ЕК

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ
№ 11 (146) 2013, ЛИСТОПАД
ЩОМІСЯЧНИК
Передплатний індекс 74326

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНЕ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО
ВИДАВНИЦТВО «ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ

Заснований у 1997 р.
До 2012 р. журнал виходив у світ під назвою «Математика в школі»

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації, серія КВ №18310-7110 пр від 25.10.2011 р.
Схвалено вченою радою Інституту педагогіки НАПН України (протокол від 21.10.2013 р. № 13)

ЗМІСТ

EK

МАТЕМАТИКА
В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 11 (146) 2013, ЛИСТОПАД

ЩОМІСЯЧНИК

Передплатний індекс **74326**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНЕ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО
ВИДАВНИЦТВО «ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ

Заснований у 1997 р.
До 2012 р. журнал виходив у світ під назвою «Математика в школі»

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації, серія КВ №18310-7110 пр від 25.10.2011 р.

Схвалено вченою радою Інституту педагогіки НАПН України (протокол від 21.10.2013 р. № 13)

ЗМІСТ

Отже, в основі структури комбінованого уроку лежать ті основні етапи уроку засвоєння нових знань та уроку формування нових умінь і навичок, які в своїй сукупності забезпечують засвоєння нових знань та формування нових умінь і навичок.

Зауважимо, що сьогодні вчителі працюють над методичним збагаченням уроків. Однак дидакт О. Я. Савченко зазначає: «*В організації уроку творчий пошук учителя необхідний, водночас підкреслимо, що новації – не самоціль: вони мають бути педагогічно виправданими й відповідати основним вимогам навчання і виховання в сучасній школі*».

Ми погоджуємося з такою думкою. Якщо це нестандартний, інтегрований чи комплексний урок, в його основі все-таки має лежати класична логіка і структура, які відповідали б його меті. В іншому разі ми порушимо логіку пізнання та оволодіння учнями новими уміннями, що неприпустимо.

Новітні ж підходи до уроків, на наш погляд, передусім стосуються добору навчальної інформації та використання нестандартних методів і прийомів організації навчання на уроці.

МЕТОДИКА. ДОСВІД. ПОШУК

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН.

КОНСТРУКТИВНА СКЛАДОВА ТЕМИ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Франка, доктор технічних наук

Анотація. Актуалізується проблема ефективного впровадження в евклідовій геометрії конструктивних методів навчання. Істинно геометричні за змістом задачі розвивають творче наочно-образне і логічне мислення. Помітного використання у візуальній діяльності набув метод суміщення.

Ключові слова: геометризація, унаочнення, графічний та графоаналітичний методи, конструктивізм, діяльність.

Иван Ленчук. Конструктивная составляющая темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей».

Аннотация. Актуализируется проблема эффективного внедрения в евклидовой геометрии конструктивных методов обучения. Истинно геометрические по содержанию задачи развивают творческое наглядно-образное и логическое мышление. Ощутимое использование в визуальной деятельности получил метод совмещения.

Ключевые слова: геометризация, наглядная демонстрация, графический и графоаналитический методы, конструктивизм, деятельность.

Ivan Lenchuk. The structural component of the theme of «Perpendicular lines and planes».

Summary. Actualized the problem of effective implementation in Euclidean geometry design methods. Truly geometric problems in content, developing creative visual-imaginative and logical thinking, add geometry. Sensible use of visual activity is the method of combining.

Keywords: geometrization, visual demonstration, graphic and graphic-analytical methods, constructivism, activity.

Перпендикулярність прямих і площин — традиційна тема шкільного курсу стереометрії. За сучасними програмами на її вивчення відведено такі години:

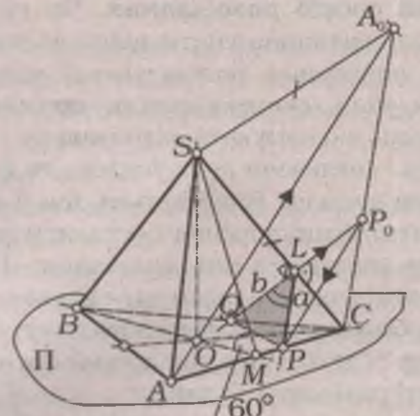
- *на рівні стандарту* — 22 години;
- *на академічному рівні* — 26 годин;
- *на рівні профільної підготовки* — 40 годин;
- *для класів із поглибленим вивченням математики* — 40 годин.

У чинних підручниках для ЗОШ та класичному підручнику [1] детально викладено теорію означеного питання. Наприклад ([1], § 3), у пункті «Побудова перпендикулярних прямої і площини» чітко описані просторові правила-орієнтири виконання відповідних ***розумових*** операцій. Проте в жодній із задач не ставиться вимога їх закономірної візуалізації на зображеннях фігур, тобто **конструктивною складовою** в реалізації ***значимих*** геометричних дій просто **знехтувано**. Це свідчить, що в так поставлену методику навчання теми вкралася прикра *неузгодженість* між фактологічною **теорією** курсу і *діяльнісною*, а отже, *дослідницькою, творчо-розвивальною* **практикою**.

Мета статті — на прикладах задач, що розв'язані конструктивно-генетичним методом, продемонструвати методику опанування стереометрії в уявленнях, алгоритмізацією дій і їх строгою покроковою реалізацією на якісних малюнках. Ми певні, вчитель зобов'язаний у класах профільного навчання та класах із поглибленим вивченням математики, педагогічних (технічних) ліцеях, відповідно до виділених годин, стрижневу тему розділу **геометризувати** і **унаочнити**.

Задача 1. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює 60°. Побудувати лінійний кут двогранного кута при її бічному ребрі.

