ЕК

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 5 (140) 2013, ТРАВЕНЬ

ЩОМІСЯЧНИК

Передплатний індекс **74326**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНЕ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО ВИДАВНИЦТВО «ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ

Заснований у 1997 р.
До 2012 р. журнал виходив у світ під назвою «Математика в школі»

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації, серія КВ №18310-7110 пр від 25.10.2011 р.

Схвалено вченою радою Інституту педагогіки НАПН України (протокол від 22.04.2013 р. № 7)

ЗМІСТ

НАУКА – ВЧИТЕЛЮ

Євген ЛОДАТКО
Вчителю математики про математичну культуру 2

МЕТОДИКА, ДОСВІД, ПОШУК

Тамара КОЛЕСНИК, Оксана ТАРАСЕНКО
Задачі на екстремум у курсі математики старшої школи 6

Оксана МАРТИЩУК, Ірина ЛИТВИНЕНКО
Формування наукового світогляду учнів на уроках математики 14

Ірина ГОРДІЄНКО
Аналогія як засіб реалізації внутрішньо-предметних зв'язків у шкільному курсі геометрії 16

Світлана ЛЕОНОВА
Швидкоплинні хвилини уроку 20

Оксана ЗАСЬКО
Подорож до загубленого світу (*розробка уроку для 5 класу*) 23

Наталія РОТАНЬОВА
Формування евристичного прийому «порівняння» у школярів 5 – 6 класів 26

ПРОФІЛЬНЕ НАВЧАННЯ

Олена СКАФА, Вікторія ПРАЧ
Управління евристичною діяльністю учнів-гуманітаріїв на уроках математики 30

Іван ЛЕНЧУК
Унаочнення і геометризація теми «Мимобіжні прямі» у класах із поглибленим вивченням математики 38

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ

Ігор МІТЕЛЬМАН, Катерина РАБЕЦЬ
XV Всеукраїнський ТЮМ імені професора М. Й. Ядренка. Ювілей – час підсумків і побажань 44

За достовірність фактів, дат, назв тощо відповідають автори. Редакція не завжди поділяє їхні погляди. Листування ведеться на сторінках журналу. Рукописи не повертаються. У разі використання матеріалів, посилання на журнал є обов'язковим.

УНАОЧНЕННЯ І ГЕОМЕТРИЗАЦІЯ ТЕМИ «МИМОБІЖНІ ПРЯМІ» У КЛАСАХ ІЗ ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

Іван ЛЕНЧУК — доцент кафедри математики Житомирського державного університету імені Івана Франка, кандидат технічних наук

Анотація. Одну із ключових тем стереометрії — відстань між мимобіжними прямими — пропонується розглядати ґрунтовніше, з наголосом на конструктивно-генетичний метод дій.

Ключові слова: унаочнення, конструктивізм, графічний і графоаналітичний методи, мимобіжні прямі, спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих.

Иван ЛЕНЧУК.

ПРИВЕДЕНИЕ К НАГЛЯДНОМУ ВИДУ И ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ТЕМЫ «СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ» В КЛАССАХ С УГЛУБЛЁННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ.

Аннотация. Одну из ключевых тем стереометрии — расстояние между скрещивающимися прямыми — предлагается рассматривать основательнее, с ударением на конструктивно-генетический метод действий.

Ключевые слова: обращение к наглядности, конструктивизм, графический и графоаналитический методы, скрещивающиеся прямые, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых.

Ivan LENCHUK.

COERCIONS TO THE EVIDENT KIND AND GEOMETRIZING OF THEME THE «CROSSING LINES» IN CLASSES WITH THE DEEP STUDY OF MATHEMATICS.

Summary. One of key that stereometries are distance between crossings lines — it is suggested to examine deeper, more sound, with an accent on the structural-genetic method of actions.

Keywords: address to evidentness, constructivism, graphic and grafoanaliticheskiy methods, crossings lines, general perpendicular of two crossings lines.

Кваліфіковане **переформулювання** на суто геометричний лад пропозицій геометрії, їх помірковане ***наочно-образне*** подання мають сприяти осмисленню і структурній систематизації матеріалу, що вивчається. **Графічні**, **графоаналітичні** методи розв'язування задач на обчислення, доведення і **побудову**, реалізовані щоразу візуально, є невід'ємними складовими становлення і розвитку в учнів (студентів) динамічних стереотипів просторових уявлень та логічного мислення, формування засобами геометрії графічно-алгоритмічної культури.

Звісно, мова геометрії менш універсальна, ніж природна людська мова, проте їй притаманна виняткова якість — ***наочність***. **Унаочнення** викладання й учіння є однією з необхідних умов успішного опанування предмета «Геометрія».

