випуск 41

ISSN 2079-9152

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ:

проблеми і дослідження

міжнародний збірник наукових робіт

2014

Міжнародний збірник наукових робіт
Международный сборник научных работ

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: проблеми і дослідження

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: проблемы и исследования

Випуск 41

Засновники:

Донецький національний університет

Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України

Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова

Донецьк: ДонНУ, 2014

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р
Д44

Збірник заснований професором Юрієм Олександровичем Палантом у 1993 році.

Постановою Президії ВАК України від 10.11.99 № 3-05/11 затверджено перелік № 3 наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук. До розділу «Педагогічні науки» включено наш збірник наукових робіт «Дидактика математики: проблеми і дослідження» (Бюлетень ВАК України, 1999, № 6), який є продовженням видання «Евристика та дидактика точних наук» міжнародного збірника наукових робіт. Нумерація випусків продовжується.

Рекомендовано до друку Вченою радою Донецького національного університету 30.05.2014 (протокол № 8)

Д44 **Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт** / редкол.: О. І. Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – Донецьк, 2014. – Вип. 41. – 116 с.

ISSN 2079-9152

Викладено нові підходи до деяких питань методики навчання математики. Роботи присвячено використанню евристичних методів навчання, стимулюванню творчої діяльності учнів та студентів.

Изложены новые подходы к некоторым вопросам методики обучения математике. Работы посвящены использованию эвристических методов обучения, стимулированию творческой деятельности учащихся и студентов.

Свідоцтво про державну реєстрацію
КВ № 15209-3781Р від 30.04.2009

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р

International Collection of Scientific Works

DIDACTICS of MATHEMATICS: Problems and Investigations

Issue # 41

Founders:

Donetsk National University, Ukraine

Pedagogical Institute of the National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine

Dragomanov National Pedagogical University, Kiev, Ukraine

Donetsk, DonNU, 2014

UDK 51(07)+53(07)
BBK B1 p
Д44

A periodic semiannual edition founded by Professor Yurii Palant in 1993.

Recommended for publication by Scientific Council
of Donetsk National University on 30.05.2014 (minutes # 8)

Д44 **Didactics of mathematics: Problems and Investigations: International Collection of Scientific Works. –** Issue # 41. – Donetsk: DonNU, 2014. – 116 p.

ISSN 2079-9152

New approaches to some methods of training mathematics problems are described. The publications concern the use of heuristic methods in teaching sciences, stimulation of creative activity of students in the field of constructing and solving problems.

State registration
КВ № 15209-3781Р dated 30.04.2009

UDK 51(07)+53(07)
BBK B1 p

З М І С Т

CONTENT

СУЧАСНІ ТЕНДЕНЦІЇ РОЗВИТКУ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

MEASUREMENT OF SCALAR QUANTITIES BY LIMITING PROCEDURE

(Метод границь для вимірювання скалярних виразів)

N. Gorchev, D. Petrov,
«St Cyril and St Methodius» University of Veliko Turnovo, BULGARIA,
e-mail: n.g.kolev@uni.vt.bg,
e-mail: d.petrov@uni-vt.bg

У роботі представлений узагальнений підхід до формулювання і обґрунтування методу меж для виміру ненегативних скалярних величин. Для цієї мети зроблені відповідні (в основному методичні) уточнення в їх аксіоматичній теорії. Знайдений спосіб, що дозволяє простежити взаємозв'язок при впорядкуванні множини однорідних величин.

Ключові слова: *скалярні величини, міра величини.*

I. Axiomatic Theory of the Positive Scalar Quantities

The basic notions in the axiomatic theory of positive scalar quantities are: A nonempty set S^+ of all positive scalar quantities which elements are unions of sets $\bigcup_{i\in I} S_i^+, I \subset \mathbb{N}$. Elements of S_i^+ can be added to one another ("$+_i$"), they are ordered ("$\le_i$") (not necessary linearly ordered). Elements of S^+ we will call positive scalar quantities and the elements of each S_i^+ – its states. $\bigcup_{i\in I} S_i^+$ will be a set of homogeneous scalar quantities.

The axioms in the theory of positive scalar quantities are [3]:

A_1^+. (*Trichotomy axiom*). $\forall a,b \in S_i^+$ only one of the relation holds:

$a =_i b; a <_i b; b <_i a$ (We will consider states with $a =_i b$ to be identical.)

A_2^+. $\forall a,b \in S_i^+$ $\exists! c \in S_i^+$ such that $c =_i a +_i b$ called sum of a and b with the properties:

а) $a +_i b =_i b +_i a, \forall a,b \in S_i^+$ (*commutativity*);

б) $(a +_i b) +_i c =_i a +_i (b +_i c), \forall a,b,c \in S_i^+$ (*associativity*);

в) $(a <_i a +_i b) \wedge (b <_i b +_i a), \forall a,b \in S_i^+$ (*positivity*).

A_3^+. Let $a,b \in S_i^+$ with. Then $\exists! c \in S_i^+$ such that $a =_i b +_i c$. We denote $c =_i a -_i b$.

A_4^+. $\forall a \in S_i^+$ and $\forall n \in N$

$$\exists b \in S_i^+ : n.b =_i a,$$

where $n.b \overset{def}{=}_i \underbrace{b +_i b +_i \ldots +_i b}_{n-times}$.

$$A_5^+ .\ \forall a,b \in S_i^+ \ \exists n \in N$$

such that $a <_i n.b$.

A_6^+. (*Continuity axiom*). Let $a_1, a_2, \ldots \in S_i^+$ and $b_1, b_2, \ldots \in S_i^+$ are two sequences of states. If we assume that $a_1 <_i a_2 <_i \ldots <_i a_n <_i \ldots <_i b_n <_i \ldots <_i b_1$ and that $\forall c \in S_i^+$ $\exists n \in N:$ $b_n - a_n <_i c$, then $\exists! s \in S_i^+$ such that

$a_n <_i s <_i b_m, \forall n, m \in N$ (states s_1 and s_2, for which $s_1 =_i s_2$ we will consider equal.)

Definition 1. Axiomatic theory based on the above definitions and axioms $A_1^+ \div A_6^+$ is called *axiomatic theory of positive scalar-additive continuous quantities.*

Examples of positive scalar quantities:

(1) Length of a piecewise convex plane curve (a plane curve that can be broken in finite pieces such that if we take a piece with endpoints A and B, and connect the points with a line segment, we get a convex plane figure). For the corresponding subsets of homogeneous quantity (length) we can take length of a line segment (with set of states, say, S_1^+) and length of an arc of a circle (with set of states, say, S_2^+).

(2) Volume of a convex body as a subset of the homogeneous quantity volume.

(3) Surface area of a convex body is a subset of the homogeneous quantity surface area. Such subsets are surface areas of a prism, pyramid, or a pyramidal body ([2]).

(4) Mass of a body. Mass of a system of two bodies (that are motionless with respect to each other) is the sum of the masses.

(5) Relativistic energy of a particle. If m is its rest mass and p its momentum with respect to a fixed coordinate system. The total energy is $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.

Now we consider measurement of positive scalar quantities.

Definition 2. Quantity S_i^+ if called measurable if there exists a map $\mu : S_i^+ \to R^+$ (R^+ is the set of all real nonnegative numbers) with the properties:

a) if $a =_i b$, then $\mu(a) = \mu(b), a, b \in S_i^+$;

b) if $a =_i b +_i c$, then

$\mu(a) = \mu(b) + \mu(c), a, b, c \in S_i^+$;

c) $\exists e \in S_i^+$, such that $\mu(e) = 1$.

Definition 3. The number $\mu(a)$ is called measure of quantity $a \in S_i^+$ and the map $\mu : S_i^+ \to R^+$ is called measure on the set S_i^+.

In practice measurement of a quantity consists of finding a functional $\mu : S_i^+ \to R^+$ that satisfies properties *a)* and *b)* from Definition 2 and also

c') $\mu : S_i^+ \to R^+$ is normed up to a constant factor. If for the quantity is chosen a unit state e we must have $\mu(e) = 1$.

One can show that a functional $\mu : S_i^+ \to R^+$, satisfying *a), b)* and *c')* have the properties:

1. *monotonicity* – $a \le_i b \Rightarrow \mu(a) \le \mu(b), a, b \in S_i^+$;
2. *continuity* – $\forall \sigma \in (\kappa, \lambda) \subseteq R^+ \ \exists! a \in S_i^+ : \quad \mu(a) = \sigma$.

The functional $\mu : S_i^+ \to R^+$ is called *measure of the quantity* S_i^+.

II. Limiting procedure for measurement of positive scalar quantities

We apply limiting procedure (from [6]) for a system of homogeneous positive scalar continuous quantities.

The process of measurement is based on approximations:

Theorem 1. *Let* $\mu_{i_0} : S_{i_0}^+ \to R^+$ *is a measure on* $S_{i_0}^+ \subseteq S_i^+$ *and* $\forall a \in S_i^+ \setminus S_{i_0}^+$ $\exists \{p_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+$, $\exists \{q_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+$ *such that:*

1. $\forall n \in N,\ p_n <_i a <_i q_n$;

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) > 0 : \forall n > \nu(\varepsilon)$ *we have* $\mu_{i_0}(q_n) - \mu_{i_0}(p_n) < \varepsilon$.

Then the functional $\mu_i : S_i^+ \to R^+$: $\mu_i(a) = \lim_{n\to\infty} \mu_{i_0}(p_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_{i_0}(q_n)$ *is well defined and is a measure of the quantity* S_i^+.

Proof. We need to show that limits $\lim_{n\to\infty} \mu_{i_0}(p_n)$ and $\lim_{n\to\infty} \mu_{i_0}(q_n)$ exist and they are the same. From monotonicity we have $\mu_{i_0}(p_n) \le \mu_{i_0}(q_m), \forall m, n \in N$. Therefore there exist $\limsup_{n\to\infty} \mu_{i_0}(p_n) \equiv l_1$ and $\liminf_{n\to\infty} \mu_{i_0}(q_n) \equiv l_2$. Obviously $l_1 \le l_2$. Let $\varepsilon > 0$. Since $\exists \nu(\varepsilon) > 0 : \forall n > \nu(\varepsilon)$ we have $\mu_{i_0}(q_n) - \mu_{i_0}(p_n) < \varepsilon$ it follows $l_2 - l_1 < \varepsilon$ and thus $l_1 = l_2 \equiv l$. It remains to show that the sequences $\{\mu_{i_0}(p_n)\}_{n\in N}$ and $\{\mu_{i_0}(q_n)\}_{n\in N}$ both converge to l. Again from condition $\mu_{i_0}(q_n) - \mu_{i_0}(p_n) < \varepsilon \quad \forall n > \nu(\varepsilon)$ and from $\mu_{i_0}(q_n) \ge l \ge \mu_{i_0}(p_n)$ we get

$\mu_{i_0}(q_n) - l < \varepsilon$ and $l - \mu_{i_0}(p_n) < \varepsilon$. Therefore $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{i_0}(q_n) = l = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_{i_0}(p_n)$. We define $\mu_i(a) = l$.

Now we show that the functional $\mu_i : S_i^+ \to R^+$ satisfies conditions *a),b)* and *c')*:

a) Let $a =_i b,\ a,b \in S_i^+$ and $\{p'_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+, \{q'_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+$, $\{p''_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+, \{q''_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+$ are the corresponding sequences for the states $a, b \in S_i^+$ respectively. Then the sequences $p_{2k+1} \equiv p'_{k-1}, p_{2k} \equiv p''_k, q_{2k+1} \equiv q'_{k-1}, q_{2k} \equiv q''_k$ satisfy the conditions of the theorem and so (as subsequences of a convergent sequence) they give one limit $\mu_i(b) = \mu_i(a)$.

b) Let $\{p'_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+, \{q'_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+$, $\{p''_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+, \{q''_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+$ are the corresponding sequences for the states $b, c \in S_i^+$ respectively. Then

$$\{p'_n +_i p''_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+, \{q'_n +_i q''_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+$$

are the sequences for the state $a \in S_i^+$ (since $p'_n +_i p''_n <_i b +_i c <_i q'_n +_i q''_n$). $\forall\varepsilon > 0, \exists\nu(\varepsilon) > 0 : \forall n > \nu(\varepsilon)$ we have

$$\mu_{i_0}(q'_n +_i q''_n) - \mu_{i_0}(p'_n +_i p''_n) =$$
$$= \mu_{i_0}(q'_n) - \mu_{i_0}(p'_n) + \mu_{i_0}(q''_n) - \mu_{i_0}(p''_n) < 2\varepsilon.$$

Therefore

$$\mu_i(a) = \lim_{n\to\infty} \mu_{i_0}(p'_n +_i p''_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu_{i_0}(p'_n) + \lim_{n\to\infty} \mu_{i_0}(p''_n) = \mu_i(b) + \mu_i(c).$$

c') Let e^0 be a unit state for $S_{i_0}^+$ the measure $\mu_{i_0} : S_{i_0}^+ \to R^+$. But then $e^0 \in S_i^+$ and if we define the sequences $p_n \equiv e^0 \equiv q_n\ \forall n \in N$. Then $p_n \le_i e^0 \le_i q_n$ and so we can take $e \equiv e^0$ to be the unit state for S_i^+ .i.e. $\mu_i(e) = \mu_{i_0}(e^0) = 1$. QED

We will show monotonicity of $\mu_i : S_i^+ \to R^+$. From $a \le_i b,\ a,b \in S_i^+$ and from property *b)* we get $b =_i a +_i (b-a) \Rightarrow \mu_i(b) = \mu_i(a) + \mu_i(b-a),\ a,b \in S_i^+$ and therefore $\mu_i(b) > \mu_i(a)$.

For any functional satisfying *a), b)* and *c)* we can show additivity [5]:

$$\mu(a_1 +_i \ldots +_i a_k) =$$
$$= \mu(a_1) + \ldots + \mu(a_k),\ a_1, \ldots, a_k \in S_i^+, k \ge 2.$$

Therefore $\mu(k.a) = k.\mu(a)$ for any $a \in S_i^+,\ k \in N$. From axiom A_4^+ follows the existence of the states

$$\frac{a}{n} = \left(\frac{1}{n} \cdot a\right) \in S_i^+, \forall n \in N.$$ Thus

$$\mu(a) = \mu\left(n.\frac{a}{n}\right) = n.\mu\left(\frac{a}{n}\right) \Rightarrow \mu\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{n}.\mu(a)$$

and therefore

$$\mu\left(\frac{m}{n}.a\right) = \mu\left(m.\frac{a}{n}\right) = m.\mu\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{m}{n}.\mu(a).$$

Let $a \in S_i^+$ be arbitrary state and let $\mu_{i_0} : S_{i_0}^+ \to R^+$ be as in the Theorem 1. The sequences $\{p'_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+$, $\{q'_n\}_{n\in N} \subset S_{i_0}^+$ from the theorem for $a \in S_i^+$ guarantees the existence the two sequences of rational numbers $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ (monotonically increasing) and $\{\beta_n\}_{n\in N}$ (monotonically decreasing) that satisfy $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_{i_0}(p_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_{i_0}(q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$.