Перший спосіб розв'язання. Нехай L — будь-яка точка бічного ребра SC піраміди $SABC$ (мал. 1). Як через точку L провести допоміжну в побудові площину, перпендикулярну до SC? Очевидно, що найбільш доречно задати її двома прямими a і b, які перетинаються у вибраній точці L і належать відповідно граням SAC та SBC. Наведені міркування звужують просторову метричну задачу до площинної. Тобто зараз достатньо хоча б у одній із граней (SAC) провести пряму a, перпендикулярну до SC у точці L. Після чого пряму b в іншій грані (SBC) побудувати буде зовсім неважко, адже дана трикутна піраміда правильна, й тому площина Σ $(a \cap b)$, яка містить будь-де взяту точку L на ребрі AC і перпендикулярна до цього ребра, висіче на поверхні піраміди рівнобедрений трикутник PLQ $(PL = QL)$, оскільки прямокутні трикутники PLC і QLC рівні, що очевидно: $\angle QLC = \angle PLC = 90°$ $(\Sigma \perp AC)$, $\angle QLC = \angle PLC$ (усі бічні грані піраміди рівні), а катет LC — спільний.



Мал. 1

У стандартній ситуації, що зараз склалася, пропонуємо провести ретельний аналіз умови задачі та, врахувавши вихідні дані, подбати про відшукання взаємних залежностей між елементами грані SAC, які б шляхом виконання певної послідовності **алгебричних** і **побудовних** дій забезпечили очікуваний результат.

Для зручності в цій роботі введемо позначення: $AC = a$. Тоді $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $OM = \frac{BM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Далі, у прямокутному трикутнику

SOM $(\angle OSM = 30°)$ $SM = 2 \cdot OM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

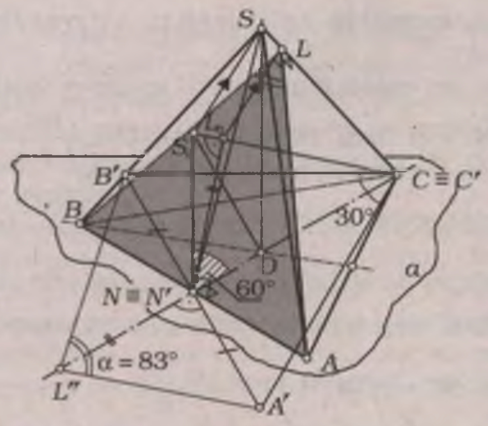
Крім того, $MC = \frac{a}{2}$ і, врахувавши, що трикутник SMC теж є прямокутним, остаточно матимемо: $SC = \sqrt{SM^2 + MC^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

З метою встановлення істинної форми грані SAC, а отже, проведення в точці L перпендикуляра LP (LP_0), варто сумістити трикутник SAC із площиною малюнка шляхом обертання однієї з його вершин або навколо ребра AC, або навколо ребра SC відповідно. За вже відомими схемами (див. [2], р. II, § 1, п. 1.1) у першому випадку будується відрізок SC за даним відрізком a, а у другому — навпаки — відрізок a, за відомим відрізком SC (на мал. 1 реалізовано другий випадок із використанням мал. 2.62, а того самого посібника).

Завершуючи етап побудови, посилаємося лише до відомої теореми про пропорційні відрізки та до твердження про те, що відношення відрізків на прямій є інваріантом паралельного проекціювання.

Отже, для виконання в грані SAC графічних операцій, які дають змогу зафіксувати на метрично визначеному зображенні піраміди шукану геометричну фігуру, довелося попередньо виконати порівняно нескладні аналітичні розрахунки і скористатися їх результатом графічно. Тому в цьому випадку стереометричну задачу на побудову розв'язано ***графоаналітичним*** методом.

Другий спосіб розв'язання. Легко побачити, що наведений шлях до малюнкового розв'язання дещо непевний у виборі точки L і операційно складніший, ніж хотілося б. Чи не можна тісніше пов'язати точку L з елементами піраміди, й цим конкретизувати, дещо спростити, оптимізувати та пришвидшити процес виконання побудов? І чи можливо спланувати побудову так, щоб, додавши найменші зусилля на проекційному кресленні, можна було б не лише спостерігати зображення шуканого кута, а й заміряти його справжню градусну міру? Виявляється, що ці проблеми зникають, якщо не слідувати сліпо щойно реалізованому алгоритму. Додавши творчості, точку L на ребрі SC виберемо не будь-де, а в такій площині Ω, перпендикулярній до SC, яка містить, скажімо, ребро AB в основі піраміди (мал. 2 на с. 18).



Мал. 2

Обґрунтуємо ці міркування. Якщо SN — апофема бічної грані SAB ($SN \perp AB$), то CN (проекція SN) — медіана, бісектриса і висота правильного трикутника ABC в основі піраміди ($CN \perp AB$) і, згідно з ознакою перпендикулярності прямої та площини, $AB \perp \Lambda(SNC)$. Але ж пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини (за означенням). Тому $AB \perp SC \in \Lambda$. Таким чином, на вирішальному етапі побудови площина Ω однозначно визначається у просторі заданим ребром AB і перпендикуляром NL, який тільки й залишилося опустити з вершини N осьового перерізу піраміди — трикутника SNC — на його протилежну сторону SC.

Реалізувати графічно на зображенні піраміди цю операцію можна надто просто, якщо знайти істинну форму S_0NC трикутника $S'N'C'$, наприклад шляхом його суміщення із площиною проекційного малюнка — обертанням навколо осі $NC \equiv N'C'$. При цьому точка S_0 є перетином променів OS_0 і NS_0 таких, що $\angle NOS_0 = 90°$, а $\angle S_0NO = 60°$ в оригіналі (відрізок NL на малюнку не показано).

