Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2006, том 3, N 4, 396–404

УДК 517.5

О. Ф. Герус, С. А. Плакса

(Житомирский государственный университет им. И. Франко)
(Институт математики НАН Украины, Киев)

Формула Ньютона–Лейбница и квазианалитические классы функций на кривых

ofg@com.zt.ua
plaksa@imath.kiev.ua

Доведено справедливість формули Ньютона-Лейбніца на деяких класах жорданових спрямлюваних кривих. Встановлено критерій аналітичності та достатні умови квазіаналітичності класів функцій, заданих на кривій, що є локально кривою типу "хорда-дуга" (тобто кривою, у якої відношення довжини дуги з фіксованим кінцем до довжини хорди, яка стягує цю дугу, обмежене числом, що залежить від вказаного кінця).

We give a proof of the Newton–Leibniz formula on certain classes of rectifiable Jordan curves. An analyticity criterion and sufficient conditions for a quasianalyticity of classes of functions given on a locally "chord-arc" curve (i.e. a curve, for which the ratio of the length of arc with a fixed endpoint to the length of chord subtending the arc is bounded by a number depending on the mentioned endpoint) is established.

1. Введение. Одним из важнейших свойств аналитических функций является следующее свойство единственности: функция полностью определяется своим значением и значениями всех своих производных в какой-нибудь точке множества аналитичности функции. Классы функций, характеризуемые подобным свойством единственности, являются более широкими, чем классы аналитических функций. Они получили название квазианалитических классов. Классическая теория квазианалитических классов функций развита на отрезке действительной оси (см., например, [1]).

В данной работе рассматриваются аналитические и квазианалитические классы функций на разомкнутой жордановой спрямляемой кривой, рассмотрению которых предшествует изучение возможностей распространения формулы Ньютона–Лейбница на интегрирование по кривых, принадлежащих некоторым широким классам, содержащим и негладкие кривые.

При доказательстве теоремы 1 строится пример спрямляемой кривой и заданной на ней непрерывной функции, для которых формула Ньютона–Лейбница не верна. В теореме 2 устанавливаются условия на кривую и заданную на ней функцию, достаточные для справедливости формулы Ньютона–Лейбница.

Теоремой 3 устанавливается справедливость формулы Ньютона–Лейбница для интеграла по кривой, являющейся локально кривой типа "хорда-дуга" (т.е. кривой, у которой отношение длины дуги, одним концом которой является фиксированная точка a, к длине стягивающей эту дугу хорды ограничено числом, зависящим от a). С помощью теоремы 3 в теоремах 4 и 5 соответственно классический критерий аналитичности функции, заданной на отрезке действительной оси (см., например, [1, с. 102]), и классические достаточные условия квазианалитичности класса функций [1, с. 104] переносятся на функции, заданные на кривой, являющейся локально кривой типа "хорда-дуга".

2. О формуле Ньютона–Лейбница на спрямляемой кривой. Условимся, что всюду в дальнейшем γ обозначает разомкнутую жорданову спрямляемую кривую в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $\gamma(a,z)$ дугу кривой γ с началом в точке a и концом в точке z, через $l_\gamma(a,z)$ — длину дуги $\gamma(a,z)$, а через $d_\gamma(a,z)$ — диаметр этой дуги.

Будем говорить, что кривая γ *локально* является *кривой типа "хорда-дуга"* (или *кривой типа "хорда-диаметр"*), если для каждой точки $a \in \gamma$ существует положительное число k_a, зависящее от a, такое, что для всех $z \in \gamma$ справедливо неравенство

$$l_\gamma(a,z) \le k_a\,|z-a| \tag{1}$$

(или, соответственно, неравенство

$$d_\gamma(a,z) \le k_a\,|z-a|\ ). \tag{2}$$

Очевидно, что класс кривых, являющихся локально кривыми типа "хорда-дуга", содержит класс разомкнутых спрямляемых кривых, для которых отношение длины дуги к длине хорды, стягивающей эту дугу, ограничено положительным числом, не зависящим от выбора дуги. Класс кривых, являющихся локально кривыми типа "хорда-диаметр", содержит все квазиконформные спрямляемые кривые, поскольку они удовлетворяют неравенству вида (2) с не зависящей от точек a и z постоянной q вместо k_a (см., например, [2]). Обратные включения не имеют места хотя бы потому, что среди кривых, являющихся локально кривыми типа "хорда-дуга", имеются кривые с нулевыми углами.

