О.А. Гальчевська

Функції бікомплексної змінної. Оператор Гамільтона, експоненціальна форма зсуву аргументу, рівняння Лапласа та хвильове рівняння.

Бікомплексні числа – це одне із розширень алгебри комплексних чисел на простір $\mathbb{R}^4$. *Вони мають досить цікаві в математичному плані властивості. Одночасно, містять в собі комплексні числа та володіють деякими їхніми властивостями. Крім того, бікомплексні числа мають ряд особливостей, які можуть бути корисними у практичних задачах. У представлений роботі розглядається деякі тригонометричні та логарифмічна функції бікомплексного змінного, наводяться ряд умов типу Коші-Рімана для функцій бікомплексного змінного. Крім того, розглядається оператор Гамільтона, експоненціальна форма зсуву аргументу, рівняння Лапласа та хвильове рівняння.*

Спочатку нагадаємо поняття бікомплексного числа.

Означення. *Бікомплексним числом назвемо число:*

$$w = c_1 + j \cdot c_2,$$

де j *– уявна одиниця така, що* $j^2 = -1$, *а* c_1, c_2 *– комплексні числа.*

При цьому уявна одиниця j, *визначена як комутатуюча з уявною одиницею, яка входить у комплексні числа* c_1 c_2, *тобто, якщо*

$$c_1 = x_1 + iy_1, \qquad c_2 = x_2 + iy_2,$$

де $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, *то справедливе співвідношення*

$$ij = ji.$$

З означення безпосередньо випливає, що бікомплексне число може бути записане у вигляді:

$$w = x_1 + iy_1 + jx_2 + ijy_2.$$

У цьому представленні, дійсне число x_1 називається *дійсною або скалярною частиною*, а величина $iy_1 + jx_2 + ijy_2$ називається *уявною або векторною частиною* бікомплексного числа w.

Неважко переконатися, що будь-яке бікомплексне число w можно представити у вигляді

$$w = x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2,$$

де $k = ij$. При цьому

$$i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ k^2 = 1,\ ij = ji,\ ik = ki,\ jk = kj.$$

Множину всіх бікомплексних чисел будемо позначати через B.

Зараз розглянемо поняття експоненти у алгебрі бікомплексних чисел.

Означення. *Експонентою бікомплексного число* b *будемо називати суму наступного степеневого ряду*

$$\exp b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}.$$

Тепер введемо поняття косинуса та синуса бікомплексного числа.

Означення. *Косинусом та синусом бікомплексного число b будемо називати суми наступних степеневих рядів*

$$\cos b = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{b^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin b = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Безпосередньо з означення випливають властивості парності косинуса та непарності синуса, тобто виконуються співвідношення

$$\cos(-b) = \cos b, \qquad \sin(-b) = -\sin b.$$

Розглянемо тепер ряд властивостей цих функцій. Зокрема, відмітимо спочатку важливу властивість, яка показує зв'язок між експоненціальною та тригонометричними функціями.

Теорема 1. *Для довільного бікомплексного числа $b \in B$, $b = a_1 + ja_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $j^2 = -1$, справедливі такі рівності*

$$\exp(jb) = \cos b + j \sin b, \tag{1}$$

$$\exp(-jb) = \cos b - j \sin b, \tag{2}$$

$$\cos b = \frac{1}{2}\left(\exp(jb) + \exp(-jb)\right), \tag{3}$$

$$\sin b = \frac{1}{2j}\left(\exp(jb) - \exp(-jb)\right), \tag{4}$$

Доведення. Доведемо спочатку рівність (**??**). Для цього розпишемо за означенням експоненту та виконаємо ряд рівносильних перетворень. Маємо,

$$\exp(jb) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(jb)^n}{n!} = 1 + jb + \frac{(jb)^2}{2!} + \frac{(jb)^3}{3!} + ... = 1 + jb - \frac{b^2}{2!} - \frac{jb^3}{3!} + ... =$$

$$= \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - ...\right) + j\left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - ...\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{b^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos b + j \sin b.$$

Рівність (**??**) доведена.

Для доведення рівності (**??**), достатньо використати рівність (**??**) та властивості парності косинуса та непарності синуса.

Для доведення рівностей (**??**) та (**??**), достатньо, відповідно, додати та відняти рівності (**??**) та (**??**) і поділити, відповідно, на 2 та $2j$. Теорема доведена.

Означення. *Співвідношення (**??**) – (**??**) називаються формулами типу Ейлера для бікомплексних чисел.*

Розглянемо зараз важливу властивість експоненти – її періодичність.

Теорема 2. *Експоненціальна функція у бікомплексній алгебрі є періодичною функцією із періодом $2\pi j$. Тобто, виконується рівність*

$$\exp(b + 2\pi j) = \exp b,$$

де $b \in B$.

