УДК 511:378.147

Т.В. Дідківська, І.А. Сверчевська,

(Житомирський державний університет імені Івана Франка)

ВИЗНАЧНІ ІСТОРИЧНІ ЗАДАЧІ З ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

Пропонується система визначних історичних задач для вивчення курсу «Теорія чисел» з розділів: подільність, ділення з остачею, прості та складені числа, спеціальні прості числа, ланцюгові дроби та діофантові рівняння. Це задачі математиків XII – XX ст., збережені історією. Наводяться авторські та сучасні розв'язання. Рекомендується література для самостійної роботи студентів

Ключові слова: історія математики, визначні задачі, предметна компетентність, теорія чисел, подільність, ділення з остачею, прості та складені числа, ланцюгові дроби, діофантові рівняння.

Успішне вивчення історії математики передбачає володіння студентами основами фундаментальних математичних дисциплін. Для здобуття якісних знань з цих предметів доцільно залучати елементи історії математики вже на молодших курсах. Один зі шляхів – розв'язування історичних задач. Історичні екскурси, які при цьому розглядаються, підвищують інтерес до вивчення предмету. Розв'язання цих задач різними методами (як авторськими, так і сучасними) розвиває творчі здібності, породжує мисленеву активність. А вся робота над визначними історичними задачами формує предметну компетентність, що характеризує освічену людину.

Проведено дослідження можливостей залучення історичних задач при навчанні студентів теорії чисел, та пропонуються історичні задачі відповідно класифікації: подільність, ділення з остачею; прості та складені числа; спеціальні прості числа; ланцюгові дроби та діофантові рівняння. Подаються посилання на літературу для самостійної роботи студентів, наводяться авторські й сучасні розв'язання.

Тема: Подільність. Ділення з остачею.

1) Задача Леонардо Пізанського (бл. 1170-після 1228) [3, 289]

Один говорить другому: «Дай мені 7 динаріїв, і я буду в 5 разів багатший за тебе». А другий говорить: «Дай мені 5 динаріїв, і я буду в 7 разів багатший за тебе». Скільки у кожного?

Авторське розв'язання.

У першого $5y-7$ динаріїв, у другого $y+7$ динаріїв. Перша умова виконується. Якщо перший дасть другому 5 динаріїв, то утвориться рівність: $y+7+5=7(5y-12)$, $y=2\frac{14}{17}$. У другого $2\frac{14}{17}+7=9\frac{14}{17}$. У першого $5\cdot 2\frac{14}{17}-7=7\frac{2}{17}$.

Сучасне розв'язання.

За умовою задачі складаємо систему:

$$\begin{cases} x+7=5(y-7) \\ y+5=7(x-5) \end{cases}$$

Розв'язуючи систему отримуємо $x=7\frac{2}{17}$; $y=9\frac{14}{17}$.

Відповідь: у першого $7\frac{2}{17}$ динарія, у другого – $9\frac{14}{17}$ динарія.

2) Задача Франца ван-Скаутена (1615-1660). Голандський математик – автор твору «Математичні етюди», де розглядалася ця задача [3, 440].

Знайти кількість дільників числа $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, де p_i – прості числа [2, 41].

Розв'язання. Всі дільники цього числа мають вигляд $m=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$, де $0\le\beta_i\le\alpha_i$. Щоб знайти кількість дільників, підрахуємо кількість усіх можливих комбінацій для β_i. Оскільки $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ приймають відповідно $\alpha_1+1, \alpha_2+1, \dots, \alpha_k+1$ значень, то кількість дільників $\tau(m)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$.

3) Задача Джона Валліса (1616-1703). Основна праця англійського математика Джона Валліса «Арифметика нескінченного» зіграла важливу роль в передісторії інтегрального числення. Валліс знайшов вираз для числа π у вигляді нескінченного добутку та ввів загальноприйнятий знак для нескінченності [3, 82].

Знайти суму всіх дільників числа $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, де $p_1,p_2,\dots,p_k$ – прості числа [2, 41].

Розв'язання. Очевидно, що сума дільників

$$S(m)=\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1}\right)\left(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2}\right)\ldots\left(1+p_k+p_k^2+\ldots+p_k^{\alpha_k}\right).$$

Сумуючи кожний множник, маємо: $S(m)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$.

4) Задача Блеза Паскаля (1623-1662) [3, 372].

Знайти загальну ознаку подільності на натуральне число [2, 41].