Зауважимо, що завдяки осмислено проведеному аналізу простих внутрішніх взаємних залежностей у піраміді, класичний алгоритм виконання побудов, залишаючись реально достовірним, зазнав суттєвих змін як із огляду його уявлюваної конструкції в загальногеометричній формі, так і у плані оптимізації дій виконавця в даній конкретній ситуації:

1. Через ребро $A'B'$ проводимо площину Ω', перпендикулярну до ребра $S'C'$.

2. Шукаємо точку L' перетину площини Ω' і ребра $S'C'$.

3. З'єднуємо відрізками точку L' із точками A' і B'. Кут ALB — зображення шуканого лінійного кута, яким вимірюється двогранний кут при ребрі $S'C'$.

Щоб знайти на зображенні справжню градусну міру кута ALB, потрібно, щонайперше, сумістити з картинною площиною трикутник $A'B'C'$ в основі піраміди. Причому віссю обертання і в цьому випадку повинна бути та сама пряма $NC \equiv N'C'$ (див. перше суміщення), яка, як наголошувалося, є висотою ($N'C' \perp A'B'$) і, звичайно, медіаною ($A'N' = N'B'$) розглядуваного рівностороннього трикутника ($\angle A'C'N' = \angle N'C'B' = 30°$). Отже, побудова трикутника $A'B'C'$ тут майже очевидна. Крім цього, ще одним (наступним) кроком слід сумістити із площиною дошки (зошита) трикутник $A'B'L'$, у якого в оригіналі $N'L' = N'L'' = NL_0$, де відрізок $N'L_0$ відомий з найпершого суміщення (див. мал. 2). Нарешті, скориставшись транспортиром як засобом вимірювання кутів, встановлюємо результат (з точністю до побудови і вимірювання): градусна міра кута $A'L'B'$ насправді складає 83°.

Тепер, посилаючись на факти, внесемо повну ясність до останніх побудов. Безсумнівно, рівнобедрений трикутник $A'B'L'$ ($A'L' = B'L'$) цілком визначається своїми основою $A'B'$ і висотою $L'N'$, проведеною до цієї основи. Ці ж елементи шуканого трикутника мають, у свою чергу, однозначні графічні (і, до речі, аналітичні) вираження через відрізок $N'C' \equiv NC$, який вибрано за базову вісь першого та другого суміщень із площиною зображень трикутників $N'S'C'$ і $A'B'C'$. Тому рівнобедрений трикутник $A'B'L''$, побудований на відрізках $A'B'$ і $N'L_0$, як на власних основі і висоті до цієї основи, відповідно, справді встановлює істинну форму трикутника ABL.

У цьому випадку логічні умовиводи і відповідні їм покрокові побудовні операції, скомпоновані в алгоритм дій, уособлюють ***графічний*** метод. Очевидно також, що суто аналітичних методів розв'язання конструктивних пропозицій бути не може, оскільки тут малюнку надається провідна роль і якраз креслярські засоби дій фіксують на плоскому екрані замовлений результат.

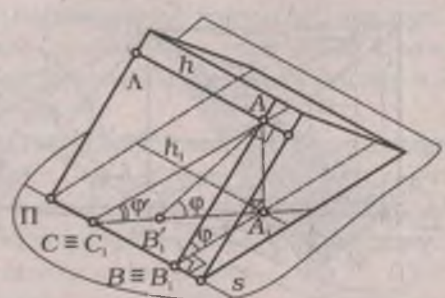
Третій спосіб розв'язання. Чи не можна ще більше урізноманітнити шлях до конструктивного вирішення розглядуваної задачі, зацікавити учнів елементарними **прикладними** ситуаціями, активізувати пізнавальну і фахову діяльність, апелюючи до їх уявлень та фантазії, життєвого досвіду? Виявляється, що й це можна зробити, якщо доречно поставити просте й зрозуміле кожному з них запитання: «Що таке **схил** (нахил) даху?», а потім дати наукове (геометричне) обґрунтування введеного поняття. Мова при цьому ведеться про звичайний похилий дах найзвичайнісінького будинку.

Як з'ясувалося, термін, поширений в будівництві та архітектурі, має цілком природне геометричне тлумачення. Адже в будь-якій площині загального розташування можна виділити в уявленнях два сімейства особливих (цікавих) прямих ліній: 1) ***лінії рівня***, які розташовуються паралельно основній площині; 2) ***лінії найбільшого нахилу (схилу)***, які утворюють з основною площиною максимально можливий (найбільший) кут. До речі, як основну завжди можна вибрати площину, визначену на кресленні якою завгодно гранню багатогранника. Правильно й те (це легко уявити), що всяку площину можна вщерть заповнити лініями як одного, так і іншого сімейства: кулька з будь-якої вихідної точки даху скотиться за траєкторією єдиного напряму — вздовж лінії найбільшого нахилу.

Як побудувати у вибраній на зображенні багатогранника площині (наприклад, у бічній грані) будь-яку пряму того чи іншого сімейства? Чи існує між прямими обох сімейств внутрішній геометричний взаємозв'язок? Відповідь на ці запитання дає твердження, яке цілком вписується у рамки курсу геометрії ЗОНЗ.

Теорема. *Прямі у площині загального розташування, перпендикулярні до її будь-якої лінії рівня (відносно площини основи), є лініями найбільшого нахилу.*

Нехай у площині загального розташування Λ $(A(A_1),\ s)$ (мал. 3), яка перетинає площину основи П уздовж прямої (сліду) s, проведено будь-яку пряму AB (A_1B_1), перпендикулярну до прямої h (h_1), де h — лінія рівня площини Λ $(h \parallel П,\ h \in \Lambda)$, а A — точка перетину цих двох особливих прямих.