Доведення. При доведенні спочатку використаємо властивість експоненти

$$\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b,$$

а потім скористаємося формулою типу Ейлера (**??**). Маємо,

$$\exp(b+2\pi j) = \exp b \cdot \exp(2\pi j) = \exp b \cdot (\cos 2\pi + j \sin 2\pi) = \exp b.$$

Теорема доведена.

Тепер доведемо періодичність косинуса та синуса у бікомплексній алгебрі.

Теорема 3. *Синус та косинус у бікомплексній алгебрі є періодичними функціями із періодом* 2π. *Тобто, виконуються рівності*

$$\cos(b+2\pi) = \cos b, \qquad \sin(b+2\pi) = \sin b,$$

де $b \in B$.

Доведення. Спочатку використаємо формулу типу Ейлера (**??**) а потім властивість періодичності експоненти, яка відмічена у теоремі **??**. Маємо,

$$\cos(b+2\pi) = \frac{1}{2}\left(\exp(bj+2\pi j) + \exp(-jb-2\pi j)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\exp(bj) + \exp(-jb)\right) = \cos b.$$

Аналогічним чином доводиться періодичність синуса. Теорема доведена.

Слід відмітити, що практично всі відомі тригонометричні формули виконуються й у бікомплексній алгебрі. Зокрема формули синуса та косинуса суми, формули подвійних та потрійних кутів, формули пониження степеня та інші. Для прикладу доведемо справедливість основної тригонометричної тотожності.

Справедлива рівність $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$, *де* $b \in B$.

Доведення. Спочатку використаємо формули типу Ейлера (**??**), (**??**), а потім ряд тривіальних перетворень. Маємо,

$$\cos^2 b + \sin^2 b = \frac{1}{4}\left(\exp(jb) + \exp(-jb)\right)^2 + \frac{1}{4j^2}\left(\exp(jb) - \exp(-jb)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\exp(2jb) + 2\exp(2jb)\cdot\exp(-2jb) + \exp(-2jb) - \exp(2jb) + \right.$$

$$\left. +2\exp(2jb)\cdot\exp(-2jb) - \exp(-2jb)\right) = \frac{4\exp(2jb)\cdot\exp(-2jb)}{4} = 1.$$

Формула доведена.

Тепер розглянемо у бікомплексній алгебрі функції тангенса та котангенса.

Означення. *Тангенсом та котангенсом бікомплексного число* b *будемо називати наступні числа*

$$tg\, b = \frac{\sin b}{\cos b}, \qquad ctg\, b = \frac{\cos b}{\sin b}.$$

Властивості цих функцій практично не відрізняються від їх властивостей на комплексній площині.

Зараз ми введемо поняття логарифмічної функції та розглянемо ряд її властивостей.

Означення. *Логарифмічною називається функція обернена до експоненціальною, тобто, якшо*

$$d = \exp b, \quad d, b \in B,$$

то $b = \ln d$ *– логарифм бікомплексного числа* d*.*

Як й у комплексному аналізу, логаріфм бікомплексної змінної є багатозначною функцією. Виведемо формулу знаходження логарифма бікомплексного числа.

Нехай

$$b = z_1 + jz_2, \qquad d = a_1 + ja_2,\ z_1, z_2, a_1, a_2 \in \mathbb{C}.$$

Використовуючи означення логаріфма бікомплексного числа, маємо

$$a_1 + ja_2 = \exp(z_1 + jz_2).$$

Використовуючи те, що

$$\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b, \qquad a, b \in B$$

та формулу Ейлера (**??**) із останньої рівності маємо:

$$a_1 + ja_2 = \exp z_1 \cdot (\cos z_2 + j \sin z_2)\,,$$

або

$$a_1 + ja_2 = \exp z_1 \cdot \cos z_2 + j \exp z_1 \sin z_2.$$

Прирівнюючи в останні рівності дійсні та уявні частини, отримаємо систему:

$$\begin{cases} a_1 = \exp z_1 \cdot \cos z_2 \\ a_2 = \exp z_1 \cdot \sin z_2 \end{cases} \tag{5}$$

Остання систему рівнянь розглядається на множині комплексних чисел з невідомими z_1, z_2. Підносячи рівняння системи до квадратів та додаючи їх, отримаємо

$$a_1^2 + a_2^2 = \exp(2z_1)\left(\cos^2 z_2 + \sin^2 z_2\right),$$

або, використовуючи основну тригонометричну тотожність, маємо

$$a_1^2 + a_2^2 = \exp(2z_1)\,.$$

Звідси,

$$z_1 = \ln\sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

де під $\ln\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ мається на увазі комплекснозначна функція.