Функцию $F:\gamma\to\mathbb{C}$ называют *первообразной* функции $f:\gamma\to\mathbb{C}$, если она имеет на γ производную, совпадающую с f.

Лемма 1. *Для того чтобы непрерывная функция $f:\gamma\to\mathbb{C}$ имела первообразную $F:\gamma\to\mathbb{C}$ и была справедлива формула Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_{\gamma(z_1,z_2)} f(t)\,dt = F(z_2)-F(z_1) \qquad \forall\, z_1,z_2\in\gamma\,, \tag{3}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{\zeta\to z,\,\zeta\in\gamma} \frac{1}{\zeta-z}\int\limits_{\gamma(z,\zeta)} (f(t)-f(z))\,dt = 0 \qquad \forall\, z\in\gamma. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(z):=\int\limits_{\gamma(z_0,z)} f(t)\,dt,$$

где z_0 — фиксированная точка кривой γ. Из равенства

$$\frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}-f(z)=\frac{1}{\zeta-z}\int\limits_{\gamma(z,\zeta)} (f(t)-f(z))\,dt$$

следует, что F является первообразной функции f тогда и только тогда, когда выполняется условие (4). Теперь доказательство завершается по стандартной схеме (см., например, [3, с. 350]).

При $\delta > 0$ обозначим $\gamma_z(\delta) := \{\zeta \in \gamma : |\zeta - z| \le \delta\}$.

Пусть $\xi \in \gamma$ и $\breve{\gamma}$ — произвольная разомкнутая дуга кривой γ, имеющая точку ξ одним из своих концов, а точки z и ζ принадлежат множеству $\breve{\gamma}_\xi(2\delta) \setminus \breve{\gamma}_\xi(\delta)$. Обозначим

$$\nu(\gamma) := \sup \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\breve{\gamma}(z,\zeta)} d\,\mathrm{Arg}(t-\xi) \right|,$$

где точная верхняя грань берется по всевозможным указанным выше ξ, $\breve{\gamma}$, z, ζ.

Величина $\nu(\gamma)$, можно сказать, характеризует "степень спиральности" кривой γ. В работе [4] доказано, что $\nu(\gamma)$ конечно в случае, если γ — дуга квазиконформной спрямляемой кривой.

В следующей теореме устанавливается, что на кривых с бесконечным $\nu(\gamma)$ формула Ньютона–Лейбница может быть не верна.

Теорема 1. *Существуют кривая γ и непрерывная функция $f : \gamma \to \mathbb{C}$ такие, что $\nu(\gamma) = \infty$ и условие* (4) *не выполняется.*

Доказательство. Рассмотрим кривую $\gamma := \{0\} \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k$, где

$$\gamma_k := \bigcup_{j=1}^{k^2+1} \bigcup_{l=1}^{4} [z_{k,j,l}; z_{k,j,l+1}]\,,$$

при этом $[z_{k,j,l}; z_{k,j,l+1}]$ обозначает прямолинейный отрезок, соединяющий точки $z_{k,j,l}$ и $z_{k,j,l+1}$, которые определяются соотношениями $z_{k,j,l} := (2^{-k} - (j-1)\,r_k)e^{i(2l+1)\frac{\pi}{4}}$, $l = 1,2,3,4$, в которых $r_k :=$ $:= (2-\sqrt{2})\,2^{-k}\,k^{-2}$, и $z_{k,j,5} := z_{k,j+1,1}$ при всех $j = 1,2,\ldots,k^2+1$, а также $z_{k,k^2+2,1} := z_{k+1,1,1}$.