Мал. 3

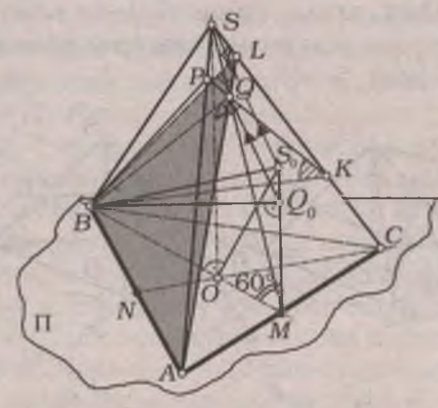
Потрібно показати, що пряма $AB \in \Lambda$ утворює найбільший кут нахилу до площини основи П, порівняно зі всіма іншими кутами, утвореними рештою прямих площини Λ, які вміщують ту саму точку A.

Доведення теореми простежується за виконаним малюнком (див. [2, с. *254*, *255*]).

У практичній стереометрії за лінію рівня грані багатогранника доцільно відразу ж обирати їх спільне із гранню основи ребро s, яке, завдячуючи його особливому розташуванню відносно П, часто називають ребром нульового рівня.

Таким чином, двогранний кут можна також вимірювати лінійним кутом, утвореним прямою найбільшого нахилу однієї грані багатогранника до іншої його грані — основи (за вибором виконавця); точніше, — до проекції лінії найбільшого нахилу певної грані на площину основи. Це, у свою чергу, зводить задачу відшукання двогранного кута до задачі на побудову кута між визначеними прямою і площиною, що геометрично не менш цікаво.

Отже, повернувшись тепер до умови задачі, знайдемо ще один змістово і візуально привабливий алгоритм побудови лінійного кута заданого двогранного кута при ребрі SC (мал. 4). Для цього досить, наприклад, із вершини B опустити перпендикуляр BQ на грань SAC, а потім з'єднати точку A з точкою Q до перетину з ребром SC у точці L. Кут ALB — шуканий. Тут роль основної площини відіграє грань SAC, а QL — ортогональна проекція BL на цю грань.



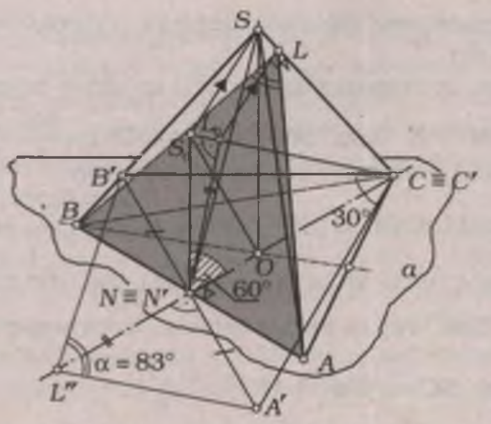
Мал. 4

Побудову точки Q на апофемі SM грані SAC у метрично визначеному трикутнику SBM, де $\angle S_0OM = 90°$, а $\angle S_0MO = 60°$, можна виконати аналогічно попередньому і винятково ***графічним*** методом; трикутник S_0BM — суміщення з картинною площиною трикутника SBM.

Суб'єкту навчання суть важливо бути переконаним, що в розмаїтті способів розв'язання розглянутої в деталях типової задачі із зображенням двогранного кута слід вирізняти загальногеометричний підхід до *проведення перпендикуляра з будь-якої точки на яку завгодно грань чи на який завгодно переріз* метрично визначеного багатогранника. Адже таку графічну операцію кваліфікують як одну з основних у метричній стереометрії (див. також задачу 3).

Задача 2. Дано зображення правильної трикутної піраміди $SABC$, бічне ребро якої у два рази більше сторони основи. Побудувати на поверхні піраміди геометричне місце точок, рівновіддалених від двох вершин піраміди S і A.

Задача на побудову площини, перпендикулярної до прямої (ребра піраміди), приваблює логікою просторових міркувань і малюнкових реалізацій. У ній, насамперед, варто змоделювати покроковий загальногеометричний підхід до її розв'язання в уявленнях — чітко визначитися із правилом-орієнтиром обов'язкових побудов у просторовій конструкції. Наразі всім відомо, що геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від вершин S і A, є площина Σ, перпендикулярна до SA та інцидентна точці P, яка



Мал. 2

Обґрунтуємо ці міркування. Якщо SN — апофема бічної грані SAB ($SN \perp AB$), то CN (проекція SN) — медіана, бісектриса і висота правильного трикутника ABC в основі піраміди ($CN \perp AB$) і, згідно з ознакою перпендикулярності прямої та площини, $AB \perp \Lambda(SNC)$. Але ж пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини (за означенням). Тому $AB \perp SC \in \Lambda$. Таким чином, на вирішальному етапі побудови площина Ω однозначно визначається у просторі заданим ребром AB і перпендикуляром NL, який тільки й залишилося опустити з вершини N осьового перерізу піраміди — трикутника SNC — на його протилежну сторону SC.

Реалізувати графічно на зображенні піраміди цю операцію можна надто просто, якщо знайти істинну форму S_0NC трикутника $S'N'C'$, наприклад шляхом його суміщення із площиною проекційного малюнка — обертанням навколо осі $NC \equiv N'C'$. При цьому точка S_0 є перетином променів OS_0 і NS_0 таких, що $\angle NOS_0 = 90°$, а $\angle S_0NO = 60°$ в оригіналі (відрізок NL на малюнку не показано).

Зауважимо, що завдяки осмислено проведеному аналізу простих внутрішніх взаємних залежностей у піраміді, класичний алгоритм виконання побудов, залишаючись реально достовірним, зазнав суттєвих змін як із огляду його уявлюваної конструкції в загальногеометричній формі, так і у плані оптимізації дій виконавця в даній конкретній ситуації:

1. Через ребро $A'B'$ проводимо площину Ω', перпендикулярну до ребра $S'C'$.

2. Шукаємо точку L' перетину площини Ω' і ребра $S'C'$.

