УДК 517.54

Д.С. Кондратюк, А.Л. Таргонський

Деякі оцінки функціоналів, складених і добутків внутрішніх радіусів областей.

Метою даної роботи є отримання деяких оцінок функціоналів,складених з добутків внутрішніх радіусів частково неперетинних областей відносно точок, які рухаються по рівномірній системі. Задачі такого типу вперше виникли в роботі [1], в якій, зокрема, поставлена і розв'язана задача на знаходження максимуму функціоналу, складеного з добутку внутрішніх радіусів двох однозв'язних областей відносно фіксованих точок комплексної площини. Цей результат привернув увагу багатьох спеціалістів геометричної теорії функції комплексного змінного і визвав низку досліджень, присвячених його узагальненню (напр. [2, 3 - 9]). В даній роботі вдалося отримати результати, які узагальнюють деякі результати роботи [2].

Нехай $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – її одно точкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Нехай $r(B, a)$ позначає внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$, cap E – логарифмічна ємність множини E, $x(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$.

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок

$$A_{n,m} := \left\{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}\right\}$$

будемо називати (n, m) – променевою, якщо при всіх $k = \overline{1,n}$ и $p = \overline{1,m}$ виконуються співвідношення:

$$0 < |a_{k,1}| < \cdots < |a_{k,m}| < \infty;$$

$$arg\, a_{k,1} = arg\, a_{k,2} = \cdots = arg\, a_{k,m} =: \theta_k =: \theta_k(A_{n,m});$$

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi.$$

На множині (n, m) – променевих систем розглянемо наступні величини:

$$\alpha_k := \alpha_k(A_{n,m}) := \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1}(A_{n,m}) - \theta_k(A_{n,m})\right],$$

$$k = \overline{1,n}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad \alpha_0 := \alpha_n.$$

Величини $\alpha_k(A_{n,m})$, $k = \overline{1,n}$, називатимемо кутовими параметрами системи $A_{n,m}$.

Якщо (n, m) – променева система точок $A_{n,m}$ володіє властивістю

$$\alpha_k(A_{n,m}) = \frac{2}{n}, \quad k = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

то таку систему назвемо рівномірною променевою.

Будь-якій (n, m) – променевій системі точок $A_{n,m}$ поставимо у відповідність набір областей $P(A_{n,m}) = \{P_k\}_{k=1}^{n}$, де $P_k := P_k(A_{n,m}) := \{w \in \mathbb{C} \backslash \{0\}: \theta_k(A_{n,m}) < arg w < \theta_{k+1}(A_{n,m})\}, k = \overline{1,n}$.

Рівномірно променевій системі точок ставиться у відповідність фіксована система $P^0(A_{n,m}) = \{P_k^0\}_{k=1}^{n}$, де $P_k^0 := P_k^0(A_{n,m}) := \left\{w \in \mathbb{C} \backslash \{0\}: \frac{2\pi}{n}(k-1) < arg w < \frac{2\pi}{n} k\right\}, k = \overline{1,n}$.

Для фіксованого $R \in \mathbb{R}^+$ і довільної (n, m) – променевої системи точок $A_{n,m}$ розглянемо наступний "керуючий" функціонал:

$$M_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \left[x\left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \cdot x\left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot |a_{k,p}|.$$

Нехай $D, D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – довільна відкрита множина і $w = a \in D$, тоді $D(a)$ позначає зв'язну компоненту D, яка містить a. Для довільної (n, m) – променевої системи $A_{n,m}\{a_{k,p}\}$ і відкритої множини $D, A_{n,m} \subset D$, позначимо $D_k(a_{p,s})$ зв'язну компоненту множини $D_k(a_{p,s}) \cap \overline{P_k}(A_{n,m})$, яка містить точку $a_{p,s}, p = k, k+1, s = \overline{1,n}$. Через $D_k(0)$ (відповідно $D_k(\infty)$) будемо позначати зв'язну компоненту множини $D(0) \cap \overline{P_k}(A_{n,m})$ (відповідно $D(\infty) \cap \overline{P_k}(A_{n,m})$), яка містить точку $w = 0$ (відповідно $w = \infty$).

