УДК 517.5

О. Ф. Герус

(Житомирський державний університет ім. І. Франка)

Про одне узагальнення інтеграла типу Коші

ofg@com.zt.ua

Розглянуто інтеграл типу Коші для функцій, які діють з $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^2$ і задовольняють рівняння Гельмгольца. Встановлено достатні умови рівномірного існування його межових значень та доведено формули для них.

There is considered a Cauchy-type integral for functions acting from $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}^2$ and satisfying the Helmholtz equation. Sufficient conditions for its boundary values to exist uniformly are determined and formulae for them are proved.

1. Вступ. У роботі [1] (див. також [2]) побудовано основи теорії так званих α-гіперголоморфних функцій, які діють з простору $\mathbb{R}^2$ у простір $\mathbb{C}^4$. Вона пов'язана з оператором Гельмгольца $\Delta_{\mathbb{R}^2} + \alpha^2$ таким же чином, як класична теорія голоморфних функцій — з оператором Лапласа $\Delta_{\mathbb{R}^2}$. Властивості ядра Коші в цій теорії подібні відповідним властивостям ядра Коші в класичному комплексному аналізі (зокрема, воно є α-гіперголоморфною функцією та дозволяє відновити α-гіперголоморфну функцію за її значеннями на межі області).

В роботі [3] доведені формули Сохоцького-Племеля та теорема типу Племеля-Привалова для межових значень інтеграла типу Коші з α-гіперголоморфним ядром Коші для функцій Гьольдера на замкнених кусково-ляпуновських кривих.

Проте в класичному комплексному аналізі М. О. Давидов [4] довів більш загальні формули, які мають місце для межових значень інтеграла типу Коші на довільній замкненій жордановій спрямлюваній кривій і узагальнюють формули Сохоцького-Племеля, які справедливі лише для кусково-гладких кривих, що утворюють підклас всіх спрямлюваних кривих. В статтях [5, 6] ми довели аналоги теореми М. О. Давидова в теорії α-гіперголоморфних функцій.

Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C}) := \{\sum_{k=0}^{3} a_k\, i_k : a_k \in \mathbb{C},\ i_0 = 1, i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_1 i_2 i_3 = -1\}$ — асоціативна некомутативна алгебра комплексних кватерніонів (у випадку $a_k \in \mathbb{R}$ маємо алгебру дійсних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{R})$); $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — замкнена жорданова спрямлювана крива; Ω^+, Ω^- — відповідно внутрішня та зовнішня області з межею Γ. Під Ω розумітимемо довільну з областей Ω^+ чи Ω^-.

Слідуючи [1, 2], запровадимо в $\mathbb{R}^2$ структуру дійсних кватерніонів $z := x + yi_3 \in \mathbb{R}^2$ і означимо інтеграл типу Коші від функції $f : \Gamma \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ наступним чином:

$$\Phi_\alpha[f](z) := \int_\Gamma K_\alpha(\zeta - z)\, d\zeta\, f(\zeta), \qquad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \tag{1}$$

де кватерніонна функція K_α грає роль ядра Коші в цій теорії. Позначатимемо через $\Phi_\alpha^+[f]$, $\Phi_\alpha^-[f]$ звуження інтеграла типу Коші $\Phi_\alpha[f]$ відповідно на області Ω^+, Ω^-.

В цій роботі ми встановлюємо достатні умови для існування межових значень на кривій Γ інтегралів $\Phi_\alpha^+[f]$, $\Phi_\alpha^-[f]$ та доводимо формули для них. Отримані результати були раніше анонсовані в роботі [7].

2. Кватерніонні α-гіперголоморфні функції. Вибір ядра Коші та означення α-гіперголоморфної функції зумовлені оператором Гельмгольца

$$\Delta_{\alpha^2} := \Delta_{\mathbb{R}^2} + {}^{\alpha^2}\!M,$$

де $\alpha \in \mathbb{C}$, ${}^{\alpha^2}\!M f := \alpha^2 f$ (див. [1, 2].