3. З'єднуємо відрізками точку L' із точками A' і B'. Кут ALB — зображення шуканого лінійного кута, яким вимірюється двогранний кут при ребрі $S'C'$.

Щоб знайти на зображенні справжню градусну міру кута ALB, потрібно, щонайперше, сумістити з картинною площиною трикутник $A'B'C'$ в основі піраміди. Причому віссю обертання і в цьому випадку повинна бути та сама пряма $NC \equiv N'C'$ (див. перше суміщення), яка, як наголошувалося, є висотою ($N'C' \perp A'B'$) і, звичайно, медіаною ($A'N' = N'B'$) розглядуваного рівностороннього трикутника ($\angle A'C'N' = \angle N'C'B' = 30°$). Отже, побудова трикутника $A'B'C'$ тут майже очевидна. Крім цього, ще одним (наступним) кроком слід сумістити із площиною дошки (зошита) трикутник $A'B'L'$, у якого в оригіналі $N'L' = N'L'' = N'L_0$, де відрізок $N'L_0$ відомий з найпершого суміщення (див. мал. 2). Нарешті, скориставшись транспортиром як засобом вимірювання кутів, встановлюємо результат (з точністю до побудови і вимірювання): градусна міра кута $A'L'B'$ насправді складає 83°.

Тепер, посилаючись на факти, внесемо повну ясність до останніх побудов. Безсумнівно, рівнобедрений трикутник $A'B'L'$ ($A'L' = B'L'$) цілком визначається своїми основою $A'B'$ і висотою $L'N'$, проведеною до цієї основи. Ці ж елементи шуканого трикутника мають, у свою чергу, однозначні графічні (і, до речі, аналітичні) вираження через відрізок $N'C' \equiv NC$, який вибрано за базову вісь першого та другого суміщень із площиною зображень трикутників $N'S'C'$ і $A'B'C'$. Тому рівнобедрений трикутник $A'B'L''$, побудований на відрізках $A'B'$ і $N'L_0$, як на власних основі і висоті до цієї основи, відповідно, справді встановлює істинну форму трикутника ABL.

У цьому випадку логічні умовиводи і відповідні їм покрокові побудовні операції, скомпоновані в алгоритм дій, уособлюють ***графічний*** метод. Очевидно також, що суто аналітичних методів розв'язання конструктивних пропозицій бути не може, оскільки тут малюнку надається провідна роль і якраз креслярські засоби дій фіксують на плоскому екрані замовлений результат.

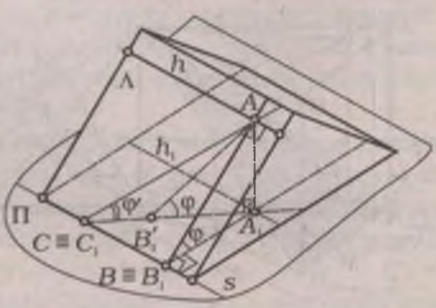
Третій спосіб розв'язання. Чи не можна ще більше урізноманітнити шлях до конструктивного вирішення розглядуваної задачі, зацікавити учнів елементарними **прикладними** ситуаціями, активізувати пізнавальну і фахову діяльність, апелюючи до їх уявлень та фантазії, життєвого досвіду? Виявляється, що й це можна зробити, якщо доречно поставити просте й зрозуміле кожному з них запитання: «Що таке **схил** (нахил) даху?», а потім дати наукове (геометричне) обґрунтування введеного поняття. Мова при цьому ведеться про звичайний похилий дах найзвичайнісінького будинку.

Як з'ясувалося, термін, поширений в будівництві та архітектурі, має цілком природне геометричне тлумачення. Адже в будь-якій площині загального розташування можна виділити в уявленнях два сімейства особливих (цікавих) прямих ліній: 1) ***лінії рівня***, які розташовуються паралельно основній площині; 2) ***лінії найбільшого нахилу (схилу)***, які утворюють з основною площиною максимально можливий (найбільший) кут. До речі, як основну завжди можна вибрати площину, визначену на кресленні якою завгодно гранню багатогранника. Правильно й те (це легко уявити), що всяку площину можна вщерть заповнити лініями як одного, так і іншого сімейства: кулька з будь-якої вихідної точки даху скотиться за траєкторією єдиного напряму — вздовж лінії найбільшого нахилу.

Як побудувати у вибраній на зображенні багатогранника площині (наприклад, у бічній грані) будь-яку пряму того чи іншого сімейства? Чи існує між прямими обох сімейств внутрішній геометричний взаємозв'язок? Відповідь на ці запитання дає твердження, яке цілком вписується у рамки курсу геометрії ЗОНЗ.

Теорема. *Прямі у площині загального розташування, перпендикулярні до її будь-якої лінії рівня (відносно площини основи), є лініями найбільшого нахилу.*

Нехай у площині загального розташування Λ $(A(A_1),\ s)$ (мал. 3), яка перетинає площину основи Π уздовж прямої (сліду) s, проведено будь-яку пряму AB (A_1B_1), перпендикулярну до прямої h (h_1), де h — лінія рівня площини Λ $(h \parallel \Pi,\ h \in \Lambda)$, а A — точка перетину цих двох особливих прямих.



Мал. 3

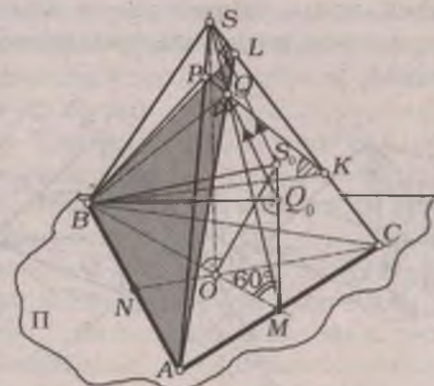
Потрібно показати, що пряма $AB \in \Lambda$ утворює найбільший кут нахилу до площини основи Π, порівняно зі всіма іншими кутами, утвореними рештою прямих площини Λ, які вміщують ту саму точку A.