Будемо говорити, що відкрита множина $D, \{0, \infty\} \cup A_{n,m} \subset D$ задовольняє умові неперетинності відносно (n, m)– променевої системи $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, якщо виконується умова

$$[D_k(0) \cap D_k(\infty)] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_{p,l})] \cup [D_k(a_{q,s}) \cap D_k(\infty)] = \emptyset \qquad (2)$$

при кожному фіксованому $k = \overline{1,n}$ і для всіх різних точок $a_{p,l}$ і $a_{q,s}$, які належать $\overline{P_k}(A_{n,m})$.

Систему областей $\{B_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}$ назвемо системою частково неперетинних областей, якщо

$$D := \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{p=1}^{m} B_{k,p}, \qquad (3)$$

є відкритою множиною і задовольняє умові (2).

Задача. Нехай $n, m \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Визначити максимум величини

$$[r(B_0,0)\cdot r(B_\infty,\infty)]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p},a_{k,p}),$$

де $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}$ - будь яка рівномірна променева система точок виду (1), а $\{B_0,\{B_{k,p}\},\ B_\infty\},\ k=\overline{1,n},p=\overline{1,m}$ – довільний набір частково неперетинних областей, який задовольняє умові (3), $0\in B_0,\ a_{k,p}\in\{B_{k,p}\},\ \infty\in B_\infty,$ і описати всі екстремали $k=\overline{1,n},p=\overline{1,m}$.

Такого роду задачі для відкритої множини, яка задовольняє умові (2), розв'язані в роботі [2].

Теорема. *Нехай $R\in\mathbb{R}^+,n,m\in\mathbb{N},n\geq 2$. Тоді, які б не були (n,m)-рівномірно променева система точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}$, і набір частково неперетинних областей $B_0,\{B_{k,p}\},B_\infty$, який задовольняє умові (3), такі, що $0\in B_0,\ a_{k,p}\in\{B_{k,p}\},\ \infty\in B_\infty,\ k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}$, справедлива нерівність*

$$[r(B_0,0)\cdot r(B_\infty,\infty)]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p},a_{k,p})\leq\left(\frac{n}{4}\right)^{n}\cdot\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}\cdot M_R(A_{n,m}).\quad(4)$$

Знак рівності досягається тоді, коли $0,\{a_{k,p}\},\infty$ і $B_0,\{B_{k,p}\},B_\infty$ для всіх $k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}$ є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-w^{n-2}\frac{(R^n+w^n)^{2m}}{\left[\left(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}}\right)^{2m+2}-\left(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}}\right)^{2m+2}\right]^2}dw^2.\quad(5)$$

Доведення. Згідно означенню системи частково неперетинних областей, відношенням (3) введено відкриту множину D, яка задовольняє умові (2). Тому D володіє узагальненою функцією Гріна $g_D(z,a)\ \forall a\in D$. Розглядатимемо множини

$$E_0=\overline{\mathbb{C}}\backslash D;\quad \overline{U}_t=\{w\in\mathbb{C}:|w|\leq t\},$$

$$\overline{U}_t^{(1)}=\left\{w\in\mathbb{C}:\ |w|\leq\frac{1}{t}\right\},$$

$$E_{k,p}(t)=\{w\in\mathbb{C}:|w-a_{k,p}|\leq t\},\quad k=\overline{1,n},\qquad p=\overline{1,m}.$$

При достатньо малих $t\in\mathbb{R}^+$ розглянемо конденсатор, утворений впорядкованою сукупністю замкнутих множин,

$$\hat{\hat{C}}(t,D,A_{n,m})=\left\{E_0,\overline{U}_t,\overline{U}_t^{(1)},E_{1,1}(t),\dots,E_{n,m}(t)\right\},\quad(6)$$