Тепер поділимо рівняння системи (**??**). Отримаємо,

$$\mathrm{tg} z_2 = \frac{a_2}{a_1}.$$

З останньої рівності маємо:

$$z_2 = \mathrm{Arctg}\frac{a_2}{a_1},$$

де під $\mathrm{Arctg}\frac{a_2}{a_1}$ мається на увазі комплекснозначна функція.

Отже, ми отримали наступний результат.

Теорема 4. *Нехай $b \in B$, $b = a_1 + ja_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Тоді*

$$\ln b = \ln \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + jArctg\frac{a_2}{a_1},$$

де під $\ln \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ та $Arctg\frac{a_2}{a_1}$ маються на увазі комплекснозначні функції.

Розглянемо тепер деякі властивості логарифма від бікомплексного числа.

Теорема 5. *Для будь-яких бікомплексних чисел $b_1, b_2 \in B$, справедлива рівність*

$$\ln(b_1 \cdot b_2) = \ln b_1 + \ln b_2.$$

Доведення. Нехай

$$b_1 = a_1^{(1)} + ja_2^{(1)},\ b_2 = a_1^{(2)} + ja_2^{(2)}, \qquad a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)} \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$b_1 \cdot b_2 = a_1^{(1)} \cdot a_1^{(2)} - a_2^{(1)} \cdot a_2^{(2)} + j\left(a_2^{(1)} \cdot a_1^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot a_1^{(1)}\right).$$

Звідси маємо

$$\ln(b_1 \cdot b_2) = \ln\left(a_1^{(1)} \cdot a_1^{(2)} - a_2^{(1)} \cdot a_2^{(2)} + j\left(a_2^{(1)} \cdot a_1^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot a_1^{(1)}\right)\right).$$

Використовуючи результат попередньої теореми, з останньої рівності маємо:

$$\ln(b_1 \cdot b_2) = \ln\sqrt{\left(a_1^{(1)} \cdot a_1^{(2)} - a_2^{(1)} \cdot a_2^{(2)}\right)^2 + \left(a_2^{(1)} \cdot a_1^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot a_1^{(1)}\right)^2} +$$

$$+j\mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(1)} \cdot a_1^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot a_1^{(1)}}{a_1^{(1)} \cdot a_1^{(2)} - a_2^{(1)} \cdot a_2^{(2)}},$$

або

$$\ln(b_1 \cdot b_2) = \ln\sqrt{\left(a_1^{(1)^2} + a_2^{(1)^2}\right) \cdot \left(a_1^{(2)^2} + a_2^{(2)^2}\right)} + j\mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(1)} \cdot a_1^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot a_1^{(1)}}{a_1^{(1)} \cdot a_1^{(2)} - a_2^{(1)} \cdot a_2^{(2)}}. \tag{6}$$

Спочатку покажемо, що

$$\mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(1)} \cdot a_1^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot a_1^{(1)}}{a_1^{(1)} \cdot a_1^{(2)} - a_2^{(1)} \cdot a_2^{(2)}} = \mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} + \mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}}. \tag{7}$$

Для цього знайдемо комплексний тангенс лівої та правої частин рівності (**??**) та використаємо формулу тангенса суми. В результаті отримаємо

$$\frac{\frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} + \frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}}}{1 - \frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} \cdot \frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}}} = \frac{a_2^{(1)} \cdot a_1^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot a_1^{(1)}}{a_1^{(1)} \cdot a_1^{(2)} - a_2^{(1)} \cdot a_2^{(2)}}.$$

Неважко безпосередньо перевірити вірність останньої рівності. Отже, справедлива рівність (**??**).

Враховуючи рівність (??), а також використовуючи властивість, що комплекснозначний логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів з рівності (??), маємо:

$$\ln(b_1\cdot b_2)=\left(\ln\sqrt{a_1^{(1)^2}+a_2^{(1)^2}}+j\mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}}\right)+\left(\ln\sqrt{a_1^{(2)^2}+a_2^{(2)^2}}+j\mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}}\right).$$

Використовуючи результат теореми **??**, маємо, що перша дужка попередньої рівності є $\ln b_1$, а друга – $\ln b_2$. Отже, теорема доведена.

Розглянемо подібну властивість для частки.