Доведення теореми простежується за виконаним малюнком (див. [2, с. *254*, *255*]).

У практичній стереометрії за лінію рівня грані багатогранника доцільно відразу ж обирати їх спільне із гранню основи ребро s, яке, завдячуючи його особливому розташуванню відносно Π, часто називають ребром нульового рівня.

Таким чином, двогранний кут можна також вимірювати лінійним кутом, утвореним прямою найбільшого нахилу однієї грані багатогранника до іншої його грані — основи (за вибором виконавця); точніше, — до проекції лінії найбільшого нахилу певної грані на площину основи. Це, у свою чергу, зводить задачу відшукання двогранного кута до задачі на побудову кута між визначеними прямою і площиною, що геометрично не менш цікаво.

Отже, повернувшись тепер до умови задачі, знайдемо ще один змістово і візуально привабливий алгоритм побудови лінійного кута заданого двогранного кута при ребрі SC (мал. 4). Для цього досить, наприклад, із вершини B опустити перпендикуляр BQ на грань SAC, а потім з'єднати точку A з точкою Q до перетину з ребром SC у точці L. Кут ALB — шуканий. Тут роль основної площини відіграє грань SAC, а QL — ортогональна проекція BL на цю грань.



Мал. 4

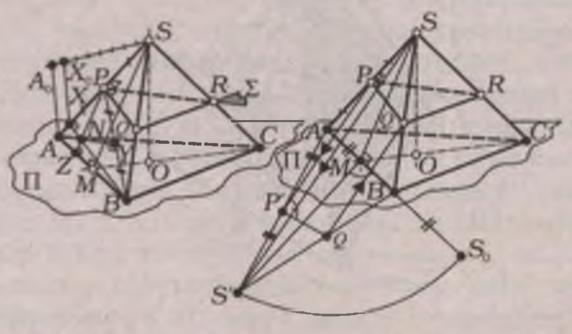
Побудову точки Q на апофемі SM грані SAC у метрично визначеному трикутнику SBM, де $\angle S_0OM = 90°$, а $\angle S_0MO = 60°$, можна виконати аналогічно попередньому і винятково ***графічним*** методом; трикутник S_0BM — суміщення з картинною площиною трикутника SBM.

Суб'єкту навчання суть важливо бути переконаним, що в розмаїтті способів розв'язання розглянутої в деталях типової задачі із зображенням двогранного кута слід вирізняти загальногеометричний підхід до *проведення перпендикуляра з будь-якої точки на яку завгодно грань* чи *на який завгодно переріз* метрично визначеного багатогранника. Адже таку графічну операцію кваліфікують як одну з основних у метричній стереометрії (див. також задачу 3).

Задача 2. Дано зображення правильної трикутної піраміди $SABC$, бічне ребро якої у два рази більше сторони основи. Побудувати на поверхні піраміди геометричне місце точок, рівновіддалених від двох вершин піраміди S і A.

Задача на побудову площини, перпендикулярної до прямої (ребра піраміди), приваблює логікою просторових міркувань і малюнкових реалізацій. У ній, насамперед, варто змоделювати покроковий загальногеометричний підхід до її розв'язання в уявленнях — чітко визначитися із правилом-орієнтиром обов'язкових побудов у просторовій конструкції. Наразі всім відомо, що геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від вершин S і A, є площина Σ, перпендикулярна до SA та інцидентна точці P, яка ділить цей відрізок навпіл. Отже, найпершим просторовим дійством, що визріває у метрично-позиційній схемі, має бути проведення через точку P ($SP = PA$) площини Σ чітко встановленого напряму, а на завершення — відшукання фігури перерізу поверхні піраміди цією площиною. Задля справи нагадаємо, що цілковите розуміння, «бачення» уявлюваного просторового алгоритму забезпечує гарантовано правильний шлях у наступних операціях циркулем і лінійкою безпосередньо на зображенні.

Перший спосіб розв'язання. Аналізуючи умову задачі, прямо скористаємося взаємними залежностями між визначальними елементами піраміди (мал. 5, *а*).



Мал. 5

Констатуємо, що трикутник APB рівнобедрений ($SP = PA = AB$ за умовою). Тому ділимо відрізок PB точкою Y пополам і проводимо першу висоту AY цього трикутника. Але ж у трикутнику SAB, оскільки він теж рівнобедрений ($SA = SB$ за умовою), медіана SM є одночасно і висотою. Таким чином, відрізок PZ, проведений паралельно SM, є ще однією (другою) висотою трикутника APB. Висоти трикутника перетинаються в одній точці. Нехай $N = AY \cap PZ$. Отже, третя висота BX трикутника APB однозначно задається його вершиною B і ортоцентром N. Цим у грані SAB установлено перпендикулярний напрям до ребра SA. Залишилося лише через точку P у цій самій грані провести відрізок PQ, паралельний XB, а через точку Q у грані SBC — відрізок QR, паралельний BC (адже площина Σ розділяє ребра SB і SC правильної піраміди в перетині з ними в одному і тому самому відношенні, що очевидно). Точки P, Q і R в об'єднанні зі всіма точками відрізків PQ, QR і RP і будуть шуканим геометричним місцем точок на поверхні піраміди.