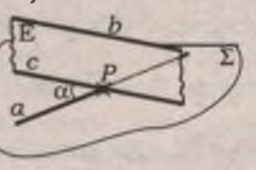
Наочність як **фундаментальний *принцип дидактики*** був уперше сформульований чеським педагогом, мислителем-гуманістом Я. А. Коменським. Він вважав, що «... не зі словесного тлумачення про речі, але з реального спостереження за ними» *має розпочинатися всяке навчання*. «Золоте правило дидактики» Я. А. Коменського свідчить: «... Все, що лише можна, слід подавати для сприйняття чуттями, а саме: видиме — для сприйняття зором, чуване — слухом, запахи — нюхом, що підлягає смаку — смаком, підвладне дотику — чуттям дотику. Якщо які-небудь предмети відразу можна сприйняти кількома відчуттями, нехай вони схвачуються кількома відчуттями» [1, *302 — 303*].

Погляди Я. А. Коменського підтримали і розвинули великі педагоги минулого Й. Г. Песталоцці, К. Д. Ушинський. Зокрема, К. Д. Ушинський стверджував, що **наочне подання фактів** — «... це таке учіння, яке будується не на абстрактних уявленнях і словах, а на конкретних образах, безпосередньо сприйнятих дитиною. ... Цей хід учіння, ***від конкретного до абстрактного, від уявлення до думки*** настільки природний і ґрунтується на таких прозорих психічних законах, що *відкинути його необхідність може лише той, хто взагалі відкидає потребу рахуватися в навчанні з вимогами людської природи в цілому і дитячої особливо*» [2, 265 — 266].

Психологічні дослідження стосовно використання різних засобів наочності проводили Л. В. Занков, Л. М. Фрідман, Н. А. Усова та ін. За Л. В. Занковим, наочність навчання передбачає як широке використання зорових відчуттів, сприймань, образів, так і постійне опертя на свідчення органів чуття, дякуючи яким досягається безпосередній контакт із дійсністю. Л. М. Фрідман у сучасному трактуванні дидактичного принципу наочності наголошує на його ролі в підвищенні якості засвоєння знань й умінь, в удосконаленні управлінської діяльності вчителя. Резюмуючи власні наукові пошуки, професор Фрідман проголошує тезу: ***«Наочність — це розуміння і активність»***. Н. А. Усова кваліфікує **наочність як категорію психології і дидактики**, яка забезпечує зв'язок між конкретним і абстрактним, що сприяє розвитку мислення, а в багатьох випадках слугує його надійною опорою. В геометрії наочність — потужний **засіб** розуміння її суті.

Традиційно в підручниках для ЗОНЗ геометрію визначають винятково «як науку про *властивості* геометричних фігур», не вважаючи за потрібне (начебто задля лаконізму подання дисципліни) додати «... і про *закономірності їх взаємного розташування*». У реальному житті, на практиці не часто оперують окремо взятими фігурами, більше — їх комбінаціями. В ситуації з **мимобіжними прямими** суть важливо розуміти, «бачити» в уявленнях, що **позиційна** складова питання однозначно забезпечується двома **метричними** параметрами. Взаємне розміщення прямих вичерпно характеризують *градусна міра* **кута і відрізок** *найкоротшої відстані* між ними.

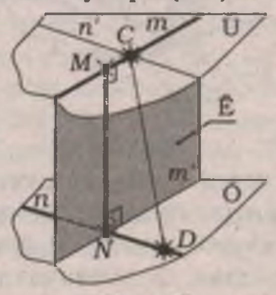
Стосовно першого із двох зазначених параметрів, його конструктивізм обґрунтовується методично просто. Дається спочатку означення кута між прямими, які перетинаються, й до нього зводять означення кута між мимобіжними прямими (мал. 1, див. також [3], § 4, п. 31 або [4], *121*).



Мал. 1

Ми **ставимо за мету** провести ретельний аналіз одного з *найскладніших і найважливіших* **метричних** понять (об'єктів) розділу «Стереометрія» — **спільного перпендикуляра** двох мимобіжних прямих, конкретизувати його **геометричне тлумачення**, виважено дати ***конструктивне*** означення.

Отже, «*Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих називається відрізок із кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них*» ([3], § 3, п. 21). Легко помітити, що таке ***описове (дескриптивне)*** означення неявне (непобудовне), й тому виникає потреба в доведенні факту **існування** та **єдиності** спільного перпендикуляра мимобіжних прямих. Саме це далі в тексті й обґрунтовує автор підручника, довівши, поряд із цим, що шуканий відрізок є спільним перпендикуляром пари паралельних площин, які завжди єдиним чином можна провести через задані мимобіжні прямі (мал. 2). Далі у книжці, методом «від супротивного», доведено єдиність перпендикуляра (*MN*).