Авторське розв'язання.

Нехай при діленні 10 на число n отримуємо остачу r_1, при діленні $10r_1$ на n – остача r_2, при діленні $10r_2$ на n – остача r_3 і так далі. Якщо дане число, наприклад тризначне, буде мати вигляд $\overline{abc}$, де a, b, c – цифри сотень, десятків, одиниць, то загальна ознака подільності цього числа на n наступна.

Якщо $c + br_1 + ar_2$ ділиться на n, то на n ділиться і число $\overline{abc}$. Доведемо. Нехай $10 = nq_1 + r_1,\ 10^2 = 10nq_1 + 10r_1,\ 10r_1 = nq_2 + r_2$. Тоді

$$c + br_1 + ar_2 = c + b(10 - nq_1) + a(10r_1 - nq_2) =$$
$$= c + 10b + 100a - n(bq_1 + 10aq_1 + anq_2).$$

Отже, $c + 10b + 100a$ ділиться на n.

Сучасне розв'язання.

Нехай систематичний запис числа:

$N = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ ... + a_1 q + a_0$, де q – основа системи числення, a_i – цифри. Доведемо ознаку подільності на m. Маємо: $q \equiv r_1 (mod\ m)$, $q^2 \equiv r_2 (mod\ m),\ \dots\ ,\ q^n \equiv r_n (mod\ m)$. Розглянемо наступні порівняння $a_0 \equiv a_0 (mod\ m), a_1 q \equiv a_1 r_1 (mod\ m), \dots\ , a_n q^n \equiv a_n r_n (mod\ m)$, додавши їх, одержимо $N \equiv a_n r_n + \ ... + a_1 r_1 + a_0 (mod\ m)$.

Відповідь: якщо $a_n r_n + \ ... + a_1 r_1 + a_0$ ділиться на m, то на m ділиться число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_q$

5) Задача Г. В. Лейбница (1646-1716) [3, 285].

Показати, що якщо n – ціле, то $n^5 - n$ ділиться на 5 [2, 42].

Розв'язання. $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$. Якщо n не ділиться на 5 то можливі форми цього числа $5k \pm 1$ і $5k \pm 2$; тоді n^2 має вигляд $25k^2 \pm 10k+1$ і $25k^2 \pm 20k + 4$. Тобто $n^2 - 1$ ділиться на 5 або $n^2 + 1$ ділиться на 5.

6) Задача Г. В. Лейбница (1646-1716) [3, 285].

Показати, що якщо n – ціле число, то $n^7 - n$ ділиться на 7 [2, 43].

Розв’язання. $n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1)$. Якщо n не ділиться на 7 то можливі форми цього числа $7k \pm 1$, $7k \pm 2$ і $7k \pm 3$; тоді n^3 має вигляд $343k^3 \pm 147k^2 + 21k \pm 1$; $343k^3 \pm 294k^2 + 84k \pm 8$; $343k^3 \pm 441k^2 + 189k \pm 27$. Тобто $n^3 - 1$ ділиться на 7 або $n^3 + 1$ ділиться на 7.

7) Задача Леонарда Ейлера (1707-1783) [3, 181].

Один чиновник купив коней та биків за 1770 талерів. За кожного коня він заплатив по 31 талеру, а за кожного бика – по 21 талеру. Скільки коней і биків купив чиновник? [2, 50].

Розв’язання.

Нехай x – кількість коней, y – кількість биків, то $31x + 21y = 1770$ звідки $y = 84 - x - \frac{10x-6}{21}$. З останньої рівності слідує, що $(5x - 3)$ ділиться на 21. Позначимо $5x - 3 = 21z$, $5x = 21z + 3$, отримаємо $y = 84 - x - 2z$, $x = 4z + \frac{z+3}{5}$. Отже, $(z + 3)$ ділиться на 5, тобто $z + 3 = 5t$, $z = 5t - 3, x = 4z + t = 4(5t - 3) + t, x = 21t - 12, y = 84 - x - 2z = 84 - (21t - 12) - 2(5t - 3)$, $y = 102 - 31t$. Визначимо значення t, якщо $x = 21t - 12$, $y = 102 - 31t$, де x, y – натуральні числа.

$$\begin{cases} 21t - 12 > 0 \\ 102 - 31t > 0 \end{cases}, \begin{cases} 21t > 12 \\ 31t < 102 \end{cases}, \begin{cases} t > \frac{12}{21} \\ t < \frac{102}{31} \end{cases}, \frac{4}{7} < t < 3\frac{9}{31}, t \in N, t = 1, 2, 3.$$

Одержимо при $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$ відповідно $x_1 = 9$, $y_1 = 71$; $x_2 = 30$, $y_2 = 40$; $x_3 = 51$, $y_3 = 9$.