Moreover $\alpha_n \cdot e \le_i a \le_i \beta_n \cdot e, \forall n \in N$ so

$$\mu(\alpha_n \cdot e) \le \mu(a) \le \mu(\beta_n \cdot e) \Leftrightarrow$$
$$\alpha_n \mu(e) \le \mu(a) \le \beta_n \mu(e) \Leftrightarrow$$
$$\alpha_n \le \mu(a) \le \beta_n, \quad \forall n \in N.$$

Thus $\mu(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \mu_i(a)$ and therefore $\mu \equiv \mu_i$.

To show continuity let $\forall\sigma \in (\kappa, \lambda) \subseteq R^+$. There are two sequences of rational numbers $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ (monotonically increasing) and $\{\beta_n\}_{n\in N}$ (monotonically decreasing) for which $\alpha_n \le \sigma \le \beta_n, \forall n \in N$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \sigma$. But then

$$\alpha_1 \cdot e \le_i \alpha_2 \cdot e \le_i \ldots \le_i \alpha_n \cdot e \le_i \ldots \le$$
$$\le_i \beta_n \cdot e \ldots \le_i \beta_2 \cdot e \le_i \beta_1 \cdot e.$$

From axiom A_6^+ follows $\exists! a \in S_i^+$ for which $\alpha_n \cdot e \le_i a \le_i \beta_n \cdot e, \forall n \in N$. From Theorem 1 we get

$$\mu_i(a) = \lim_{n\to\infty}\mu_{i_0}(\alpha_n.e) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(\alpha_n\mu_{i_0}(e)) = 1.\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \sigma.$$

Now we consider the following example.

Let $\overset{\frown}{AB}$ be an arc of a circle [4]. Divide it into n parts using points $A \equiv M_0, M_1, \ldots M_n \equiv B$. They define n line segments $M_{i-1}M_i, i = 1,\ldots,n$ that form a partially linear curve p. On the other hand taking tangent lines to the points M_i, $i = 0,\ldots,n$ we get a second partially linear curve q. For their lengths we have $l(p) < l(q)$. In this case we define the relations $p \prec \overset{\frown}{AB} \prec q$.

In a more general situation when $\overset{\frown}{AB}$ is a partially convex curve and p, q polygonal curves with endpoints A and B for which q encompasses $\overset{\frown}{AB}$ and $\overset{\frown}{AB}$ encompasses p we have the inequalities $l(p) < l(\overset{\frown}{AB}) < l(q)$. All this and the measurability of the length of the curve $\overset{\frown}{AB}$ follow from [1]. We define the relation $p \prec \overset{\frown}{AB} \prec q$ in this situation also.

If C is a point on the curve $\overset{\frown}{AB}$ and we define polygonal curves p', q' for the curve $\overset{\frown}{AC}$ and p'', q'' for the curve $\overset{\frown}{CB}$ we have $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$,

$p' \prec \overset{\frown}{AC} \prec q'$, $p'' \prec \overset{\frown}{CB} \prec q''$ and

$p' + p'' \prec \overset{\frown}{AB} \prec q' + q''$.

Definition 4. *Let $\bigcup_{i\in I} S_i^+$, $I \subset \mathbb{N}$ be a set of homogeneous scalar positive quantities. We say that a relation "$\prec$" is defined on Q if for some indices $k,l \in I_p$ the following properties are satisfied:*

1. $(p \prec a \wedge a \prec q) \Leftrightarrow p \prec a \prec q \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu_k(p) < \mu_k(q),\ a \in S_i^+,\ p,q \in S_k^+$,
with measure μ_k in S_k^+;

2.
$(p \prec a \prec q) \wedge (p' \prec b \prec q') \wedge (a =_i b) \Rightarrow$
$\Rightarrow (p' <_k q) \wedge (p <_k q')$,
where $a,b \in S_i^+$ and $p,q,p',q' \in S_k^+$.

3.
$(p' \prec a' \prec q' \wedge p'' \prec a'' \prec q'') \Rightarrow$
$\Rightarrow p' +_k p'' \prec a' +_i a'' \prec q' +_k q''$,
where $p', p'', q', q'' \in S_k^+$ and $a', a'' \in S_i^+$.

Theorem 2. *Suppose we have a relation "$\prec$" in Q be defined and that for a state $a \in S_i^+$ there are sequences $\{p_n\}_{n\in N} \subset S_k^+, \{q_n\}_{n\in N} \subset S_k^+$ for which:*

1. $\forall n \in N$, $p_n \prec a \prec q_n$;

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) > 0 : \forall n > \nu(\varepsilon)$ we have $\mu_k(q_n) - \mu_k(p_n) < \varepsilon$.

Then

***I**. there exists a measure $\mu : S_i^+ \to R^+$;*

***II.** if $a =_i b$*, then *$\mu(a) = \mu(b)$, $a,b \in S_i^+$;*

III. if $a =_i b +_i c$, then

$\mu(a) = \mu(b) + \mu(c)$, $a,b,c \in S_i^+$;

Proof:

I. From Definition 4 and condition 1 of the theorem we can conclude $\mu_k(p_n) \le \mu_k(q_m), \forall m,n \in N$. Similarly as in the proof of Theorem 1 we take the sequences $\{p_n\}_{n\in N} \subset S_k^+, \{q_n\}_{n\in N} \subset S_k^+$ and construct the desired functional

$$\mu(a) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\mu_k(q_n) = \lim_{n\to\infty}\mu_k(p_n).$$

II. Let $a =_i b,\ a,b \in S_i^+$, $\{p_n\}_{n\in N} \subset S_k^+, \{q_n\}_{n\in N} \subset S_k^+$ be the corresponding sequences for $a \in S_i^+$ and $\{p'_n\}_{n\in N} \subset S_k^+, \{q'_n\}_{n\in N} \subset S_k^+$ be the corresponding sequences for $b \in S_i^+$. From condition 2. of Definition 4 we easily get $\mu(b) \le \mu(a) \wedge \mu(a) \le \mu(b)$ and so $\mu(a) = \mu(b)$.

III. Let $a,b,c \in S_i^+$, $\{p'_n\}_{n\in N} \subset S_k^+, \{q'_n\}_{n\in N} \subset S_k^+$ be the corresponding sequences for $b \in S_i^+$ and $\{p''_n\}_{n\in N} \subset S_k^+$, $\{q''_n\}_{n\in N} \subset S_k^+$ be the corresponding sequences for $c \in S_i^+$. From condition 3 of Definition 4 follows that the sequences

$\{p'_n +_k p''_n\}_{n\in N} \subset S_k^+, \{q'_n +_k q''_n\}_{n\in N} \subset S_k^+$ correspond to state $a \in S_i^+$.

Since $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) > 0$ we have that for every $n > \nu$ the following takes place

$$\mu_k(q'_n +_k q''_n) - \mu_k(p'_n +_k p''_n) =$$
$$= \mu_k(q'_n) - \mu_k(p'_n) + \mu_k(q''_n) - \mu_k(p''_n) < 2\varepsilon$$

and therefore

$$\mu(a) = \lim_{n\to\infty} \mu_k(q'_n +_k q''_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu_k(q'_n) + \lim_{n\to\infty} \mu_k(q''_n) = \mu(b) + \mu(c).$$

QED

Returning to the previous example we take S_i^+ to be the states of lengths of arcs of circles and S_k^+ to be the states of lengths of partially linear curves. We can apply Theorem 2 for these sets. It follows that the length of an arc of angle ω of a circle with radius r is uniquely defined and it must agree with the more naïve definition $2\pi r\omega$. S_i^+ and S_k^+ are both subsets of states of lengths of partially convex curves (say S_l^+) so the functional $\mu(\cdot)$ defined in Theorem 2 must agree with $\mu_l(\cdot)$ on $S_i^+ \bigcup S_k^+ \subset S_l^+$.

Definition 5. *Let S_k^+ and S_i^+ are sets of homogeneous positive scalar quantities and suppose a relation $''\prec''$ is defined on $S_{kl}^+ = S_k^+ \cup S_i^+$. We define $\alpha <_{kl} \beta,\ \alpha, \beta \in S_{kl}^+$ as follows:*

1. $\alpha, \beta \in S_r^+,\ \alpha <_{kl} \beta \Leftrightarrow \alpha <_r \beta,\ r = k, l$;

2. $\alpha \in S_k^+ \wedge \beta \in S_l^+,\ \alpha <_{kl} \beta \Leftrightarrow \alpha \prec \beta$.

Corollary. *Suppose under the assumptions of Theorem 2 the relation $<_{ik}$ from Definition 5 is defined. Then the measure $\mu : S_i^+ \to R^+$ from Theorem 2 satisfies properties a), b) and c) of Definition 2 if $\mu_k : S_k^+ \to R^+$ does.*

III. Conclusion. We present a general (for the methodological purposes) approach for formulation and justification the limiting procedure for measurement of positive scalar quantities. This note can introduce to the field students in pedagogy of mathematics and expose them to more general notions and ideas. This in turn can help them understand the subject better and appreciate the compromises that must be made in a course for school students.

References

1.Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. II. Стереометрия / Ж.Адамар. – М.: Учпедгиз, 1961.

2. Gorchev N. On the notion of surface area for rotational surfaces / N.Gorchev //Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2013. – Вип. 39. – С. 103–108.

3. Колмогоров А.Н. Математика – наука и професия / А.Н.Колмогоров. – М.: Наука, 1988.

4. Лебег А. Об измерение величин / А.Лебег. – М.: ГУПИ, 1938.

5. Петканчин Б. Основи на математиката / Б.Петканчин. – София: Наука и искусство, 1968.

6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М.Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969.

Резюме. **Горчев Н., Петров Д, МЕТОД ГРАНИЦ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СКАЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН.** *В работе предложен обобщенный подход к разработке и обоснованию способа границ измерения положительных скаляров. Сделаны соответствующие (в основном методические) разъяснения в их аксиоматической теории, а также введена специальная реляция, позволяющая продолжить реляцию упорядочевания в множестве однородных величин.*

Ключевые слова*: скалярные величины, измерения величины.*

Abstract. **Gorchev N., Petrov D. MEASUREMENT OF SCALAR QUANTITIES BY LIMITING PROCEDURE.** *In this note we define and develop a general approach for determination of positive scalar quantities. We make appropriate generalization in their axiomatic theory (mainly from methodological point of view). In particular we introduce a relation that extends the ordering in the set of homogeneous positive scalar quantities.*

Key words: *scalar quantities, measuring of quantities.*

Стаття представлена професором В.Б.Мілушевим.
Надійшла до редакції 28.02.2014 р.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОФЕСІЙНО СПРЯМОВАНИХ ЗАДАЧ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНО ОРІЄНТОВАНИХ ЗАСОБІВ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ-БУДІВЕЛЬНИКІВ

Н.А. Галібіна,
викладач,
Донбаська національна академія будівництва і архітектури,
м. Макіївка, УКРАЇНА,
e-mail: gn1977@mail.ru

Розглянуто комп'ютерно орієнтовані засоби, які застосовуються для розв'язування професійно спрямованих задач під час навчання математики майбутніх інженерів-будівельників на засадах діяльнісного підходу. Наведено приклади розв'язування з використанням пакетів прикладних програм задач, що спрямовані на формування способів дій, необхідних фахівцям будівельної галузі.

Ключові слова: *навчання математики, діяльнісний підхід, комп'ютерно орієнтовані засоби навчання, професійно спрямовані завдання, майбутні інженери-будівельники.*

Постановка проблеми. У науково-педагогічній літературі вважається загальновизнаним, що використання інформаційно комунікаційних технологій (ІКТ) оптимізує роботу викладача при навчанні студентів ВНЗ. Необхідність та доцільність використання спеціальних програмних продуктів під час навчання математики підкреслювалась у дослідженнях багатьох вчених, таких, наприклад, як К.В.Власенко, З.Г.Дібірова, М.О.Осінцева, С.А.Раков, Н.В.Рашевська, І.В.Роберт, Ю.І.Сінько, О.І.Скафа, Ю.В.Триус, Л.Б.Фоменко, Р.П.Явич, Л.Л.Якобсон та ін.

Щодо навчання математики студентів будівельних спеціальностей, то ці питання досліджували такі автори, як Ю.В.Бадюк, Е.Р.Бареєва, О.С.Білик, О.В.Бочкарьова, О.І.Булейко, О.М.Горіна, О.І.Єрмолаєва, Т.М.Картель, О.О.Мусієнко та ін. Усі ці вчені також наполягають на тому, що одним з вагомих факторів підвищення якості інженерно-будівельної освіти є застосування ІКТ під час навчання.

Водночас для сучасної вищої інженерно-будівельної освіти характерна низка негативних тенденцій. Скорочення кількості годин, передбачених для вивчення математичних дисциплін, суперечить посиленим вимогам до якості фундаментальної підготовки майбутніх інженерів-будівельників. Домінування традиційних методів і форм організації навчання математики ускладнює діяльність викладачів з підвищення якості навчання математичних дисциплін, із наповнення його елементами, що мають професійно значущий характер.

Аналіз стану проблеми забезпечення якості навчання математики майбутніх інженерів-будівельників, показав, що велика кількість студентів сприймають математику як дуже абстрактну дисципліну, не відчувають потреби в розширенні й поглибленні математичної підготовки. При цьому майбутні інженери-будівельники не можуть використовувати знання і вміння з математики при вивченні спеціальних дисциплін, орієнтованих на майбутню професію, та для розв'язування професійно спрямованих задач, навіть якщо володіють необхідними для цього знаннями й вміннями з математики та інших дисциплін. Досвід дослідження проблем з викладання математичних дисциплін в іноземних ВНЗ студентам будівельних напрямів підготовки, який проаналізовано у роботах [11-13], виявляє ті ж самі проблеми.