Він факторизується наступним чином:

$$\Delta_{\alpha^2} = D_\alpha \circ (-D_\alpha), \tag{2}$$

де

$$D_\alpha := i_2 \frac{\partial}{\partial x} - i_1 \frac{\partial}{\partial y} + i_3\, {}^{\alpha}\!M.$$

Оператор D_α виступає аналогом оператора Коші-Рімана $\overline{\partial} = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}$ з класичного комплексного аналізу.

Означення ([1]). *Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Функція $f : \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називається α-гіперголоморфною, якщо $D_\alpha f \equiv 0$ в області Ω.*

Подібно до класичного випадку ядро Коші K_α визначається як фундаментальний розв'язок оператора D_α (тобто $D_\alpha[K_\alpha](z) = \delta(z)$, де $\delta(z)$ — дельта-функція Дірака). Завдяки факторизації (2) ядро Коші K_α обчислюється за формулою

$$K_\alpha(z) := -D_\alpha[\theta_\alpha](z),$$

де $\theta_\alpha(z)$ — фундаментальний розв'язок оператора Δ_{α^2}, який можна подати у наступному вигляді:

$$\theta_\alpha(z) = \frac{1}{4}N_0(\alpha|z|) - \frac{1}{2\pi}J_0(\alpha|z|)(\boldsymbol{C} - \log 2),$$

де $\boldsymbol{C}$ — стала Ейлера і для цілого n J_n та N_n — відповідно функції Бесселя та Неймана порядку n. Надалі нам знадобляться наступні їх властивості (див. [8]):

$$\frac{\partial}{\partial t}N_0(t) = -N_1(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}J_0(t) = -J_1(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}J_1(t) = \frac{1}{2}\left(J_0(t) - J_2(t)\right), \tag{5}$$

$$tJ_2(t) = 2J_1(t) - tJ_0(t). \tag{6}$$

Використовуючи рівності (3) та (4), отримуємо

$$\begin{aligned} K_\alpha(z) :=& - D_\alpha[\theta_\alpha](z) = \\ =&\frac{1}{4}\alpha i_3\left(M_1(\alpha|z|)\frac{z}{|z|}i_1 - M_0(\alpha|z|)\right) = K_{\alpha,1}(z) + K_{\alpha,2}(z)i_1, \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$K_{\alpha,1}(z) := -\frac{\alpha i_3}{4}M_0(\alpha|z|), \quad K_{\alpha,2}(z) := \frac{\alpha i_3}{4}M_1(\alpha|z|)\frac{z}{|z|},$$

$$M_n(\alpha|z|) := N_n(\alpha|z|) + \frac{2}{\pi}(\log 2 - \boldsymbol{C})\, J_n(\alpha|z|).$$

Наступна теорема є кватерніонним узагальненням теореми М. О. Давидова [4]. Вона еквівалентна теоремі 4.3 роботи [6] (див. також теорему 3.2 роботи [5], де розглянуто більш загальний випадок $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$).

Теорема 1. *Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$, Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, $f : \Gamma \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — неперервна функція і нехай інтеграл*

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_{t,\delta}} |K_\alpha(\zeta - t)| \cdot |d\zeta| \cdot |f(\zeta) - f(t)|, \qquad t \in \Gamma,$$

де $\Gamma_{t,\delta} := \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - t| \leqslant \delta\}$, існує рівномірно відносно $t \in \Gamma$. Тоді існує інтеграл

$$F_\alpha[f](t) := \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_{t,\delta}} K_\alpha(\zeta - t)\, d\zeta\, (f(\zeta) - f(t)), \qquad t \in \Gamma;$$

функції $\Phi_\alpha^+[f]$, $\Phi_\alpha^-[f]$ неперервно продовжуються на замикання $\overline{\Omega^+}$, $\overline{\Omega^-}$ відповідно областей Ω^+, Ω^+ і справедливі наступні формули:

$$\Phi_\alpha^+[f](t) = F_\alpha[f](t) - (I_{\alpha,\Gamma}(t) + 1)\; i_1\, f(t), \qquad t \in \Gamma, \tag{8}$$

$$\Phi_\alpha^-[f](t) = F_\alpha[f](t) - I_{\alpha,\Gamma}(t)\, i_1\, f(t), \qquad t \in \Gamma, \tag{9}$$

