ЗМІСТ

НАШІ АВТОРИ

***БОРИСОВА** Валентина Олександрівна* – методист Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МОНМС України

***КУРЧЕНКО** Олександр Олексійович* – професор КНУ імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук

***ЛЕЙФУРА** Валентин Миколайович* – професор Чорноморського державного університету ім. П. Могили, заслужений учитель України

***ЛЕНЧУК** Іван Григорович* – професор, доцент кафедри математики Житомирського державного університету ім. І. Франка, кандидат технічних наук

***МІТЕЛЬМАН** Ігор Михайлович* – доцент, викладач Рішельєвського ліцею при Одеському національному університеті ім. І. Мечникова, кандидат фізико-математичних наук

***НОВОСЕЛЕЦЬКА** Тетяна Борисівна* – учитель математики Авіакосмічного ліцею НАУ, м. Київ

***ПОВАР** Наталія Вікторівна* – студентка V курсу ДДМА, м. Дніпропетровськ

***ПОВАР** Світлана Вікторівна* – доцент кафедри фізики Криворізького технічного університету

***ПОРТЕНКО** Микола Іванович* – Інститут математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України

***РАБЕЦЬ** Катерина Володимирівна* – доцент Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, кандидат фізико-математичних наук

***РЕПЕТА** Богдан Вікторович* – студент IV курсу механіко-математичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка

***РЕПЕТА** Віктор Кузьмич* – доцент кафедри вищої та обчислювальної математики НАУ, кандидат фізико-математичних наук, м. Київ

***СИТА** Галина Миколаївна* – НПУ ім. М. Драгоманова, кандидат фізико-математичних наук

***ШМИГЕВСЬКИЙ** Микола Васильович* – науково-освітня спілка «Майбутнє», кандидат фізико-математичних наук, м. Київ

***ЯСІНСЬКИЙ** В'ячеслав Андрійович* – доцент Вінницького державного педагогічного університету ім. М. Коцюбинського, заслужений учитель України

КОРЕСПОНДЕНТАМ ЖУРНАЛУ

Тим, хто хоче виступити на сторінках журналу «Математика в школі», повідомляємо вимоги, яким повинні задовольняти матеріали, що надходять до редакції.

Рукопис статті адресується до однієї з рубрик журналу. Можна запропонувати нову рубрику.

- Автор подає до редакції рукопис українською мовою у двох примірниках, обсягом до 12 сторінок формату А4.
- Автор підписує другий примірник рукопису, стверджуючи цим достовірність дат, цитат, фактів тощо.
- Текст рукопису має бути набраний на комп'ютері (друк з одного боку сторінки, півтора інтервали між рядками, розмір шрифту 14) у текстовому редакторі MicrosoftWord версії не вище MicrosoftWord-2000, а формули – у редакторі формул Microsoft Equation версії не вище MicrosoftEquation-3.01. Дискети авторам статей не повертаються. Ілюстрації подаються на окремих аркушах.

До рукописів, які містять задачі, обов'язково додавати розв'язання всіх задач.

- Поля сторінок рукопису: ліве і нижнє – 25 мм, верхнє – 20 мм, праве – 10 мм.
- Обов'язковим є електронний варіант тексту та ілюстрацій.
- Бібліографія до рукопису має бути складена з додержанням правил стандартів.
- До рукопису додаються дані про авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, посада, адреса, телефон).
- Статті, які передбачається використати при поданні до захисту дисертаційних робіт, надсилати з рецензією та зазначенням рубрики «Наукові дослідження».
- Прохання не надсилати ті самі матеріали водночас до нашого журналу та інших видань.

Редакція журналу

Іван ЛЕНЧУК

Метричні побудови у площині загального розташування

Анотація. У статті пропонується поліпшити результативність навчання геометрії шляхом сміливішого включення конструктивної складової до звичайних стереометричних задач. Зокрема, подається метод суміщення як строге обґрунтування виконання винесених креслень.

Постановка проблеми. Навчаючи прийомів розв'язування задач стереометрії, вчитель математики часто-густо вдається до так званих *винесених креслень*, які в кожному окремому випадку є де-факто зображенням у формі оригіналу[1] грані або перерізу заданого на проекційному кресленні тіла (комбінації кількох тіл). Завдяки простим і зрозумілим законам планіметрії із плоскою фігурою неспотвореної форми учню звичніше, зручніше працювати на гарантовано правильний результат, адже не секрет, що стереометричні задачі на обчислення здебільшого зводяться до розв'язування однієї чи кількох планіметричних ситуацій.

[1] Говорять, що фігури мають однакову форму, якщо вони подібні.

Як безпомилково виконати винесене креслення? Яким чином (методом) «покласти» на площину дошки (зошита) спотворену на зображенні плоску фігуру і з цим отримати її справжню, оригінальну форму?

