правильну призму можна вписати кулю тільки тоді, коли висота призми дорівнює діаметру кола, вписаного в основу.

Піраміда і куля

Означення 3. Куля називається описаною навколо піраміди, якщо всі вершини піраміди лежать на поверхні кулі.

Нехай *O* - центр описаної кулі, а *S, A, B, C, ...* - вершини піраміди. Згідно з означенням, *OS=OA=OB=OC= ...* . Якщо із центра *O* опустити перпендикуляри *OM, ON, OP ...* на грані піраміди *ABC, SAB, SBC, ...*, то основою такого перпендикуляра в кожному окремому випадку є центр кола, описаного навколо відповідної грані. Це випливає з того, що *MA=MB=MC, NA=NB=NS, PB=PC=PS ...* як ортогональні проекції рівних похилих. Отже, навколо многокутника основи вписаної піраміди можна описати коло, і оскільки точки *A, B, C ...* лежать на сфері, то площина многокутника основи перетинає поверхню якраз по колу, відносно якого цей многокутник є вписаним.

Таким чином, якщо навколо піраміди описати кулю, то її центр лежатиме на перетині перпендикулярів, проведених до кожної із граней піраміди через центр круга, описаного навколо грані.

Очевидно також, що якщо із точки *O* опустити перпендикуляр на будь-яке ребро піраміди, то основа цього перпендикуляра є серединою ребра.

Теорема 3. Якщо навколо піраміди описана куля, то її центром є точка перетину всіх площин, проведених через середини ребер піраміди перпендикулярно до цих ребер.

Дійсно, довільна точка, рівновіддалена від двох вершин піраміди, які є кінцями одного і того ж ребра, лежить у площині, проведеній перпендикулярно до цього ребра через його середину. Тому центр описаної кулі, як рівновіддалений від усіх вершин піраміди, повинен знаходитися в кожній із таких площин, тобто є точкою перетину всіх цих площин.

Обґрунтуємо наведені міркування на типових випадках комбінацій кулі з правильною чи напівправильною пірамідою.

Нехай у кулю вписано піраміду, бічні ребра якої рівні (чи, що те ж саме, однаково нахилені до площини основи або ж утворюють рівні кути з висотою піраміди).

Площина основи піраміди перетинає сферу по колу ω, описаному навколо многокутника основи. Оскільки бічні ребра піраміди рівні, то і їх проекції на площину основи рівні: основою *M* висоти піраміди є центр кола ω, тобто висота належить прямій *m*, що проходить через центр кола перпендикулярно до його площини. Ця пряма є геометричним місцем точок (ГМТ), рівновіддалених від усіх точок кола ω. Тому на ній слід шукати центр описаної кулі.

Де саме на *m* розташовується точка *O*?

Скоректуємо спочатку місце розташування вершини піраміди *S*. Завжди для визначеності можна вважати, що основа піраміди і екватор сфери лежать у паралельних площинах. Тоді многокутник основи піраміди вписується у паралель сфери, а її вершина збігається з одним із полюсів (як правило, північним).

Тепер розглянемо будь-яке бічне ребро піраміди, наприклад *SA*. ГМТ у просторі, рівновіддалених від кінців цього ребра, є площина, перпендикулярна *SA* і інцидентна точці *Q*, що ділить *SA* навпіл (рис. 1). Вона перетинає площину *SAM*, визначену висотою піраміди *SM* і бічним ребром *SA*, по прямій *QO*, також перпендикулярній *SA*. Точка *O* перетину *SM* і *QO* рівновіддалена від усіх вершин піраміди, вона і є центром описаної навколо піраміди кулі.

<u>В задачах на комбінацію куля - вписана піраміда геометричну побудову зручно розпочинати з відшукання центра кулі. Зображення ж самої кулі часто буває зайвим - достатньо мати центр, наприклад, у трикутнику *SQO*.</u> Цей прямокутний трикутник має своїми елементами радіус кулі *SO* і половину бічного ребра піраміди *SQ*. Крім цього, $\Delta SAM \equiv \Delta SOQ$ і $\angle SOQ = \angle SAM$ - кут нахилу бічного ребра піраміди до площини її основи.

Зауважимо, що у цьому конкретному випадку комбінації двох тіл інколи доцільно (з практичних міркувань) припустити існування "проміжної" конічної поверхні, вписаної в кулю і описаної навколо даної піраміди.

Загалом же ґрунтовне знайомство з комбінацією куля - вписана піраміда можна було б розпочинати з доведення такого твердження.