де $\Phi_\alpha^\pm[f](t) := \lim\limits_{\Omega^\pm \ni z \to t} \Phi_\alpha[f](z)$,

$$I_{\alpha,\Gamma}(t) := -\alpha \iint\limits_{\Omega^+} K_\alpha(\zeta - t)\, i_3\, d\xi d\eta.$$

3. $\mathbb{C}^2$-значні α-гіперголоморфні функції в $\mathbb{C}$. В частинному випадку, коли α — дійсне число і $f = \sum_{k=0}^{3} f_k\, i_k$ приймає значення в алгебрі дійсних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{R})$, (тобто f_k — дійснозначні функції) подамо функцію f у вигляді $f = g_1 + g_2 i_1$, де $g_1 := f_0 + f_3 i_3$, $g_2 := f_1 + f_2 i_3$.

Тоді функція f стає $\mathbb{C}^2$-значною функцією, визначеною у $\mathbb{C}$. Маємо

$$\begin{aligned} D_\alpha[f](z) = &\left(i_2 \frac{\partial}{\partial x} - i_1 \frac{\partial}{\partial y} + i_3\, {}^{\alpha}\!M\right)(g_1(z) + g_2(z) i_1) = \\ =& i_3\left({}^{\alpha}\!M + i_1 \partial\right)(g_1(z) + g_2(z) i_1) = \\ =& i_3\left(\alpha g_1(z) - \overline{\partial}\overline{g}_2(z) + (\alpha g_2(z) - \overline{\partial}\overline{g}_1(z)) i_1\right), \end{aligned}$$

де $\partial := \dfrac{\partial}{\partial x} - i_3 \dfrac{\partial}{\partial y}$ і верхня риска позначає комплексне спряження.

Отже, умова α-гіперголоморфності функції f у області $\Omega \subset \mathbb{C}$ рівносильна системі рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha\overline{g}_1(z) - \partial g_2(z) = 0, \\ \alpha\overline{g}_2(z) + \partial g_1(z) = 0, \end{cases} \quad (\forall z \in \Omega). \tag{10}$$

Зауваження. Випадок комплексного α в системі (10) потребує окремого дослідження з використанням методів роботи [5].

0-гіперголоморфність функції f у області Ω рівносильна антиголоморфності комплексних функцій g_1, g_2 в Ω, тобто

$$D_0[f](z) = 0 \ (\forall z \in \Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial g_1(z) = 0, \\ \partial g_2(z) = 0, \end{cases} \quad (\forall z \in \Omega).$$

За формулою (1) інтеграл типу Коші Φ_0 у цьому випадку подається у вигляді:

$$\Phi_0[f](z) = \int_\Gamma K_0(\zeta - z)\, d\zeta\, f(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i_3} \int_\Gamma \frac{1}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\, d\overline{\zeta}\, (\overline{g}_2(\zeta) - \overline{g}_1(\zeta)\, i_1) = \\ = \overline{\Phi}[g_2](z) - \overline{\Phi}[g_1](z)\, i_1,$$

де

$$\Phi[g](z) = \frac{1}{2\pi i_3} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

— класичний інтеграл типу Коші. Теорема 1 у цьому випадку зводиться до теореми М. О. Давидова для функцій g_1, g_2.

Нехай $\mathbb{C}^2$ — комплексний лінійний простір з базисом $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$. Інтерпретуючи кватерніоннозначну функцію $f = g_1 + g_2 i_1$ як $\mathbb{C}^2$-значну функцію $\boldsymbol{g} = g_1\boldsymbol{e_1} + g_2\boldsymbol{e_2}$ в області $\Omega \subset \mathbb{C}$, приймемо систему (10) за означення α-гіперголоморфної функції $\boldsymbol{g} : \Omega \to \mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial \boldsymbol{g} = \alpha \overline{\boldsymbol{g}}.$$