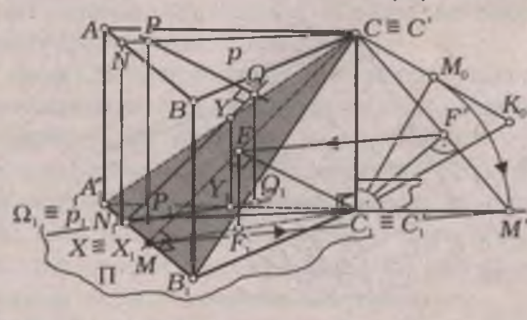
Другий спосіб розв'язання (мал. 5, *б*). Суміестимо грань $S'A'B'$ із картинною площиною, залишивши без змін на проекційному кресленні ребро $AB \equiv A'B'$. Тут у побудові $MS' \perp AB$ і $AS' = BS' = 2A'B'$. Провівши через точку P' ($A'P' = P'S'$) відрізок $P'Q'$ справді під прямим кутом до $A'S'$, одержимо точку Q', яка з шуканою точкою Q споріднена пропорцією: $S'Q' : Q'B' = SQ : QB$.

Точку Q будуємо звичним прийомом, а точку R — як у попередньому випадку.

Третій спосіб розв'язання. Розрахуємо ***аналітично*** розташування точки X на ребрі SA. Нехай $AB = 1$, а отже, $SA = SB = 2$. Позначимо $AX = x$, тоді $XS = AS - x$. У трикутнику SAB справедлива рівність: $AB^2 - x^2 = SB^2 - (AS - x)^2$. Звідси $x = AX = \frac{1}{4}$, $XS = \frac{7}{4}$ і $AX : XS = 1 : 7$. ***Графічне*** завершення задачі, яке відтворює на проекційному кресленні щойно знайдені співвідношення, є тривіальним.

Неочікуваним фактом у запропонованому алгоритмі конструктивних дій (перший спосіб розв'язання) є злиття (накладання) кроків проведення через точку P площини, перпендикулярної до ребра SA, і відшукання перерізу піраміди цією площиною. Дві, загалом різні за геометричною суттю, операції (метрична і позиційна) в цьому конкретному випадку неподільні. В основу другого (графічного) способу покладено метод суміщення, а третій — графоаналітичний.

Задача 3. Дано зображення правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, висота якої дорівнює стороні трикутника основи. Через її вершини C, A_1 і B_1 проведена площина Σ. Потрібно із точки P, що належить верхній грані призми, опустити перпендикуляр на площину Σ (A_1B_1C).



Мал. 6

Шуканий перпендикуляр (мал. 6) матиме напрям будь-якого іншого перпендикуляра, який легко можна опустити на площину Σ (A_1B_1C) із поміркованo обраної точки призми. Хоча б із вершини C_1. Він лежатиме в бісекторній площині Δ (CC_1M), що конструктивно привабливо та ще й просто обґрунтовується: площини Δ і Σ взаємно перпендикулярні, оскільки $A_1B_1 \perp C_1M$ і $A_1B_1 \perp CM$.

Методом суміщення знайдемо спочатку справжню форму прямокутного трикутника $C'C_1'M'$, залишивши без зміни на кресленні одну з його сторін, наприклад $C'C_1' \equiv CC_1$ (вісь). Пам'ятаючи, що в оригіналі призма пряма ($\angle C'C_1'M' = 90°$) і всі її ребра рівні між собою (зокрема, $C'C_1' = A_1'B_1' = B_1'C_1' = A_1'C_1'$, тобто $\Delta A_1'B_1'C_1'$ — правильний), сформуємо такий ланцюжок побудов: 1) на відрізку CC_1, як на стороні, будуємо рівносторонній трикутник CC_1K_0 і, з вершини C_1, проведемо його висоту (медіану і бісектрису) C_1M_0; 2) з початком у точці C_1 і перпендикулярно CC_1 проведемо промінь, де відкладемо відрізок C_1M', рівний відрізку C_1M_0, та з'єднаємо точки C і M'. Прямокутний трикутник CC_1M' дає оригінальну форму трикутника $C'C_1'M'$. Тому залишилося лише з точки C_1 опустити перпендикуляр C_1F на гіпотенузу знайденого трикутника і розділити точкою F відрізок CM у відношенні, в якому точка F' ділить відрізок CM', що й зроблено на малюнку. Напевне, відрізок C_1F і буде зображенням перпендикуляра, опущеного з точки C_1 на площину Σ (A_1B_1C).

Далі, через задану на зображенні точку $P(P_1)$ проводимо пряму $p(p_1)$, паралельну щойно побудованому перпендикуляру C_1F (C_1F_1), і знаходимо її точку перетину $Q(Q_1)$ із площиною Σ $(C(C_1), A_1B_1)$. Тут у ролі площини-посередника задіяна проекціювальна площина Ω, яка цілком визначається прямою $p(p_1)$ і проекціювальним променем PP_1. Нарешті, пряма XY (X_1Y_1) легко будується як перетин площин Σ і Ω, а точка $Q(Q_1) = XY\ (X_1Y_1) \cap p(p_1)$ буде основою шуканого перпендикуляра PQ (P_1Q_1).

Ми розв'язали метричну задачу на побудову відрізка-відстані від точки до площини, коли картинна площина метрично визначена зображенням правильної трикутної призми. Беручи до уваги хід наведених міркувань, **узагальнюючи**, сформулюємо **правило-орієнтир** її строгого розв'язання.

1. Встановлюємо ***напрям*** **перпендикуляра**: осмислено на зображенні призми вибираємо точку, з якої провести пряму, перпендикулярну до заданої площини, порівняно просто — за вже відомим алгоритмом.

2. Через задану точку проводимо пряму, ***паралельну*** знайденому ***напряму.***

3. Будуємо ***перетин*** так проведеної прямої із заданою площиною.

Чи можна ***аналітично*** розрахувати розташування точки F на відрізку CM? Так, звичайно. Точка F є основою перпендикуляра, опущеного з вершини прямого кута трикутника CC_1M на гіпотенузу. Тому: $CF : FM = CC_1^2 : C_1M^2 = 4 : 3$.