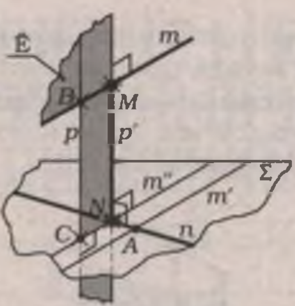
Мал. 2

Важливо, що **суто геометричний зміст** відрізка *MN* цілком розкривається в доведенні його **існування**. Адже останнє індукує нерозривний ланцюжок логічно осмислених дій із метою побудови відрізка уявно у просторі чи, за умов дотримання властивостей паралельних проекцій, на проекційному кресленні. Отже, це доведення є не чим іншим, як ***побудовним*** **(конструктивним)** означенням спільного перпендикуляра заданих мимобіжних прямих.

На завершення дається означення, яке необхідно придатне в обчислювальній геометрії: «*Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра. Вона дорівнює* ***відстані між паралельними площинами****, які проходять через ці прямі*».

У доповнення корисно **у власних уявленнях** відтворити ще й таку часто вживану (зокрема, в аналітичній геометрії) інтерпретацію останнього означення. Нехай m і n — деякі мимобіжні прямі. Проведемо через них (відомим прийомом) єдино можливу пару паралельних площин Σ ($n \cap m'$) і Ω ($m \cap n'$). Прямі, які перетинають пряму m і перпендикулярні до площини Ω, лежать в одній площині (Λ_1). Ця площина перетинає площину Σ по прямій m'', паралельній m, а пряму n — у точці N. Прямі ж, які перетинають пряму n і перпендикулярні до площини Σ, лежать в одній площині (Λ_2). Остання перетинає площину Ω по прямій n'', паралельній n, а пряму m — у точці M. Тоді пряма MN перетину площин Λ_1 і Λ_2 перпендикулярна до площин Σ і Ω, оскільки Σ паралельна Ω. Відрізок MN — спільний перпендикуляр площин Σ і Ω і прямих m та n.

Практичних зручностей у вирішенні тематичних пропозицій побудовними засобами, гарантованої чіткості в системній реалізації схеми дій у проекціях можна досягти дещо скоригувавши й упорядкувавши сформульоване правило-орієнтир уявлюваних просторових операцій, розписавши його за конкретними кроками виконання (мал. 3).



Мал. 3

Проведемо через пряму n площину Σ, паралельну прямій m (на прямій n виберемо будь-яку точку A і через неї проведемо пряму m', паралельну m; площина Σ визначатиметься перетином прямих m' і n).

Проведемо через пряму m площину Λ, перпендикулярну до площини Σ (на прямій m виберемо будь-яку точку B і через неї проведемо пряму p перпендикулярно до Σ; площина Λ визначатиметься перетином прямих m і p).

Побудуємо пряму лінію перетину площин Σ і Λ (знайдемо точку C перетину перпендикуляра p із площиною Σ і через цю точку проведемо пряму m'', паралельну m').

Знайдемо точку N перетину прямих m'' і n.

Через точку N проведемо у площині Λ пряму p', паралельну p.

Знайдемо точку M перетину прямих p' і m. Відрізок MN — шуканий спільний перпендикуляр мимобіжних прямих m і n.

Саме цей алгоритм учитель **зобов'язаний «прочитати»** між рядками в будь-якому підручнику, привернути до нього пильну увагу учнів і залучити до **діяльності** — неухильного, грамотного використання в задачах стереометрії.

Задача 1. У правильній трикутній призмі, всі ребра якої рівні, побудувати спільний перпендикуляр мимобіжних діагоналей двох її бічних граней. Обчислити відстань між цими діагоналями, якщо ребро призми прийняти за 1.

Розв'язання. Нехай у призмі $ABCKLM$ (мал. 4) діагоналі AL і BM належать відповідно граням $AKLB$ і $BLMC$. Скористаємося сформульованим щойно класичним прийомом ***графічних*** дій, який називають конструктивним означенням спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих.