Очевидно, что $\gamma \setminus \{0\}$ является объединением счетного множества спиралей γ_k, состоящих из k^2+1 витков. С учетом того, что длина кривой γ_k меньше, чем $\sqrt{2}\;2^{3-k}\,(k^2+1)$, легко устанавливается, что кривая γ является спрямляемой. В то же время, из очевидной оценки $\nu(\gamma_k) > k^2$ следует, что $\nu(\gamma) = \infty$.

Покажем, что непрерывная функция $f : \gamma \to \mathbb{C}$, определяемая выражением

$$f(t):=\begin{cases} 0 \qquad \text{при} \quad t\in\{0\}\cup\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{k^2+1}[z_{k,j,4};z_{k,j+1,1}]\,, \\ \dfrac{1}{k} \qquad\qquad \text{при} \quad t\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{k^2+1}[z_{k,j,2};z_{k,j,3}]\,, \\ \dfrac{\mathrm{Im}(z_{k,j,1}-t)}{k\ \mathrm{Im}(z_{k,j,1}-z_{k,j,2})} \quad \text{при} \quad t\in[z_{k,j,1};z_{k,j,2}]\,, \\ \dfrac{\mathrm{Im}(z_{k,j,4}-t)}{k\ \mathrm{Im}(z_{k,j,4}-z_{k,j,3})} \quad \text{при} \quad t\in[z_{k,j,3};z_{k,j,4}]\,, \end{cases}$$

не удовлетворяет условию (4). С этой целью, рассматривая последовательность $\zeta_k := z_{k,1,2}$, стремящуюся при $k\to\infty$ к точке $z=0$, и обозначая при этом $\gamma_{j,k} := [z_{k,j,2};z_{k,j,3}]$, получаем оценку

$$\left|\frac{1}{\zeta_k-z}\int\limits_{\gamma(z,\zeta_k)}(f(t)-f(z))\,dt\right|\geq 2^{k-1}\left|\mathrm{Re}\int\limits_{\gamma(z,\zeta_k)}f(t)\,dt\right|=$$

$$=2^{k-1}\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{j=1}^{m^2+1}\int\limits_{\gamma_{j,m}}\frac{1}{m}\,dt>2^{k-1}\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{j=1}^{m^2+1}\frac{1}{m\,2^{m-1}}>\sqrt{2}(k+1)\,,$$

вследствие которой условие (4) не выполняется. Теорема доказана.

Прежде, чем установить условия на кривую γ и функцию $f:\gamma\to\mathbb{C}$, достаточные для справедливости формулы (3), введем обозначения: $\Theta_z(\delta) := \dfrac{\delta^2}{\theta_z(4\delta)-\theta_z(\delta)}$, где $\theta_z(\delta) := \mathrm{mes}\ \gamma_z(\delta)$, и

$$\Omega_f(\alpha,\beta) := \begin{cases} \sup\limits_{\alpha\leq\tau\leq\beta}\dfrac{\omega_{\gamma,f}(\tau)}{\tau} & \text{при } 0<\alpha\leq\beta, \\ \Omega_f(\beta,\beta) & \text{при } 0<\beta<\alpha, \end{cases}$$

где $\omega_{\gamma,f}(\tau) := \sup\limits_{|z_1-z_2|\leq\tau,\ z_1,z_2\in\gamma}|f(z_1)-f(z_2)|$ — модуль непрерывности функции $f:\gamma\to\mathbb{C}$.

Теорема 2. *Пусть γ локально является кривой типа "хорда-диаметр" и число $\nu(\gamma)$ конечно, а функция $f:\gamma\to\mathbb{C}$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{\delta\to 0}\ \sup_{z\in\gamma}\int\limits_0^\delta \Omega_f(\Theta_z(x),x)\,dx=0. \tag{5}$$

Тогда f имеет первообразную и справедлива формула (3).