Теорема 6. *Для будь-яких бікомплексних чисел $b_1, b_2 \in B$, справедлива рівність*

$$\ln\frac{b_1}{b_2}=\ln b_1-\ln b_2.$$

Доведення. Нехай

$$b_1=a_1^{(1)}+ja_2^{(1)},\ b_2=a_1^{(2)}+ja_2^{(2)},\qquad a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_1^{(2)},a_2^{(2)}\in\mathbb{C}.$$

Тоді,

$$\frac{b_1}{b_2}=\frac{a_1^{(1)}+ja_2^{(1)}}{a_1^{(2)}+ja_2^{(2)}}=\frac{\left(a_1^{(1)}+ja_2^{(1)}\right)\left(a_1^{(2)}-ja_2^{(2)}\right)}{\left(a_1^{(2)}+ja_2^{(2)}\right)\left(a_1^{(2)}-ja_2^{(2)}\right)}=\frac{a_1^{(1)}\cdot a_1^{(2)}+a_2^{(1)}\cdot a_2^{(2)}}{a_1^{(2)^2}+a_2^{(2)^2}}+$$

$$+j\frac{a_2^{(1)}\cdot a_1^{(2)}-a_2^{(2)}\cdot a_1^{(1)}}{a_1^{(2)^2}+a_2^{(2)^2}}.$$

Звідси маємо

$$\ln\frac{b_1}{b_2}=\ln\left(\frac{a_1^{(1)}\cdot a_1^{(2)}+a_2^{(1)}\cdot a_2^{(2)}}{a_1^{(2)^2}+a_2^{(2)^2}}+j\frac{a_2^{(1)}\cdot a_1^{(2)}-a_2^{(2)}\cdot a_1^{(1)}}{a_1^{(2)^2}+a_2^{(2)^2}}\right).$$

Використовуючи результат теореми **??**, з останньої рівності маємо:

$$\ln\frac{b_1}{b_2}=\ln\sqrt{\frac{\left(a_1^{(1)}\cdot a_1^{(2)}+a_2^{(1)}\cdot a_2^{(2)}\right)^2}{\left(a_1^{(2)^2}+a_2^{(2)^2}\right)^2}+\frac{\left(a_2^{(1)}\cdot a_1^{(2)}-a_2^{(2)}\cdot a_1^{(1)}\right)^2}{\left(a_1^{(2)^2}+a_2^{(2)^2}\right)^2}}+$$

$$+j\mathrm{Arctg}\frac{\frac{a_2^{(1)}\cdot a_1^{(2)}-a_2^{(2)}\cdot a_1^{(1)}}{a_1^{(2)^2}+a_2^{(2)^2}}}{\frac{a_1^{(1)}\cdot a_1^{(2)}+a_2^{(1)}\cdot a_2^{(2)}}{a_1^{(2)^2}+a_2^{(2)^2}}},$$

або

$$\ln\frac{b_1}{b_2}=\ln\sqrt{\frac{a_1^{(1)^2}+a_2^{(1)^2}}{a_1^{(2)^2}+a_2^{(2)^2}}}+j\mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(1)}\cdot a_1^{(2)}-a_2^{(2)}\cdot a_1^{(1)}}{a_1^{(1)}\cdot a_1^{(2)}+a_2^{(1)}\cdot a_2^{(2)}}. \tag{8}$$

Як й при доведенні попередньої теореми, спочатку доведемо наступну рівність:

$$\mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(1)}\cdot a_1^{(2)}-a_2^{(2)}\cdot a_1^{(1)}}{a_1^{(1)}\cdot a_1^{(2)}+a_2^{(1)}\cdot a_2^{(2)}}=\mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}}-\mathrm{Arctg}\frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}}. \tag{9}$$

Для цього знайдемо комплексний тангенс лівої та правої частин рівності (??) та використаємо формулу тангенса різниці. В результаті отримаємо

$$\frac{\frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} - \frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}}}{1 + \frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} \cdot \frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}}} = \frac{a_2^{(1)} \cdot a_1^{(2)} - a_2^{(2)} \cdot a_1^{(1)}}{a_1^{(1)} \cdot a_1^{(2)} + a_2^{(1)} \cdot a_2^{(2)}}.$$

Неважко безпосередньо перевірити вірність останньої рівності. Отже, справедлива рівність (??).

Враховуючи рівність (??), а також використовуючи властивість, що комплекснозначний логарифм частки дорівнює різниці логарифмів з рівності (??), маємо:

$$\ln \frac{b_1}{b_2} = \left(\ln \sqrt{a_1^{(1)^2} + a_2^{(1)^2}} + j\mathrm{Arctg} \frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} \right) - \left(\ln \sqrt{a_1^{(2)^2} + a_2^{(2)^2}} + j\mathrm{Arctg} \frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}} \right).$$

Використовуючи результат теореми **??**, маємо, що перша дужка попередньої рівності є $\ln b_1$, а друга – $\ln b_2$. Отже, теорема доведена.

Тепер ми розглянемо аналог умов типу Коші-Рімана у випадку диференційовної функції бікомплексної змінної.