Тема: Прості й складені числа.

1) Задача Фібоначчі (Леонардо Пізанський) (бл. 1170 – після 1228) [3, 289].

Для знаходження найменшого дільника натурального числа n достатньо перевірити його подільність на числа, що не перевищують $\sqrt{n}$ [10, 79].

Розв’язання. $n \vdots d$, $d - \min$, $n = d \cdot n_1$, $n_1 \geq d$, $n \geq d^2$, $d \leq \sqrt{n}$.

2) Задача Ферма (1601 – 1665) [3, 482].

Обґрунтувати спосіб розкладу на множники великого числа, відкритий Ферма. Нехай n – дане число і m – найменше ціле, для якого виконується $m^2 > n$.

Утворимо різниці $m^2 - n, \ (m+1)^2 - n, \ (m+2)^2 - n, \ldots$ Якщо деяка різниця є точним квадратом, то одержимо розклад на множники [10, 79].

Розв'язання. Маємо на останньому кроці утворення різниць $x^2 - n = y^2$ Розкладемо дане число на множники як різницю квадратів $n = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

Застосовуючи спосіб Ферма, розкласти на множники числа 1591, 6077.

а) $1600 > 1591, \ 40^2 > 1591, \ 40^2 - 1591 = 1600 - 1591 = 9 = 3^2$,

$1591 = 40^2 - 3^2 = (40-3)(40+3) = 37 \cdot 43$.

б) $78^2 = 6084, \ 6084 > 6077, \ 6084 - 6077 = 7 \neq y^2$,

$79^2 = 6241, \ 6241 - 6077 = 164 \neq y^2$,

$80^2 = 6400, \ 6400 - 6077 = 323 \neq y^2, \ 81^2 = 6561, \ 6561 - 6077 = 484 = 22^2$,

$6077 = 81^2 - 22^2 = (81-22)(81+22) = 59 \cdot 103$.

3) Задача Ейлера (1707 – 1783) [3, 181].

При необмеженому зростанні дійсного числа $x > 1$ границя відношення $\frac{\pi(x)}{x}$ дорівнює нулю [4, 218].

Розв'язання. Числова функція $\pi(x)$ визначає кількість простих чисел, що не перевищують дійсного числа $x > 1$. Для доведення використаємо нерівності Чебишова $a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\frac{x}{\ln x}$, де $x \geq 2, \ a < b$. Справді, маємо $\frac{\pi(x)}{x} < \frac{b}{\ln x}$. При $x \to \infty, \ \frac{b}{\ln x} \to 0$, отже $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$.

4) Задача Гаусса (1777 – 1855) [3, 121].

Довести, що добуток двох цілих додатних чисел, з яких кожне менше простого числа p, не ділиться на p [12, 50].

Розв'язання. Нехай $a < p, b < p$, де p – просте число. Для доведення використаємо твердження, вперше доведене Евклідом: якщо добуток кількох натуральних чисел ділиться на просте число р, то принаймні один із співмножників ділиться на p. Припустимо, що $ab \vdots p$, де p – просте число, то $a \vdots p$ або $b \vdots p$, але $a < p, b < p$, що неможливо.

5) Задача Сільвестра (1814- 1897) [3, 438].

Непарне досконале число повинно мати хоча б три різні прості дільники [7, 10]. Проблема існування непарних досконалих чисел залишається невирішеною.

Розв'язання. Припустимо спочатку, що N – це непарне досконале число з одним простим дільником p, тобто $N = p^r$, де p – це просте непарне число та $r \geq 1$. Тоді за означенням досконалого числа $\sigma(N) - N = N$, звідки $2N = \sigma(N)$, $2p^r = \sigma(p^r) = \dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}$, $2p^r(p-1) = p^{r+1} - 1$, $2p^{r+1} - 2p^r = p^{r+1} - 1$, $p^{r+1} - 2p^r = -1$, $2p^r - p^{r+1} = 1$. Ми прийшли до протиріччя, тому що ліва частина рівності ділиться на просте число p, а права не ділиться. Тому робимо висновок, що непарне досконале число не може мати тільки один простий дільник.