Аналіз останніх досліджень. Несторонні оборонцем, пропагандистом конструктивної геометрії в навчальному процесі, розробником її методологічних основ і принципів був професор М. Ф. Четверухін. У фахово ідеальних підручниках, посібниках і наукових працях, написаних виключно для вчителів і студентів, відомий геометр чітко відмежовував позиційні геометричні задачі від метричних, підкреслюючи, що « ... пропонована методологічна концепція постановки метричних задач на проекційному кресленні не потребує яких-небудь спеціальних знань із нарисної геометрії, і розв'язування задач здійснюється за допомогою звичайних стереометричних операцій, розглядуваних у шкільному курсі геометрії. Водночас можливість ефективного розв'язування просторових задач на проекційному кресленні, *коли фактичною побудовою з'являється шукана фігура, є надзвичайно вагомим моментом геометричної освіти учнів»* [1, *64*, *65*]. Визнаний педагог надавав величезного значення набуттю учнями вмінь і навичок у пошуку та встановленні визначальних взаємовиражень елементів геометричних фігур шляхом аналізу просторових ситуацій в уявленнях із наступною їх реалізацією на проекційному кресленні. При цьому пріоритети в динаміці зображення результатів побудов були віддані **методу суміщення** площини загального розташування з картинною площиною, який і є, власне, базовим у виконанні винесених креслень.

Оповісниками, прихильниками та інтерпретаторами педагогічних ідей М. Ф. Четверухіна слід вважати Б. В. Романовського, О. Р. Зенгіна, І. Г. Польського, П. С. Орєхова, Л. М. Лоповка, В. М. Савченка, В. М. Литвиненка та ін. Наприклад, В. М. Литвиненко так обгрунтовує підвалини методу винесених креслень: «Оскільки всі властивості фігур, які зберігаються при паралельному проектуванні, зберігаються і при більш «слабкому» перетворенні — перетворенні подібності, то якщо на фігурі Ф′, подібній фігурі $Ф_0$, точка X' ділить відрізок $A'C'$ у відношенні $A'X' : X'C'$, то і на зображенні, побудованому за правилами паралельного проектування, точка X буде ділити відрізок AC у тому ж відношенні, тобто $AC : XC = A'X' : X'C'$. Не маючи можливості виконати замовлену метричну побудову на оригіналі (на фігурі $Ф_0$), ми виконуємо цю побудову на фігурі Ф′, подібній фігурі $Ф_0$». Далі читаємо чітке означення: «Креслення, на якому будується фігура Ф′ і на якому потім виконуються точно необхідні метричні побудови, називається *винесеним кресленням*» [2, *43*, *44*].

Формулювання цілей статті (постановка задачі). Обчислювальна метрична геометрія припускає певні умовності на проекційних кресленнях. Приміром, якщо потрібно знайти відстань від вершини куба зі стороною *a* до діагоналі, яка з'єднує дві інші його вершини ([3], № 36, *79*), той, хто розв'язує задачу від руки малює куб і будь-де на діагоналі обирає точку, яку умовно приймає за основу шуканого перпендикуляра. Далі відрізок перпендикуляра відносить до метрично розмірного прямокутного трикутника й веде формальний пошук розв'язування, як у планіметрії.

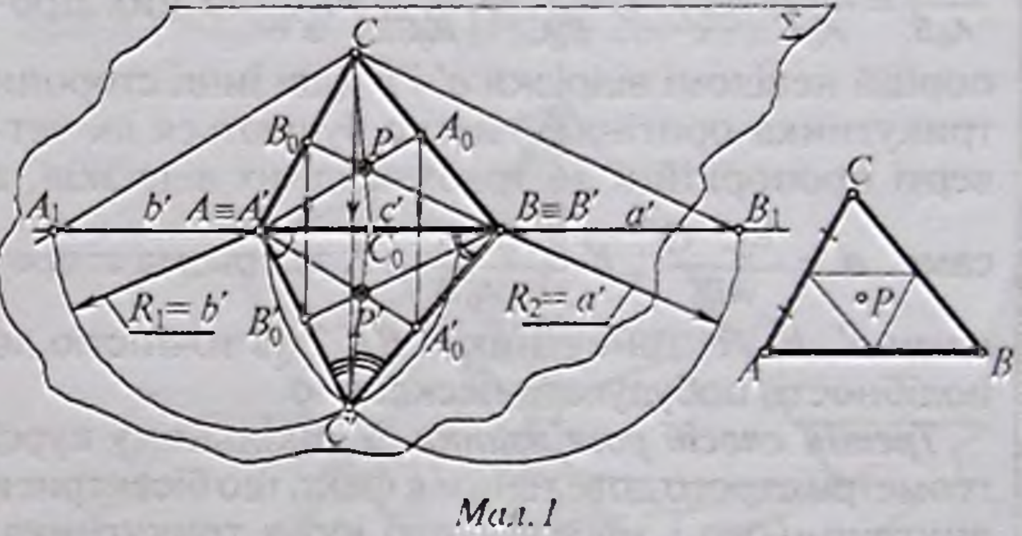
Однак конструктивна геометрія має на увазі строго обгрунтовану, *завершену побудову — закономірне зображення перпендикуляра на кресленні* ([4], № 1, *15*). Цим суттєво посилюється геометрична складова пропозиції, остання набуває істинно стереометричного характеру. Не може бути сумніву, що лише такі задачі сприяють становленню й формуванню в учнів навичок просторових уявлень та уяви, творчо-розвивального образного мислення, орієнтують на діяльнісний, творчий пошук результату, який з'являється на проекційному кресленні як наслідок розумових уявлень і закономірних перетворень на малюнках, здійснюваних особисто виконавцем побудов.