Теорема 7. (Умови Коші-Рімана, дійсний аналог). *Якщо функція бікомплексної змінної* $y = f(x) = f_0 + if_1 + jf_2 + ijf_3$ *диференційовна в точці* $x = x_0 + ix_1 + jx_2 + ijx_3$, $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, *то функції чотирьох дійсних змінних* f_0, f_1, f_2, f_3 *диференційовні в точці* (x_0, x_1, x_2, x_3), *та справедлива наступна система*

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_0} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_0} \end{cases} \tag{10}$$

Доведення. Нехай функція бікомплексної змінної $y = f(x) = f_0 + if_1 + jf_2 + ijf_3$ є диференційовною в точці $x = x_0 + ix_1 + jx_2 + ijx_3$. Розглянемо диференціал функції $f(x)$. Маємо,

$$dy = f'(x)dx = (f_0' + if_1' + jf_2' + ijf_3') \cdot (dx_0 + i \cdot dx_1 + j \cdot dx_2 + ij \cdot dx_3), \tag{11}$$

де функції f_0', f_1', f_2', f_3' також функції чотирьох дійсних змінних. Із арифметичних властивостей диференціалів випливає, що

$$dy = df_0 + i \cdot df_1 + j \cdot df_2 + ij \cdot df_3.$$

Співставляючи останню рівність з рівністю (??), отримаємо

$$df_0 + i \cdot df_1 + j \cdot df_2 + ij \cdot df_3 = (f_0' + if_1' + jf_2' + ijf_3') \cdot (dx_0 + i \cdot dx_1 + j \cdot dx_2 + ij \cdot dx_3),$$

або розкриваючи дужки справа, маємо

$$df_0 + i \cdot df_1 + j \cdot df_2 + ij \cdot df_3 = f_0' \cdot dx_0 - f_1' \cdot dx_1 - f_2' \cdot dx_2 + f_3' \cdot dx_3 +$$

$$+ i (f_1' \cdot dx_0 + f_0' \cdot dx_1 - f_3' \cdot dx_2 - f_2' \cdot dx_3) + j (f_2' \cdot dx_0 - f_3' \cdot dx_1 + f_0' \cdot dx_2 - f_1' \cdot dx_3) +$$

$$+ij\left(f_3' \cdot dx_0 + f_2' \cdot dx_1 + f_1' \cdot dx_2 + f_0' \cdot dx_3\right).$$

З останньої рівності випливає справедливість наступної системи:

$$\begin{cases} df_0 = f_0' \cdot dx_0 - f_1' \cdot dx_1 - f_2' \cdot dx_2 + f_3' \cdot dx_3 \\ df_1 = f_1' \cdot dx_0 + f_0' \cdot dx_1 - f_3' \cdot dx_2 - f_2' \cdot dx_3 \\ df_2 = f_2' \cdot dx_0 - f_3' \cdot dx_1 + f_0' \cdot dx_2 - f_1' \cdot dx_3 \\ df_3 = f_3' \cdot dx_0 + f_2' \cdot dx_1 + f_1' \cdot dx_2 + f_0' \cdot dx_3. \end{cases}$$

Розглядаючи функції f_0, f_1, f_2, f_3 як функції чотирьох змінних (x_0, x_1, x_2, x_3), отримаємо перехід до частинних похідних по цим змінним. При цьому випливає, що компоненти f_0', f_1', f_2', f_3' виступають у ролі різних частинних похідних. В результаті отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} f_0' = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \\ f_1' = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ f_2' = -\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_0} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ f_3' = \frac{\partial f_0}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_0} \end{cases} \tag{12}$$

Отже, теорема доведена.

Система умов (**??**) є якраз дійсним аналогом умов Коші-Рімана у бікомплексній алгебрі.

Теорема 8. (Умови Коші-Рімана, комплексний аналог). *Якщо функція бікомплексної змінної $y = f(x) = w_1 + jw_2$ диференціовна в точці $x = z_1 + jz_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, то функції двох комплексних змінних w_1, w_2 диференціовні в точці (z_1, z_2), та справедлива наступна система*

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial w_1}{\partial z_2} = -\frac{\partial w_2}{\partial z_1} \end{cases} \tag{13}$$

Доведення. Нехай функція бікомплексної змінної $y = f(x) = w_1 + jw_2$ є диференціовною в точці $x = z_1 + jz_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Розглянемо диференціал функції $f(x)$. Маємо,

$$dy = f'(x)dx = (w_1' + jw_2') \cdot (dz_1 + j \cdot dz_2), \tag{14}$$

де функції w_1', w_2' також функції двох комплексних змінних. Із арифметичних властивостей диференціалів випливає, що

$$dy = dw_1 + j \cdot dw_2.$$

Співставляючи останню рівність з рівністю (**??**), отримаємо

$$dw_1 + j \cdot dw_2 = (w_1' + jw_2') \cdot (dz_1 + j \cdot dz_2),$$

або розкриваючи дужки справа, маємо

$$dw_1 + j \cdot dw_2 = w_1' \cdot dz_1 - w_2' \cdot dz_2 + j\left(w_1' \cdot dz_2 + w_2' \cdot dz_1\right).$$

