УДК 378+514

О. А. Чемерис,
м. Житомир, Україна

Математичне моделювання та моделі в проективній геометрії

Постановка проблеми. Освітня політика України орієнтована на досягнення сучасного світового рівня, докорінне покращення змісту, форм і методів навчання, збільшення інтелектуального потенціалу країни. Стратегічні напрямки розвитку вищої освіти визначені Конституцією України, Законами України "Про освіту", "Про вищу освіту", Національною доктриною розвитку освіти, указами Президента України, постановами Кабінету Міністрів України. Однією з найважливіших задач стає розвиток логіки мислення майбутніх фахівців, вміння користуватися знаннями та бути здатним до самоосвіти.

Важливою умовою модернізації педагогічної освіти є підвищення якості фундаментальної підготовки майбутніх учителів, яка є основою формування фахівця та оптимізує суспільний розвиток. Акцент у професійній підготовці переноситься з традиційного навчання на формування ключових компетенцій [1].

Аналіз попередніх досліджень. На сучасному етапі розвитку системи освіти йде пошук шляхів забезпечення компетентної фундаментальної освіти, яку академік В.А. Садовнічий розглядає як таку, що дає можливість людині в подальшому самостійно працювати, навчатися та переучуватися. Саме людина знає закони природи, закони розвитку суспільства, вміє логічно міркувати, аналізувати та пов'язувати факти, приймати рішення, вивчати явища з наукової точки зору. Таку освіту забезпечують фундаментальні науки [2, с. 7].

Однак рівень фундаментальної підготовки майбутніх учителів не відповідає вимогам європейських стандартів. Особливо це стосується майбутніх учителів математики, оскільки система знань, умінь та навичок, якою оволодівають студенти фізико-математичного факультету, реалізується на високому рівні складності. Останнє зумовлює потребу узагальнення досвіду фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики та вимагає оновлення її теоретико-методологічних засад.

Вивчення питання забезпечення компетентної фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики представлене такими аспектами: професійна підготовка майбутніх учителів математики (Н.А. Барило, К.В. Нєдялкова, Н.І. Одарченко, О.В. Семеніхіна, Б.К. Юдрупа); організація навчальної діяльності студентів фізико-математичного факультету (Н.А. Барило, Т.В. Васильєва, В.Ф. Єфімов, Н.І. Одарченко, О.В. Семеніхіна, Л.В. Ушанкіна, Б.К. Юдрупа, Т.В. Ящун); виділення чинників, що впливають на ефективність навчання майбутніх учителів математики (Т.Г. Величко, М.І. Мєшков, К.В. Нєдялкова, І.П. Підласий, І.Ю. Потай, М.П. Хоменко).

Головною рисою компетентності випускників фізико-математичного факультету має бути опанування ними методу математичного моделювання, методологія якого описана ґрунтовно такими науковцями: А.М. Колмогоровим, А.М. Тихоновим, О.А. Самарським, Б.В. Гнеденком. Тому формування вмінь математичного моделювання при вивченні фундаментальних курсів (математичного аналізу, елементарної математики, різних розділів геометрії, алгебри й теорії чисел, теорії ймовірностей та математичної статистики, спецкурсів тощо) є одним з найважливіших дидактичних завдань фізико-математичного факультету. Цьому присвячені праці Т.В. Крилової, Л.І. Нічугівської, Л.Л. Панченко.

Мета статті – розкрити основні моменти методу математичного моделювання та навести приклади його використання на практичних заняттях з проективної геометрії.

Виклад основного матеріалу. Метою навчання математичним методам є показ можливостей використання математики для розв’язання практичних задач, у навчанні студентів реалізації цих можливостей на виробництві, в побуті, у науковій роботі. Самим істотним компонентом процесу розв’язання практичних задач методами математики є математичне моделювання. Тому досягнення вказаної мети повинно бути обов’язково пов’язане з формуванням у студентів умінь будувати й досліджувати математичні моделі. Це буде сприяти оволодінню моделюванням не лише як методом розв’язання практичних задач, але й як методом наукового пізнання, будуть розв’язані питання розуміння значущості абстрактних математичних понять (наукових моделей) в пізнанні реальної дійсності.

У наш час моделювання дуже широко застосовується не лише в наукових дослідженнях, але й при розв’язуванні задач, які виникають в техніці, економіці, геології, медицині тощо. Тому поняття «моделювання» й «модель» розглядають в широкому розумінні.

Під математичним моделюванням розуміють вивчення властивостей об’єкта на його математичній моделі [3, с. 3]. Математичне моделювання розглядають як засіб наукового дослідження та навчального пізнання, необхідний для утворення математичних абстракцій при введенні математичних понять та як метод розв’язування прикладних задач [4, с. 35].