Ми ставимо за мету змістовно поглибити геометричну сутність задач тривимірного евклідового простору в ЗОШ та ВНЗ, чим хоча б трохи наблизити учнів і студентів до методів прикладної геометрії та реалій творчого життя. Одним із засобів досягнення таких цілей є, зокрема, кваліфіковане оволодіння методом суміщення.

Основна частина. Найперше, як тренувальну, розв'яжемо на проекційному малюнку одну із задач у площині загального розташування, чим візуально продемонструємо сутність методу суміщення.

Задача №1. На кресленні задано зображення трикутника ABC, причому точка P є зображенням центра вписаного у трикутник кола. Потрібно знайти справжню форму трикутника-оригіналу.

Помічаємо (мал. 1), що задачу сформульовано цілком коректно, оскільки площина $\Sigma(A, a)$ метрично визначена двома незалежними умовами, накладеними на оригінал: $A'A'_0 \perp B'C'$ і $B'B'_0 \perp A'C'$. Урахування вказаних взаємозалежностей гарантує єдиний графічний розв'язок на картинній площині.



Мал.1

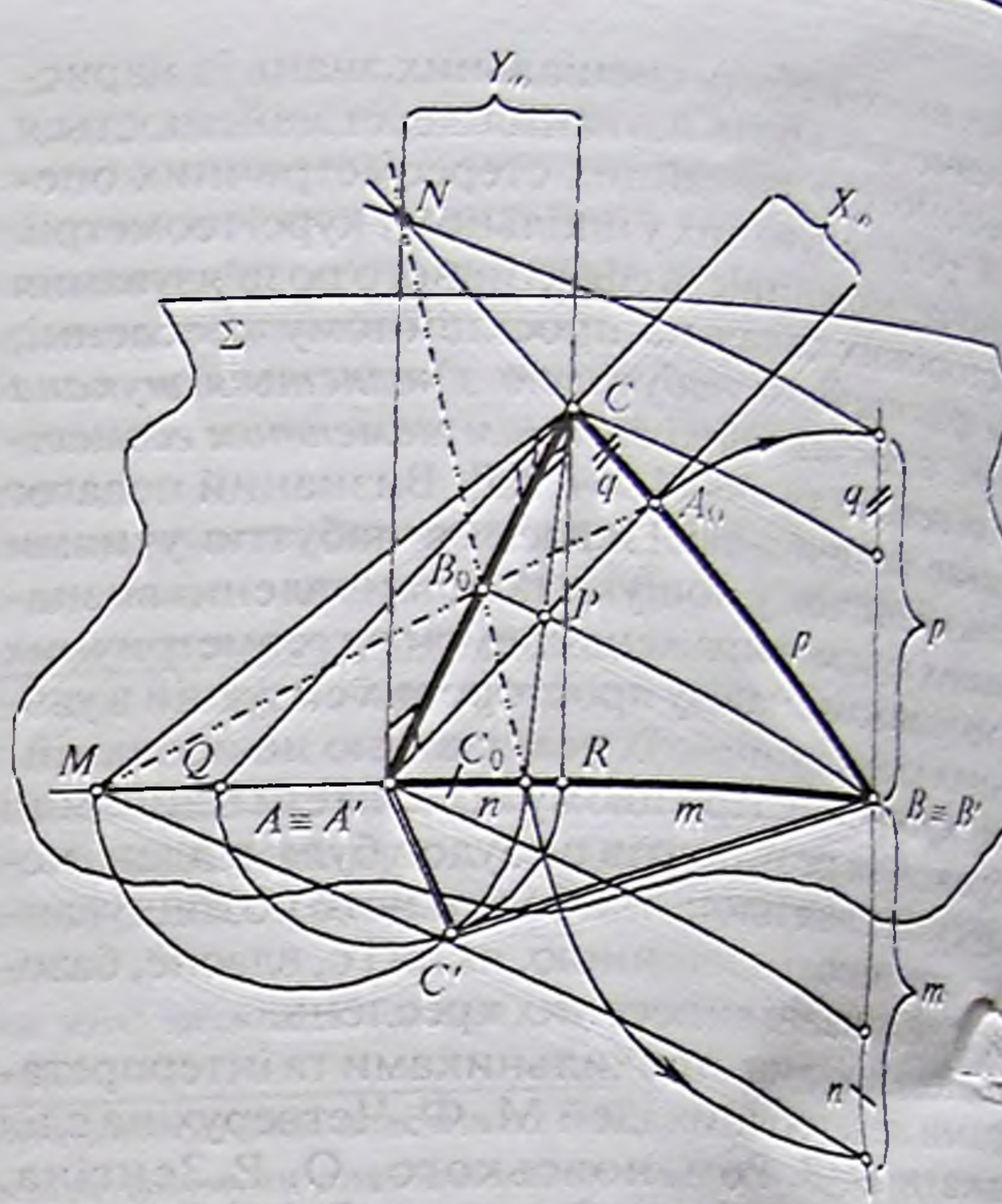
Відразу ж домовимося в задачах, які доведеться розв'язувати методом суміщення, уявлювані перетворення подібності у площині Σ з деяким, загалом невідомим нам коефіцієнтом $k = AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$, і рух у просторі до злиття будь-якої сторони фігури-оригіналу з відповідною стороною фігури-зображення вважати такими, що вже відбулися.