З останньої рівності випливає справедливість наступної системи:

$$\begin{cases} dw_1 = w_1' \cdot dz_1 - w_2' \cdot dz_2 \\ dw_2 = w_1' \cdot dz_2 + w_2' \cdot dz_1 \end{cases}$$

Розглядаючи функції w_1, w_2 як функції двох змінних (z_1, z_2), отримаємо перехід до частинних похідних по цим змінним. При цьому випливає, що компоненти w_1', w_2' виступають у ролі різних частинних похідних. В результаті отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} w_1' = \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \\ w_2' = -\frac{\partial w_1}{\partial z_2} = \frac{\partial w_2}{\partial z_1}. \end{cases} \tag{15}$$

Отже, теорема доведена.

Система умов (**??**) є комплексним аналогом умов Коші-Рімана у бікомплексній алгебрі.

Нехай функція бікомплексної змінної $y = f(x) = f_0+if_1+jf_2+ijf_3$ диференційована на деякій множини у бікомплексній алгебрі. Розглянемо умови Коші-Рімана для функції бікомплексного змінного у вигляді (**??**). Спочатку візьмемо з цієї системи перше та друге рівняння та використаємо з них перші рівності. Матимемо,

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння останньої системи по змінній x_0, а друге рівняння – по x_1. Отримаємо,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_0} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_0 \cdot \partial x_1} \\ -\frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_1} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \cdot \partial x_0} \end{cases}$$

Віднімемо рівняння останньої системи, матимемо

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_0} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_1} = 0. \tag{16}$$

Аналогічно розглядаючи інші рівняння системи (**??**), отримаємо ще ряд рівнянь

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_0} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_2} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_3} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_3} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_0} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_3} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_1} = 0. \tag{21}$$

Рівняння виду (**??**) – (**??**) називаються **рівняннями Лапласа або рівняннями неперервності.** Крім того, рівняння (**??**), (**??**) називаються **хвильовими рівняннями.** Розв'зками хвильових рівнянь є довільна два рази диференційована функція бікомплексного змінного.

Аналогічно, рівняння Лапласа та хвильові рівняння можно отримати й для функцій f_1, f_2, f_3.

Тепер додамо рівняння (**??**) – (**??**). Отримаємо,

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_0} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial^2 x_3} = 0. \tag{22}$$

Останнє рівняння є рівнянням Лапласа по змінним (x_0, x_1, x_2, x_3) для функції f_0.

Аналогічно, додаючи рівняння Лапласа для функцій f_1, f_2, f_3 по двом змінним, отримаємо рівняння Лапласа для цих функцій по чотирьом змінним (x_0, x_1, x_2, x_3).

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_0} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_3} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_0} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_3} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial^2 x_0} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial^2 x_3} = 0. \tag{25}$$

Рівняння (**??**), (**??**) показують, що функція одного бікомплексного змінного по двом координатам (x_0, x_3) та (x_1, x_2) задовольняє хвильовим рівнянням; а по координатам (x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_2, x_3), (x_1, x_3) та (x_0, x_1, x_2, x_3) – рівнянню Лапласа або рівнянню неперервності.

Таким чином, можно взяти довільну функцію, підставити в якості її аргументу бікомплексне число та отримати в результаті її компоненти у вигляді функцій, які задовольняють хвильовому рівнянню по координатам (x_0, x_3) та (x_1, x_2). Ця властивість функції бікомплексної змінної може бути використана при розв'язуванні задач.

У дійсному аналізі відомий оператор ∇ – оператор диференціювання. Виникає логічне питання: чи можна, якимось чином ввести такого роду оператор у бікомплексній алгебрі? Для відповіді на це питання спочатку введемо цей оператор звичайним чином та виконаємо ряд перетворень, які напрошуються природою бікомплексної алгебри.

Розглянемо спочатку випадок, коли бікомплексне число представлено у вигляді $b = x_0 + ix_1 + jx_2 + ijx_3$, $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, тобто дійсний аналог. Нехай функція бікомплексної змінної $y = f(x) = f_0 + if_1 + jf_2 + ijf_3$ диференційована на деякій множини у бікомплексній алгебрі. Тоді, диференціал цієї функції

$$dy = f'(x)dx.$$

Або, з точки зору нового оператора, маємо

$$dy = \nabla f dx.$$

Порівнюючи останні дві рівності, отримаємо:

$$f'(x) = \nabla f.$$

Розпишемо останнє рівняння покомпонентно:

$$f_0' + if_1' + jf_2' + ijf_3' = (f_0 + if_1 + jf_2 + ijf_3)(\nabla_0 + i\nabla_1 + j\nabla_2 + ij\nabla_3),$$