Розглянемо випадок двох простих дільників p і q. Припустимо, що $N = p^k q^r$ є непарним досконалим числом, де $p < q$ – це непарні прості числа. Тоді маємо $2N = \sigma(N) = \sigma(p^k q^r) = \sigma(p^k)\sigma(q^r)$,
$2N = (1 + p + p^2 + ... + p^k)(1 + q + q^2 + ... + q^r)$. Поділимо обидві сторони рівності на $N = p^k q^r$, маємо

$$2 = \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + ... + \frac{1}{p^k}\right)\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + ... + \frac{1}{q^r}\right) \leq$$

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{3^k}\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + ... + \frac{1}{5^r}\right).$$

Оскільки p, як непарне просте число, повинно бути не менше трьох, а оскільки q більше за p і є непарним простим числом, то воно повинно бути не менше п'яти, замінимо ці скінченні геометричні прогресії нескінченними та знайдемо їх суми, маємо $2 \le \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{3^i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{5^j} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8}$, а це протиріччя.

Так ми довели, що непарне досконале число повинно мати три або більше простих дільників.

6) Задача Френцеля [11, 98].

Сума довільного непарного степеня числа 4 та одиниці, при довільному показнику степеня, який більше за одиницю, розкладається на два множники, кожний з яких дорівнює сумі квадратів двох натуральних чисел.

Розв'язання.

$$4^{2n+1}+1 = 2^{4n+2}+1 = 2^{4n+2}+2\cdot 2^{2n+1}+1-2\cdot 2^{2n+1} = \left(2^{2n+1}\right)^2+2\cdot 2^{2n+1}+1-\left(2^{n+1}\right)^2 =$$
$$= \left(2^{2n+1}+1\right)^2-\left(2^{n+1}\right)^2 = \left(2^{2n+1}+1+2^{n+1}\right)\left(2^{2n+1}+1-2^{n+1}\right) =$$
$$\left(2^{2n}\cdot 2+2^{n+1}+1\right)\left(2^{2n}\cdot 2-2^{n+1}+1\right) == \left(\left(2^{2n}+2\cdot 2^n+1\right)+2^{2n}\right)\left(\left(2^{2n}-2\cdot 2^n+1\right)+2^{2n}\right) =$$
$$\left(\left(2^n+1\right)^2+\left(2^n\right)^2\right)\left(\left(2^n-1\right)^2+\left(2^n\right)^2\right) = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+b^2\right),$$ де $a = 2^n+1$, $b = 2^n$, $c = 2^n-1$.

7) Задача Джона Вільсона [2, 104].

Історична довідка. Англійський математик Едуард Варінг (1734-1798) у 1770 р. опублікував в «Алгебраїчних міркуваннях» найбільш відомий критерій простого числа й приписав його серу Джону Вільсону (1741-1793).

Довести, що натуральне число $n > 1$ тоді і тільки тоді є простим, коли $(n-1)!+1$ ділиться на n [10, 214].

Розв'язання.

Якщо $N = (n-1)!+1$ ділиться на n, доведемо, n – просте число. Припустимо, n – складене, тоді існує його простий дільник $p < n$. Маємо $N \vdots n$, отже, $N \vdots p$, $(n-1)!$ ділиться на p. З рівності $N = (n-1)!+1$ випливає, що $1 \vdots p$, це неможливо. Отже, припущення неправильне, n – просте число.

Якщо n – просте число, доведемо, що $(n-1)!+1$ ділиться на n. Якщо $n = 2$, то очевидно $\left((n-1)!+1\right) \vdots 2$. Якщо $n > 2$ розглянемо конгруенцію $(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))-(x^{n-1}-1) \equiv 0 \pmod{n}$. Її степінь не перевищує $n-2$, але вона має $n-1$ розв'язок, бо задовольняється числами 1, 2, … , n-1, (перший доданок перетворюється в нуль, а другий порівняний з нулем за теоремою Ферма). Тому ця конгруенція виконується при довільному х. При умові $x=0$, одержуємо $(-1)^{n-1}(n-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, n)$, n – просте число, тому $n-1$ – парне число і $(-1)^{n-1}=1$. Остаточно одержуємо $(n-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, n)$, $(n-1)!+1\equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$. Отже, $(n-1)!+1$ ділиться на n.

Тема: Спеціальні прості числа

1) Задача Ферма (1601 – 1665) [3, 482].