Перший спосіб розв'язання. Нехай трикутник ABC зображає на картинній площині деякий трикутник $A'B'C'$, а довільна точка P усередині області її існування [5, *99*] є зображенням центра кола, вписаного у трикутник $A'B'C'$ (точка перетину бісектрис). Припустимо також, що сторона $A'B'$ трикутника-оригіналу зливається зі стороною AB трикутника-зображення: $A'B' = AB$. Оскільки AA_0, BB_0 і CC_0 зображають бісектриси трикутника, то з урахуванням відповідної властивості бісектриси можемо записати: $\frac{CA_0}{A_0B} = \frac{C'A'_0}{A'_0B'} = \frac{b'}{c'}$ і $\frac{AB_0}{B_0C} = \frac{A'B'_0}{B'_0C'} = \frac{c'}{a'}$ (*) [6, *163*]. Проведемо через точку C прямі $CB_1 \parallel C_0B$ і $CA_1 \parallel A_0A$. Тоді $\Delta AA_0B \sim \Delta A_1CB$ і $\Delta BB_0A \sim \Delta B_1CA$. Звідси та з рівності (*) дістанемо: $\frac{CA_0}{A_0B} = \frac{A_1A}{AB} = \frac{b'}{c'}$ і $\frac{AB_0}{B_0C} = \frac{AB}{BB_1} = \frac{c'}{a'}$. Але, беручи до уваги, що $AB = A'B' = c'$, знайдемо: $AA_1 = b'$ і $BB_1 = a'$. Таким чином, сторони трикутника оригіналу c', b' і a' на кресленні вже побудовані (з точністю до подібності), після чого й сам трикутник легко будується.

Другий спосіб розв'язання. Виявляється, що точка P як зображення перетину бісектрис трикутника-оригіналу $A'B'C'$ разом із трикутником-зображенням ABC цілком метрично визначають площину Σ. Це твердження істинне хоча б тому, що саме точка P в її геометричній суті встановлює на кресленні відношення справжніх довжин трьох визначальних (попарно непаралельних) відрізків a', b' і c'. При цьому відношення двох відрізків еквівалентне заданню одного параметра, а відношення трьох відрізків — заданню двох метричних параметрів. Справді, за умови, що $AB \equiv A'B' = c'$,

$\frac{CA_0}{A_0B} = \frac{C'A'_0}{A'_0B'} = \frac{b'}{c'}$ і $\frac{AB_0}{B_0C} = \frac{A'B'_0}{B'_0C'} = \frac{c'}{a'}$. Із цих пропорцій невідомі відрізки a' і b' (дві інші сторони трикутника-оригіналу) легко будуються як четверті пропорційні до трьох заданих відрізків, а саме: $a' = \frac{B_0C \cdot c'}{AB_0}$; $b' = \frac{CA_0 \cdot c'}{A_0B}$. А за трьома сторонами a', b' і c' трикутник $A'B'C'$ (із точністю до подібності) побудувати нескладно.

Третій спосіб розв'язання. У шкільному курсі геометрії строго доведеним є факт, що бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника, проведені з однієї і тієї самої вершини, утворюють між собою прямий кут. Крім того, в чинному підручнику ([6], № 46, *171*) доводиться таке твердження: «Бісектриса зовнішнього кута трикутника розділяє його протилежну сторону зовнішнім чином у відношенні, в якому бісектриса відповідного внутрішнього кута ділить цю саму сторону трикутника внутрішнім чином». Ці сукупно взяті твердження в нашому конкретному випадку означають, що якщо (мал. 2) CC_0 зображає бісектрису внутрішнього кута C' ($\angle ACB$) трикутника $A'B'C'$, а CM, яку побудовано певним чином, — бісектрису відповідного зовнішнього кута



Мал. 2

($\angle ACN$), то кут MCC_0 в оригіналі є прямим. Аналогічно, якщо AA_0 зображає бісектрису внутрішнього кута A' ($\angle CAB$) трикутника $A'B'C'$, а AN, побудова якої теж безсумнівна, — бісектрису зовнішнього кута трикутника з тією самою вершиною ($\angle CAM$), то кут NAA_0 в оригіналі теж прямий. Якщо до того ж через точку C провести прямі $CQ \parallel A_0A$, $CR \parallel NA$, то кут QCR в оригіналі також дорівнюватиме 90°, що випливає безпосередньо з означених вище співвідношень та теоремою 3.1 у тому самому підручнику [3, *22*].

Отже, з шуканої точки C' два відрізки MC_0 і QR на прямій $AB \equiv A'B'$ видно під прямими кутами. Тож залишається лише на відрізках MC_0 і QR, як на діаметрах, побудувати два півкола і зафіксувати точку перетину C'. Трикутник $A'B'C'$ відтворює на кресленні справжню форму трикутника ABC.