Теорема 4. Для того, щоб навколо піраміди можна було описати кулю, необхідно і досить, щоб навколо многокутника в основі піраміди можна було описати коло.

Наслідок 1. Навколо будь-якої трикутної піраміди можна описати кулю.

Наслідок 2. Навколо будь-якої правильної піраміди можна описати кулю.

Говорячи про центр описаної кулі, слід розуміти, що він може знаходитися і всередині, і зовні, і на поверхні піраміди в залежності від виду піраміди.

Означення 4. Куля називається вписаною в піраміду, якщо вона дотикається до всіх граней піраміди.

У процесі навчання стереометрії зображення пари тіл куля - описана піраміда доцільно виконувати за таким алгоритмом: 1) скориставшись відомою схемою, побудуйте зображення кулі (без викреслювання еліпса в екваторіальній площині); 2) в обрис кулі впишіть будь-яку паралель (O_1), розташовану над площиною екватора; 3) в точці дотику паралелі і обрису побудуйте дотичну до останнього кола і зафіксуйте її точку перетину *H* з віссю кулі *SN*; 4) опишіть навколо паралелі многокутник, подібний многокутнику в основі піраміди; 5) в гомотетії $h_н^k$ ($k=HS:HO_1$) побудуйте многокутник основи піраміди і проведіть її бічні ребра (тут точки N і S – відповідно північний і південний полюси кулі).

Ця послідовність дій призведе до побудови зображення будь-якої піраміди, описаної навколо кулі, незалежно від форми основи. Важливо лише, щоб вершина піраміди належала прямій *SN*.

Якщо ж піраміда має строго визначену форму, то вибирати будь-де паралель на сфері так, як це проілюстровано в тексті вище, не можна.

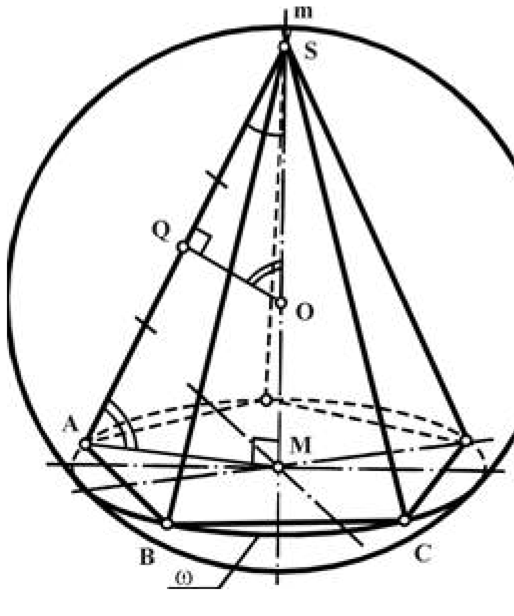

Рис. 1

Для побудови зображення зрізаної описаної піраміди достатньо після реалізації вище наведеного алгоритму побудувати переріз цієї піраміди площиною, яка проходить паралельно до основи через північний полюс *N* кулі.

Варто підкреслити, що центром кулі є точка, рівновіддалена від усіх граней описаної піраміди. Це означає, що якщо із центра *O* опустити перпендикуляри *OP, OQ, OR* ... на грані піраміди *ABC...*, *SAB*, *SBC* ..., то $OP=OQ=OR=$ ... . Точки *P*, *Q*, *R* ... є не лише основами перпендикулярів, а й, що особливо цінно, точками дотику кулі до граней піраміди.

Відмітимо, що якщо із точок *P* і *R* (рис. 2), які належать граням піраміди із спільним ребром *BC*, опустити перпендикуляри на це ребро, то їх основи збігатимуться.

Справді, $OP\perp ABC$..., тому $OP\perp BC$; $OR\perp SBC$, тому $OR\perp BC$. Отже, ребро *BC* перпендикулярне до площини, визначеної прямими *OP* і *OR*. Якщо *T* - точка перетину цієї площини і ребра *BC*, то $RT\perp BC$ і $PT\perp BC$, а тому *T* є спільною основою перпендикулярів, опущених із точок *P* і *R* на ребро *BC*.

Теорема 5. Якщо в піраміду вписана куля, то її центр є точка перетину бісекторних площин усіх двогранних кутів піраміди.

Дійсно, будь-яка точка, рівновіддалена від обох граней двогранного кута, належить його бісекторній площині. Тому центр кулі, вписаної в піраміду, як такий, що рівновіддалений від усіх її граней, знаходиться в кожній з бісекторних площин. Тобто, він є точкою перетину всіх бісекторних площин двогранних кутів піраміди.