Під математичною моделлю розуміють наближений опис якого-небудь класу явищ зовнішнього світу, виражений за допомогою математичної символіки [3, с. 5].

Побудову математичної моделі, тобто вивчення явища за допомогою математичної моделі, можна умовно розбити на чотири етапи: етап змістовного опису; етап формалізації опису; етап остаточної побудови моделі (ідентифікації параметрів і перевірки адекватності моделі); етап перегляду і вдосконалення моделі за результатами узагальнення емпірично накопичених даних [6].

У процесі математичного моделювання виділяють три рівні [7, с. 119]:

І. Формалізація – переклад запропонованої задачі (ситуації) на мову математичної теорії (побудова математичної моделі задачі).

ІІ. Розв’язання задачі в межах математичної теорії (розв’язання всередині моделі).

ІІІ. Переклад результату математичного розв’язання задачі на ту мову, якою була сформульована вихідна задача (інтерпретація одержаного математичного розв’язання).

Частіше за все математична модель являє собою дещо спрощену схему (опис) оригіналу, а отже, має певний ступінь похибки. Одна й та ж модель може описувати різні процеси, об’єкти; тому результати внутрімодельного дослідження одного явища частіше за все можуть бути перенесені на інше.

Моделювання може бути використане у навчанні таким чином:

- по-перше, воно виступає як зміст, який повинен бути засвоєний студентами в результаті навчання, і як спосіб пізнання, яким повинен оволодіти майбутній фахівець;
- по-друге, моделювання є одним із навчальних засобів, за допомогою яких формується навчальна діяльність студентів.

За метою використання в навчанні моделювання ділять на два типи: моделювання об’єктів вивчення та моделювання дій і операцій щодо вивчення цих об’єктів.

Перший тип використовують для виявлення й фіксації тих загальних відносин, які відображають сутність явищ, об’єктів, процесів, які вивчаються. Наприклад, $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$ – теоретична модель поняття «квадратне рівняння з однією змінною». Ця модель та її конкретизація використовується як для вивчення теорії квадратних рівнянь загалом, так і для розв’язання задач практичного змісту.

Другий тип навчального моделювання застосовується для виявлення й фіксації загальної схеми дій і операцій, пов’язаних з розв’язанням певного кола задач. У навчальній моделі цього виду зазначено, які дії, операції, в якому порядку, при яких умовах потрібно виконати, щоб вивчити певний об’єкт потрібного виду. Кожна така модель – це схема діяльності щодо розв’язання навчальної задачі, пов’язаної з вивченням певного виду об’єктів.

Наприклад, довільний алгоритм виконання певного виду дій є певна модель, яка є навчальною, якщо ставиться задача щодо вивчення суті та властивостей цієї дії. А одержаний план, його фіксація – навчальне моделювання другого типу.

Можна стверджувати, що перший тип навчального моделювання відображає предметну сторону навчальної діяльності студентів, а другий – оперативну сторону. Оскільки в реальній навчальній діяльності ці дві сторони завжди єдині, тому в більшості випадків навчальні моделі використовують і як моделі, тих об’єктів, які вивчаються, так і моделі дій для цього вивчення.

Наведемо приклади моделей обох типів у проективній геометрії під час вивчення теми «Проективна відповідність форм другого ступеня».

Приклад І. Базовими поняттями даної теми є «ряди точок другого порядку (лінії другого порядку)» і «пучки другого порядку», які використовують для означення наступних геометричних фігур.