Доказательство. Пусть z и ζ — произвольные точки кривой γ, $b_n:=2^{-n}\max\limits_{t\in\gamma(z,\zeta)}|z-t|$. Применяя к кривой $\gamma(z,\zeta)$ и сужению на нее функции f теорему 3 из [4], а затем используя свойства функций θ_ξ, Ω_f и неравенство (2), получаем соотношения

$$\Bigg|\int\limits_{\gamma(z,\zeta)}(f(t)-f(z))\,dt\Bigg|\le c\sup_{\xi\in\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{b_n/4}^{b_n/2} b_n\,\Omega_f\left(\frac{b_n^2}{\theta_\xi(b_n)-\theta_\xi(b_{n+1})},b_n\right)dx\le$$

$$\le c\sup_{\xi\in\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{b_n/4}^{b_n/2} x\,\Omega_f\left(\frac{x^2}{\theta_\xi(4x)-\theta_\xi(x)},4x\right)dx=$$

$$=c\sup_{\xi\in\gamma}\int\limits_0^{b_0/2} x\,\Omega_f\left(\Theta_\xi(x),4x\right)dx\le$$

$$\le c\,k_z\,|\zeta-z|\left(\sup_{\xi\in\gamma}\int\limits_0^{b_0/2}\Omega_f(\Theta_\xi(x),x)\,dx+\omega_{\gamma,f}(2b_0)\right), \tag{6}$$

в которых через c обозначены различные постоянные, не зависящие от z и ζ. Теперь доказательство завершается применением леммы 1, поскольку выполнение условия (4) следует из соотношений (5), (6).

В следующей теореме для функции f, заданной на кривой, являющейся локально кривой типа "хорда-дуга", снимается ограничение (5) на функцию f.

Теорема 3. *Пусть γ локально является кривой типа "хорда-дуга", а функция f непрерывна на γ. Тогда f имеет первообразную и справедлива формула* (3).

Утверждение теоремы очевидным образом следует из оценки

$$\left| \int\limits_{\gamma(z,\zeta)} (f(t)-f(z))\,dt \right| \leq k_z\,|\zeta - z| \sup_{t\in\gamma(z,\zeta)} |f(t)-f(z)|$$

и леммы 1.

Если γ локально является кривой типа "хорда-дуга", а функция f имеет на γ контурные производные $f_\gamma^{(n)}$ до порядка m включительно, то с использованием равенства (3) по стандартной схеме [1, с. 110] при всех $z = z_0, z_1, \ldots, z_m, z_{m+1} = a \in \gamma$ устанавливается справедливость равенства

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{m} f_\gamma^{(n)}(a)\; I_n(a, z_1, z_2, \ldots, z_n) -$$

$$-\sum_{n=1}^{m+1} \int\limits_{\gamma(z_{n-1},z_n)} f_\gamma^{(n)}(t)\; I_{n-1}(t, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})\; dt\,, \tag{7}$$

где

$$I_0(t, z_1, z_2, \ldots, z_0) := 1\,, \quad I_1(t, z_1, z_2, \ldots, z_1) := \int\limits_{\gamma(t,z_1)} d\tau\,,$$

$$I_n(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) := \int\limits_{\gamma(t,z_n)} \int\limits_{\gamma(\tau_{n-1},z_{n-1})} \ldots \int\limits_{\gamma(\tau_2,z_2)} \int\limits_{\gamma(\tau_1,z_1)} d\tau d\tau_1 \ldots d\tau_{n-2}\, d\tau_{n-1}$$

при $n = 2, 3, \ldots, m$. В частности, при $z_1 = z_2 = \cdots = z_m = z$ из (7) получаем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{m} \frac{f_\gamma^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n + \frac{1}{m!} \int\limits_{\gamma(a,z)} f_\gamma^{(m+1)}(t)\,(z-t)^m\; dt\,. \tag{8}$$