Використовуючи формули (1), (7), отримуємо

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha[f](z) := & \int_\Gamma K_\alpha(\zeta - z)\, d\zeta\, f(\zeta) = \\ = & \int_\Gamma (K_{\alpha,1}(\zeta - z) + K_{\alpha,2}(\zeta - z) i_1)\, d\zeta\, f(\zeta) = \\ = & \Phi_{\alpha,1}[f](z) + \Phi_{\alpha,2}[f](z)\, i_1, \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\Phi_{\alpha,1}[f](z) := \int\limits_{\Gamma} K_{\alpha,1}(\zeta - z)g_1(\zeta)d\zeta - K_{\alpha,2}(\zeta - z)\overline{g}_2(\zeta)d\overline{\zeta},$$

$$\Phi_{\alpha,2}[f](z) := \int\limits_{\Gamma} K_{\alpha,1}(\zeta - z)g_2(\zeta)d\zeta + K_{\alpha,2}(\zeta - z)\overline{g}_1(\zeta)d\overline{\zeta}.$$

Для функції $\boldsymbol{g} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}^2$ α-гіперголоморфний інтеграл типу Коші має вигляд $\boldsymbol{\Phi}_\alpha[\boldsymbol{g}] := \Phi_{\alpha,1}[\boldsymbol{g}]\boldsymbol{e_1} + \Phi_{\alpha,2}[\boldsymbol{g}]\boldsymbol{e_2}$, де $\Phi_{\alpha,k}[\boldsymbol{g}] := \Phi_{\alpha,k}[f]$, $k \in \{1, 2\}$. Завдяки рівності (11) цю формулу можна подати в традиційній формі

$$\boldsymbol{\Phi}_\alpha[\boldsymbol{g}](z) := \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{K}_\alpha(\zeta - z)\,(\boldsymbol{g}(\zeta)\,d\zeta)$$

з матричним ядром Коші

$$\boldsymbol{K}_\alpha := \begin{pmatrix} K_{\alpha,1} & -K_{\alpha,2}\,Z \\ K_{\alpha,2}\,Z & K_{\alpha,1} \end{pmatrix},$$

де через Z позначено оператор комплексного спряження.

Позначимо також через $\boldsymbol{\Phi}^+_\alpha[\boldsymbol{g}]$ та $\boldsymbol{\Phi}^-_\alpha[\boldsymbol{g}]$ звуження інтеграла $\boldsymbol{\Phi}_\alpha[\boldsymbol{g}]$ відповідно на області Ω^+ та Ω^-.

Таким чином, з теореми 1 випливає наступний аналог теореми М. О. Давидова:

Теорема 2. *Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \supset \Gamma$ — замкнена жорданова спрямлювана крива, $\boldsymbol{g} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}^2$ — неперервна функція і інтеграл*

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_{\boldsymbol{t},\delta}} \|\boldsymbol{K}_\alpha(\zeta - t)\| \cdot \|\boldsymbol{g}(\zeta) - \boldsymbol{g}(t)\| \cdot |d\zeta|, \qquad t \in \Gamma,$$

існує рівномірно відносно $t \in \Gamma$. Тоді існує інтеграл

$$\boldsymbol{F}_\alpha[\boldsymbol{g}](t) := \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_{t,\delta}} \boldsymbol{K}_\alpha(\zeta - t)\,(\boldsymbol{g}(\zeta)\,d\zeta), \qquad t \in \Gamma, \tag{12}$$

функції $\boldsymbol{\Phi}^+_\alpha[\boldsymbol{g}]$, $\boldsymbol{\Phi}^-_\alpha[\boldsymbol{g}]$ неперервно продовжуються на замикання $\overline{\Omega^+}$, $\overline{\Omega^-}$ відповідно областей Ω^+, Ω^+ і справедливі наступні формули:

$$\boldsymbol{\Phi}^+_\alpha[\boldsymbol{g}](t) = \boldsymbol{\Phi}^-_\alpha[\boldsymbol{g}](t) - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{g}(t), \qquad t \in \Gamma,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_\alpha^-[\boldsymbol{g}](t) = \boldsymbol{F}_\alpha[\boldsymbol{g}](t) - \begin{pmatrix} I_{\alpha,\Gamma,2}(t) & -I_{\alpha,\Gamma,1}(t) \\ I_{\alpha,\Gamma,1}(t) & I_{\alpha,\Gamma,2}(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{g}(t), \qquad t \in \Gamma,$$

де для $k \in \{1,2\}$

$$I_{\alpha,\Gamma,k}(t) := -\alpha \iint\limits_{\Omega^+} K_{\alpha,k}(\zeta - t)\, i_3\, d\xi d\eta.$$

