УДК 517.1

Данильчук В.В.[1]

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ.

Метою даної роботи є дослідження принципу максимуму субгармонічних функцій, приділена увага використанню принципу максимуму для контурно-тілесних задач.

Принцип максимуму субгармонічних функцій, лежить в основі деяких методів оцінки рішень крайових задач для еліптичних рівнянь, їх розв'язуваності та єдиності відповідних рішень.

Означення 1. Функція $u(z)$, визначена у відкритій множині $D \subset C$, називається ***субгармонічною в*** D, якщо виконуються такі умови:

1) $-\infty \le u(z) < +\infty$ для довільного $z \in D$;

2) $u(z)$ півнеперервна зверху в D;

3) для довільної точки $z_0 \in D$ при всіх достатньо малих $r > 0$ виконується нерівність

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi r} \int_{S(z_0,r)} u(z) dl(z) .$$

Для субгармонічних функцій виконується твердження ([1], с. 64), яке називають принципом максимуму.

Теорема 1. *Нехай функція* $u(z)$ *субгармонічна в області* D *і для кожної точки* $\zeta \in \partial D$ *виконується умова* $\overline{\lim\limits_{z \to \zeta, z \in D}} u(z) \le 0$. *Тоді або* $u(z) < 0 \quad \forall z \in D$, *або* $u(z) = 0 \quad \forall z \in D$.

Доведемо наступне твердження, яке є частинним випадком узагальненого принципу максимуму ([1], с. 250).

Теорема 2. Нехай функція $u(z)$ субгармонічна і обмежена зверху в області $D \subset C$. Нехай для кожної точки $\zeta \in \partial D \setminus E$, де $E = \{z_1, z_2, ..., z_n\} \subset \partial D$, виконується умова $\overline{\lim\limits_{z \to \zeta, z \in D}} u(z) \le M$. Тоді або $u(z) < M \quad \forall z \in D$, або $u(z) \equiv M \quad \forall z \in D$.

---

[1] Науковий керівник – доцент кафедри математичного аналізу, кандидат фізико-математичних наук Сарана О.А.

Доведення. Побудуємо в області D недодатню субгармонічну функцію $w(z)=C+\sum_{k=1}^{n}\ \ln|z-z_k|$, очевидно що $\lim\limits_{z\to z_k, z\in D} w(z)=-\infty.$

Нехай t_1 – деяка точка D. Розглянемо функцію $u_\varepsilon(z)=u(z)+\varepsilon w(x)$, де ε - достатньо мале додатнє число. Тоді якщо ζ - довільна точка множини ∂D, то $\overline{\lim\limits_{z\to\zeta, z\in D}} u_\varepsilon(z)\le M$.

Дійсно, якщо $\zeta\ne z_k$, то нерівність очевидна. Якщо ж $\zeta=z_k$, то $\lim\limits_{z\to z_k, z\in D} u_\varepsilon(z)=-\infty$, оскільки функція $u(z)$ обмежена зверху в D. Таким чином, із звичайного принципу максимуму застосованого до субгармонічної функції $u_\varepsilon(z)$, випливає, що $u_\varepsilon(z)\le M$ в D. Підставивши в нерівність значення t_1, отримаємо $u_\varepsilon(t_1)\le M$. Дану нерівність можна представити в наступному вигляді $u_\varepsilon(t_1)\le M-\varepsilon w(t_1)$. Оскільки значення $w(t_1)$ скінченне, а ε - довільне достатньо мале додатнє число, робимо висновок, що $u(t_1)\le M$. Дана нерівність є правильною для будь-якої точки $t_1\in D$. Тому із звичайного принципу максимуму випливає, що $u(z)<M$ або $u(z)\equiv M$ в D.

Теорема доведена. ■

Доведемо тепер твердження, яке є частинним випадком результатів, отриманих в роботах [2], [3].

Теорема 3. Нехай $E=\{z_1, z_2,\ldots, z_n\}$ - скінченна множина фіксованих точок, $E\in C$, α_1, α_2, ... $\alpha_n\in R, \beta>0$ - деякі фіксовані дійсні числа, $G\subset C\setminus E$ - обмежена область, $f:G\to C$ аналітична функція, яка задовольняє умову

$$\overline{\lim_{\zeta\to z,\, \zeta\in G}} \left|f(\zeta)\right|\le\beta\cdot\prod_{k=1}^{n}\ |z-z_k|^{\alpha_k}\qquad \forall z\in\partial G\setminus E$$

Тоді

$$|f(\zeta)| \le \beta \cdot \prod_{k=1}^{n} |\zeta - z_k|^{\alpha_k}, \quad \forall \zeta \in G$$

Доведення. Побудуємо в області G субгармонічну функцію $u(\zeta) := \ln|f(\zeta)| - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k ln|\zeta - z_k| - \ln\beta$, очевидно що дана функція задовольняє умовам узагальненого принципу максимуму $\overline{\lim_{\zeta \to z, \zeta \in G}} |u(\zeta)| \le 0$ для $\forall z \in \partial G$

Тому за принципом максимуму для субгармонічної функції $u(\zeta)$ отримуємо для $\forall \zeta \in G$: $u(\zeta) \le 0$.

Тоді послідовно отримуємо

$$\ln|f(\zeta)| - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k ln|\zeta - z_k| - \ln\beta \le 0$$

$$\ln|f(\zeta)| \le \sum_{k=1}^{n} \alpha_k ln|\zeta - z_k| + \ln\beta$$

$$|f(\zeta)| \le \beta \cdot \prod_{k=1}^{n} |\zeta - z_k|^{\alpha_k} \quad \forall \zeta \in G$$

Теорема доведена. ■

1. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. -.304 с.
2. *Тамразов П.М.* Усиленные контурно-телесные результаты для субгармонических функций //Укр. мат. журн.- 1988. - 40, № 2. - С. 210-219.
3. *Тамразов П.М.* Контурно-телесные результаты для голоморфных функций // Изв. АН СССР. - 1986. – 50, № 4. - С. 835-848.

Житомирський державний університет імені Івана Франка

E-mail: danylchuk@gmail.com

Данильчук В.В. ПРИНЦИП МАКСИМУМА СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ// *Целью данной работы является исследование принципа максиму-*

ма субгармонических функций, уделено внимание использованию принципа максимума для контурно-телесных задач.

Danylchuk V.V. MAXIMUM PRINCIPLE SUBHARMONIC FUNCTIONS// *The aim of my research is to investigate the maximum principle of subharmonic functions and studied the use of maximum principle for contour bodily problems..*