Вище викладене підтверджує необхідність розробки такої методичної системи навчання математики, яка б дала можливість викладачам ВНЗ у реаліях сьогодення здійснювати науково-обґрунтовану модернізацію навчання майбутніх інженерів-будівельників, підготовка яких відповідає вимогам фаху. Така методична система може бути розроблена на засадах діяльнісного підходу [2].

Важливим елементом методичної системи навчання є засоби проектування і організації навчання, серед яких на сучасному етапі розвитку суспільства головне місце мають посягати комп'ютерно орієнтовані засоби. Використання ІКТ для розв'язування математичних задач, створення наочності та контролю знань достатньо розповсюджено при навчанні математичних дисциплін у ВНЗ, але застосування комп'ютерно орієнтованих засобів навчання під час розв'язування професійно спрямованих задач під час навчання математики студентів будівельних напрямів підготовки майже не представлено в сучасних освітніх технологіях.

Аналіз актуальних досліджень. Під засобами навчання ми будемо розуміти об'єкти будь-якої природи, що формують навчальне середовище і використовуються викладачем і студентами в процесі навчальної діяльності [7].

З погляду діяльнісного підходу метою навчання математики майбутніх інженерів-будівельників має бути формування способів дій фахової діяльності, пов'язаної з будівництвом. Опанування способами дій, необхідними фахівцям будівельної галузі, відбувається за рахунок освоєння математичних дій та засвоєння знань і відбувається у процесі розв'язування задач. Тому дуже важливо при навчанні математики студентів будівельних напрямів підготовки на засадах діяльнісного підходу розв'язувати задачі, зміст яких відбиває майбутню професійну діяльність і оперує з об'єктами цієї діяльності. Такі задачі ми будемо називати професійно спрямованими.

Аналіз сучасної науково-методичної літератури свідчить про тенденцію широкого застосування ІКТ у навчальному процесі. Під інформаційно-комунікаційними технологіями навчання ми будемо розуміти систему загально-педагогічних, психологічних та дидактичних процедур взаємодії викладачів і студентів з використанням технічних ресурсів, яка спрямована на реалізацію змісту, методів, форм та засобів навчання, адекватних цілям освіти, індивідуальним особливостям студентів та вимогам до формування інформаційно орієнтованих якостей грамотної людини [5].

Використання ІКТ у навчанні математики можливо за рахунок створення і використання комп'ютерно орієнтованих засобів навчання, до складу яких ми відносимо програмні педагогічні засоби (ППЗ), такі як навчальні програми і програмні комплекси, та прикладні програмні засоби, такі як програми комп'ютерної математики, пакети прикладних програм тощо. Комп'ютерно орієнтовані засоби навчання забезпечують:

1) індивідуалізацію і диференціацію навчання;

2) здійснення контролю зі встановленням зворотного зв'язку, діагностикою та більш об'єктивним і швидшим оцінюванням результатів;

3) здійснення студентами самоконтролю і самокорекції;

4) можливості здійснення за його допомогою самопідготовки;

5) наочність;

6) моделювання та імітацію процесів і явищ, що досліджуються;

7) посилення мотивації навчання;

8) озброєння студентів стратегією засвоєння навчального матеріалу;

9) формування логічного мислення,

вміння приймати варіативні рішення;

10) розвиток творчих здібностей особистості.

Ми пропонуємо використовувати комп'ютерно орієнтовані засоби під час розв'язуванням професійно спрямованих задач при навчанні математики студентів будівельних напрямів підготовки.

Мета статті – *аналіз використання комп'ютерно орієнтованих засобів навчання математики майбутніх інженерів-будівельників, які застосовуються під час розв'язання професійно спрямованих задач.*

Виклад основного матеріалу. Використовуючи сучасні комп'ютерні пакети, викладач може ефективно реалізувати принцип залучення студентів до навчальної діяльності незалежно від рівня їх попередніх знань з окремих розділів курсу математики, і студенти зможуть нарівні з іншими опанувати матеріал теми.

Наприклад, О.Г.Євсеєва [2] при вивченні розділу «Лінійна алгебра» пропонує використовувати демонстраційні програми (авторські, мультимедіа, CD-енциклопедії, довідники), комп'ютерні навчальні системи, практикуми, засновані на маніпуляційних взаємодіях студента і програми, тренажери, тестові програми відео і аудіо фрагменти. Для контролю знань з теми «Системи *n*-лінійних рівнянь з *n*-невідомими» вченою пропонується використовувати програму «My test», за допомогою якої проводиться комп'ютерне тестування студентів. Програма «My test» це – система програм (програма тестування студентів, редактор тестів і журнал результатів) для створення і проведення комп'ютерного тестування, збору та аналізу результатів, виставляння оцінок за певною шкалою. У програмі є багаті можливості форматування тексту питань і варіантів відповідей. До кожного завдання можна задати складність (кількість балів за правильну відповідь), прикріпити підказку (яка може показуватися за штрафні бали) і пояснення правильної відповіді (виводиться у випадку помилки у навчальному режимі), настроїти інші параметри. Є можливість використовувати кілька варіантів питань до завдання, зручно створювати вибірку завдань для студентів, перемішувати завдання і варіанти відповідей [5].

Для проведення лабораторних занять з математики доцільно використовувати такі програмні засоби, як Mathcad, Derive, MathLab, Maple, Excel тощо. Зазвичай вже на перших курсах студенти навчаються застосовувати деякі з перелічених програм на заняттях інформатики. А використання цих програм при навчанні математики для полегшення розрахунків, пов'язаних з розв'язуванням професійно спрямованих задач, дозволить поєднати отримані знання на заняттях математики та інформатики, структурувати їх та надасть їм новий сенс. Але організація самостійної поза аудиторної роботи студентів з застосуванням таких пакетів, як Mathcad, Derive, MathLab, Maple тощо може бути ускладнена. Оскільки всі ці програми коштовні та займають багато місця на диску, вони можуть бути недоступні частині студентів.

Організація аудиторної самостійної роботи студентів при навчанні математики з використанням перелічених вище програмних засобів у деяких ВНЗ також може бути ускладнена їх недостатньою матеріальною оснащеністю. В цьому випадку доцільно застосовувати інші програмні засоби, що займають мало місця на диску та доступні для вільного використання. Для побудови графіків кривих та поверхонь можна використовувати такі програми, як Graph, Advanced Grapher, GRAN-2D або GRAN-3D [3, 9], для розв'язування рівнянь та систем рівнянь можна використовувати ППЗ OSA Beta, Maxima, Axiom тощо. Для створення наочності на заняттях математики, то дуже корисним тут буде розроблений С.А.Раковим [4] пакет динамічної геометрії (DG). Пакет

DG забезпечує можливості інтерактивної побудови геометричних об’єктів за допомогою електронних аналогів циркуля і лінійки, інтерактивного маніпулювання ними з динамічним відображенням результатів вимірювання їх характеристик. Усе це дозволяє значно знизити трудомісткість побудов і створює реальні умови для впровадження його у практику математичної освіти. Аналогом цієї програми є GeoGebra [10]. Цей програмний засіб має більше можливостей, але ця програма є англомовною, що може ускладнити процес її впровадження у навчальний процес.

Дуже корисним при навчанні математики майбутніх інженерів-будівельників є застосування комп’ютерних навчальних програм із системи евристико-дидактичних конструкцій (ЕДК) [5], що розробляються в Донецькому національному університеті. Ці програмні засоби побудовані на принципах застосування діяльнісного підходу до навчання математики.

На відміну від існуючих програмних засобів розроблені програми із системи ЕДК поступово наближають студентів до пошуку розв’язування задачі через організацію їх навчальної діяльності. Знаходження відповідей відбувається, наприклад, під час евристичного діалогу, коли увага акцентується на деяких методах розв’язування задачі, пропонується «розмите наведення» на пошук розв’язку і надається можливість самостійно знайти «свій шлях» до відкриття, розв’язування і перевірки результатів.

На основі різного роду ППЗ, що рекомендуються для організації навчання математики у ВТНЗ створюються різноманітні електронні підручники та комп’ютерні навчальні комплекси. У системі навчання математики студентів будівельних спеціальностей ВНЗ на засадах діяльнісного підходу найбільш доцільними, на наш погляд, є комп’ютерний навчальний комплекс «1С: Вища школа. Лінійна алгебра і аналітична геометрія», а також електронні підручники «Вища математика для майбутніх інженерів», розробленого К.В.Власенко [1] і «Курс лекцій. Вища математика», розробниками якого є П.О.Стеблянко, Т.В.Крилова, І.О.Давидов [8] та ін. Ці програмні засоби дозволяють студентам освоїти прийоми розв’язування задач з різних розділів курсу математики. Їх призначення в тому, щоб активізувати самостійну роботу студентів та допомогти неформальному засвоєнню предмета.

Щодо використання комп’ютерно орієнтованих засобів при розв’язуванні професійно спрямованих задач під час навчання математики майбутніх інженерів-будівельників, то програмні засоби доцільно застосовувати для досягнення наступних цілей:

1) уникнення громіздких розрахунків або скорочення часу на них;

2) отримання наближених чисельних та функціональних виразів, а також наближених розв’язків рівнянь, систем рівнянь тощо;

3) візуалізація та дослідження функціональної залежності при різних умовах;

4) створення геометричної інтерпретації та візуалізації, маніпуляція геометричними об’єктами, що створені з екрану або аналітично;

5) вимірювання, дослідження та аналіз змін величин, що вимірюються;

6) створення аналітичного запису залежностей у явному або наближеному вигляді на ін.

Так, для уникнення громіздких розрахунків при обчисленні визначених інтегралів, у тому числі і кратних, доцільно використовувати такі ППЗ, як GRAN-2D, GRAN-3D, OSA Beta, Graph, Mathcad, Derive, MathLab, Maple, Mathematica, Maxima тощо. Ті ж самі програмні засоби можна застосовувати і для побудови графіків кривих та поверхонь, а також для аналітичного запису залежностей у явному або наближеному вигляді. Для візуалізації множин точок, заданих за допомогою таблиці або нерівності можна, наприклад, використовувати ППЗ Graph, Advanced Grapher, Mathcad, MatLab, Maple тощо.

Для створення геометричних об'єктів (точок, відрізків, прямих, ламаних, площин, многокутників, многогранників, поверхонь обертання тощо) з екрану або аналітично, маніпуляцій ними (виконання поворотів, паралельних перенесень, деформацій, переміщення вільних точок тощо), вимірювання їх характеристик (координат вершин, площу, об'єм, довжину, кутів тощо) та дослідження їх змін доцільно використовувати, наприклад, такі ППЗ, як GRAN-2D, GRAN-3D, DG або GeoGebra. Так, у програмі DG ми можемо створити многокутник та досліджувати, як змінюється площа цієї фігури у залежності від того, як ми рухаємо на екрані одну з його вершин.

Розглянемо приклади застосування комп'ютерних програм для розв'язування професійно спрямованих задач при навчанні математики студентів будівельних спеціальностей ВНЗ.

Завдання 1. Для балки довжини 15 м, яка шарнірно оперта по кінцям та завантажена рівномірно розподіленим навантаженням, диференціальне рівняння має вигляд:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x).$$

Знайдіть розв'язок цього диференціального рівняння методом кінцевих різниць, тобто знайдіть значення моментів у відмічених точках сітки, якщо виконуються наступні умови:

1) $M(0)=0$; $M(15)=0$ (краєві умови у точках закріплення кінців балки);

2) Δx = 15/4 та вздовж балки відмічені 5 точок сітки x = (0, 15/4, 15/2, 45/4, 15);

3) $q(x) = 2.$

Розв'язання цього завдання зводиться до наступної системи трьох лінійних рівнянь з трьома змінними:

$$\begin{cases} M_2 - 2M_1 = \dfrac{225}{8}, \\ M_3 - 2M_2 + M_1 = \dfrac{225}{8}, \\ -2M_3 + M_2 = \dfrac{225}{8}. \end{cases}$$

Для уникнення громіздких розрахунків та скорочення часу можна запропонувати студентам розв'язати цю систему рівнянь за допомогою ППЗ OSA Beta методом Крамера, методом Гауса або методом Гауса-Зейделя.

На рисунку 1 зображено застосування ППЗ OSA Beta для розв'язування цієї системи лінійних рівнянь.

З рисунку 1 можна бачити, що розв'язками системи є числа: $M_1 = -42{,}1875$; $M_2 = -56{,}25$; $M_3 = -42{,}1875$.

Завдання 2. Балка довжини l метрів упирається своїми кінцями в стіну та у підлогу. Яку лінію буде описувати точка A, що належить цій балці та поділяє балку у відношенні $\lambda = \dfrac{BA}{AC}$, якщо балка почне падати донизу?

Систему координат оберіть, як показано на рис. 2.

Розв'язуючи завдання, знаходимо, що точка A буде описувати еліпс, заданий рівнянням

$$\frac{x^2}{l^2\lambda^2/(1+\lambda)^2} + \frac{y^2}{l^2/(1+\lambda)^2} = 1.$$

Далі студентам може бути запропоновано проаналізувати, як змінюється графічне зображення цього еліпсу для різних значень λ. Нехай $l = 5$, а значення λ дорівнює 3, 2, 1 та 0,3. Підставляючи значення l та λ, отримуємо еліпси з наступними піввісями:

1) 14,06 та 1,56 (λ = 3);

2) 11,11 та 2,78 (λ = 2);

3) 6,25 та 6,25 (λ = 1);

4) 1,33 та 14,79 (λ = 0,3).

На рис. 3 зображені ці еліпси, побудовані за допомогою ППЗ GRAN-2D.