Справедливе і обернене твердження: в піраміду можна вписати кулю, якщо бісекторні площини всіх її двогранних кутів перетинаються в одній точці.

Однак нізвідки не випливає, що бісекторні площини двогранних кутів будь-якої піраміди перетинаються в одній точці. І взагалі, у таку піраміду вписати кулю неможливо.

Звернемося до реальної задачі курсу стереометрії.

Нехай кулю вписано в піраміду, бічні грані якої рівнонахилені до площини основи (чи, що те ж саме, висота піраміди утворює рівні кути зі всіма бічними гранями).Визначимо розташування точки *O*, рівновіддаленої від усіх граней описаної навколо кулі піраміди вказаного типу.

Із умови рівнонахиленості всіх бічних граней піраміди до площини її основи випливає, що висота піраміди проходить через центр вписаного в многокутник основи кола. Справді, проведемо із вершини *S* висоти *SK* і *ST* двох будь-яких бічних граней, наприклад *SAB* і *SBC,* відповідно (див. рис. 2). Якщо *SP* - висота піраміди, то, згідно з теоремою про три перпендикуляри, $PK\perp AB$ і $PT\perp BC$. Очевидно, що прямокутні трикутники *SPK* і *SPT* рівні ($\angle SKP=\angle STP$, *SP* - спільний катет). Звідси, $PK=PT$- радіуси кола, вписаного в многокутник основи ABC... .

Можна легко довести, що всі точки відрізка *SP* рівновіддалені від бічних граней піраміди. Визначимо, яка саме точка висоти піраміди є центром вписаної в неї кулі.

Розглянемо двогранний кут, утворений однією із бічних граней і основою піраміди. Якщо взяти, наприклад, грань *SAB*, то лінійним кутом двогранного кута при ребрі *AB* є кут *SKP*. Проведемо бісектрису лінійного кута.

Вона перетне висоту піраміди *SP* в точці *O*, що однаково віддалена від основи і бічної грані піраміди *SAB* (згідно із властивістю бісектриси), а отже і від решти граней піраміди.

Таким чином, центр вписаної у таку піраміду кулі можна знайти в перетині висоти правильної чи напівправильної піраміди з бісектрисою лінійного кута при основі, який належить площині осьового перерізу многогранника.

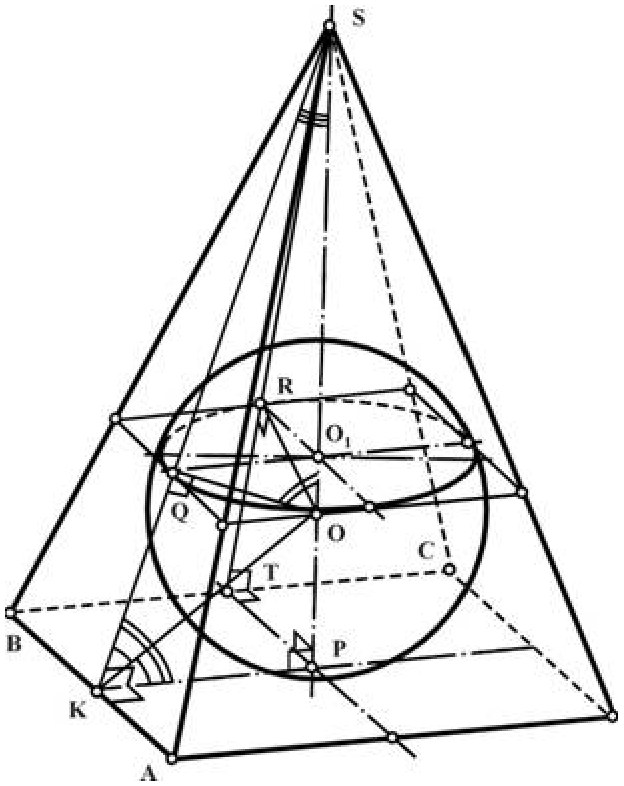

Рис. 2

В задачах на комбінацію куля - описана піраміда визначальним є прямокутний трикутник *OPK*, одним із катетів якого є радіус вписаної кулі *OP*, іншим - радіус кола *PK*, вписаного в многокутник основи піраміди, а один із його гострих кутів ($\angle OKP$) рівний половині лінійного кута двогранного кута при основі даної піраміди. Крім цього, оскільки $\Delta SKP \equiv \Delta SOQ$, то через розв'язок трикутника *OPK* легко розв'язується і трикутник *SKP*, елементами якого є висота піраміди *SP* і висота її бічної грані *SK*.