з приписаними значеннями $0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 1, 1, \dots, 1.$ Величина $cap\hat{\hat{C}}(t, D, A_{n,m}) = inf \int\int \left((G_x')^2 + \left(G_y'\right)^2\right) dxdy$ називається ємністю конденсатора (6), де нижня грань береться по множині всіх дійсних, неперервних і ліпшицових в $\overline{\mathbb{C}}$ функцій $G = G(z)$ таких, що $G = 0$ в околі множини $E_0, G|_{\overline{U}_t} = \frac{n}{2}, G|_{\overline{U}_t^{(1)}} = \frac{n}{2}, G|_{E_{k,p}} = 1, k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}.$ Модуль конденсатора (6) $\left|\hat{\hat{C}}\right|$ визначимо як

$$\left|\hat{\hat{C}}\right| = \left[cap\,\hat{\hat{C}}\right]^{-1} \quad (7)$$

Розглянемо конденсатори при достатньо малих $t \in \mathbb{R}^+$

$$\overline{\overline{\overline{C}}}_l^{(R)}(t, D, A_{n,m}) = \left(E_0^{(l)}(R), E_1^{(l)}(t, R), E_2^{(l)}(t, R), E_{1,1}^{(l)}(t, R), E_{n,m}^{(l)}(t, R)\right), \quad (8)$$

де

$$E_0^{(l)}(R) = \zeta_l^{(R)}\left(E_0 \cap \bar{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)}\left(E_0 \cap \bar{P}_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$$E_1^{(l)}(t, R) = \zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t \cap \bar{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t \cap \bar{P}_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*, \quad (9)$$

$$E_2^{(l)}(t, R) = \zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t^{(1)} \cap \bar{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t^{(1)} \cap \bar{P}_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$$E_{k,p}^{(l)}(t, R) = \zeta_l^{(R)}\left(E_{k,p}(t) \cap \bar{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)}\left(E_{k,p}(t) \cap \bar{P}_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$\zeta = \zeta_k^{(l)}$ – фунція $\zeta_k^{(R)}(w) := \frac{1 - z_k(w)}{1 + z_k(w)}$, $\zeta_k^{(l)}(\Delta)$ – образ множини Δ при відображенні функції $\zeta_k^{(l)}, l, k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}.$ Таким чином, при поділяючому перетворенні відносно систем кутів $\left\{\bar{P}_l^0(A_{n,m})\right\}_{l=1}^n$ і систем функцій $\left\{\zeta_k^{(R)}\right\}_{l=1}^n, R \in \mathbb{R}^+,$ конденсатору $\hat{\hat{C}}(t, D, A_{n,m})$ співставляється набір конденсаторів $\left\{\overline{\overline{\overline{C}}}_l^{(R)}(t, D, A_{n,m})\right\}_{l=1}^n$, симетричних відносно $\partial U_1 = \{w : |w| = 1\}$. Кожному конденсатору $\overline{\overline{\overline{C}}}_l^{(R)}(t, D, A_{n,m}), l = \overline{1,n}$ при достатньо малих $t \in \mathbb{R}^+, t < R,$ співставляємо клас V_l - всіх дійсних, неперервних і ліпшицових в $\overline{\mathbb{C}}$ функцій $G = G(z)$ таких, що $G = 0$ в околі множини $E_0^{(l)}(t, R), G|_{E_1^{(l)}(t,R)} = \frac{n}{2}, G|_{E_2^{(l)}(t,R)} = \frac{n}{2}, G|_{E_{k,p}^{(l)}(t,R)} = 1, k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}.$ Враховуючи роботи [4, 6] маємо нерівність

$$cap\hat{\hat{C}}(t, D, A_{n,m}) \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} cap\overline{\overline{\overline{C}}}_l^{(R)}(t, D, A_{n,m}). \quad (10)$$

Звідси, у відповідності з (7), отримуємо відношення

$$cap\left|\hat{\hat{C}}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left|cap\,\overline{\overline{\overline{C}}}_l^{(R)}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}. \quad (11)$$

В свою чергу, (11) приводить до нерівності

$$\left|\hat{\hat{C}}(t,D,A_{n,m})\right| \leq 2\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{\overline{\overline{C}}}_l^{(R)}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}\right)^{-1}. \quad (12)$$