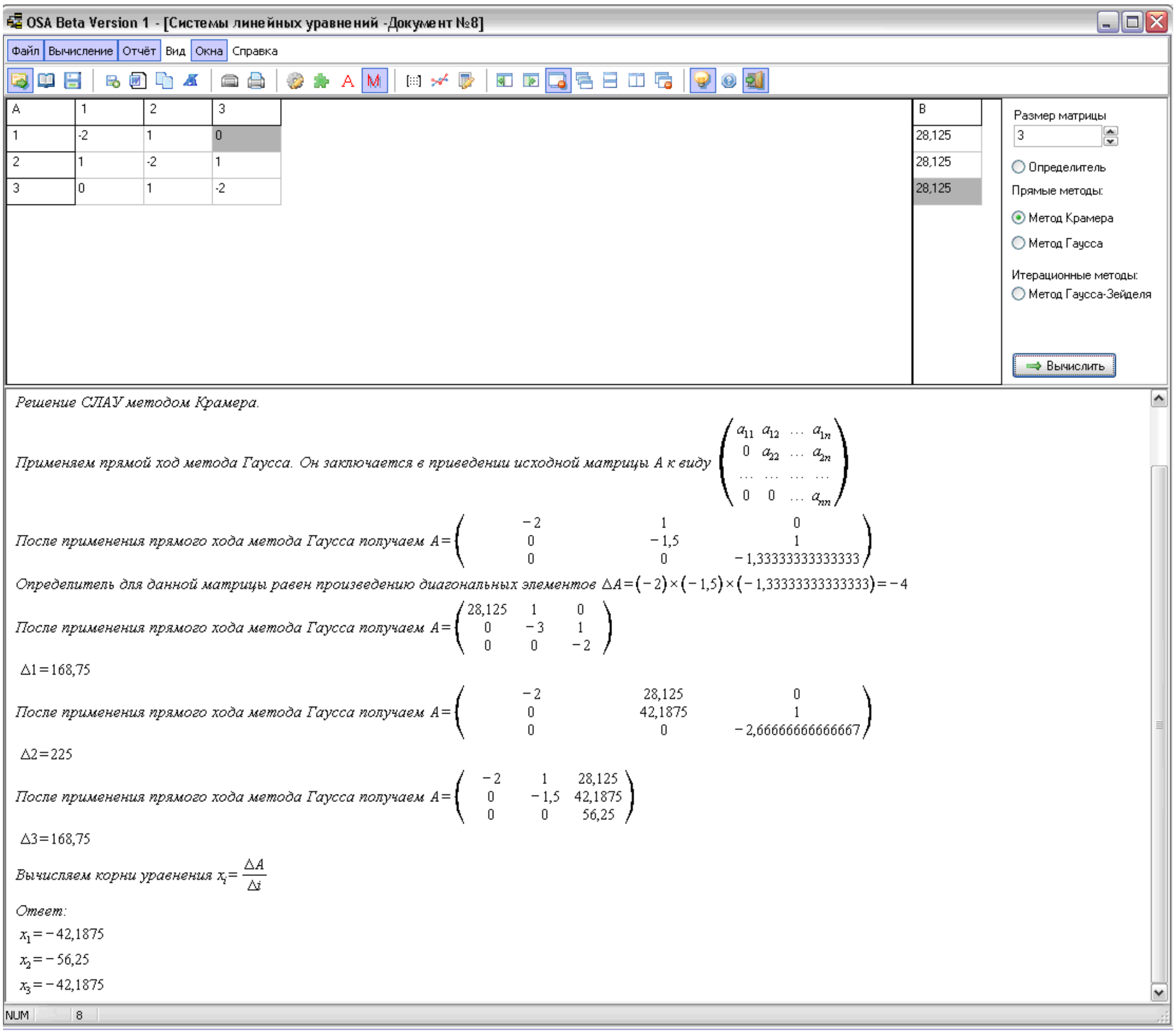


Рис.1. Вікно ППЗ OSA Beta: отримання розв’язків системи лінійних рівнянь

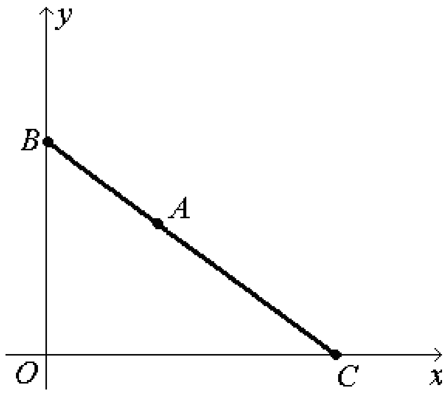


Рис.2. Система координат для завдання 2

Еліпс (1) отримано при $\lambda = 3$, еліпс (2) – при $\lambda = 2$, еліпс (3) – при $\lambda = 1$ та еліпс (4) – при $\lambda = 0{,}3$. З отриманого рисунку студенти роблять висновки, що точка *A* буде описувати коло, коли вона є серединою відрізка *BC*. Коли число λ є більшим, ніж одиниця (тобто *BA* більш, ніж *AC*), то графік еліпсу буде витягуватись вздовж вісі *Oy*, а коли число λ є меншим, ніж одиниця, графік еліпсу буде витягуватись вздовж вісі *Ox*.

Отже, у завданні 1 ППЗ OSA Beta застосовано для уникнення громіздких розрахунків при обчисленні визначників, а у завданні 2 ППЗ GRAN-2D використовується для візуалізації та дослідження отриманого розв'язку при різних умовах.

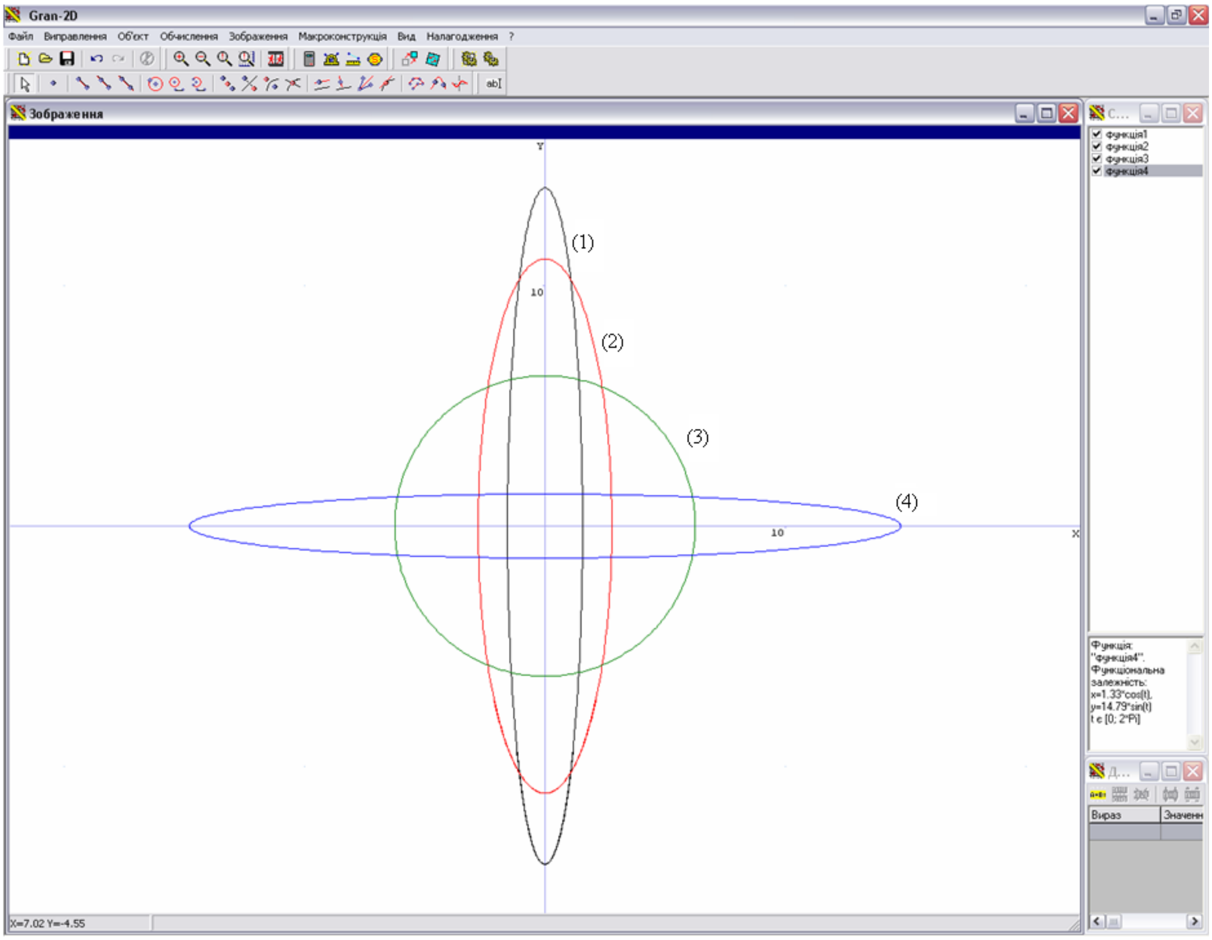


Рис.3. Вікно ППЗ GRAN-2D: побудова сім'ї еліпсів за заданими рівняннями

Висновки. Нами розглянуто комп'ютерно орієнтовані засоби навчання математики студентів будівельних напрямів підготовки. Всі ці засоби призначені для організації навчальної діяльності майбутніх інженерів-будівельників як під час аудиторних занять, так і під час поза аудиторної самостійної роботи студентів. Застосування ІКТ у поєднанні з розв'язуванням професійно спрямованих задач при навчанні математики майбутніх фахівців будівельної галузі не тільки підвищує у студентів мотивацію та інтерес до навчання математики, а й дозволяє формувати вміння, необхідні інженерам-будівельникам для їх професійної діяльності.

1. *Власенко К.В. Вища математика: елементи лінійної і векторної алгебри: електрон. навч.-метод. посіб. для студ. техн. ВНЗ [Електронний ресурс] / К.В.Власенко. – 1,28 Гб. – Краматорськ, ДДМА, 2010. – 1 електрон. опт. диск (DVD–ROM); 12 см. – Систем. вимоги: Pentium; 32 Mb RAM; Windows XP; Internet Explorer 7, Sun Java, Adobe Flash Player. – Назва з контейнера.*

2. *Євсеєва О.Г. Теоретико-методичні основи діяльнісного підходу до навчання математики студентів вищих технічних закладів освіти: монографія / О.Г.Євсеєва. – Донецьк: ДонНТУ, 2012. – 455 с.*

3. *Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках геометрії / М.І.Жалдак, О.В.Вітюк. – К.: РННЦ „ДІНІТ", 2004. – 154 с.*

4. *Раков С.А. Компьютерные эксперименты в геометрии / С.А.Раков, В.П.Горох. – Харьков : РЦНИТ, 1996. – 176 с.*

5. *Скафа О.І. Комп'ютерно-орієнтовані*

уроки в системі евристичного навчання математики / О.І.Скафа, О.В.Тутова. – Донецьк: Ноулідж, 2009. – 320 с.

6. *Співаковський О.В. Теоретико–методичні основи навчання вищої математики майбутніх вчителів математики з використанням інформаційних технологій : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук: 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / О.В.Співаковський. – К., 2004. – 42 с.*

7. *Средства обучения математике: сб. статей / Сост. А.М.Пышкало. – М.: Просвещение, 1980. – 208 с.*

8. *Стеблянко П.О. Курс лекцій. Вища математика. Електронний підручник / П.О.Стеблянко, Т.В.Крилова, І.О.Давидов. – Україна, МОН України, Державний департамент інтелектуальної власності, 2005. – 708 с.*

9. *Тымко Ю.Г. Изучение программно-методического комплекса Gran студентами факультета математики и информационных технологий / Ю.Г.Тымко // Дидактика математики: проблеми і дослідження: між нар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2013. – Вип. 40. – С. 159 – 164.*

10. *Escuder A. The Impact of GeoGebra in Math Teachers' Professional Development / A.Escuder, J.M. Furner. – P. 76 – 84. – [Electronic resource]: http://www.archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL23/5113/paper.pdf.*

11. *Ignacio N.G. The Affective Domain in Mathematics Learning / N.G.Ignacio, L.J.Blanco Nieto, E.G.Barona // International Electronic Journal of Mathematics Education. – 2006. – V.1, № 1. – P. 16 – 32.*

12. *Patel R. Innovations in teaching of Mathematics / R.Patel, V.Viyanagar // Waymade College of Education. – 8 p. – [Electronic resource]: http://www.waymadedu.org/StudentSupport/Rachnamadam.pdf.*

13. *Ulfkjaer J.P. Teaching Mathematics for Civil Engineering Students Applying Experiments / J.P.Ulfkjaer, J.B.Nielsen // Proceedings of the 8th International CDIO Conference. – 2012. – 12 p. – [Electronic resource]: http://www.cdio.org/knowledge-library/documents/teaching-mathematics-civil-engineering-students-applying-experiments.*

Резюме. **Галибина Н.А. РЕШЕНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНО НАПРАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ-СТРОИТЕЛЕЙ.** *В статье рассмотрены компьютерно ориентированные средства, которые применяются для решения профессионально направленных задач во время обучения математики будущих инженеров-строителей на основе деятельностного подхода в вузе.*

Ключевые слова: *обучение математике, деятельностный подход, компьютерно ориентированные средства обучения, профессионально направленная задача, будущие инженеры-строители.*

Abstract. **Galibina N. SOLVING THE PROFESSIONALLY DIRECTED PROBLEMS WITH THE USE OF THE COMPUTER ORIENTED TOOLS OF TRAINING MATHEMATICS FOR FUTURE CIVIL ENGINEERS.** *The computer oriented tools which are used for solving the professionally directed problems during the future civil engineers training mathematics on the grounds of the activity-based approach are considered. It was noted that under this approach in teaching the main aim is coping with the action modes of future professional activity of specialists, at that the action modes are realized by means of the specialist competences which are formed during the educational activity. Mathematical competences play important role in the system of the professional competences of the specialists in construction branch. It was pointed out that mathematical competences are formed due to skills to make mathematical educational actions, actions in mathematical modeling in professional field and acquisition of knowledges necessary for coping with these actions. Solving the professionally directed problems plays a key role in mathematical competences forming of future civil engineers. The professionally directed problem in the mathematics teaching means a* *mathematical problem which deals with the objects of professional activity and it is oriented on the forming of the activity methods of the future professional activity of specialists. The examples of the professionally directed problems in mathematics which promote the professional competence forming for students of building specialities are considered. The variants of the use of the computer programs for solving these problems and their solutions exploration are offered. Solving the professionally directed problems with the use of the different computer oriented tools allows to raise the effectiveness of the professional competence forming the civil engineer during the process of teaching mathematics.*

Key words: *teaching mathematics, activity-based approach, computer oriented training tools, professionally directed problems, the future civil engineers.*

References

1. Vlasenko K. V. Higher mathematics: elements of the linear and vector algebra [Electronic resource]: Electronic educational and methodical manual for students of technical universities / K. V. Vlasenko. of 1.28 GB. - Kramatorsk DSMA, 2010. - 1 electron. the opt. drive (DVD-ROM); 12 cm Systems. requirements. Windows XP, Internet Explorer 7, Sun Java, Adobe Flash Player .