Роль учителя **математики** (***геометрії***) у стимулюванні пізнавальних інтересів особистості, інтелектуального розвитку і збагачення задатків творчого мислення проявляється через популяризацію, активне залучення в навчальний процес новітніх технологій, сучасних прогресивних методів і засобів пізнання. Навчаючи геометрії, справжній учитель-професіонал може дохідливо передати відчуття гармонії геометричного матеріалу, наочно продемонструвати природну красу і прикладне спрямування першонауки.

Конструктивізм, поміркована **геометризація** і **унаочнення** пропозицій апріорі зорієнтовані на формування особистості учня. Ставиться завдання пробудити зацікавленість геометрією як наукою, її природною практичною направленістю, стимулювати ефективний розвиток наочно-образного просторового мислення і лише на цій основі (засобами геометрії), — логічного мислення, збагатити творчий потенціал. Такий підхід, у повній відповідності з результатами сучасних психолого-педагогічних, науково-прикладних і методичних досліджень, приведе до поліпшення якості професійної підготовки майбутніх учителів у сфері математики, що в цілому відображає новітні тенденції научіння.

Тема є однією із ключових у становленні через ***уявлення і дію***, **в живому спогляданні** динамічних стереотипів оперування стереометричними фігурами, а **задачі на перпендикулярність** прямих і площин у **графічному, графоаналітичному** й обчислювальному поданні — квінтесенцією навчання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10 — 11 кл. серед. шк. — 4-те вид. — / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 128 с.

2. Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навчальний посібник монографічного характеру для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ / І. Г. Ленчук. — Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. — 368 с.

і бісектрису) C_1M_0; 2) з початком у точці C_1 і перпендикулярно CC_1 проведемо промінь, де відкладемо відрізок C_1M', рівний відрізку C_1M_0, та з'єднаємо точки C і M'. Прямокутний трикутник CC_1M' дає оригінальну форму трикутника $C'C_1'M'$. Тому залишилося лише з точки C_1 опустити перпендикуляр C_1F на гіпотенузу знайденого трикутника і розділити точкою F відрізок CM у відношенні, в якому точка F' ділить відрізок CM', що й зроблено на малюнку. Напевне, відрізок C_1F і буде зображенням перпендикуляра, опущеного з точки C_1 на площину Σ (A_1B_1C).

Далі, через задану на зображенні точку $P(P_1)$ проводимо пряму $p(p_1)$, паралельну щойно побудованому перпендикуляру C_1F (C_1F_1), і знаходимо її точку перетину $Q(Q_1)$ із площиною Σ $(C(C_1),\ A_1B_1)$. Тут у ролі площини-посередника задіяна проекціювальна площина Ω, яка цілком визначається прямою $p(p_1)$ і проекціювальним променем PP_1. Нарешті, пряма XY (X_1Y_1) легко будується як перетин площин Σ і Ω, а точка $Q(Q_1) = XY\ (X_1Y_1) \cap p(p_1)$ буде основою шуканого перпендикуляра PQ (P_1Q_1).

Ми розв'язали метричну задачу на побудову відрізка-відстані від точки до площини, коли картинна площина метрично визначена зображенням правильної трикутної призми. Беручи до уваги хід наведених міркувань, **узагальнюючи**, сформулюємо **правило-орієнтир** її строгого розв'язання.

1. Встановлюємо ***напрям* перпендикуляра**: осмислено на зображенні призми вибираємо точку, з якої провести пряму, перпендикулярну до заданої площини, порівняно просто — за вже відомим алгоритмом.

2. Через задану точку проводимо пряму, ***паралельну*** знайденому ***напряму.***

3. Будуємо ***перетин*** так проведеної прямої із заданою площиною.

Чи можна ***аналітично*** розрахувати розташування точки F на відрізку CM? Так, звичайно. Точка F є основою перпендикуляра, опущеного з вершини прямого кута трикутника CC_1M на гіпотенузу. Тому: $CF : FM = CC_1^2 : C_1M^2 = 4 : 3$.

Роль учителя **математики (*геометрії*)** у стимулюванні пізнавальних інтересів особистості, інтелектуального розвитку і збагачення задатків творчого мислення проявляється через популяризацію, активне залучення в навчальний процес новітніх технологій, сучасних прогресивних методів і засобів пізнання. Навчаючи геометрії, справжній учитель-професіонал може дохідливо передати відчуття гармонії геометричного матеріалу, наочно продемонструвати природну красу і прикладне спрямування першонауки.

Конструктивізм, поміркована **геометризація** і **унаочнення** пропозицій апріорі зорієнтовані на формування особистості учня. Ставиться завдання пробудити зацікавленість геометрією як наукою, її природною практичною направленістю, стимулювати ефективний розвиток наочно-образного просторового мислення і лише на цій основі (засобами геометрії), — логічного мислення, збагатити творчий потенціал. Такий підхід, у повній відповідності з результатами сучасних психолого-педагогічних, науково-прикладних і методичних досліджень, приведе до поліпшення якості професійної підготовки майбутніх учителів у сфері математики, що в цілому відображає новітні тенденції научіння.

Тема є однією із ключових у становленні через ***уявлення і дію*, в *живому спогляданні*** динамічних стереотипів оперування стереометричними фігурами, а **задачі на перпендикулярність** прямих і площин у **графічному, графоаналітичному** й обчислювальному поданні — квінтесенцією навчання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10 — 11 кл. серед. шк. — 4-те вид. — / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 128 с.

2. Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навчальний посібник монографічного характеру для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ / І. Г. Ленчук. — Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. — 368 с.

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

ПЕРЕДПЛАТНИЙ ІНДЕКС 74326

11, 2013

ОРІЄНТОВНІ ВИМОГИ ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОЇ МОВИ

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

ДОПРОФІЛЬНА ПІДГОТОВКА З МАТЕМАТИКИ