З теореми 1 [5] випливає асимптотика $\left|\hat{\hat{C}}(t,D,A_{n,m})\right|$. Вона задаватиметься формулою

$$\left|\hat{\hat{C}}(t,D,A_{n,m})\right| = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2+2nm}\right)\log\frac{1}{t} + \hat{\hat{M}}(D,A_{n,m}) + o(1), \quad t\to 0, \quad (13),$$

де

$$\hat{\hat{M}}(D,A_{n,m}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2+2nm}\right)^2\left[\frac{n^2}{4}\log r(D,0)r(D,\infty) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,p}) + \frac{n^2}{2}g_D(0,\infty) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} n\left(g_D(0,a_{k,p}) + g_D(\infty,a_{k,p})\right) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right]. \quad (14)$$

Враховуючи деякі результати роботи [2], умову неперетинності і теорему 1 роботи [5], встановимо асимптотичні рівності для модулів конденсаторів $\overline{\overline{\overline{C}}}_l^{(R)}(t,D,A_{n,m}), l=\overline{1,n}$, а саме:

$$\left|\overline{\overline{\overline{C}}}_l^{(R)}(t,D,A_{n,m})\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2+2nm}\right)\log\frac{1}{t} + \overline{\overline{\overline{M}}}_l^{(R)}(D,A_{n,m}) + o(1), \quad t\to 0, \quad (15)$$

де

$$\overline{\overline{\overline{M}}}_l^{(R)}(D,A_{n,m}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2+2nm}\right)^2\left[\log\frac{r\left(\Omega_{l,p}^{(1)}(R),1\right)}{\left(\frac{2}{R^{\frac{n}{2}}}\right)}\frac{r\left(\Omega_{\infty}^{(l)}(R),-1\right)}{\left(2R^{\frac{n}{2}}\right)} + \right.$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\Omega_{l,p}^{(1)}(R),\omega_{l,p}^{(1)}(R)\right)\cdot r\left(\Omega_{l,p}^{(2)}(R),\omega_{l,p}^{(2)}(R)\right)}{\left[\frac{2}{n}x\left(\left|\frac{a_{l,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|a_{l,p}\right|\right]^{-1}\left[\frac{2}{n}x\left(\left|\frac{a_{l+1,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|a_{l+1,p}\right|\right]^{-1}}\Bigg],\quad l=\overline{1,n}.\quad(16)$$

З рівності (15) слідує відношення:

$$\left|\widetilde{\widetilde{\widetilde{C}}}_l^{(R)}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}=$$

$$=\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\left(1-\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}_l^{(R)}(D,A_{n,m})+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^{-1}\right)\right)=$$

$$=\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}-\left(\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\right)^{2}\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}_l^{(R)}(D,A_{n,m})+\ o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^{-2}\right),$$

$t\to 0,\quad l=\overline{1,n}.$

Звідси отримуємо

$$\sum_{l=1}^{n}\left|\widetilde{\widetilde{\widetilde{C}}}_l^{(R)}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}=$$

$$=\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}-\left(\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\right)^{2}\sum_{l=1}^{n}\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}_l^{(R)}(D,A_{n,m})+\ o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^{-2}\right),\ t\to 0.\quad(17)$$

Після деяких обчислень, зв'язаних з (17), приходимо до наступного відношення:

$$\left[\sum_{l=1}^{n}\left|\widetilde{\widetilde{\widetilde{C}}}_l^{(R)}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}\right]^{-1}=$$

$$\frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi nm}\left(1-\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}_k^{(R)}(D,A_{n,m})+\ o\left(\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1}\right)\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{4\pi nm}\log\frac{1}{t}+\frac{1}{n^{2}}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}_k^{(R)}(D,A_{n,m})+o(1),\quad t\to 0.\quad(18)$$

З (10) – (18) маємо нерівність

$$\widetilde{\widetilde{M}}(D, A_{n,m}) + o(1) \le \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\widetilde{M_k^{(R)}}}(D, A_{n,m}) + o(1),$$

після чого можемо записати

$$\widetilde{\widetilde{M}}(D, A_{n,m}) \le \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\widetilde{M_k^{(R)}}}(D, A_{n,m}).$$