Між іншим, побудову зображення бісектриси CM здійснено шляхом поділу відрізка AB зовнішнім чином у відношенні $\frac{BM}{MA} = \frac{BC_0}{C_0A}$. Так само, для відшукання зображення бісектриси AN довелося відрізок BC поділити точкою N знову ж таки зовнішнім чином у відношенні $\frac{BN}{NC} = \frac{BA_0}{A_0C}$. Тут, для зручності, було введено позначення $BC_0 = m$, $C_0A = n$ і $BA_0 = p$, $A_0C = q$, що й відображено на малюнку.

Більш досвідченому читачеві (студенту чи вчителю-математику, який знає проективну геометрію) пропонуємо самостійно пояснити цей останній спосіб, посилаючись на гармонійні властивості повних чотирикутників CA_0PB_0

AB_0PC_0 (див. штрих-пунктирні тонкі лінії з двома крапками).

Примітка. Вважаю, що цікава притча, яку я наважуюся переповісти читачеві, гідна стати маленьким здобутком історії конструктивної геометрії.

У 1972 р. я, ще порівняно молодий претендент на звання «науковець» в галузі прикладної геометрії, за дорученням учителя — чудової людини і знаного в Україні та за її межами геометра професора А. В. Павлова якраз із питань коригування наукових досліджень, перебував у відрядженні в Московському авіаційному інституті на кафедрі прикладної геометрії, яку на той час очолював відомий учений професор І. І. Котов. Мені неймовірно поталанило, там я познайомився з людиною-легендою **М. Ф. Четверухіним.**

Спілкуючись із колегами, а ще більше з аспірантами цих двох яскравих педагогів-геометрів, я й почув оповідь, яку досі й сам неспроможний прийняти за «істину в останній інстанції».

Професор М. Ф. Четверухін доповідав з приводу представлення його на звання академік АПН РСФСР. Доповідач у відведений час глибоко, змістовно, переконливо викладав, обґрунтовував власну теорію конструктивних стереометричних побудов в умовах педагогічного процесу. Із закінченням доповіді, як водиться, прозвучали запитання, виступи, ніщо не віщувало алогічного завершення засідання. Коли ж після таємного голосування з'ясувалося, що лише кілька поважних академіків, присутніх на слуханні, проголосували «за», а решта — «проти», М. Ф. Четверухін не розгубився. Сказавши щось на кшталт «іншого я й не чекав», запропонував розв'язати, без жодного погодження з аудиторією, наведену нами під № 2 задачу. Спокійно записав умову на дошці, гідно вклонився і вийшов. Кілька годин М. Ф. Четверухін просто відпочивав: прогулювався парком, обідав тощо. Повернувшись до зали засідань, побачив дивну картину — жоден слухач не залишив приміщення, проте всі вони були дещо збуджені, збентежені. Головуючий, між тим, проголосив: «Шановний Миколо Федоровичу, ми тут порадилися і вирішили, якщо Ви не заперечуєте, переголосувати».

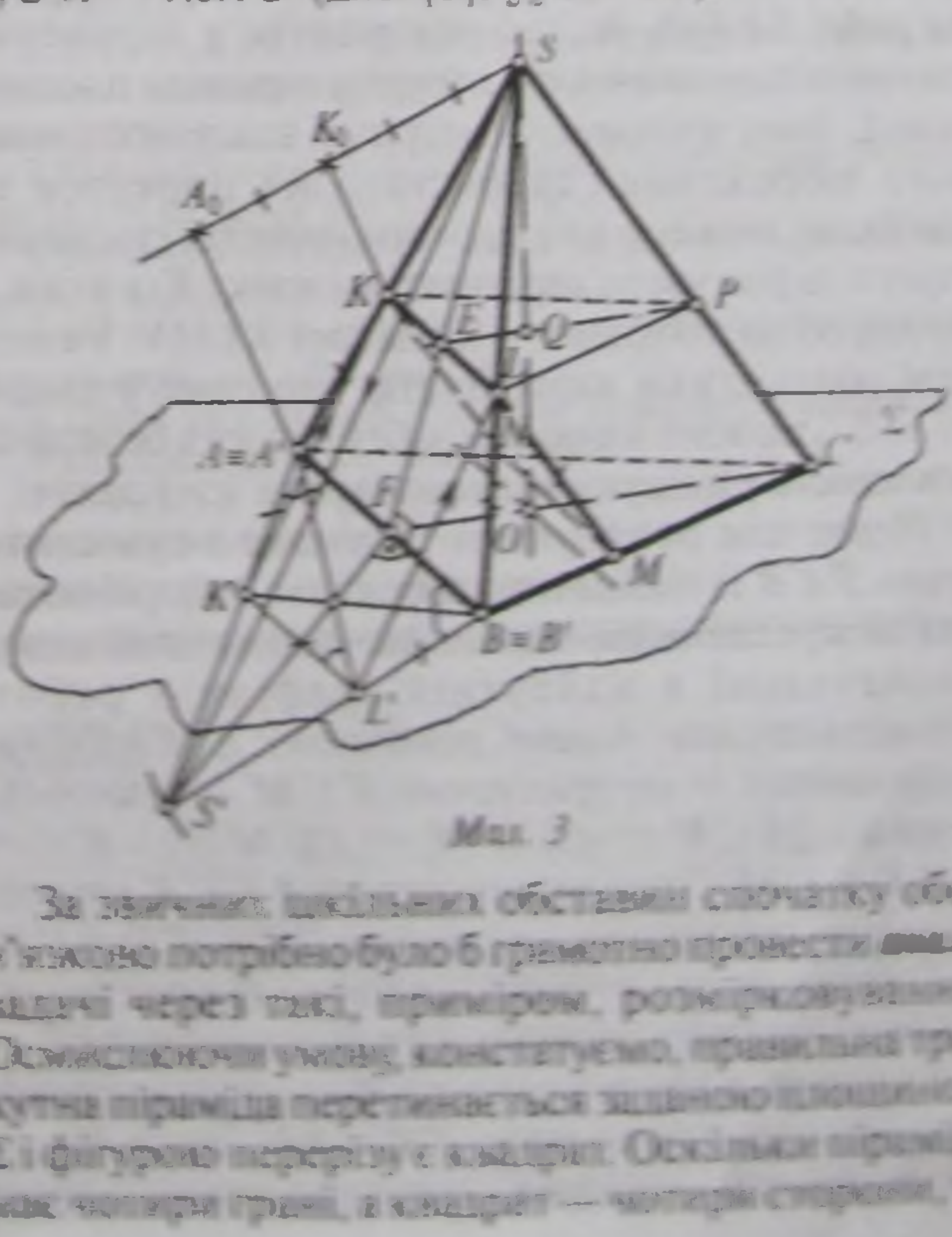
Претендент на високе звання звісно не заперечував. Так одностайно М. Ф. Четверухін був обраний дійсним членом Академії педагогічних наук Російської Федерації.