2. Yevsyeyeva E. G. Theoretical and methodical basis of the activities approach to the mathematics teachins the students of the technical educational establishments : monograph / E. G. Yevsyeyeva. – Donetsk : DonNTU, 2012. – 455 p.

3. Zhaldak M.I. Computer lessons in geometry / M.I. Zhaldak, O. V. Vityuk. – Kyiv:RNNTS "DINIT", 2004. – 154 p.

4. Racov S. A. Computer experiments in geometry / S. A. Racov, V. P. Gorokh.– Kharkov : RTSNIT, 1996. – 176 p.

5. Skafa O.I. Computer-orientied lessons in heuristic mathematics training system / O.I.Skafa, O.V.Tutova. – Donetsk: Knowledge, 2009. – 320 p.

6. Spivakovsky A. V. Theoretical and methodical fundamentals of higher mathematics teaching to future mathematics teachers with the use informational technologies: Abstr. dis. on competition of a scientific degree of the doctor of pedagogical sciences: 13.00.02 «Theory and methodology of teaching (mathematics)» / A. V. Spivakovsky. – K., 2004. – 42 p.

7. Tools of training mathematics: article collect. / A. M. Pyshkalo. – M. : Prosveschenie, 1980. – 208 p.

8. Streblyanko P. O. Lecture course. Higher mathematics. Electronic textbook / P. O. Streblyanko, T. V. Krylova, I. A. Davydov.– Ukraine, The Ministry of Education and Science of Ukraine, State Intellectual Property Department, 2005. – 708 p.

9. Tymko Yu. G. Study of the program-methodical complex GRAN by students of the faculty of mathematics and information technologies. / Yu. G. Tymko // Didactics of mathematics: problems and investigations : the international collection of the scientific works. - Donetsk : DonNU, 2013. - Vol. 40. - P. 159-164.

10. Escuder A. The Impact of GeoGebra in Math Teachers' Professional Development / A. Escuder, J. M. Furner. – P. 76 – 84. – [Electronic resource] : http://www.archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL23/5113/paper.pdf.

11. Ignacio N. G. The Affective Domain in Mathematics Learning / N. G. Ignacio, L. J. Blanco Nieto, E. G. Barona // International Electronic Journal of Mathematics Education. – 2006. – V.1, № 1. – P. 16 – 32.

12. Patel R. Innovations in teaching of Mathematics / R. Patel, V. Viyanagar // Waymade College of Education. – 8 p. – [Electronic resource] : http://www.waymadedu.org/StudentSupport/Rachnamadam.pdf.

13. Ulfkjaer J. P. Teaching Mathematics for Civil Engineering Students Applying Experiments / J. P. Ulfkjaer, J. B. Nielsen // Proceedings of the 8th International CDIO Conference. – 2012. – 12 p. – [Electronic resource]: http://www.cdio.org/knowledge-library/documents/teaching-mathematics-civil-engineering-students-applying-experiments.

Стаття представлена професором О.Г. Євсеєвою.
Надійшла до редакції 11.01.2014 р.

ДО ПИТАННЯ ПРО ВИВЧЕННЯ МЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН В АФІННИХ КООРДИНАТАХ

О.А. Кадубовський,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Н.О. Чиркова,
студентка,
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»,
м. Слов'янськ, УКРАЇНА,
e-mail: kadubovs@ukr.net,
e-mail: chirkova_n@ukr.net

Висвітлюється авторський досвід формування професійної компетентності майбутніх викладачів математики на прикладі вивчення теми «метричні задачі на прямі та площини в просторі» шляхом її викладання в афінних координатах, на відміну від традиційного викладу в прямокутних координатах.

Ключові слова*: професійна компетентність викладача, афінна система координат у просторі, матриця Грама, метричні задачі на пряму та площину.*

Вступ. Із метою досягнення наочності алгебраїчних абстракцій та лаконічності геометричних доведень, в останні 15-20 років простежується тенденція об'єднання традиційно різних розділів математики в одну дисципліну. Тема «Метричні задачі на ... в афінних координатах» («МЗвАК») є невід'ємною змістовою складовою об'єднаного курсу з лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей «класичних» університетів [1, 5].

Постановка проблеми. Сьогодні перед вітчизняними ВНЗ, що готують майбутніх викладачів фізики та математики, постало надважливе завдання – формувати фахівців із високим рівнем професійної компетентності [6]. Дисципліни «Аналітична геометрія» і «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є нормативними дисциплінами освітньо-професійних програм (ОПП) підготовки зазначених фахівців.

На превеликий жаль, відповідними ОПП підготовки викладачів фізики та математики для зазначених дисциплін не передбачено вивчення змістових модулів «МЗвАК». Можливо тому, в більшості рекомендованих підручників, методичних посібників та збірників задач з аналітичної геометрії для студентів педагогічних (і не лише) ВНЗ метричні задачі розглядають виключно в прямокутних координатах. Але ж подальша викладацька діяльність студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ передбачає готовність до навчання спеціалістів різного профілю.

Аналіз актуальних досліджень. Результати кількісного та якісного аналізу дидактичного забезпечення зазначеної теми за найбільш розповсюдженими підручниками та збірниками задач [1–3, 5, 7-11] дозволяють констатувати, що систематизація та виокремлення ключових метричних задач на прямі та площини в явному вигляді, навіть для випадку прямокутних координат, залишаються невисвітленими питаннями. «Різноманіття» задач, здебільшого, досягається за рахунок розгляду різних способів задання прямої та площини, за рахунок несуттєвих додаткових умов або ж за рахунок розгляду аналогічних задач з різними числовими даними. Задачам без числових даних також приділяється недостатня увага, а їх роль затушовується. На думку авторів, збірники задач [3, 5, 8] частково позбавлені зазначеної вади.

Розділи «МЗвАК» вперше було запропоновано П.С. Моденовим і О.С. Пархоменком у 1976 р. у збірнику задач [8]. Причому всі задачі таких розділів авторами було віднесено до задач теоретичного характеру та підвищеної складності. Один з підходів до систематизації та виокремлення ключових метричних задач «на прямі в площині» в афінних координатах викладено у роботі [4]. Представлена стаття є її логічним продовженням.

Мета статті *полягає у висвітленні результатів авторського виокремлення та систематизації «ключових» задач, їх доповненні вправами-наслідками та задачами-наслідками теоретичного характеру, які б (у певному розумінні) «повно» охоплювали метричні задачі «на прямі та площини в просторі» саме в афінних координатах.*

Основні поняття та попередні відомості. Нагадаємо [7], що узагальнена декартова (афінна) система координат у просторі визначається точкою O (початок координат) та впорядкованою трійкою некомпланарних векторів $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ зі спільним початком у точці O. Напрями цих векторів визначають додатні напрями координатних осей OX (абсцис), OY (ординат) та OZ (аплікат) відповідно. Тоді кожній точці M простору в єдиний спосіб можна поставити у відповідність впорядковану трійку чисел $x; y; z$, які є коефіцієнтами розкладу її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ за базисними векторами $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. І навпаки, кожній трійці чисел $x; y; z$ ставиться у відповідність єдина точка простору, що є кінцем радіус-вектора $x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2} + z \cdot \vec{e_3}$.

Означення 1. Афінну систему координат називатимемо косокутною, якщо (при фіксованій одиниці довжини) її базисні вектори є ортами.

Означення 2. Косокутну систему координат називатимемо прямокутною, якщо базисні вектори є попарно ортогональними.

Означення 3. [1] Метричними коефіцієнтами g_{ij} базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ називають скалярні добутки

$$g_{ij} = \left\langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \right\rangle = \left|\vec{e_i}\right| \cdot \left|\vec{e_j}\right| \cdot \cos \angle\, \vec{e_i}, \vec{e_j}$$
$$\forall i, j \in 1, 2, 3 \;.$$

Матрицю $G = g_{ij}$, елементами якої є зазначені добутки, називають матрицею Грама метричних коефіцієнтів базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Оскільки $g_{ij} = g_{ji}$, то $G^T = G$, де G^T – матриця, транспонована до матриці G.

Добре відомо [10], що для кожного базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, визначник $|G|$ матриці Грама є додатним. Тому матрицю, обернену до матриці G, можна подати у вигляді $G^{-1} = G / |G|$, де G – матриця, елементами якої є алгебраїчні доповнення елементів матриці G, що визначаються за формулами

$$g_{11} = +\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},$$

$$g_{12} = -\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g_{21},$$

$$g_{13} = +\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} = g_{31},$$

$$g_{22} = +\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$g_{23} = -\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix} = g_{32},$$

$$g_{33} = +\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

Добре відомо [1], що якщо два вектори відносно базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ задано координатами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то їх скалярний добуток можна обчислити за формулою:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} a_i b_j =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = A^T \circ G \circ B, \qquad (1^*)$$

де A і B – матриці-стовпці, елементами яких є координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно, A^T – матриця-рядок, що є транспонованою до матриці A.

Оскільки $\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = \left| \vec{a} \right|^2$, то

$$\left| \vec{a} \right| = \sqrt{A^T \circ G \circ A}. \qquad (2^*)$$

Із курсу векторної алгебри відомо (напр. [7]), що площу паралелограма, побудованого на двох неколінеарних векторах $\vec{p} = (p_1; p_2; p_3)$ і $\vec{q} = (q_1; q_2; q_3)$ можна обчислити за формулою

$$S_{\square} = \sqrt{\begin{vmatrix} P^T \circ G \circ P & P^T \circ G \circ Q \\ P^T \circ G \circ Q & Q^T \circ G \circ Q \end{vmatrix}}, \quad (3^*)$$

де

$P^T = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$, $Q^T = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$,

а об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох некомпланарних векторах $\vec{p} = (p_1; p_2; p_3)$, $\vec{q} = (q_1; q_2; q_3)$ і $\vec{r} = (r_1; r_2; r_3)$ – за формулою

$$V = \sqrt{|G|} \cdot \mathrm{mod} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}. \qquad (4^*)$$

Більш детально з наведеними поняттями та фактами можна ознайомитись, наприклад в [1, 5, 7-11].

Виклад основного матеріалу. В умовах наведених нижче задач координати даних точок і векторів та рівняння прямих і площин задано відносно фіксованої афінної системи координат з матрицею Грама $G = (g_{ij})$.

КЗ №1. [8]. Рівняння площини π, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та має нормальний вектор $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$, можна подати у вигляді

$$\pi: \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1.1)$$

В-Н №1-1. Знайти рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно прямій

$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (1).$$

КЗ №2. В якості координат нормального вектора $\vec{n}_\pi$ площини π, заданої параметричним рівнянням

$$\pi: \begin{cases} x - x_1 = p_1 u + q_1 v \\ y - y_1 = p_2 u + q_2 v \\ z - z_1 = p_3 u + q_3 v \end{cases} \quad (2),$$

можна обрати трійку чисел n_1, n_2, n_3, які визначаються за допомогою матричної рівності

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ q_3 & q_1 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \right) \circ G. \qquad (2.1)$$

З-Н №2.1. Довести, що в якості координат нормального вектора площини

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \qquad (3)$$

можна обрати трійку, що визначається рівністю

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \circ G. \quad (2.2)$$

КЗ № 3. Необхідну та достатню умову перпендикулярності

1) прямих $l_i: \dfrac{x - x_i}{m_i} = \dfrac{y - y_i}{n_i} = \dfrac{z - z_i}{p_i}$, $i = 1, 2$ можна подати у вигляді

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow L_1^T \circ G \circ L_2 = 0,$$

$$L_1^T = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \end{pmatrix}, \; L_2^T = \begin{pmatrix} m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix}; \qquad (3.1)$$

2) площин $\pi_i: a_i(x - x_i) + b_i(y - y_i) + c_i(z - z_i) = 0$, $i = 1, 2$ – у вигляді

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow N_1^T \circ G \circ N_2 = 0$$

$$N_1^T = a_1 \quad b_1 \quad c_1 \ , N_2^T = a_2 \quad b_2 \quad c_2 \ ; \tag{3.2}$$

3) прямої l, заданої рівнянням (1), і площини π, заданої рівнянням (3), – у вигляді

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \frac{ag_{11} + bg_{12} + cg_{13}}{m} = \frac{ag_{21} + bg_{22} + cg_{23}}{n} = \frac{ag_{31} + bg_{32} + cg_{33}}{p}. \tag{3.3}$$

В-Н 3-1. Встановити необхідну та достатню умову перпендикулярності:

1.1) прямої, заданої як перетин двох площин, та прямої, заданої канонічним рівнянням; 1.2) двох прямих, заданих як перетин відповідних пар відповідних площин; 2.1) площини, заданої параметричним рівнянням та площини, заданої загальним рівнянням; 2.2) двох площин, заданих параметричними рівняннями; 3.1) прямої, заданої канонічним рівнянням, і площини, заданої параметричним рівнянням; 3.2) прямої, заданої як перетин двох площин, і площини, заданої параметричним рівнянням.

З-Н №3.1. Знайти канонічне рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до площини, заданої загальним рівнянням.

З-Н №3.2. Знайти рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до кожної з двох непаралельних площин, заданих відповідними загальними рівняннями.

З-Н №3.3. Знайти рівняння площини, що містить пряму, задану канонічним рівнянням, і є перпендикулярною до площини, заданої загальним рівнянням.

КЗ № 4. [1]. Косинус (синус) гострого кута φ між

1) прямими

$$l_i : \frac{x - x_i}{m_i} = \frac{y - y_i}{n_i} = \frac{z - z_i}{p_i}, \ i = 1,2$$

можна обчислити за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\left| L_1^T \circ G \circ L_2 \right|}{\sqrt{L_1^T \circ G \circ L_1}\sqrt{L_2^T \circ G \circ L_2}},$$

$$L_1^T = m_1 \quad n_1 \quad p_1 \ ,$$

$$L_2^T = m_2 \quad n_2 \quad p_2 \ ; \tag{4.1}$$

2) площинами

$\pi_i : a_i \ x - x_i \ + b_i \ y - y_i \ + c_i \ z - z_i \ = 0$,

$i = 1,2$ – за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\left| N_1^T \circ G^{-1} \circ N_2 \right|}{\sqrt{N_1^T \circ G^{-1} \circ N_1}\sqrt{N_2^T \circ G^{-1} \circ N_2}},$$

$$N_1^T = a_1 \quad b_1 \quad c_1 \ , N_2^T = a_2 \quad b_2 \quad c_2 \ ; \tag{4.2}$$

3) прямою l, заданої рівнянням (1), і площиною π, заданою рівнянням (3), – за формулою

$$\sin\varphi = \frac{\left| am + bn + cp \right|}{\sqrt{N^T \circ G^{-1} \circ N}\sqrt{L^T \circ G \circ L}},$$

$$N^T = a \quad b \quad c \ , L^T = m \quad n \quad p \ . \tag{4.3}$$

В-Н № 4-1. Знайти косинус (синус) гострого кута між

1) прямою, заданою канонічним рівнянням, та координатними осями;

2) площиною, заданою загальним рівнянням, та координатними осями;

3) прямою, заданою канонічним рівнянням, та координатними площинами;

4) координатною віссю та координатною площиною, яка її не містить;

5) координатними площинами; 6) координатними осями.