Враховуючи (14) і (16), приходимо до наступної нерівності:

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2+2nm}\right)^2 \left\{\log\left(r(D,0)r(D,\infty)\right)^{\frac{n^2}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D, a_{k,p}) \times\right.$$

$$\times \exp\frac{n^2}{2} gD(0,\infty) \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} \exp n\left(gD(0, a_{k,p}) + gD(\infty, a_{k,p})\right) \times$$

$$\left.\times \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp gD(a_{k,p}, a_{q,s})\right\} \le \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(n+2m)^2} \times$$

$$\times \log\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{2}{n}\right)^{2m} \prod_{p=1}^{m} x\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right) x\left(\left|\frac{a_{k+1,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k,p}a_{k+1,p}| \times\right.$$

$$\times r\left(\Omega_0^{(k)}(R), 1\right) r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R), -1\right) \times$$

$$\left.\times \prod_{p=1}^{m} r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R), \omega_{k,p}^{(1)}(R)\right) \cdot r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R), \omega_{k,p}^{(2)}(R)\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2 (n+2m)^2} \log 2^{-2n}\left(\frac{2}{n}\right)^{2nm} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} x^2\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k,p}|^2 \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{ r\left(\Omega_0^{(k)}(R), 1\right) r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R), -1\right) \times\right.$$

$$\left.\times \prod_{p=1}^{m} r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R), \omega_{k,p}^{(1)}(R)\right) \cdot r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R), \omega_{k,p}^{(2)}(R)\right)\right\}.$$

Очевидно, що

$$r\left(\Omega_0^{(k)}(R), 1\right) r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R), -1\right) \times$$

$$\times \prod_{p=1}^{m} r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R), \omega_{k,p}^{(1)}(R)\right) \cdot r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R), \omega_{k,p}^{(2)}(R)\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{2m+2}\right)^{2m+2} = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{2(m+1)}.$$

Звідси отримуємо, що

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(D, a_{k,p}) \times$$

$$\times \exp\frac{n^2}{2} gD(0,\infty) \cdot \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \exp n\left(gD(0, a_{k,p}) + gD(\infty, a_{k,p})\right) \times$$

$$\times \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp gD(a_{k,p}, a_{q,s}) \leq$$

$$\leq \left\{\left(\frac{n}{4}\right)^{2n} \left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{(2m+2)n} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} x^2\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k,p}|^2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{n}{4}\right)^{n} \left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{(m+1)n} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} x\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k,p}|. \quad (19)$$

Справедлива нерівність

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(D, a_{k,p}) \leq$$

$$\leq [r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(D, a_{k,p}) \times$$

$$\times \exp\frac{n^2}{2} gD(0,\infty) \cdot \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \exp n\left(gD(0, a_{k,p}) + gD(\infty, a_{k,p})\right) \times$$

$$\times \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp gD(a_{k,p}, a_{q,s}). \quad (20)$$

Враховуючи (19), (20) матимемо

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(D, a_{k,p}) \leq$$

$$\leq \left(\frac{n}{4}\right)^{n}\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{(m+1)n}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} x\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|a_{k,p}\right|.$$

Теорема доведена.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Лаврентьев М. А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. 5. – С. 159 – 245 с.

[2] Бахтин А. К.. Бахтина Г. П.. Зелинский Ю. Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. // Праці ін.-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – Т. 73 – 308 с.

[3] Голузин Г. М. Геометрическая теория функции комплексного переменного. – М: Наука. 1966. – 628 с.

[4] Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функции комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – 49 (295), № 1. – С. 3 – 76.

[5] Дубинин В. Н. Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1997. – 237. – С. 56 – 73.

[6] Дубинин В. Н. Емкость конденсатора в геометрической теории функции: Учебн. пособие. – Владивосток: Изд-во Дальневосточ. ун-та, 2003. 116 с.

[7] Дубинин В. Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. С. 48 – 66.

[8] Бахтін О. К. Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, №5. – С. 596 – 610.

[9] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. 2005. – 8, № 3. С. 298 – 303.