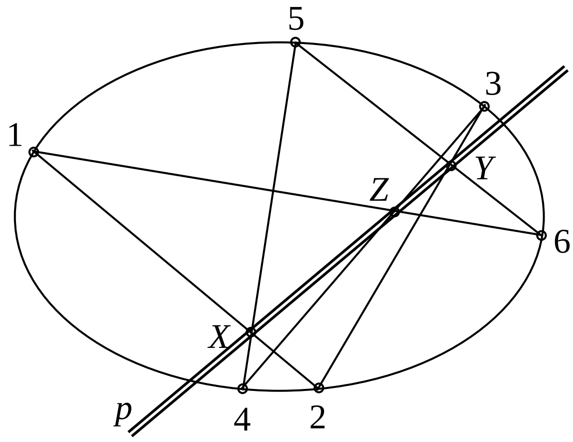


Рис. 1. Шестивершинник

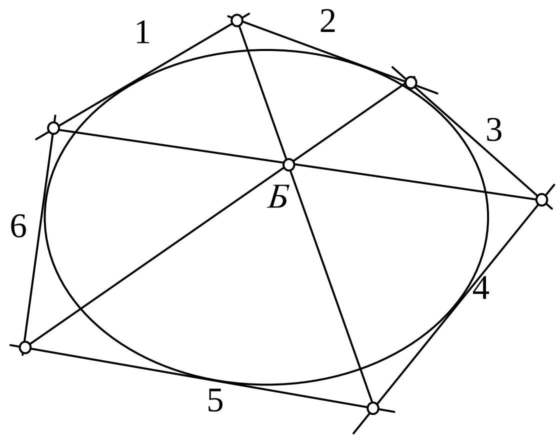


Рис. 2. Шестисторонник

Фігура, яка складається із шести точок ряду другого порядку і шести відрізків, які послідовно з’єднують ці точки, називається *шестивершинником* (шестикутником), вписаним у лінію другого порядку (див. рис. 1).

Фігура, утворена шістьма прямими пучка другого порядку, жодні три з яких не належать одній точці, називається *шестисторонником* (див. рис. 2).

Довільний шестивершинник, вписаний у лінію другого порядку, має властивість, сформульовану Б. Паскалем, що точки перетину пар протилежних сторін лежать на одній прямій (прямій Паскаля) (див. рис. 1). Тому якщо вершини шестикутника (точки) занумерувати від 1 до 6, то матимемо таку *модель-схему для розв'язування задач на теорему Паскаля:*

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)\cap(4,5)=X\\(2,3)\cap(5,6)=Y\\(3,4)\cap(6,1)=Z\end{array}\right\}\text{ – пряма Паскаля } p.$$

Довільний шестисторонник, сторони якого належать прямим пучка другого порядку, має властивість, сформульовану Ш. Бріаншоном, що три прямі, які сполучають його протилежні вершини, належать одній точці (точці Бріаншона) (див. рис. 2). Тому якщо сторони шестисторонника (прямі) занумерувати від 1 до 6, то матимемо таку *модель-схему для розв'язування задач на теорему Бріаншона:*

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)-(4,5)\\(2,3)-(5,6)\\(3,4)-(6,1)\end{array}\right\}-Б\text{ – точка Бріаншона}$$

Задача 1. Зробити рисунок до теореми Бріаншона, коли точка Бріаншона є невласною.

Розв'язання.

Розв'яжемо задачу, використовуючи відповідну схему модель. Занумеруємо прямі – сторони шестикутника від 1 до 6 і запишемо модель-схему розв'язування задач на теорему Бріаншона згідно умови:

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)-(4,5)\\(2,3)-(5,6)\\(3,4)-(6,1)\end{array}\right\}Б\equiv B_\infty$$

Точка Бріаншона є невласною, отже прямі $(1,2)-(4,5)$, $(2,3)-(5,6)$, $(3,4)-(6,1)$ мають бути на рисунку паралельні (див. рис. 3).

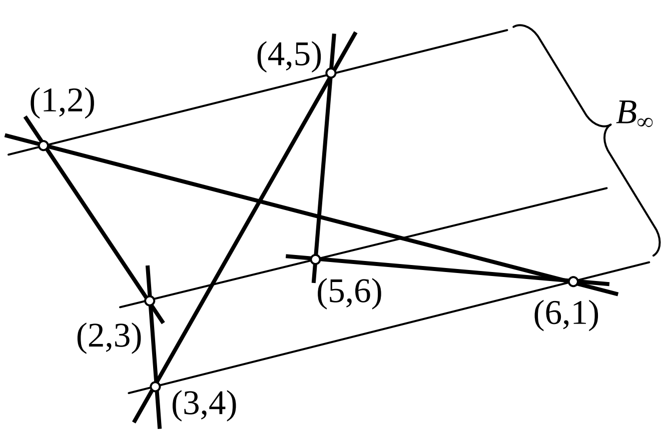
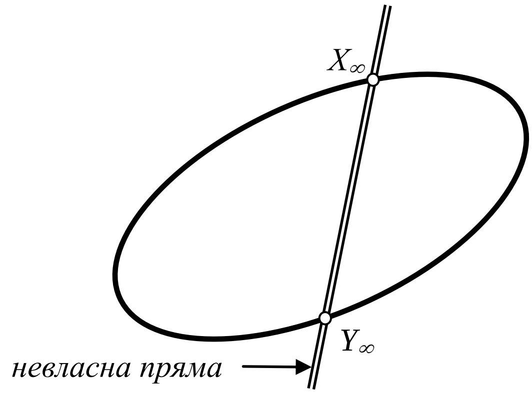
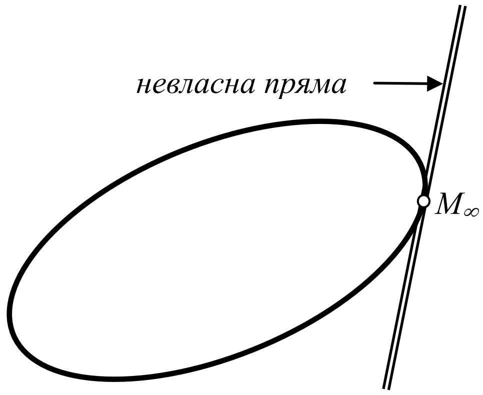