Із дивної, нетипової у світі науки бувальщини для нас, учителів математики, випливає серйозний висновок: не таким уже й простим та «непотрібним» є розділ «Конструктивна геометрія», як це декому звідси видається, і його цінність у розвивальному, творчому навчанні надзвичайно помітна. Це справжня (природна, без домішок) геометрія. Школа, але останнім часом доводиться спостерігати надмірну заформалізованість предмета «Геометрія» у програмах середніх і особливо вищих навчальних закладів, що аж ніяк не сприяє повноцінному розвитку суб'єкта навчання. Чому б не дослухатися мудрих, знаних, знаменитих учених і педагогів — наших попередників? До слова, ще на початку XIX ст. видатний норвезький математик («формаліст» — за покликанням і результатами досліджень) Н. Х. Абель (1802—1829 рр.) наголошував, що **«Геометрія — не мистецтво якісно міркувати** ***на погано виконаних кресленнях»***. По-іншому це означає, що малюнок, виконаний переважно «від руки», є і «базисом», і «надбудовою» першопредмета!

А зараз хоча б на одному прикладі продемонструємо місце методу суміщення у звичайній евклідовій стереометрії.

Задача № 2. Правильна трикутна піраміда, в якої бічне ребро в півтора рази більше від ребра основи, перетнута площиною. Фігурою перерізу є квадрат. Знайдіть відношення об'ємів многогранників, на які розбиває піраміду переріз.

Схема пошуку розв'язку задачі, безсумнівно, поділяються на два етапи — ***графічний*** і ***обчислювальний***. Від того, наскільки ефективно, вдало (правильно і наочно) впораємося з першим етапом, залежить виразність міркувань і певність успіху в кінцевих обчисленнях. А отже, беззаперечно потрібно мати стабільні навички в розв'язуванні графічними методами метричних задач на проекційних кресленнях просторових фігур, адже, згідно з умовою, зображення піраміди $SABC$ (мал. 3) метрично визначене, на нього затрачено рівно п'ять метричних параметрів: 1) $A'B' = B'C'$; 2) $B'C' = A'C'$; 3) $S'A' = S'B'$; 4) $S'B' = S'C'$; 5) $S'A' = 1{,}5A'B'$ (див. [5], §§ 26—29).



Мал. 3

За звичних шкільних обставин спочатку обов'язково потрібно було б грамотно провести ***аналіз*** задачі через такі, приміром, розмірковування. Осмислюючи умову, констатуємо, правильна трикутна піраміда перетинається заданою площиною Σ і фігурою перерізу є квадрат. Оскільки піраміда має чотири грані, а квадрат — чотири сторони, то площина Σ напевне перетинає кожну грань, і результатом цієї дії є взаємно перпендикулярні відрізки однієї і тієї самої довжини в їх ланцюжковому переліку.

Розглянемо на допоміжному малюнку, виконаному нашвидку «від руки», дві будь-які грані піраміди. Нехай, для визначеності, ними будуть грані SAB і ABC. Припустимо, що саме вони містять у собі одну пару (KL і MN) протилежних сторін квадрата $KLMN$. Зрозуміло, що в такій ситуації Σ паралельна ребру AB, яке є спільним (ребром перетину) для обраних граней. Отже, $KL \parallel AB$ і $MN \parallel AB$. Аналогічно, дві інші грані (SAC і SBC) площина перерізу перетинає паралельно їх спільному ребру SC і в результаті $LM \parallel SC$ і $KN \parallel SC$.