4. Доведення теореми 1 випливає з теореми 4.3 роботи [6], в якій в ролі ядра Коші виступає функція $K_\alpha + \widehat{K}_\alpha$, де

$$\widehat{K}_\alpha(z) := \alpha \left(\frac{(-1)^p\, i}{4} + \frac{1}{2\pi}(\boldsymbol{C} - \log 2) \right) \left(J_1(\alpha|z|) \frac{z}{|z|}\, i_2 - J_0(\alpha|z|)\, i_3 \right).$$

Позначимо

$$\widehat{\Phi}_\alpha[f](z) := \int\limits_\Gamma \widehat{K}_\alpha(\zeta - z)\, d\zeta\, f(\zeta), \qquad z \in \mathbb{R}^2,$$

$$\widehat{F}_\alpha[f](t) := \int\limits_\Gamma \widehat{K}_\alpha(\zeta - t)\, d\zeta\, (f(\zeta) - f(t)), \qquad t \in \Gamma.$$

Завдяки неперервності функції $\widehat{K}_\alpha$ в $\mathbb{R}^2$, використовуючи формулу Гріна та рівності (4) – (6) отримуємо:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_\alpha^+[f](t) = \widehat{\Phi}_\alpha^-[f](t) =& \widehat{F}_\alpha[f](t) + \int\limits_\Gamma \widehat{K}_\alpha(\zeta - t)\, d\zeta\, f(t) = \\ =& \widehat{F}_\alpha[f](t) - \widehat{I}_{\alpha,\Gamma}(t)\, i_1\, f(t), \qquad t \in \Gamma, \end{aligned}$$

де

$$\widehat{I}_{\alpha,\Gamma}(t) := -\alpha \iint\limits_{\Omega^+} \widehat{K}_\alpha(\zeta - t)\, i_3\, d\xi d\eta.$$

Таким чином, доданок $\widehat{K}_\alpha$ у ядрі Коші не змінює вигляду формул (8), (9). Теорема доведена.

5. Доведення теореми 2. Подамо у $\mathbb{C}^2$-формі кватерніонні функції F_α, $I_{\alpha,\Gamma}$, $\Phi_\alpha^\pm$ в теоремі 1 та застосуємо рівності (11), (12) при умовах, що $\alpha \in \mathbb{R}$ і f приймає значення у алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{R})$. Тоді теорема 1 переформульовується в теорему 2. Теорема доведена.

Література

[1] Shapiro M., Tovar L. M. Two-dimensional Helmholtz operator and its hyperholomorlhic solutions // Journal of Natural Geometry. – 1997. – **11**. – P. 77–100.

[2] Kravchenko V. V. Shapiro M. V. Integral representations for spatial models of mathematical physics // Addison Wesley Longman, Pitman Research Notes in Mathematics Series 351, 1996. – 248 p.

[3] Gerus O. F., Schneider B., Shapiro M. On boundary properties of α-hyperholomorphic functions in domains of $\mathbb{R}^2$ with the piece-wise Liapunov boundary // Progress in analysis, v. 1 (Proceedings of 3rd International ISAAC Congress, Berlin, August 20–25, 2001). – World Scientific, 2003. – P. 375–382.

[4] Давыдов Н. А. Непрерывность интеграла типа Коши в замкнутой области // Докл. АН СССР. – 1949. – **64**. – С. 759–762.

[5] Gerus O. F, Shapiro M. On the boundary values of a quaternionic generalization of the Cauchy-type integral in $\mathbb{R}^2$ for rectifiable curves // Journal of Natural Geometry. – 2003. – **24**. – P. 120–136.

[6] Gerus O. F, Shapiro M. On a Cauchy-type integral related to the Helmholtz operator in the plane // Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana. – 2004. – **10**(1). – P. 63–82.

[7] Gerus O. F., Shapiro M. V. On a generalization of the N. A. Davydov theorem// Advances in analysis. Proceedings of the 4th international ISAAC congress, Toronto, Canada, August 11-16, 2003. – Hackensack, NJ: World Scientific, 2005. – P. 159–166.

[8] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Физматгиз, 1963. – 1100 с.