Для довільного цілого невід'ємного числа n число $F_n = 2^{2^n}+1$ – просте [11, 54].

Розв’язання. Дійсно, простими є: $F_0 = 2^1+1=3$, $F_1 = 2^2+1=5$, $F_2 = 2^4+1=17$, $F_3 = 2^8+1=257$, $F_4 = 2^{16}+1=65537$, але $F_5 = 2^{32}+1=4294967297=641\cdot 6700417$ – складене. У 1732 році Ейлер спростував твердження Ферма і довів, що $F_5 \,\vdots\, 641$.

Поправка до твердження Ферма: довести або спростувати, що числа $2+1,\ 2^2+1,\ 2^{2^2}+1,\ldots$ – прості. Доведено, що число $2^{2^{2^{2^2}}}+1$ – складене [10, 82].

2) Задача Гольдбаха (1690 – 1764) [3, 141].

Довести, що довільне число виду $4n^2+1,\ n\in N$ може бути простим тільки при $n=1$[12, 33].

Розв’язання.

$$4n^4+1=\left(\left(2n^2\right)^2+4n^2+1\right)-4n^2=\left(2n^2+1\right)^2-(2n)^2=\left(2n^2+1+2n\right)\left(2n^2+1-2n\right)$$

Якщо $n=1$, то дане число дорівнює 5, якщо $n\neq 1$, воно складене, бо розкладається на множники, що відмінні від одиниці та самого числа.

$$2n^2+2n+1=\left(n^2+2n+1\right)+n^2=(n+1)^2+n^2>1,\ 2n^2-2n+1=(-n+1)^2+n^2>1$$

3) Задача Гольдбаха (1690 – 1764) [3, 141].

Довільне непарне число, яке більше 5, можна подати у вигляді суми трьох простих чисел. Перевірте це на прикладі кількох двозначних чисел [12, 33].

Розв’язання. 77=53+17+7, 461=449+7+5 або 461=257+199+5 тощо.

Це твердження назване "проблема Гольдбаха". У першій половині XVIII ст. Ейлер пропонував доведення, що використовує твердження (проблема Ейлера): кожне парне число, починаючи з чотирьох, можна розкласти на суму двох простих чисел. Але проблема Ейлера не доведена. У 1937 році радянський вчений І.М. Виноградов довів проблему Гольдбаха для достатньо великих непарних чисел [6, 163].

4) Задача Софі Жермен (1776 – 1831) [3, 195].

Довільне число виду $a^4 + 4\,(a \in N)$ може бути простим тільки при $a = 1$ [8, 147].

Розв'язання. Якщо $a = 1$, то $a^4 + 4 = 5$ – просте число, якщо $a > 1$, то $a^4 + 4 = \quad = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a),$ де $a^2 + 2 + 2a = (a^2 + 2a + 1) + 1 = (a+1)^2 + 1 \neq 1,$
$a^2 + 2 - 2a = (a^2 - 2a + 1) + 1 = (a-1)^2 + 1 \neq 1.$ Отже, число $a^4 + 4$ має два різних дільника, відмінних від одиниці та самого числа, тобто $a^4 + 4$ – складене.

Цю гіпотезу висловив у 1742 році Гольдбах у листі до Ейлера.

5) Задача з підручника С.Банаха, В.Серпінського, В. Сожека "Арифметика" 1933 року видання для 1 гімназійного класу [3, 33, 434].

Вирази, названі іменами видатних математиків, при підстановці в них замість змінних цілих чисел із вказаних проміжків, даватимуть прості числа:

а) вираз Лежандра $2x^2 + 29$ для чисел x від 0 до 28;

б) вираз Ейлера $x^2 + x + 41$ для чисел x від 0 до 39;

в) вираз Скотта $x^2 - 79x + 1601$ для чисел x від 0 до 79.

Обчисліть значення цих виразів при кількох значеннях змінної з вказаних проміжків і переконайтеся, що ці значення справді є простими числами. Чи можна вважати ці вирази формулами простих чисел? [9, 25]

Розв'язання.

а) $2 \cdot 0^2 + 29 = 29,\ 2 \cdot 1^2 + 29 = 31;$ але при x=29 вираз ділиться на 29, тому значення виразу – складене число.

б) $1^2+1+41=43,\ 2^2+2+41=47;$ але при х=40 вираз ділиться на 41 $40^2+40+41=\ 40(40+1)+41=\ =41(40+1)=41^2$, тобто це складене число.