Рис. 3

Приклад II. Тепер наведемо використання іншого типу моделі в проективній геометрії. Утворення ліній другого порядку (гіперболи, параболи) можна пояснити на прикладі перетину невласної прямої з еліпсом (це буде модель, яку ми на афінній площині подаємо як перетин еліпса і власної прямої) (див. рис. 4, 5).

Вважатимемо *гіперболічним* ряд другого порядку, якщо дві його довільні точки розміщені на невласній прямій	 **Рис. 4. Модель гіперболи**
Вважатимемо *параболічним* ряд другого порядку, якщо одна його довільна точка розміщені на невласній прямій	 **Рис. 5. Модель параболи**

Наведемо приклад задачі із поданим вище типом моделювання.

Задача 2. Дано чотири точки гіперболи, з них дві власні – *A, B* та дві невласні – C_∞, D_∞ і дотичну в точці *A*. Провести дотичну в точці *B*.

Розв'язання.

Опишемо розв'язання даної задачі на моделі. Гіпербола – це крива другого порядку з двома невласними точками (див. рис. 6). Занумеруємо задані точки та застосуємо схему теореми Паскаля.

Згідно даних в умові маємо: $A \equiv 1 \equiv 2$, $t_A \equiv (1,2)$, $C_\infty \equiv 3_\infty$, $D_\infty \equiv 6_\infty$, $B \equiv 4 \equiv 5$. Шуканою буде дотична $t_B \equiv (4,5)$. Використовуємо схему:

$(2,3_\infty)\cap(5,6_\infty)=Y$, $(6_\infty,1)\cap(3_\infty,4)=Z$. $YZ \equiv p$ – пряма Паскаля. Тому $(1,2)\cap p = X$, а $(X,4\equiv 5)\equiv(4,5)\equiv t_B$.

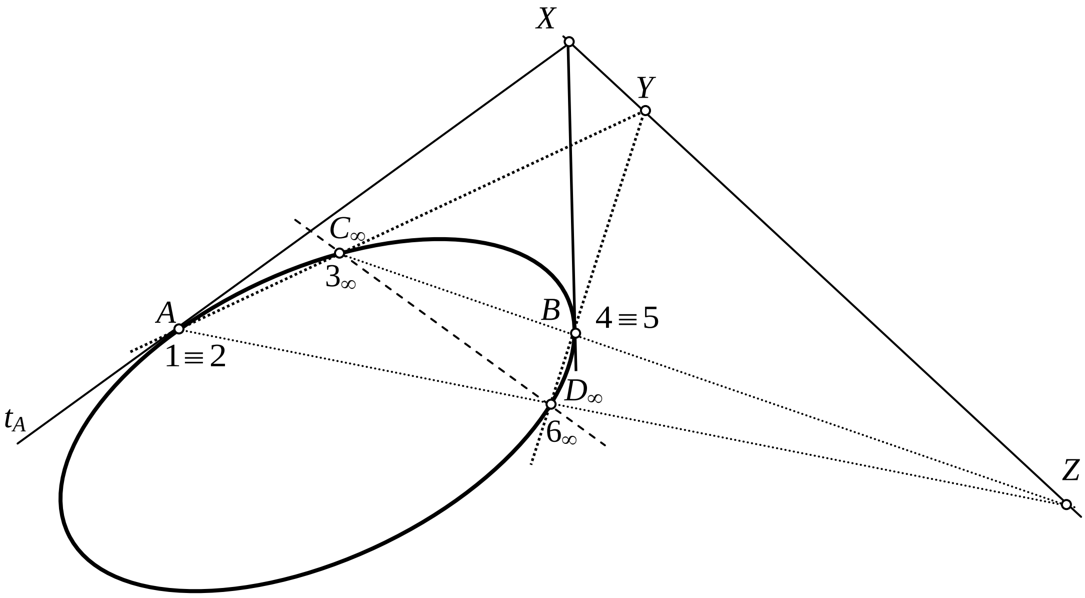


Рис. 6. Розв’язання задачі 2 на моделі

Виконаємо тепер побудову в проективній площині (згідно описаної послідовності дій) (див. рис. 6).