У послідовності візуальних операцій по суті справи, вчитель на дошці (чи учень в зошиті) мав би доповнити *креслення-картину* піраміди орієнтовно за таким алгоритмом.

1) Вибираємо на SA ***довільну*** (!) точку K і проводимо через неї пряму, паралельну AB, до перетину з ребром SB у точці L.

2) Через точки K і L проводимо прямі, паралельні SC, і фіксуємо їх точки N і M перетину з ребрами AC і BC відповідно.

3) З'єднуємо точки M і N у грані ABC відрізком прямої. Уявляємо, що $KLMN$ — шуканий квадрат, який зображується паралелограмом, і приступаємо до виконання зумовлених обчислень.

Такою є загальноприйнята, традиційна схема в роботі з проекційним кресленням на уроці стереометрії. Все ж таки мислячий учень може висловити незадоволення етапом побудови якраз у такому вигляді, адже ***точку K на самому початку обирали на ребрі SA будь-де***, що дезорієнтує у вирішенні питання однозначності перерізу піраміди площиною Σ. Тому враховуючи метричні властивості повного зображення і скориставшись циркулем та лінійкою, можемо вже відомим *методом суміщення* строго зафіксувати кардинальну точку K, а отже, з точністю до побудови — й квадрат $KLMN$. Учителеві математики варто знати, що саме у такий спосіб одержані малюнки забезпечують безкомпромісність у пошуку числового розв'язку задачі.

Перш ніж реалізувати задумане і сумістити грань $S'A'B'$ із площиною зображень, потрібно ще раз за кресленням-картиною осмислити деякі визначальні в майбутній графічній роботі співвідношення. А саме, помічаємо: $L'M' \parallel S'C'$ (за побудовою), тому трикутник $B'L'M'$ — рівнобедрений ($\angle S'C'B' = \angle L'B'M' = \angle L'M'B'$) і $B'L' = A'K' = L'M'$. Отже, чотирикутник $A'K'L'B'$ є трапецією з трьома рівними сторонами: $A'K' = K'L' = L'B'$.

Очевидно, що суміщення точки S просто шукаємо в перетині прямої-перпендикуляра FS' до $A'B'$ за мал., з центром у точці B' радіусом в півтора раза більшим за відрізок $A'B' = AB$. Точку K', що [illegible] шукаємо [illegible] факт

($A'K'L'B'$ — особлива трапеція), будуємо в перетині бісектриси кута $A'B'S'$ із відрізком $A'S'$ ($\angle A'B'K' = \angle B'L'K'$; $\angle A'B'K' = \angle A'L'K'$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих $A'B'$ і $K'L'$). Далі проводимо $K'K \parallel S'S$, що й визначає на ребрі SA шукану точку K (тут етапи площинної побудови і доведення чітко не розмежовуються).

Щоб розв'язати цю саму задачу ***графоаналітичним*** методом, розрахуємо розташування точки K на відрізку SA. Позначимо для зручності сторону квадрата через x, а сторону основи піраміди покладемо рівною 1 (одиниці). Тоді $S'A' = 1{,}5$. Трикутники $S'A'B'$ і $S'K'L'$ подібні, що очевидно. Тому $\frac{A'B'}{K'L'} = \frac{S'A'}{S'K'}$. Але $S'K' = S'A' - K'A'$. Отже, $\frac{1}{x} = \frac{1{,}5}{1{,}5 - x} \Rightarrow A'K' = x = \frac{3}{5}$. У свою чергу, $S'K' = \frac{9}{10}$ і $S'K' : K'A' = SK : KA = 3 : 2$. Тепер побудова точки K на SA може бути виконана вже за допомогою звичного прийому (див. мал. 3).

Таким чином, перший етап на шляху до встановлення розв'язку задачі завершено. Нам залишилося лише виконати відповідні формальні підрахунки.

Отож, згідно з висновком задачі потрібно знайти відношення об'ємів двох многогранників, у яких спільною гранню є квадрат $KLMN$. Для компактності наступних записів введемо позначення: $V_{SABC} = V$; $V_{AKNBLM} = V_1$; $V_{SKLNMC} = V_2$. З метою безпосереднього використання вже відомих з шкільного курсу геометрії формул об'ємів многогранників останній з них ($SKLNMC$) розіб'ємо площиною, паралельною площині основи піраміди (ABC), на два стандартних многогранники: правильну трикутну піраміду $SKLP$ і похилу призму $KLPNMC$, які мають спільну основу KLP. Нехай також $V_{SKLP} = V_3$ і $V_{KLPNMC} = V_4$. Очевидно, що $V_1 = V - V_2$, а $V_2 = V_3 + V_4$ (*). Отже, визначальними є три об'єми: V, V_3 і V_4.