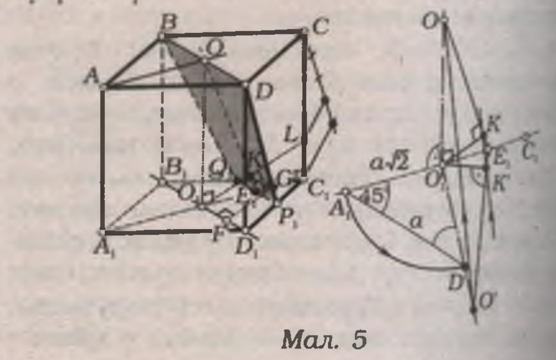
Мал. 4

Через діагональ AL проведемо площину Σ, паралельну іншій діагоналі BM. Для цього через точку A проведемо пряму, паралельну BM, і знайдемо точку A_0 — слід останньої прямої на площині основи призми KLM ($AA_0 \parallel BM$, $AA_0 = BM$). Згідно з обраною схемою уявлюваних операцій, наступним кроком, наприклад із точки M діагоналі BM, потрібно опустити перпендикуляр на площину Σ (ALA_0). Одна з найперших (основних) метричних задач, яка на проекційному кресленні завжди розв'язується не просто, у випадку трикутної призми, бічні грані якої — квадрати, побудовно спрощується, оскільки введена площина Σ перпендикулярна до площини ($AKMC$) третьої бічної грані. Тут пряма LA_0, що містить медіану LO рівностороннього трикутника KLM в основі призми, перпендикулярна до двох прямих площини ($AKMC$), які перетинаються: KM і AK (адже призма — пряма, а LO є також висотою трикутника KLM). Більше того, площини Σ (ALA_0) і ($AKMC$) мають у перетині пряму AO, що визначається вершиною A квадрата $AKMC$ і точкою O — серединою сторони KM ($KO = OM$). Тому пряма KH ($H \in MC$ і $MH = HC$), що, очевидно, розміщена перпендикулярно до AO і якщо точка D є перетином відрізків AO і KH, то KD — відрізок перпендикуляра, опущеного з точки K на площину Σ (ALA_0).

Таким чином, залишається лише у площині квадрата ($AKMC$) провести на площину Σ із точки M, паралельно KD, ще один перпендикуляр MN, а потім, за напрямом $M \to B$, *внутрішньо зсунути* останній у розташування спільного перпендикуляра PQ, кінці якого лежатимуть на мимобіжних прямих AL і BM.

Оскільки $PQ = KD$ ($\Delta KDO = \Delta MNO$ і $MN = PQ$), формальні обчислення у прямокутному трикутнику AKO не потребують детальних пояснень: $AK = 1$, $KO = \frac{1}{2}$ і $AO = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Далі, $KO^2 = OD \cdot OA \Rightarrow OD = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, а $AD = AO - OD = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тому $KD = \sqrt{AD \cdot OD} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. До того ж $AD : DO = 4 : 1$ і $AO : ON = 5 : 1$. Ці **аналітичні** розрахунки спрощують **графічні** дії, пришвидшують результат.

Задача 2. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із ребром, рівним a. На ребрі D_1C_1 взято точку P_1 — середину цього ребра. Знайти відстань між прямими B_1D_1 і DP_1.



Мал. 5

У висновку задачі вимагається обчислити відстань між даними мимобіжними прямими B_1D_1 і DP_1, яка вимірюється, як уже з'ясовано вище, відрізком відстані між паралельними площинами, що вміщують ці прямі. Проведемо пряму Q_1P_1 — середню лінію трикутника $B_1C_1D_1$ (мал. 5). Тоді $Q_1P_1 \parallel B_1D_1$, а дві паралельні прямі Q_1P_1 і BD визначають площину, яка проходить через одну із заданих прямих DP_1 і паралельна іншій — B_1D_1. Таким чином, шукана величина вимірюється відстанню від прямої B_1D_1 до площини Σ (Q_1P_1D). Щоб визначитися з останньою, достатньо з точки O_1 опустити перпендикуляр на площину Σ. На ***кресленні-картині*** основу перпендикуляра — точку K — вибирають будь-де, аби лише вона належала прямій (відрізку) OE_1 перетину площини Σ (Q_1P_1D) із площиною Λ (AA_1C_1C), адже Q_1P_1 — перпендикуляр до площини осьового перерізу куба Λ (AA_1C_1C) $(Q_1P_1 \perp A_1C_1$, $Q_1P_1 \perp OO_1)$.

Помічаємо, що прямокутні трикутники OO_1E_1 і O_1KE_1 подібні ($\angle E_1$ – спільний). Тому матимемо:

$\frac{O_1E_1}{O_1K}=\frac{OE_1}{OO_1}$, звідки $O_1K=\frac{O_1E_1\cdot OO_1}{OE_1}$, де $OO_1 = a$,

а $O_1E_1=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $OE_1=\sqrt{OO_1^2+O_1E_1^2}=\frac{3a}{2\sqrt{2}}$.