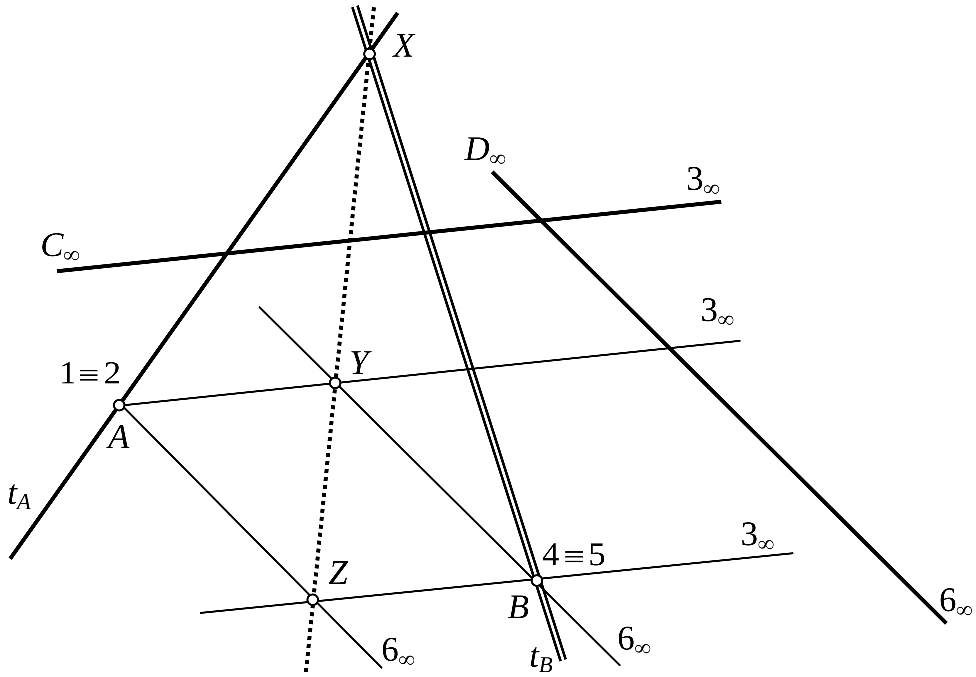


Рис. 6. Розв’язання задачі 2 на проективній площині

Висновки. Використання математичних моделей при викладенні фундаментальних дисциплін значно полегшує сприймання матеріалу і дозволяє розв’язувати практичні задачі, які є основою формування у майбутніх фахівців умінь математичного моделювання.

Література:

1. Якісна освіта– запорука самореалізації особистості: Тези доповіді Міністра освіти і наукиь України Станіслава Ніколаєнка на Підсумковій колегії МОН України 17 серпня 2007 року // Освіта України. – 2007. – № 59 (839). – С. 1-33.

2. Садовничий В.А. Пока не поздно. Уже опаздываем. Образование, которое мы можем потерять. – М.: МГУ, 2002. – 199 с.

3. Станжицький О.М. Основи математичного моделювання: навч. посібн. / Станжицький О.М., Таран Є.Ю., Гординський Л.Д. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 96 с.

4. Панченко Л.Л. Деякі психологічні особливості формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск VII: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2008. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – С. 34-41.

5. Тіхонов А.Н. Математична модель [Електронний ресурс]. – Режим доступу до сторінки: http://vseslova.com.ua/word/Математична_модель-62624u.

6. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат.спец.пед.ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 233 с.

7. Боровик В.Н. Курс вищої геометрії: навч. посібн. / Боровик В.Н., Яковець В.П. – Суми: ВТД «Університетська книга», 20004. – 464 с.

У статті розкрито основні моменти методу математичного моделювання та наведено приклади його використання на практичних заняттях з проективної геометрії.

Ключові слова: *математичне моделювання, математична модель, типи моделей, модель-схема для розв'язування задач на теорему Паскаля (Бріаншона), модель гіперболи, модель параболи.*

В статье раскрыты основные моменты метода математического моделирования и приведены примеры его использования на практических занятиях по проективної геометрии.

Ключевые слова: *математическое моделирование, математическая модель, типы моделей, модель-схема для решения задач на теорему Паскаля (Брианшона), модель гиперболы, модель параболы.*

In the article the basic moments of method of mathematical design are exposed and examples of his use are made on practical employments on project geometry.

***Keywords**: mathematical design, mathematical model, types of models, model-chart for the decision of tasks on the theorem of Pascal (of Brianchon), model of hyperbola, model of parabola.*