Зауважимо, що центр вписаної в піраміду кулі завжди лежить всередині піраміди, бо всі точки бісекторних площин розташовуються між гранями відповідних двогранних кутів.

Слід наголосити також, що центральною проекцією кулі (внутрішнє проеціювання), вписаної в піраміду такого типу, є круг, вписаний в многокутник основи піраміди. Іншими словами, існує конус з вершиною в точці *S*, вписаний в піраміду і описаний навколо кулі. Спільними елементами поверхні конуса і бічних граней піраміди є висоти цих граней - твірні конуса; з кулею конус дотикається по паралелі, яка містить точки дотику сфери і бічних граней піраміди.

Обґрунтування цього питання на строго науковій основі можна здійснити через доведення таких тверджень.

Теорема 6. Завжди існує сферична поверхня будь-якого радіуса, дотична до всіх граней даного тригранного кута.

Теорема 7. У будь-яку трикутну піраміду можна вписати кулю.

Теорема 8. Кулю можна вписати лише в таку многокутну піраміду, многогранний кут якої при вершині опуклий і має бісектор.

Нагадаємо, що бісектором многогранного кута називається пряма перетину всіх бісекторних площин пар суміжних граней цього кута.

Наслідок 1. У будь-яку правильну піраміду можна вписати кулю.

Наслідок 2. У будь-яку многокутну піраміду, в якої многогранний кут при вершині є правильним, можна вписати кулю.

На завершення теми зупинимося коротко на комбінаціях куля - вписаний та описаний конус. Звичайно, в будь-якому варіанті комбінації (про що сказано вище) першим кроком побудови на картинній площині повинно стати виконання зображення кулі. Потім на поверхні кулі будують паралель і до неї "прив'язують" певним чином конічну поверхню.

Доречне в такій ситуації запитання: "Чи не можна спочатку виконати зображення конічної поверхні і лише після цього абсолютно строго вписати в неї (чи описати навколо неї) кулю?"

Виявляється, що можна. Причому, ця задача актуальна і цікава не лише тому, що на ній ще раз можна ефектно продемонструвати значимість та можливості в теорії і практиці М.Ф. Четверухіна комплексних креслень Г. Монжа, а й через її практичну цінність, зокрема для встановлення центра кулі, зв'язаної в комбінації з правильною чи напівправильною пірамідою.