або

$$f_0' + if_1' + jf_2' + ijf_3' = \nabla_0 f_0 - \nabla_1 f_1 - \nabla_2 f_2 + \nabla_3 f_3 + i(\nabla_1 f_0 + \nabla_0 f_1 - \nabla_3 f_2 - \nabla_2 f_3) +$$
$$+ j(\nabla_2 f_0 - \nabla_3 f_1 + \nabla_0 f_2 - \nabla_1 f_3) + ij(\nabla_3 f_0 + \nabla_2 f_1 + \nabla_1 f_2 + \nabla_0 f_3).$$

Тепер прирівнюємо покомпонентно ліву і праву частини. Будемо, мати

$$\begin{cases} f_0' = \nabla_0 f_0 - \nabla_1 f_1 - \nabla_2 f_2 + \nabla_3 f_3 \\ f_1' = \nabla_1 f_0 + \nabla_0 f_1 - \nabla_3 f_2 - \nabla_2 f_3 \\ f_2' = \nabla_2 f_0 - \nabla_3 f_1 + \nabla_0 f_2 - \nabla_1 f_3 \\ f_3' = \nabla_3 f_0 + \nabla_2 f_1 + \nabla_1 f_2 + \nabla_0 f_3 \end{cases}$$

В останній системі замінимо

$$\nabla_k = c_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

де c_k – невідомі сталі. Отримаємо,

$$\begin{cases} f_0' = c_0 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x_0} - c_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - c_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + c_3 \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \\ f_1' = c_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + c_0 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_0} - c_3 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - c_2 \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ f_2' = c_2 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x_2} - c_3 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + c_0 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_0} - c_1 \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ f_3' = c_3 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x_3} + c_2 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + c_1 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + c_0 \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_0} \end{cases}$$

Для знаходження невідомих c_k використаємо умові Коші-Рімана у формі (**??**). В результаті вийде наступна система:

$$\begin{cases} 1 = c_0 - c_1 - c_2 + c_3 \\ 1 = -c_1 + c_0 + c_3 - c_2 \\ 1 = -c_2 + c_3 + c_0 - c_1 \\ 1 = c_3 - c_2 - c_1 + c_0 \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему алгебраїчних рівнянь то знаходимо значення c_k.

$$c_0 = \frac{1}{4}, \qquad c_1 = -\frac{1}{4}, \qquad c_2 = -\frac{1}{4}, \qquad c_3 = \frac{1}{4}.$$

Отже, маємо:

$$\nabla_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad \nabla_1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \nabla_2 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \nabla_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Підставляємо знайдені значення ∇_k, $k = 0, 1, 2, 3$ у вираз

$$\nabla = \nabla_0 + i\nabla_1 + j\nabla_2 + ij\nabla_3$$

та отримаємо

$$\nabla = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - i\frac{\partial}{\partial x_1} - j\frac{\partial}{\partial x_2} + ij\frac{\partial}{\partial x_3} \right). \tag{26}$$

Вираз (**??**) ми й будемо приймати у якості означення **оператора диференціювання ∇, у дійсному випадку, у бікомплексній алгебрі.** Слід відмітити, що при цьому, як було показано вище, ми збережемо форму запису диференціалу першого порядку.

Розглянемо тепер випадок, коли бікомплексне число представлено у вигляді $b = z_1 + jz_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, тобто комплексний аналог.

Нехай функція бікомплексної змінної $y = f(x) = w_1 + jw_2$ диференційована на деякій множини у бікомплексній алгебрі. Тоді, як і вище, отримаємо:

$$f'(x) = \nabla f.$$

Знову розпишемо останнє рівняння покомпонентно:

$$w_1' + jw_2' = (w_1 + jw_2)\left(\nabla_1 + j\nabla_2\right),$$

або

$$w_1' + jw_2' = \nabla_1 w_1 - \nabla_2 w_2 + j\left(\nabla_2 w_1 + \nabla_1 w_2\right).$$

Тепер прирівнюємо покомпонентно ліву і праву частини. Будемо, мати

$$\begin{cases} w_1' = \nabla_1 w_1 - \nabla_2 w_2 \\ w_2' = \nabla_2 w_1 + \nabla_1 w_2 \end{cases}$$

В останній системі замінимо

$$\nabla_k = c_k \cdot \frac{\partial}{\partial z_k}, \qquad k = 1, 2,$$

де c_k – невідомі сталі. Отримаємо,

$$\begin{cases} w_1' = c_1 \cdot \frac{\partial w_1}{\partial z_1} - c_2 \cdot \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \\ w_2' = c_2 \cdot \frac{\partial w_1}{\partial z_2} + c_1 \cdot \frac{\partial w_2}{\partial z_1} \end{cases}$$

Для знаходження невідомих c_k використаємо умові Коші-Рімана у формі (**??**) та аналогічно, як і вище, маємо:

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\nabla_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad \nabla_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Підставляємо знайдені значення ∇_k, $k = 1, 2$ у вираз

$$\nabla = \nabla_1 + j\nabla_2$$

та отримаємо

$$\nabla = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - j \frac{\partial}{\partial z_2} \right). \tag{27}$$

Вираз (**??**) ми й будемо приймати у якості означення **оператора диференціювання ∇, у комплексному випадку, у бікомплексній алгебрі**, та при цьому ми також збережемо форму запису диференціалу першого порядку.