Далі, взявши до уваги умову задачі і пам'ятаючи, що $AB = 1$, $SA = \frac{3}{2}$ і $KL = \frac{3}{5}$, запишемо спочатку вирази саме для цих трьох об'ємів наших же установлених стереометричних фігур: $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO$; $V_3 = \frac{1}{3} S_{KLP} \cdot SQ$; $V_4 = S_{KLP} \cdot QP$ (**), а потім обчислимо їх. Перш ніж [illegible] до решти записів і перетворень, що виконані нижче, коментарі [illegible], оскільки їх зміст дуже добре зрозумілий з малюнка.

Дійсно: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

$S_{KLP} = \frac{1}{2} KL \cdot LP \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{100}$. Із прямокутника

SOC маємо: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}}$, де $OC = \frac{2}{3} FC = \frac{2}{3}\sqrt{BC^2 - \left(\frac{1}{2} AB\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\Delta ASB \sim \Delta KSL$ і $\Delta FSO \sim \Delta ESQ$, тому $\frac{AB}{KL} = \frac{FS}{ES} = \frac{OS}{SQ}$ і $1 : \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}} : SQ \Rightarrow SQ = \frac{3\sqrt{23}}{10\sqrt{3}}$, а $QO = SO - SQ = \frac{\sqrt{23}}{5\sqrt{3}}$.

Нарешті, щоб завершити формалізовані пошуки відповіді, оберненим ходом за формулами (**) і (*) підраховуємо: $V = \frac{\sqrt{23}}{24}$, $V_3 = \frac{9\sqrt{23}}{1000}$, $V_4 = \frac{9\sqrt{23}}{500}$, а отже: $V_2 = \frac{27\sqrt{23}}{1000}$, $V_1 = \frac{11\sqrt{23}}{750}$ і $V_1 : V_2 = 44 : 81$. Задачу розв'язано.

Привертаємо увагу читача до сформованого ланцюжка обчислень, в якому виразно простежується струнка система — *аналітичний метод* міркувань у пошуку результату за принципом «від висновку до умови», що кожен учитель математики просто зобов'язаний уміти робити якісно та ще й на належному науково-методичному рівні. Більше того, цього прийому потрібно наполегливо навчати учнів.

Висновки. В умовах навчального процесу в ЗОШ переважають задачі на обчислення, в яких формальна складова посідає особливе, «привілейоване» місце: достатньо пригадати операції з готовими довідниковими формулами, їх пошук; аналітичне взаємовираження одних елементів через інші; алгебричні та тригонометричні перетворення; арифметичні підрахунки тощо. Такі діяння школярів не мають жодного відношення до геометрії, втрачається дорогоцінний час, нівелюється природна сутність дисципліни. Саме через це, здається, учні не розуміють споконвічну диво-науку, не в захопленні від першопредмета. Причинами негараздів, на думку М. Ф. Четверухіна, є погана організація, а іноді й повна відсутність у школі креслення і малювання, незадовільна методика викладання курсу геометрії (і особливо — стереометрії), зокрема, ***«майже цілковита відсутність задач із геометричним змістом**, недостатня увага до геометричних побудов»*.

Найменше, що може зробити вчитель математики, це щоразу «перекладати» умови звичних задач із численних збірників мовою геометрії шляхом переформулювання висновків та наступного пошуку їх розв'язків не лише через числення, а й конструктивно. При цьому, щонайперше, як «інструмент» конструктивних дій учня буде корисним метод суміщення та його обов'язковий результат — винесені креслення.

Ми більш ніж упевнені, що зацікавити учня геометрією, умовно кажучи, примусити поважати її методи і результати, активізувати природні задатки образного мислення, додаючи навичок творчості, можна винятково сміливим переорієнтуванням пріоритетів у навчанні — з обчислювальних стандартизованих прийомів і способів — на конструктивні, розвивально нетипові, які характеризуються суто геометричним тлумаченням і зримим малюнковим супроводом. Лише останні найглибше висвітлюють внутрішні закономірності між елементами многовиду стереометричних фігур за змістом і формою подання фактів та з погляду їх осмисленого усвідомлення, сприяють ефективному розвитку просторових уявлень і уяви, вдосконалюють фахові вміння, тренують розум розмаїттям умоглядних логічних схем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже // Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1955.
2. Литвиненко В. Н. Задачи на развитие пространственных представлений // Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1991.
3. Погорелов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10—11 кл. серед. шк. — К.: Освіта, 2002.
4. Ленчук І. Г. Дві реалізації метричної задачі стереометрії // Матем. в шк. — 2005. — № 2.
5. Четверухін М. Ф. Рисунки просторових фігур у курсі стереометрії. — К.: Рад. шк., 1953.
6. Погорелов О. В. Геометрія: Планіметрія: Підруч. для 7—9 кл. серед. шк. — К.: Освіта, 1998.
7. Ленчук І. Г. Природа методу посередників у побудовній стереометрії // Зб. наук. праць: «Пробл. сучас. підруч.». — Вип. 5 — К.– Бердянськ, 2004.

У ВАК України

Постановою президії ВАК України від 10.11.2010 р. № 2-05/7 затверджено перелік наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук. До галузі «Педагогічні науки» (теорія та методика навчання) включено журнал «Математика в школі». (Бюлетень Вищої атестаційної комісії України. – Київ, 2010. – № 12, С. 11).