КЗ № 5. Рівняння прямих l_1, l_2, що проходять через точку $M_0 \ x_0; y_0; z_0$ та перетинають пряму

$$l : \frac{x - x^*}{m} = \frac{y - y^*}{n} = \frac{z - z^*}{p}$$

під кутом $0 < \varphi \leq 90^\circ$ можна подати у вигляді

$$l_{1,2} : \frac{x - x_0}{mt_i + x^* - x_0} = \frac{y - y_0}{nt_i + y^* - y_0} = \frac{z - z_0}{pt_i + z^* - z_0}, \tag{5.1}$$

де $t_{1,2} = -\frac{B}{A} \pm \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A} \cdot \operatorname{ctg}\varphi$,

$$A = L^T \circ G \circ L, \ B = L^T \circ G \circ Q,$$

$$C = Q^T \circ G \circ Q, \ L^T = m \quad n \quad p \ ,$$

$$Q^T = \left(x^* - x_0 \quad y^* - y_0 \quad z^* - z_0\right).$$

З-Н № 5.1. Знайти рівняння прямих, що проходять через дану точку та утворюють даний кут з певною координатною віссю.

КЗ № 6 [8]. Відстань від точки $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ до

1) площини $\pi: a\left(x - x_1\right) + b\left(y - y_1\right) + c\left(z - z_1\right) = 0$ можна знайти за формулою

$$\rho\left(M_0; \pi\right) = \frac{\left|N^T \circ Q\right|}{\sqrt{N^T \circ G^{-1} \circ N}},$$

де

$N^T = \left(a \quad b \quad c\right)$, а

$$Q^T = \left(x_0 - x_1 \quad y_0 - y_1 \quad z_0 - z_1\right); \tag{6.1}$$

2) прямої $l: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ – за формулою

$\rho\left(M_0; l\right) = \sqrt{\mu^2 - \eta^2}$, де

$$\mu^2 = Q^T \circ G \circ Q, \ \eta^2 = \frac{\left|L^T \circ G \circ Q\right|^2}{L^T \circ G \circ L},$$

$$Q = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix}, \ L = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

В-Н № 6-1. Обчислити відстань

1) від даної точки до площини, заданої загальним рівнянням; 2) від даної точки до координатних площин; 3) від початку координат до площини, заданої загальним рівнянням; 4) між паралельними площинами, заданими загальними рівняннями; 5) між мимобіжними прямими, заданими канонічними рівняннями; 6) між паралельними прямими, заданими канонічними рівняннями; 7) від даної точки до певної координатної осі.

З-Н № 6.1. Знайти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених площинами, заданими відповідними загальними рівняннями.

З-Н № 6.2. Знайти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених координатними площинами.

КЗ № 7. Координати x', y', z' ортогональної проекції точки $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$

1) на площину $\pi: ax + by + cz + d = 0$ можна визначити за формулами

$$\left(x' \ y' \ z'\right) = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{N^T \circ G \circ N} \cdot G \circ N^T +$$

$$+ \left(x_0 \ y_0 \ z_0\right),$$

$$N^T = \left(a \, b \, c\right); \tag{7.1}$$

2) на пряму $l: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$

– за допомогою матричної рівності

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -\frac{L^T \circ G \circ Q}{L^T \circ G \circ L} \cdot L + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ L = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

В-Н № 7-1. Знайти координати ортогональної проекції даної точки на певну координатну площину (координатну вісь).

З-Н № 7.1. Знайти координати точки, симетричної даній точці відносно

1) площини, заданої загальним рівнянням;

2) прямої, заданої канонічним рівнянням.

З-Н № 7.2. Знайти рівняння ортогональної проекції прямої, заданої канонічним рівнянням, на площину, задану загальним рівнянням.

З-Н № 7.3. Знайти рівняння площини, симетричної до площини, заданої загальним рівнянням, відносно площини, заданої загальним рівнянням.

КЗ № 8. Координати основи $\left(x_1', y_1', z_1'\right) \in l_1$ спільного перпендикуляра до мимобіжних прямих $l_i: \frac{x - x_i}{m_i} = \frac{y - y_i}{n_i} = \frac{z - z_i}{p_i}$, $i = 1, 2$ можна знайти за формулами

$$\underbrace{x_1' = m_1 t + x_1 \quad y_1' = n_1 t + y_1 \quad z_1' = p_1 t + z_1}, \tag{8.1}$$

де

$$t=\frac{x_2-x_1\begin{vmatrix}n_2 & p_2\\ n'' & p''\end{vmatrix}+\;y_2-y_1\begin{vmatrix}p_2 & m_2\\ p'' & m''\end{vmatrix}+\;z_2-z_1\begin{vmatrix}m_2 & n_2\\ m'' & n''\end{vmatrix}}{m''^2+n''^2+p''^2}, \qquad (8.2)$$

$$m''\quad n''\quad p''=\left(\begin{vmatrix}n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}p_1 & m_1\\ p_2 & m_2\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}\right)\circ G. \qquad (8.3)$$

З-Н № 8.1. Знайти рівняння прямої, яка містить спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих, заданих відповідними канонічними рівняннями.

КЗ № 9. Рівняння прямої l'', симетричної прямій $l_0:\dfrac{x-x_0}{m_1}=\dfrac{y-y_0}{n_1}=\dfrac{z-z_0}{p_1}$

1) відносно площини

$$\pi: ax+by+cz+d=0$$

у випадку, коли

1.1) $l_0\subset\pi_1$, можна подати у вигляді

$$l'':\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1}; \qquad (9.1)$$

1.2) $l_0\parallel\pi\ (l_0\not\subset\pi)$ – у вигляді

$$l'':\frac{x-x''}{m_1}=\frac{y-y''}{n_1}=\frac{z-z''}{p_1}, \qquad (9.2)$$

де x'',y'',z'' визначаються за допомогою формули

$$\begin{pmatrix}x''\\ y''\\ z''\end{pmatrix}=\frac{-2\cdot\ ax_0+by_0+cz_0+d}{N^T\circ G\circ N}\cdot G\circ N+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix},$$

$$N=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}; \qquad 9.2.1$$

1.3) $l_0\cap\pi=\overline{L}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ – у вигляді

$$l'':\frac{x-\overline{x}}{x''-\overline{\overline{x}}}=\frac{y-\overline{y}}{y''-\overline{\overline{y}}}=\frac{z-\overline{z}}{z''-\overline{\overline{z}}}, \quad (9.3)$$

де $\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\\ \overline{z}\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}m_1\\ n_1\\ p_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix},$

$$t=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{N^T\circ L_1},$$

$$L_1=\begin{pmatrix}m_1\\ n_1\\ p_1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix},$$

а x'',y'',z'' визначаються за допомогою формули (9.2.1);

2) відносно прямої

$l\ :\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ у випадку, коли

2.1) $l_0\equiv l$, можна подати у вигляді

$$l'':\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1} \qquad (9.4)$$

2.2) $l_0\parallel l\ (l_0\not\equiv l)$ – у вигляді

$$l'':\frac{x-x''}{m_1}=\frac{y-y''}{n_1}=\frac{z-z''}{p_1}, \qquad (9.5)$$

де x'',y'',z'' визначаються за допомогою формули

$$\begin{pmatrix}x''\\ y''\\ z''\end{pmatrix}=\frac{-2\cdot L^T\circ G\circ Q}{L^T\circ G\circ L}\circ L+\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix},$$

$$L=\begin{pmatrix}m\\ n\\ p\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}x_1-x_0\\ y_1-y_0\\ z_1-z_0\end{pmatrix}; \qquad (9.5.1)$$

2.3) $l_0\cap l=\overline{L}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ – у вигляді

$$l'':\frac{x-\overline{x}}{x''-\overline{\overline{x}}}=\frac{y-\overline{y}}{y''-\overline{\overline{y}}}=\frac{z-\overline{z}}{z''-\overline{\overline{z}}}, \qquad (9.6)$$

де x'',y'',z'' визначаються за допомогою формули (9.5.1), а $\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ у випадку

а якщо $\Delta_1=\begin{vmatrix}n_1 & n\\ p_1 & p\end{vmatrix}\neq 0$, можна визначити за формулою

$$\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z} \; = t_1 \cdot \; m_1 \quad n_1 \quad p_1 \; + \; x_0 \quad y_0 \quad z_0 \; ,$$

$$t_1 = \frac{1}{\Delta_1} \cdot \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & n \\ z_1 - z_0 & p \end{vmatrix}, \quad (9.6.1)$$

b якщо $\Delta_2 = \begin{vmatrix} m_1 & m \\ p_1 & p \end{vmatrix} \neq 0$ – за формулою

$$\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z} \; = t_2 \cdot \; m_1 \quad n_1 \quad p_1 \; + \; x_0 \quad y_0 \quad z_0 \; ,$$

$$t_2 = \frac{1}{\Delta_2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & m \\ z_1 - z_0 & p \end{vmatrix}, \qquad 9.6.2$$

c якщо $\Delta_3 = \begin{vmatrix} m_1 & m \\ n_1 & n \end{vmatrix} \neq 0$ – за формулою

$$\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z} \; = t_3 \cdot \; m_1 \quad n_1 \quad p_1 \; + \; x_0 \quad y_0 \quad z_0 \; ,$$

$$t_3 = \frac{1}{\Delta_3} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & m \\ y_1 - y_0 & n \end{vmatrix}. \qquad 9.6.3$$

2.3.1) якщо ж $\begin{cases} l_0 \cap l = \bar{L}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ l_0 \perp l \end{cases}$, то $l'' \equiv l_0$. І тому рівняння шуканої прямої l'' має вид

$$l'': \frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} = \frac{z - z_0}{p_1} \qquad (9.7)$$

2.4) $\begin{cases} l_0 \cap l = \varnothing \\ l_0 \not\parallel l \end{cases}$ – у вигляді

$$l'': \frac{x - x_0''}{x'' - \bar{x}} = \frac{y - y_0''}{y'' - \bar{y}} = \frac{z - z_0''}{z'' - \bar{z}}, \qquad (9.8)$$

де x_0'', y_0'', z_0'' визначаються за формулами

$$\begin{pmatrix} x_0'' \\ y_0'' \\ z_0'' \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{L^T \circ G \circ Q}{L^T \circ G \circ L} \cdot L + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix}, \qquad (9.8.1)$$

x'', y'', z'' – за формулами

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = -2 \cdot \frac{Q^T \circ N}{N^T \circ G \circ N} \cdot G \circ N + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \; (9.8.2)$$

де $Q^T = \; x_0 - x_1 \quad y_0 - y_1 \quad z_0 - z_1 \; ,$

$N^T = \; a'' \quad b'' \quad c'' \; ;$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – за формулами

$$\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z} \; = t \cdot \; m_1 \quad n_1 \quad p_1 \; + \; x_0 \quad y_0 \quad z_0 \; , \qquad (9.8.3)$$

де $t = -\dfrac{Q^T \circ N}{N^T \circ L_1}$, $L_1^T = \; m_1 \quad n_1 \quad p_1 \; ,$

$$N^T = \; a'' \quad b'' \quad c'' \; ;$$

а a'', b'', c'' – за формулами

$$a'' = \begin{vmatrix} n & p \\ n'' & p'' \end{vmatrix}, \; b'' = \begin{vmatrix} p & m \\ p'' & m'' \end{vmatrix},$$

$$c'' = \begin{vmatrix} m & n \\ m'' & n'' \end{vmatrix},$$

$$m'' \; n'' \; p'' \; = \left(\begin{vmatrix} n & p \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} p & m \\ p_1 & m_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \right) \circ G \qquad (9.8.4)$$

2.4.1) Якщо ж $\begin{cases} l_0 \cap l = \varnothing \\ l_0 \perp l \end{cases}$, то шукана пряма l'' має вид

$$l'': \frac{x - x_0''}{m_1} = \frac{y - y_0''}{n_1} = \frac{z - z_0''}{p_1}, \qquad (9.9)$$

де x_0'', y_0'', z_0'' визначаються за формулами (9.8.1).

В-Н № 9-1. Знайти рівняння прямої, симетричної прямій, заданій канонічним рівнянням, відносно координатних площин.

В-Н № 9-2. Знайти рівняння прямої, симетричної прямій, заданій канонічним рівнянням відносно певної координатної осі.

КЗ № 10. Рівняння площини π, яка відстоїть від початку координат на відстані $p > 0$, а її нормальний вектор утворює кути ψ_1, ψ_2 і ψ_3 з додатними напрямами осей OX, OY і OZ відповідно можна подати у вигляді

$$\sqrt{g_{11}} \cdot \cos\psi_1 \cdot x + \sqrt{g_{22}} \cdot \cos\psi_2 \cdot y + \sqrt{g_{33}} \cdot \cos\psi_3 \cdot z - p = 0. \qquad (10.1)$$

Під нормальним рівнянням площини π будемо розуміти рівняння цієї площини виду (10.1), де p – відстань від початку координат до площини π, а ψ_1, ψ_2 і ψ_3 – кути, які утворює нормальний вектор площини π з додатними напрямами осей OX, OY і OZ відповідно.

Зауважимо, що для зазначених кутів ψ_1, ψ_2 і ψ_3 повинна виконуватися умова

$$\sqrt{g_{11}}\cos\psi_1 \quad \sqrt{g_{22}}\cos\psi_2 \quad \sqrt{g_{33}}\cos\psi_3 \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}}\cos\psi_1 \\ \sqrt{g_{22}}\cos\psi_2 \\ \sqrt{g_{33}}\cos\psi_3 \end{pmatrix} = 1. \quad (10.2)$$

З-Н № 10.1. Звести загальне рівняння площини до нормального виду.