Тепер ми розглянемо формулу для зсуву у випадках, коли функція бікомплексного змінного $y = f(x)$ залежить тільки від аргументу x, та коли вона залежить ще від спряжених аргументів $x', \tilde{x}, \bar{x}$.

Нехай спочатку функція бікомплексного змінного $y = f(x)$ залежить тільки від аргументу x. Як відомо з курсу математичного аналізу, для функції, яка має неперервні в точці x похідні будь-якого порядку, справедлива формула:

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n, \tag{28}$$

де h – приріст аргументу в точці x. Або, використовуючи означення $\exp x$, тобто рівність

$$\exp b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!},$$

з рівності (**??**) маємо:

$$f(x+h) = \exp\left(h \cdot \frac{d}{dx}\right) f(x).$$

Застосовуючи в останньому співвідношенню поняття оператору диференціювання $\nabla = \frac{d}{dx}$, отримаємо,

$$f(x+h) = \exp\left(h \cdot \nabla\right) f(x). \tag{29}$$

Рівність (**??**) і є **формулою зсуву аргументу у випадку, коли функція бікомплексного змінного** $y = f(x)$ **залежить тільки від аргументу** x. Вона показує, що для зсуву аргументу функції, можно саму функцію помножити на диференціальний дифференциальный оператор зсуву $\exp(h \cdot \nabla)$.

Нехай тепер функція бікомплексного змінного $y = f(x)$ залежить не тільки від аргументу x, а й від спряжених аргументів $x', \tilde{x}, \bar{x}$. Якщо h – приріст аргументу в точці x, то аналогічно, як й вище будемо мати:

$$f\left(x + h, x' + h', \tilde{x} + \tilde{h}, \bar{x} + \bar{h}\right) =$$

$$= \exp\left(h \cdot \frac{d}{dx} + h' \cdot \frac{d}{dx'} + \tilde{h} \cdot \frac{d}{d\tilde{x}} + \bar{h} \cdot \frac{d}{d\bar{x}}\right) f(x, x', \tilde{x}, \bar{x}).$$

Застосовуючи в останньому співвідношенню поняття операторів диференціювання

$$\nabla = \frac{d}{dx}, \quad \nabla' = \frac{d}{dx'}, \quad \tilde{\nabla} = \frac{d}{d\tilde{x}}, \quad \bar{\nabla} = \frac{d}{d\bar{x}}$$

отримаємо,

$$f\left(x + h, x' + h', \tilde{x} + \tilde{h}, \bar{x} + \bar{h}\right) = \exp\left(h\nabla + h'\nabla' + \tilde{h}\tilde{\nabla} + \bar{h}\bar{\nabla}\right) f(x, x', \tilde{x}, \bar{x}). \qquad (30)$$

Рівність (**??**) і є **формулою зсуву аргументу у випадку, коли функція бікомплексного змінного** $y = f(x)$ **залежить тільки від аргументу** x, **а й від спряжених аргументів** $x', \tilde{x}, \bar{x}$. Вона показує, що для зсуву аргументу функції, можно саму функцію помножити на диференціальний дифференциальный оператор зсуву

$$\exp\left(h\nabla + h'\nabla' + \tilde{h}\tilde{\nabla} + \bar{h}\bar{\nabla}\right).$$

Дякую керівника диплому доцента А.О. Погоруя за постановку задачі і допомогу при написанні роботи.

Список використаних джерел.

1. Каратаев Е.А. Кватернионы и 3-х мерные повороты. Практический подход. – М., 2000. – 24 с.
2. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: Изд-во Моск. центра непр. мат. обр., 2002. – 40 с.
3. M.E. Luna-Elizarrarŕas, M. Shapiro. Bicomplex Numbers and their Elementary Functions// CUBO A Mathematical Journal. – 2012. – **14,** № 2. – P. 61 – 80.
4. Stefan Rönn. Bicomplex algebra and function theory. – Helsinki, Finland. 2001. – 71 p.
5. Pogorui A.A., Rodriguez-Dagnino R.M. On the set of zeros of bicomplex polynomials// Complex Variables and Elliptic Equations. – 2006. – **51,** № 7. – P. 725 – 730.