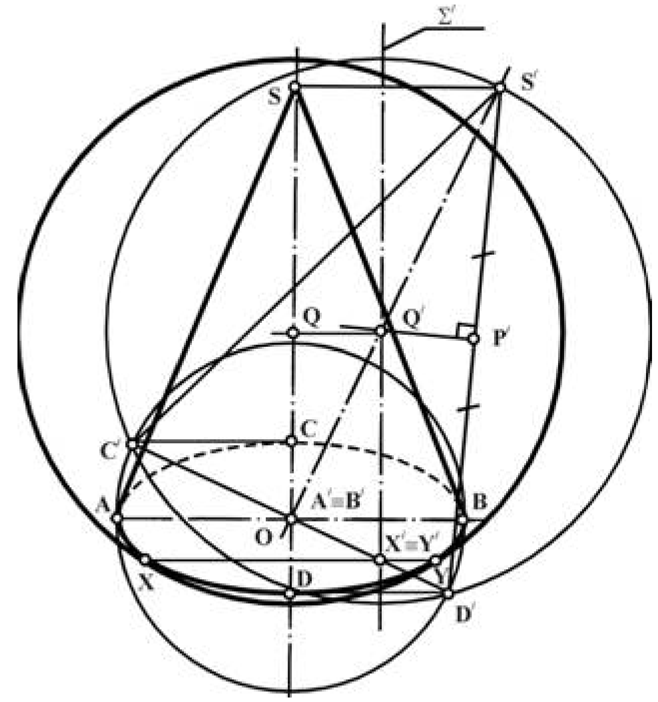

Рис. 3

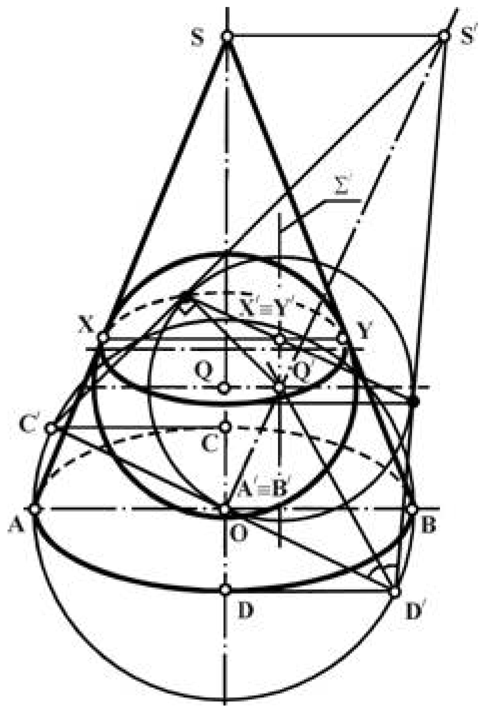

Рис. 4

Отже, нехай циркулем та лінійкою побудовано зображення конуса. Розглянемо спочатку випадок, коли куля описана навколо конуса (рис. 3): 1) побудуємо профільну проекцію конуса у вигляді рівнобедреного трикутника *S'C'D'*; 2) очевидно, що обрисом кулі на профільній площині проекцій є велике коло, описане навколо цього трикутника; центр обрису *Q'* шукаємо в перетині серединного перпендикуляра відрізка *S'D'* і осі *S'O*; 3) у перетині відрізка *SO* і горизонтальної лінії проекційного зв'язку точки *Q'* фіксуємо на фронтальній площині зображень центр описаної кулі Q; 4) радіусом (*Q'S'*) великого кола із центром у точці *Q* проводимо шуканий обрис кулі; при цьому точки дотику обрису до еліпса в основі конуса шукаємо (з урахуванням видимості кулі) в її фронтальній площині проекцій *Σ'* (див. рис.).

Алгоритм уписання кулі в конус принципово мало чим відрізняється від попереднього (рис. 4): 1) побудуємо профільну проекцію конуса у вигляді рівнобедреного трикутника *S'C'D'*; 2) очевидно, що обрисом кулі на профільній площині проекцій є велике коло, вписане в цей трикутник; центр обрису *Q'* шукаємо в перетині бісектриси кута *S'C'D'* (*S'D'C'*) і осі *S'O*; 3) у перетині відрізка *SO* і горизонтальної лінії проекційного зв'язку точки *Q'* фіксуємо на фронтальній площині зображень центр вписаної кулі *Q*; 4) радіусом (*Q'O*) великого кола з центром у точці *Q* проводимо шуканий обрис кулі; при цьому попередньо за профільною проекцією будуємо (див. рис. 4) фронтальну проекцію паралелі дотику конуса і кулі, а точки дотику обрису кулі і цієї паралелі знаходимо в тій же фронтальній площині симетрії *Σ'*.

Пропонуємо читачеві переосмислити останні результати стосовно до розглянутих вище комбінацій піраміда - куля.

Інколи для розв'язування стереометричних задач корисно робити різноманітні допоміжні планіметричні малюнки, зокрема виносити плоскі конфігурації, зображення яких спотворене на зображенні комбінації. Серйозну допомогу при цьому надають правильно виконані осьові перерізи та ортогональні проекції комбінації за методом Г. Монжа. Однак в останньому випадку варто пам'ятати, що без наявності хоча б найпростішого зображення комбінації можливі грубі помилки.

Зображення комбінацій двох тіл за участю конуса (циліндра) як базової фігури будуються значно простіше і не викликають труднощів у виконавця, який відмінно володіє вищенаведеними правилами і алгоритмами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ленчук В.І., Ленчук І.Г. Основи стереометричних побудов. /Посібник для вчителів та студентів. – Житомир: Олеся, 1994. – 224с.

1. Орехов П.С. Изображения в стереометрии. /Пособие для учителей. –Ижевск: Удмуртия, 1981. – 172с.

Матеріал надійшов до редакції 3.11. 2000 р.

И.Г.Ленчук. Методические аспекты согласования в наглядной стереометрии с практикой теории комбинаций двух тел.

Предлагаются обоснованные советы по поводу качественного выполнения наглядных проекционных чертежей к типичным задачам школьного курса стереометрии.

I.H.Lenchuk. Methodical aspects of the coordination in evident spatial geometry of the theory of combinations of two bodies with practice.

The reasonable advice concerning qualitative performance of the evident projective drawings to typical tasks of school rate spatial geometry is offered.