З-Н № 10.2. Знайти синуси кутів між площиною, заданою загальним рівнянням, та координатними осями.

З-Н № 10.3. Знайти необхідні та достатні умови, яким повинні задовольняти кути ψ_1, ψ_2 і ψ_3 із задачі 10.

КЗ № 11. [8]. Площу паралелограма, обмеженого прямими

1)
$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}, \quad \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}, \quad \frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$$

та $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$ (побудованого на двох базисних векторах $\vec{e}_2 = 0;1;0$ і $\vec{e}_3 = 0;0;1$) можна обчислити за формулою $S_1=\sqrt{g_{11}}$; (11.1)

2)
$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}, \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{0}, \quad \frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$$

та $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ – за формулою

$$S_2=\sqrt{g_{22}}; \quad (11.2)$$

3)
$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}, \quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{0}, \quad \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$$

та $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$ – за формулою

$$S_3=\sqrt{g_{33}}. \quad (11.3)$$

КЗ № 12. [8] (геометричний зміст визначника матриці Грама). Об'єм паралелепіпеда, обмеженого площинами $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ та $z=1$ можна обчислити за формулою

$$V=\sqrt{|G|}. \quad (12.1)$$

У якості задач дослідницького характеру можна запропонувати задачі:

1*. Знайти рівняння площин, які містять пряму, задану канонічним рівнянням, та утворюють даний гострий кут з площиною, заданою загальним рівнянням.

2*. Знайти рівняння площини, яка містить пряму, задану канонічним рівнянням, та відстоїть від даної точки на даній відстані.

Висновки. У представленій роботі запропоновано один із можливих підходів до формування професійної компетентності майбутніх викладачів математики на прикладі вивчення теми «метричні задачі на прямі та площини в просторі» шляхом її викладання в афінних координатах. Зокрема, наведено 12 ключових задач, 44 вправ-наслідків та 21 задач-наслідків теоретичного характеру, які (в певному розумінні) «повно» охоплюють метричні задачі «на пряму і площину в просторі» в афінних координатах. Зауважимо, що алгоритми до розв'язання зазначених задач в афінних координатах позбавлені необхідності в апелюванні до геометричної наочності. Більше того, їх без змін, проте з очевидними значними спрощеннями, доцільно і зручно використовувати при розв'язуванні цих задач в косокутних та прямокутних координатах. На думку авторів, цілком досяжним здається проведення досліджень, присвячених оберненим задачам – «на знаходження метричних коефіцієнтів».

Крім того, наведені розв'язки запропонованих задач (в загальному вигляді) доцільно використовувати як самостійний інструментарій (разом з результатами векторної алгебри в афінних координатах) для розв'язування метричних задач на многогранники з відомими довжинами ребер зі спільною вершиною та кутами між ними.

1. *Алания Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л.А.Алания, И.А.Дынников, В.М.Мануйлов; [под ред. Ю.М. Смирнова]. – [2-е изд.]. – М.: Логос, 2005. – 376 с.*
2. *Атанасян Л.С. Геометрія. Частина 1: Навчальний посібник для студентів фізмат факультетів педінститутів / Л.С.Атанасян – К.: Вища школа, 1976. – 456 с.*
3. *Бабич В.М. Збірник задач з аналітичної геометрії: навчальний посібник / В.М. Бабич, С.В. Білун, В.М. Журавльовта та ін.; [за ред. В.В. Кириченка]. – [вид. 3-є, переробл. та випр.]. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013. – 200 с.*
4. *Кадубовський О.А. Основні метричні задачі на прямі у площині в афінних координатах / О.А. Кадубовський, М.В. Романкевич // Зб. н. праць фіз.-мат. факультету ДДПУ. – 2013. – Вип. 3. – С. 154 – 177.*
5. *Ким Г.Д. Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи / Г.Д.Ким, Л.В.Крицков. – М.: Планета знаний, 2007. – Т. 1. – 469с.*
6. *Лосєва Н.М. Прикладна спрямованість навчання аналітичної геометрії як основа формування професійної компетентності викладача математики / Н.М.Лосєва, О.А.Ніколаєва // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2012. – Вип. 38. – С. 46–50.*
7. *Моденов П.С. Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. – М.: МГУ, 1969. – 699 с.*
8. *Моденов П.С. Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. – М.: Наука, 1976. – 384 с.*
9. *Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. – [4-е изд.]. – М.: Высшая школа, 1967. – 655 с.*
10. *Постников М.М. Аналитическая геометрия / М.М. Постников. – М.: Наука, 1973. – 384 с.*
11. *Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер – М.: Наука, 1964. – 336 с.*

Резюме. Кадубовский А.А., Чиркова Н.А. К ВОПРОСУ ОБ ИЗУЧЕНИИ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В АФФИННЫХ КООРДИНАТАХ. *В статье освещается авторский опыт формирования профессиональной компетентности будущего преподавателя математики на примере изучения темы «метрические задачи на прямую и плоскость в пространстве» путем ее изложения именно в аффинных координатах, в отличие от традиционного изложения в прямоугольных координатах.*

Ключевые слова: *профессиональная компетентность преподавателя, аффинная система координат в пространстве, матрица Грамма, метрические задачи на прямую и плоскость*

Abstract. **Kadubovsky A., Chirkova N. TO THE QUESTION OF STUDY ON THE PROBLEMS OF THE THEORY OF METRIC LINES AND PLANES IN AFFINE COORDINATES.** *The author's experience in the formation of professional competence of teachers at mathematics is highlighted in the example of the theme "metric problems on lines and planes in space" by its teaching in the affine coordinates, in spite of the traditional presentation in rectangular coordinates.*

The aim of the article includes the results interpretation of the author's separation and systematization of "core" tasks, their addition by the corollary facts exercises and corollary facts problems of theoretical implications, which would (in some sense) "fully" cover metric problems "on lines and planes in the space" namely in affine coordinates.

In this paper the 12 key tasks, 44 corollary facts exercises and 21 corollary facts problems of theoretical character are presented that are (in some sense) "fully" cover metric problem "on lines and planes in space" in affine coordinates. It should be noted that the algorithms of solving these problems in affine coordinates are almost depleted in necessity of appealing in a geometric visibility, that are *without changes (but with obvious significant simplification) should be expedient and convenient at solving these problems in the oblique and rectangular coordinates.*

Moreover, the presented solutions of proposed tasks (together with the results of vector algebra in affine coordinates) should be used as an independent tool for solving metric problems on polyhedron with known lengths of edges with a common vertex and angles between them.

Key words: *teacher's professional competence, the affine coordinate system in space, the Gram matrix, the metric problems on, lines and planes.*

References

1. Alania L.A. Problems in analytical geometry and linear algebra / L.A. Alanya, I.A. Dynnikov, V.M. Manuilov; [ed.Y.M. Smirnov]. – [2nd ed.]. – Moscow: Logos, 2005. – 376 p.

2. Atanasyan L.S. Geometry. Part 1: Tutorial for students of physical and math faculty in pedagogical institutes/ L.S. Atanasyan- K.: High school, 1976.-456p.

3. Babich V.M. Collector of problems: Tutorial/V.M. Babich, S.V. Bilun, V.M. Ghuravlev; [edited by V.V. Kirichenko].- [3rd edition remade and corrected].- Kamjanets-Podilskiy: Aksioma, 2013.-200 p.

4. Kadubovsky O.A. Main metric problems on lines in planes at affine coordinates/ O.A. Kadubovsky, M.V. Romankevich// Collector of scientific works of physical and math faculty at DSPU.- 2013.- Edition 3.- p.154-177.

5. Kim G. D. Algebra and analytic geometry: Theorems and tasks /G.D. Kim, L.W. Kritskov. – M.: Knowledge Planet, 2007. – V. 1. – 469 p.

6. Loseva N.M. Applied learning direction analytical geometry as the basis for the formation of vocational teacher ability mathematics / N.M. Loseva, E.A. Nikolayeva // Didactics of mathematics: Problems and study: intern. collected science works – 2012. – No 38. – p. 46 – 50.

7. Modenov P.S. Analytic Geometry / P.S. Modenov. – Moscow: Moscow State University, 1969. – 699 p.

8. Modenov P.S. Collection tasks analytics geometries / P.S. Modenov, A.S. Parkhomenko. – M.: Science, 1976. – 384 p.

9. Mushelishvili N.I. Course analytics geometry / N.I. Mushelishvili. – [4 ed.]. – M.: Higher School, 1967. – 655 p.

10. Postnikov M.M. Analytical Geometry/ M.M. Postnikov.- M.:Science, 1973.-384 p.

11. Tsuberbiller O.N. Problems and exercises at analytical geometry/ O.N. Tsuberbiller- M.: Science, 1964.-336p.

Стаття представлена професором Г.В.Горром.

Надійшла до редакції 25.12.2013 р.

ДО ПИТАННЯ ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ ПРЯМИХ ПРОСТОРУ В КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

О.А. Кадубовський,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
А.В. Алдошина,
студентка,
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»,
м. Слов'янськ, УКРАЇНА,
e-mail: kadubovs@ukr.net,
e-mail: anastasiya.aldos@mail.ru

Висвітлюється авторський досвід формування у студентів-математиків педагогічних ВНЗ навичок узагальнення та конкретизації на прикладі вивчення теми «розташування прямої у просторі» шляхом змістового її наповнення питанням про класифікацію прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин декартової системи координат.

***Ключові слова**: узагальнення та конкретизація, класифікація прямих простору, координатна вісь, координатна площина, критерії.*

Постановка проблеми. Традиційно, вивчення та виклад теми «Пряма у просторі» супроводжується розглядом частинних випадків розташування прямої відносно фіксованої декартової системи координат (надалі – ДСК). Якісний та кількісний аналіз теоретичного і дидактичного матеріалу, який міститься в більшості розповсюджених та рекомендованих підручниках і збірниках задач, дозволяє констатувати наступне:

1) Задачі, які відносяться до суттєво різних положень прямої у просторі (за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин ДСК), здебільшого, вичерпуються розглядом лише тих випадків, коли пряма є паралельною (співпадає) до певної координатної осі або ж є паралельною (належить) до певної координатної площини [2, 4, 7, 8].

2) Прямим загального положення майже не приділяється увага. Винятком, частково позбавленим зазначеної вади, є наприклад збірники [2, 4, 7], в яких у загальному вигляді пропонуються й задачі на дослідження критеріїв взаємного розташування прямих і площин простору.

3) Загалом, в тому чи іншому вигляді, зустрічаються щонайбільше 85 із 133 суттєво різних (у зазначеному вище контексті) типів прямих. Проте сам факт типізації прямих, як правило, затушовується. Класифікація прямих простору за вказаною ознакою в явному вигляді до сьогодні залишалась не висвітленим питанням навіть в теоретичному аспекті.

Аналіз актуальних досліджень. Із дидактичною суттю загальних прийомів узагальнення і конкретизації та методикою формування їх в учнів на уроках стереометрії можна ознайомитися, наприклад, в [9]. Розумові прийоми, необхідні для активного засвоєння теми «Взаємне розміщення прямої і площини», докладно висвітлені в [4]. Крім того, в [4] наведено й основні способи (види) узагальнень, які характерні для процесу навчання аналітичної геометрії. Зокрема, *узагальнення за допомогою об'єднання двох чи декількох закономірностей в одну більш загальну закономірність*.

Узагальнення, що відповідають емпіричному і теоретичному рівням мислення, розглядались в дослідженнях С.Л. Рубінштейна і В.В. Давидова. Як зазначається в [4], традиційна методика навчання студентів розв'язувати задачі базується на використанні емпіричного узагальнення, недоліком якого є те, що при такому процесі обмежуються вивченням окремих явищ. Не розкриваються глибокі зв'язки між ними, зменшується роль логічного аналізу, все це стримує розвиток теоретичного мислення.

Метою статті *є висвітлення авторського досвіду формування навичок узагальнення, що відповідають як емпіричному так і теоретичному рівням мислення на прикладі класифікації прямих простору за вказаною вище ознакою.*

Виклад основного матеріалу. Пропонована класифікація прямих простору за вказаною вище ознакою представлена за допомогою наочної схеми 1 з подальшою деталізацією відносно введених позначень.

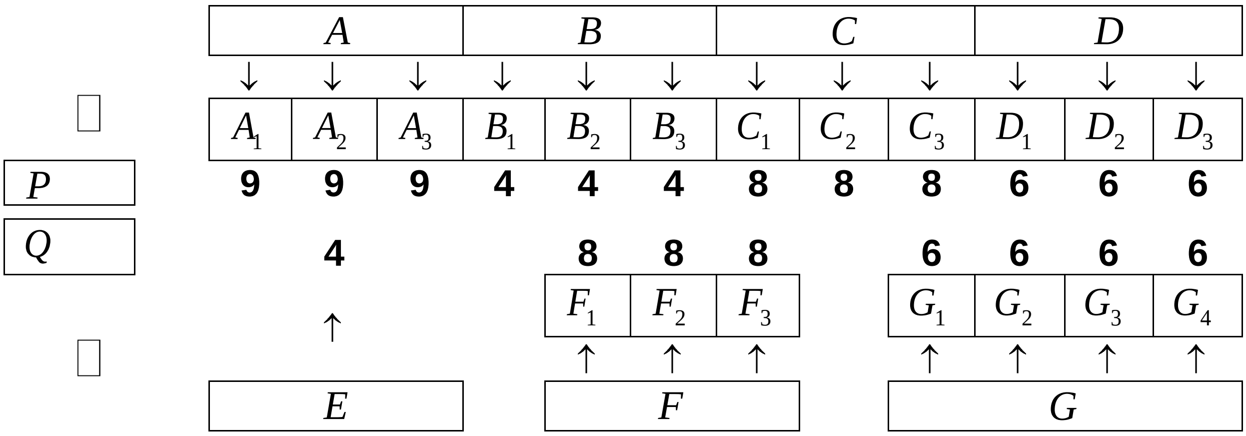


Схема 1. До класифікації прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин афінної системи координат

I. P – множина прямих, паралельних до координатних площин

1.1) A – клас прямих, паралельних до координатних осей: A_1, A_2, A_3 – підкласи прямих, що є паралельними до координатних осей OX, OY і OZ відповідно;

1.2) B – клас прямих, що перетинають дві півосі різних координатних осей: B_1, B_2, B_3 – підкласи прямих, що перетинають півосі осей OY і OZ, півосі осей OZ і OX та півосі осей OX і OY відповідно;

1.3) C – клас прямих, що паралельні одній з координатних площин, не є паралельними до відповідних координатних осей та не перетинають третю вісь: C_1, C_2, C_3 – підкласи прямих, що є паралельними до площин YOZ, ZOX та XOY відповідно;

1.4) D – клас прямих, що перетинають координатну піввісь (початок координат), є паралельними (належать) відповідній площині та не є паралельними до жодної з двох інших координатних осей: D_1, D_2, D_3 – підкласи прямих, що перетинають осі OX, OY і OZ відповідно.