в) $0^2-79\cdot 0+1601=1601,\ 1^1-79\cdot 1+1601=1523;$ але при х=80 маємо складене число:

$$80^2-79\cdot 80+1601=\ =80(80-79)+1601=80+1601=1681=41^2.$$

Тема: Ланцюгові дроби та діофантові рівняння

1) Задача Бхаскари ІІ (нар. 1114 – помер пізніше 1178). Великий індійський математик і астроном, автор твору «Венець учення», в якому містилися розв'язання алгебраїчних і теоретико-числових задач. Вершиною досягнень Бхаскари ІІ є циклічний метод розв'язування в цілих додатних числах невизначеного рівняння другого степеня з двома невідомими [3, 79].

Розв'язати рівняння в цілих числах $100x+90=63y$ [2, 28].

Загальний метод розв'язування невизначених рівнянь в Індії було названо методом розсіювання. Розв'яжемо цим методом.

$y=\frac{100x+90}{63}=x+\frac{37x+90}{63},\ \frac{37x+90}{63}=y_1-$ ціле число. Прийдемо до рівняння:

$37x+90=63y_1,\quad x=\frac{63y_1-90}{37}=y_1+\frac{26y_1-90}{37},\quad \frac{26y_1-90}{37}=y_2-$ ціле.

$26y_1-90=37y_2,\quad y_1=\frac{37y_2+90}{26}=y_2+\frac{11y_2+90}{26},\quad \frac{11y_2+90}{26}=y_3-$ ціле.

$11y_2+90=26y_3,\quad y_2=\frac{26y_3-90}{11}=2y_3+\frac{4y_3-90}{11},\quad \frac{4y_3-90}{11}=y_4-$ ціле.

$4y_3-90=11y_4,\ y_3=\frac{11y_4+90}{4}=2y_4+\frac{3y_4+90}{4},\ \frac{3y_4+90}{4}=y_5-$ ціле. $3y_4+90=4y_5$

$y_4=\frac{4y_5-90}{3}=y_5+\frac{y_5-90}{3},\quad \frac{y_5-90}{3}=y_6-$ ціле. $y_5=3y_6+90$. Підставляємо.

$$x=y_1+y_2=(y_2+y_3)+y_2=2y_2+y_3=$$
$$=2(2y_3+y_4)+y_3=5y_3+2y_4=5(2y_4+y_5)+2y_4=12y_4+5y_5=$$
$$=12(y_5+y_6)+5y_5=17y_5+12y_6=17(3y_6+90)+12y_6=63y_6+1530,\ x=1530+63y_6.$$

З даного рівняння $y=\frac{100x+90}{63}=\frac{153000+6300y_8+90}{63}=100y_6+2430.$

Маємо $\begin{cases} x = 1530 + 63t \\ y = 2430 + 100t \end{cases}$, $t \in Z$. Якщо $t = -24$, то $x = 18,\ y = 30$.

Відповідь: $\begin{cases} x = 18 + 63t \\ y = 30 + 100t \end{cases}$, $t \in Z$.

Метод ланцюгових дробів.

$100x - 63y = -90$, $100\,x + 63(-y) = -90$, $100x + 63z = -90$, в загальному $ax + bz = c$. Розкладемо число $\frac{\text{a}}{\text{b}} = \frac{100}{63}$ у ланцюговий дріб. $100 = 63 \cdot 1 + 37,\ q_0 = 1;$ $63 = 37 \cdot 1 + 26,\ q_1 = 1;$ $37 = 26 \cdot 1 + 11,\ q_2 = 1;$ $26 = 11 \cdot 2 + 4,\ q_3 = 2;$ $11 = 4 \cdot 2 + 3,\ q_4 = 2;$ $4 = 3 \cdot 1 + 1,\ q_5 = 1;$ $3 = 1 \cdot 3 + 0,\ q_6 = 3$

Отримали $\frac{a}{b} = [1;1,1,2,2,1,3]$, $n = 6$. Знайдемо підхідні дроби

k		0	1	2	3	4	5	6
q_k		1	1	1	2	2	1	3
P_k	1	1	2	3	8	19	27	100
Q_k	0	1	1	2	5	12	17	63

Використаємо формули: $\begin{matrix} \text{x}_0 = (-1)^{n-1} \cdot c \cdot Q_{n-1} \\ z_0 = (-1)^n \cdot c \cdot P_{n-1} \end{matrix}$, $P_{n-1} = P_5 = 27,\ Q_{n-1} = Q_5 = 17$,

$\begin{matrix} \text{x}_0 = (-1)^5 \cdot (-90) \cdot 17 = 1530 \\ z_0 = (-1)6 \cdot (-90) \cdot 27 = -2430 \end{matrix}$, $x = 1530 + 63t$, $z = -2430 - 100t$, $y = 2430 + 100t$.