3. Аналитические и квазианалитические классы функций на разомкнутых кривых. Пусть $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Обозначим через $C\{M_n\}$ класс функций f, имеющих на γ контурные производные $f_\gamma^{(n)}$ всех порядков, для которых существует зависящая от f постоянная c_f такая, что справедливы оценки

$$|f_\gamma^{(n)}(t)| \leq \; (c_f)^n\, M_n \qquad \forall\; t\in\gamma, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{9}$$

Функцию f, заданную на γ, называют *аналитической* на этой кривой, если существует голоморфная в некоторой окрестности кривой γ функция F такая, что при всех $t \in \gamma$ выполняется равенство $F(t) = f(t)$.

Теорема 4. *Если γ локально является кривой типа "хорда-дуга", то класс $C\{n!\}$ функций, заданных на γ, совпадает с классом функций, аналитических на γ.*

Доказательство. Пусть на γ задана функция f, принадлежащая классу $C\{n!\}$. Оценивая остаточный член формулы Тейлора (8) с использованием неравенств (1) и (9), где $M_n = n!$, получаем

$$\left|\frac{1}{m!}\int\limits_{\gamma(a,z)} f_\gamma^{(m+1)}(t)\,(z-t)^m\,dt\,\right| \le \frac{(m+1)!\,(c_f)^{m+1}}{m!}\int\limits_{\gamma(a,z)} |z-t|^m\,|dt| \le$$

$$\le (c_f\,k_a)^{m+1}\,|z-a|^{m+1}\,.$$

Таким образом, при $|z-a| < 1/(c_f\,k_a)$ остаточный член формулы Тейлора (8) стремится к нулю при $m \to \infty$. Следовательно, функция f на γ в некоторой окрестности произвольной точки $a \in \gamma$ представляется в виде ряда

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_\gamma^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n =: F(z)\,, \tag{10}$$

т.е. является аналитической функцией на γ.

Обратно, при условии, что f является аналитической функцией на γ, по стандартной схеме [1, с. 102] устанавливается выполнимость оценок (9). Теорема доказана.

Рассмотрим также квазианалитические классы функций на кривой γ. Будем говорить, что бесконечно дифференцируемые на γ функции образуют *квазианалитический класс*, если для любых двух функций f и g этого класса из равенств

$$f_\gamma^{(n)}(t) = g_\gamma^{(n)}(t)\,, \qquad n = 0, 1, \dots\,,$$

выполняющихся в некоторой точке $t \in \gamma$, следует тождество $f \equiv g$ на γ.

Используя формулы (7), (8) и применяя схему Банга (см. [1, с. 111–116]) для доказательства квазианалитичности класса функций, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть γ локально является кривой типа "хорда-дуга". Для того чтобы класс $C\{M_n\}$ был квазианалитическим на γ достаточно выполнения одного из следующих условий:*

а) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\inf_{k\geq n}\ \sqrt[k]{M_k}\right)^{-1}=\infty\,;$$

б) $$\int_1^{\infty} r^{-2}\ \ln\left(\sup_{n\geq 1}\frac{r^n}{M_n}\right)dr=\infty\,;$$

в) либо $\varliminf_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{M_n}<\infty$, *либо* $\lim_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{M_n}=\infty$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c}=\infty$, *где* $\{M_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ *— выпуклая регуляризация посредством логарифмов последовательности* $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. [1, с. 24]).

Список литературы

[1] Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. — 267 с.

[2] Lehto O., Virtanen K. I. Quasikonforme Abbildungen. — Springer–Verlag, Berlin – New York. MR, 1965. — **32**, 995. — 269 p.

[3] Никольский С. М. Курс математического анализа. Том 1. — Москва: Наука, 1973. — 432 с.

[4] Герус О. Ф. О модуле непрерывности телесных производных интеграла типа Коши // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 4. — С. 476 — 484.