Отже, $O_1K=\frac{a}{3}$.

Цим пошук шляху розв'язання задачі на обчислення формально завершено.

Графічний метод. У такому варіанті дій варто виконати два послідовні суміщення з картинною площиною (див. винесене креслення). Першим із них знайдемо істинну форму квадрата $A_1B_1C_1D_1$ в основі куба, а другим – прямокутного трикутника OO_1E_1. За вісь перетворення обираємо діагональ квадрата $A_1C_1 \equiv A_1'C_1'$, оскільки їй належить також один із катетів O_1E_1 трикутника, визначального у відшуканні розв'язку. Інший його катет OO_1 дорівнює (за умовою) стороні квадрата і якщо $A_1C_1=a\sqrt{2}$, то, напевне, $A_1D' = O_1O' = a$. Перпендикуляр O_1K' у вже суміщеному трикутнику $O'O_1E_1$ опустимо з вершини прямого кута (O_1) на гіпотенузу $(O'E_1)$ звичним для площини прийомом, а його зображення O_1K побудуємо, скориставшись узагальненою теоремою про пропорційні відрізки.

Графоаналітичний метод. У площині Λ (AA_1C_1C) симетрії куба розглянемо два прямокутні (в оригіналі) трикутники OO_1E_1 і O_1C_1L, де $L = O_1K \cap CC_1$. Вони подібні, оскільки їх відповідні сторони OO_1 і O_1C_1, OE_1 і O_1L попарно перпендикулярні.

Матимемо: $\frac{O_1C_1}{C_1L}=\frac{OO_1}{O_1E_1}$.

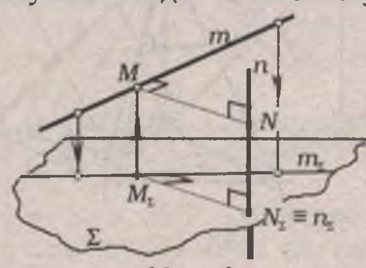
Звідси $C_1L=\frac{O_1C_1\cdot O_1E_1}{OO_1}=\frac{a}{4}$.

Графічні операції в побудові точки L, а за нею й точки K очевидні.

Якщо відрізок (O_1K) відстані від прямої B_1D_1 до площини Σ (Q_1P_1D) на кресленні-моделі вже зображено, то зовсім просто візуально завершити загальногеометричну схему побудови спільного перпендикуляра прямих B_1D_1 і DP_1. Адже залишилося здійснити лише два заключні кроки, а саме: через точку K провести пряму, паралельну Q_1P_1, до її перетину із прямою DP_1 у точці G, та через точку G провести пряму, паралельну O_1K, і зафіксувати точку F перетину цієї останньої прямої із прямою B_1D_1. Відрізок FG й буде шуканим.

Здавалося б, інші побудовні схеми годі й шукати. Однак *геометрія якраз і цікава розмаїттям можливостей та змістовних варіацій у вирішенні питань конструктивного характеру*.

Звернемося до однієї з найбільш ємних за геометричною суттю праць академіка Четверухіна М. Ф., в якій знаний педагог красномовно підкреслює: «При цьому, поряд із тим методом побудови спільного перпендикуляра, який описано у стабільному підручнику, ми будемо також ***ще радніше*** користуватися наступним прийомом розв'язування задач такого типу» [5, *86*].



Мал. 6

Припустимо, площина Σ розташована перпендикулярно до однієї з двох заданих мимобіжних прямих. Нехай це буде, наприклад, пряма n (мал. 6). За умови ортогонального проекціювання на площину Σ, за напрямом прямої n, остання спроекціюється в точку N_Σ, а пряма m — у деяку пряму m_Σ. Якщо відрізок MN — спільний перпендикуляр заданих прямих m і n, то $MN \perp n$, а отже, $MN \parallel \Sigma$. Цей факт означає, що сторона MN прямого кута NMm паралельна площині Σ, а відрізок перпендикуляра і, звичайно, прямий кут (згідно з теоремою про проекціювання прямого кута) проекціюються на неї без спотворення. Отже, $M_\Sigma N_\Sigma = MN$ і $\angle M_\Sigma N_\Sigma m_\Sigma = 90°$. Звідси приходимо до принципово іншого побудовного правила-орієнтиру проведення спільного перпендикуляра MN мимобіжних прямих на проекційному кресленні:

Через вдало обрану (загалом, будь-яку) точку N_Σ прямої n проводимо площину Σ, перпендикулярну до цієї прямої.

Будуємо ортогональну $(\parallel n)$ проекцію m_Σ прямої m на нововведену площину основи.