Відповідь: $\begin{cases} x = 1530 + 63t \\ y = 2430 + 100t \end{cases}$, $t \in Z$.

2) Задача Фібоначчі (бл. 1170 – після 1228) [3,289].

Дехто купив 30 птахів за 30 монет. За три горобці він платив 1 монету, за дві горлиці теж – одну монету, а за кожного голуба – 2 монети. Скільки птахів кожного виду він купив?

Розв’язання. Нехай $x -$ кількість горобців, $y -$кількість горлиць, $z = (30 - x - y) -$ кількість голубів. Маємо $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2(30 - x - y) = 30$,

$2x+3y+12(30-x-y)=180$, $10x+9y=180$. Методом розсіювання: $y=20-\frac{10}{9}x$,

$\frac{x}{9}=t$, $x=9t$, $y=20-10t$, $t\in Z$.

$\begin{cases}9t>0\\20-10t>0\end{cases}$, $\begin{cases}t>0\\t<2\end{cases}$, $t\in Z$, $t=1$. Отже, $x=9$, $y=10$, $z=11$.

Відповідь: 9 горобців, 10 горлиць, 11 голубів.

3) Задача Адама Різе (1492 – 1559) (німецький математик автор популярних в той час підручників з арифметики і алгебри) [3, 419], [12, 195].

26 осіб витратили разом 88 монет, причому кожний чоловік витратив 6, жінка 4, а дівчина 2 монети. Скільки було чоловіків, жінок і дівчат? [2:49].

Розв'язання. Позначимо кількість чоловіків x, жінок y, тоді кількість дівчат $(26-x-y)$. Складаємо рівняння: $6x+4y+2(26-x-y)=88$. $4x+2y=36$, $2x+y=18$. Використаємо метод, який у стародавній Індії назвали "методом розсіювання" (подрібнення). $x=\frac{18-y}{2}=9-\frac{y}{2}$, Оскільки x – ціле, то і $\frac{y}{2}=t$ ціле, звідки $y=2t, x=9-t$. Отримали загальний розв'язок рівняння: $\begin{cases}x=9-t\\y=2t\end{cases}$. За умовою задачі $x\geq 0,\ y\geq 0$, тоді $\begin{cases}9-t\geq 0\\2t\geq 0\end{cases}$, $\begin{cases}t\leq 9\\t\geq 0\end{cases}$, тобто $t=0, 1, \ldots, 9$. Задача має 10 розв'язків $(9, 0, 17)$, $(8, 2, 16)$, $(7, 4, 15)$, $(6, 6, 14)$, $(5, 8, 13)$, $(4, 10, 12)$, $(3, 12, 11)$, $(2, 14, 10)$, $(1, 16, 9)$, $(0, 18, 8)$.

4) Задача Гюйгенса (1629-1695) [3, 153].

Під час створення у Парижі першого у світі планетарію видатний механік, фізик і математик XVII століття Гюйгенс вирішив виготовити модель для імітації руху всіх планет сонячної системи. Виникла технічна проблема виготовлення зубчатих коліс з дуже великою кількістю зубців, тому потрібно було знайти таке відношення кількості зубців на колесах, яке було б найближчим до заданого. В якості найкращих наближень Гюйгенс використав підхідні дроби відповідних ланцюгових дробів [5, 224].

Потрібно виготовити зубчаті колеса з відношенням кутових швидкостей $x = \frac{938}{727}$. Виготовити міцні колеса з 938 і 727 зубцями не можна, тому потрібно підібрати колеса з меншою кількістю зубців, щоб похибка була як можна меншою [1, 324].

Розв’язання. Розкладемо число $x = \frac{938}{727}$ у ланцюговий дріб. $938 = 727 \cdot 1 + 211,\ q_0 = 1;$ $727 = 211 \cdot 3 + 94,\ q_1 = 3;$ $211 = 94 \cdot 2 + 23,\ q_2 = 2;$ $94 = 23 \cdot 4 + 2,\ q_3 = 4;$ $23 = 2 \cdot 11 + 1,\ q_4 = 11;$ $2 = 1 \cdot 2 + 0,\ q_5 = 2$

Отримали $x = [1; 3, 2, 4, 11, 2]$. Знайдемо підхідні дроби

k		0	1	2	3	4	5
q_k		1	3	2	4	11	2
P_k	1	1	4	9	40	449	938
Q_k	0	1	3	7	31	348	727

$\frac{P_0}{Q_o} = 1,\ \frac{P_1}{Q_1} = \frac{4}{3},\ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{9}{7},\ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{40}{31},\ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{449}{348},\ \frac{P_5}{Q_5} = \frac{938}{727}.$ Оцінимо, що $\frac{P_4}{Q_4} < x < \frac{P_3}{Q_3}$, тому $x \approx \frac{P_3}{Q_3}$ з похибкою $\varepsilon < \frac{1}{Q_3 Q_4}$, тобто $x \approx \frac{40}{31}$ з похибкою менше $\frac{1}{31 \cdot 348} = \frac{1}{10788} < \frac{1}{10000}$.

Отже, якщо виготовити зубчаті колеса з 40 і 31 зубцями, то відношення їх кутових швидкостей дорівнюватиме $\frac{40}{31}$ і буде відрізнятися від заданого відношення $\frac{938}{727}$ менше ніж на $\frac{1}{10000}$ (практично така похибка не відчутна).

На нашу думку доцільно використовувати запропоновані історичні задачі поряд з іншими задачами з теорії чисел, які розв’язуються при навчанні цього курсу. Така робота дає можливість познайомитися з цікавими та нетрадиційними методами розв'язування задач видатними математиками і запропонувати свої розв'язання. При цьому важливими і цікавими є короткі історичні довідки про життя та діяльність цих математиків. Пошук різних історичних задач можна проводити під час написання курсових робіт та роботи в проблемній групі. Розв'язування історичних задач дає можливість відчути красу наукового пошуку.

Література

1. Андронов И.К., Окунев А.К. Арифметика рациональных чисел. – М.: Просвещение, 1971. – 400 с.
2. Баврин И.И., Фрибус Е.А. Старинные задачи. – М.; Просвещение, 1994. – 128 с.
3. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: Вища шк. , 1973. – 552 с.
4. Бородін О.І. Теорія чисел. – К.: Вища шк., 1970. – 275 с.
5. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966, 384с.
6. Глейзер Г.И. История математики в школе VII – VIII кл. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
7. Данхем В. Ойлер та теорія чисел// У світі математики. – 2000. – Т. 6. – Вип. 3. – С. 1 – 19.
8. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі. – К.: Рад. шк. , 1981. – 189 с.
9. Тадеєв В.О. Неформальна математика. 6 – 9 кл. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 288 с.
10. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Алгебра і теорія чисел. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – Ч. 1. – 400 с.
11. Фаермарк Д.С. Задача пришла с картины. – М.: Наука, 1974. – 160 с.
12. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математики. – Минск: Высшая шк., 1978. – 270 с.

Т.В. Дидковская, И.А. Сверчевская (Житомирский государственный университет имени Ивана Франко)

Замечательные исторические задачи по теории чисел

Предлагается система замечательных исторических задач для изучения курса «Теория чисел» по разделам: делимость, деление с остатком, простые и составные числа, специальные простые числа, цепные дроби и диофантовые уравнения. Это задачи математиков XII – XX ст., которые сохранены историей. Приводятся авторские и современные решения. Рекомендуется литература для самостоятельной работы студентов.

Ключевые слова: история математики, замечательные задачи, предметная компетентность, теория чисел, делимость, деление с остатком, простые и составные числа, цепные дроби, диофантовые уравнения.

T. V. Didkivska, I. A. Sverchevska

Zhytomyr Ivan Franko State University
Number theory notable historical tasks
The paper advises the system of notable historical tasks for studying of such sections of "Number Theory" course as divisibility, division with remainder, prime and composite numbers, special prime numbers, continued fractions, Diophantine equations. These tasks are the ones suggested by mathematicians of XII – XX centuries and preserved by history. The authors' and modern solutions are given. The paper also contains references for students' independent work.
Key words: history of mathematics, notable tasks, subject-matter competence, number theory, divisibility, division with remainder, prime and composite numbers, continued fractions, Diophantine equations.