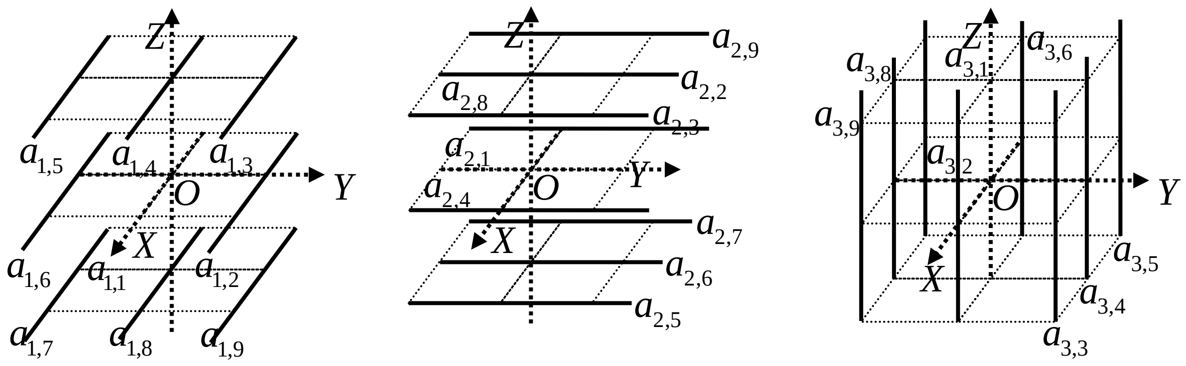
II. Q – множина прямих, що не є паралельними до жодної з координатних площин

2.1) E – клас прямих, що проходять через початок координат, не співпадають з жодною із координатних осей та не належать жодній з координатних площин;

2.2) F – клас прямих, що перетинають координатну піввісь та є мимобіжними до двох інших координатних осей: F_1, F_2, F_3 – підкласи прямих, що перетинають піввісь осей OX, OY і OZ відповідно;

2.3) G – клас прямих, що не є паралельними до жодної з координатних площин та не проходять через початок координат: G_1, G_2, G_3, G_4 – підкласи прямих, що перетинають чверть площини X_+OY_+, Y_+OX_-, X_-OY_- і Y_-OX_+ відповідно.

В подальшому без додаткових пояснень для існуючих типів прямих будуть наведені графічні ілюстрації та аналітичні умови, що визначають відповідне положення прямої відносно ДСК.



a *b* *c*

Рис. 1. Прямі з класу A

$a_{1,i}$ – представники 9 можливих типів прямих підкласу A_1 (що є паралельними до осі OX) – рис. 1 *a* ; $a_{2,i}$ – представники 9 можливих типів прямих підкласу A_2 (що є паралельними до осі OY) – рис. 1 *b* ; $a_{3,i}$ – представники 9 можливих типів прямих підкласу A_3 (що є паралельними до осі OZ) – рис. 1 *c* .

Нижче для кожного $i=\overline{1,...,9}$ наведено умови, за яких пряма $l:\frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{l_2}=\frac{z-z_0}{l_3}$ «є представником» $a_{1,i}$ відповідного типу прямих.

1) $l \cong a_{1,1} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 = z_0 = 0 \end{cases}$

2) $l \cong a_{1,2} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 > 0, z_0 = 0 \end{cases}$

3) $l \cong a_{1,3} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 > 0, z_0 > 0 \end{cases}$

4) $l \cong a_{1,4} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 = 0, z_0 > 0 \end{cases}$

5) $l \cong a_{1,5} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 < 0, z_0 > 0 \end{cases}$

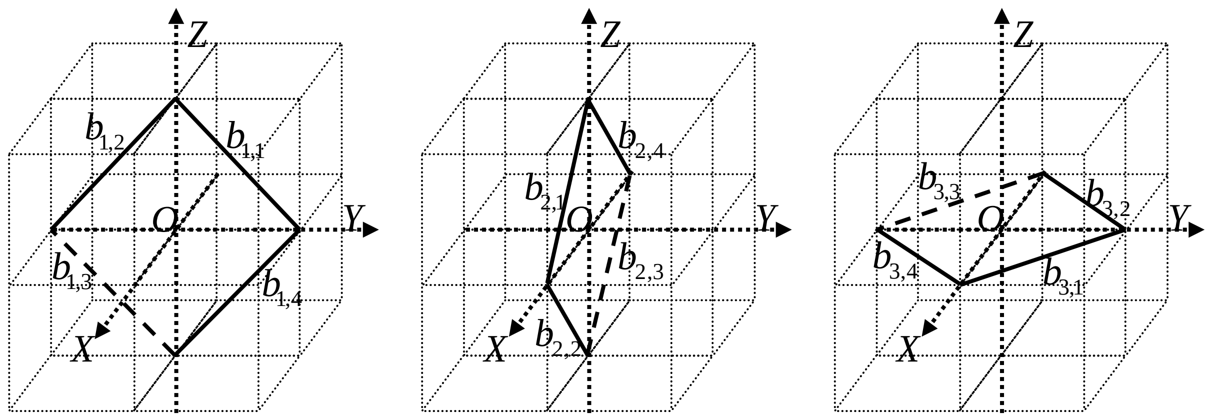
6) $l \cong a_{1,6} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 < 0, z_0 = 0 \end{cases}$

7) $l \cong a_{1,7} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 < 0, z_0 < 0 \end{cases}$

8) $l \cong a_{1,8} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 = 0, z_0 < 0 \end{cases}$

9) $l \cong a_{1,9} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 \neq 0, l_2 = l_3 = 0 \\ y_0 > 0, z_0 < 0 \end{cases}$

Встановлення аналітичних умов для відповідних типів прямих з підкласів A_2 і A_3 можна запропонувати студентам в якості неважкої вправи, яка з очевидними змінами повторює міркування для типів прямих з підкласу A_1.



a *b* *c*

Рис. 2. Прямі з класу B

$b_{1,i}$ – представники 4 можливих типів прямих підкласу B_1 (що перетинають піввісі осей OY і OZ) – рис. 2 a :

1) $b_{1,1}:\begin{cases} l_1 = 0, & l_2 \cdot l_3 < 0 \\ x_0 = 0, & z_0 > l_3/l_2\ \ y_0 \end{cases}$ 3) $b_{1,3}:\begin{cases} l_1 = 0, & l_2 \cdot l_3 < 0 \\ x_0 = 0, & z_0 < l_3/l_2\ \ y_0 \end{cases}$

2) $b_{1,2}:\begin{cases} l_1 = 0, & l_2 \cdot l_3 > 0 \\ x_0 = 0, & z_0 > l_3/l_2\ \ y_0 \end{cases}$ 4) $b_{1,4}:\begin{cases} l_1 = 0, & l_2 \cdot l_3 > 0 \\ x_0 = 0, & z_0 < l_3/l_2\ \ y_0 \end{cases}$

$b_{2,i}$ – представники 4 можливих типів прямих підкласу B_2 (що перетинають піввісі осей OZ і OX) – рис. 2 b :

1) $b_{2,1}:\begin{cases} l_2 = 0, & l_3 \cdot l_1 < 0 \\ y_0 = 0, & x_0 > l_1/l_3\ \ z_0 \end{cases}$ 3) $b_{2,3}:\begin{cases} l_2 = 0, & l_3 \cdot l_1 < 0 \\ y_0 = 0, & x_0 < l_1/l_3\ \ z_0 \end{cases}$

2) $b_{2,2}:\begin{cases} l_2 = 0, & l_3 \cdot l_1 > 0 \\ y_0 = 0, & x_0 > l_1/l_3\ \ z_0 \end{cases}$ 4) $b_{2,4}:\begin{cases} l_2 = 0, & l_3 \cdot l_1 > 0 \\ y_0 = 0, & x_0 < l_1/l_3\ \ z_0 \end{cases}$

$b_{3,i}$ – представники 4 можливих типів прямих підкласу B_3 (що перетинають піввісі осей OX і OY) – рис. 2 c :

1) $b_{3,1}:\begin{cases} l_3 = 0, & l_1 \cdot l_2 < 0 \\ z_0 = 0, & y_0 > l_2/l_1\ \ x_0 \end{cases}$ 3) $b_{3,3}:\begin{cases} l_3 = 0, & l_1 \cdot l_2 < 0 \\ z_0 = 0, & y_0 < l_2/l_1\ \ x_0 \end{cases}$

2) $b_{3,2}:\begin{cases} l_3 = 0, & l_1 \cdot l_2 > 0 \\ z_0 = 0, & y_0 > l_2/l_1\ \ x_0 \end{cases}$ 4) $b_{3,4}:\begin{cases} l_3 = 0, & l_1 \cdot l_2 > 0 \\ z_0 = 0, & y_0 < l_2/l_1\ \ x_0 \end{cases}$

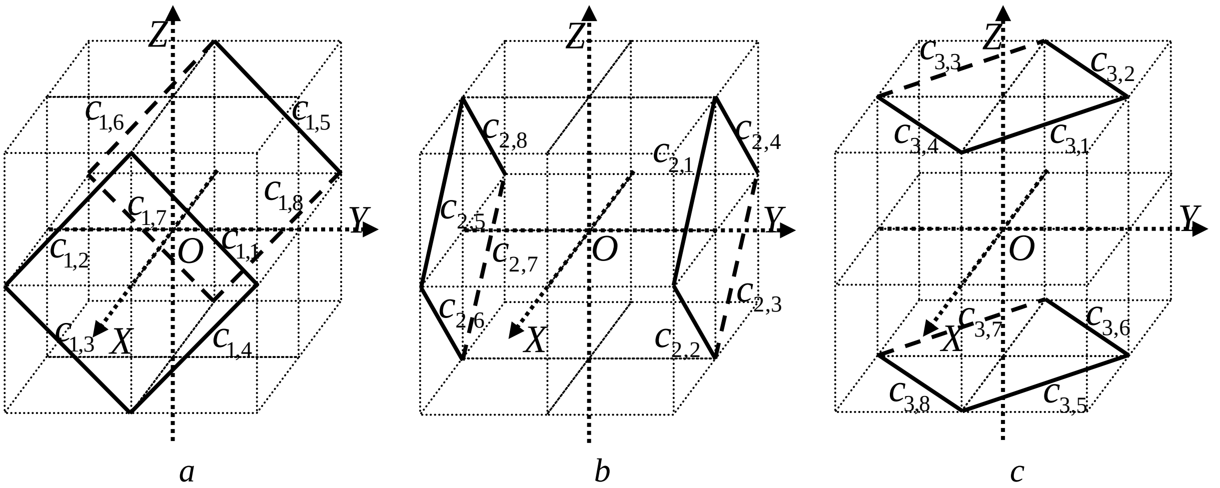


Рис. 3. Прямі з класу C

$c_{1,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу C_1 (що є паралельними до площини YOZ) – рис. 3 a :

1) $c_{1,1}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3<0 \\ x_0>0; z_0> \ l_3/l_2 \ \ y_0 \end{cases}$

2) $c_{1,2}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3>0 \\ x_0>0; z_0> \ l_3/l_2 \ \ y_0 \end{cases}$

3) $c_{1,3}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3<0 \\ x_0>0; z_0< \ l_3/l_2 \ \ y_0 \end{cases}$

4) $c_{1,4}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3>0 \\ x_0>0; z_0< \ l_3/l_2 \ \ y_0 \end{cases}$

5) $c_{1,5}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3<0 \\ x_0<0; z_0> \ l_3/l_2 \ \ y_0 \end{cases}$

6) $c_{1,6}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3>0 \\ x_0<0; z_0> \ l_3/l_2 \ \ y_0 \end{cases}$

7) $c_{1,7}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3<0 \\ x_0<0; z_0< \ l_3/l_2 \ \ y_0 \end{cases}$

8) $c_{1,8}:\begin{cases} l_1=0; l_2\cdot l_3>0 \\ x_0<0; z_0< \ l_3/l_2 \ \ y_0 \end{cases}$

$c_{2,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу C_2 (що є паралельними до площини ZOX) – рис. 3 b :

1) $c_{2,1}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1<0 \\ y_0>0; x_0> \ l_1/l_3 \ \ z_0 \end{cases}$ 2)

$c_{2,2}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1>0 \\ y_0>0; x_0> \ l_1/l_3 \ \ z_0 \end{cases}$ 3)

$c_{2,3}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1<0 \\ y_0>0; x_0< \ l_1/l_3 \ \ z_0 \end{cases}$

4) $c_{2,4}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1>0 \\ y_0>0; x_0< \ l_1/l_3 \ \ z_0 \end{cases}$ 5)

$c_{2,5}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1<0 \\ y_0<0; x_0> \ l_1/l_3 \ \ z_0 \end{cases}$ 6)

$c_{2,6}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1>0 \\ y_0<0; x_0> \ l_1/l_3 \ \ z_0 \end{cases}$

7) $c_{2,7}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1<0 \\ y_0<0; x_0< \ l_1/l_3 \ \ z_0 \end{cases}$ 8)

$c_{2,8}:\begin{cases} l_2=0; l_3\cdot l_1>0 \\ y_0<0; x_0< \ l_1/l_3 \ \ z_0 \end{cases}$

$c_{3,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу C_3 (що є паралельними до площини XOY) – рис. 3 c :

1) $c_{3,1}:\begin{cases} l_3=0; l_1\cdot l_2<0 \\ z_0>0; y_0> \ l_2/l_1 \ \ x_0 \end{cases}$

2) $c_{3,2}:\begin{cases} l_3=0; l_1\cdot l_2>0 \\ z_0>0; y_0> \ l_2/l_1 \ \ x_0 \end{cases}$

3) $c_{3,3}:\begin{cases} l_3 = 0; l_1 \cdot l_2 < 0 \\ z_0 > 0; y_0 < \ l_2/l_1 \ \ x_0 \end{cases}$

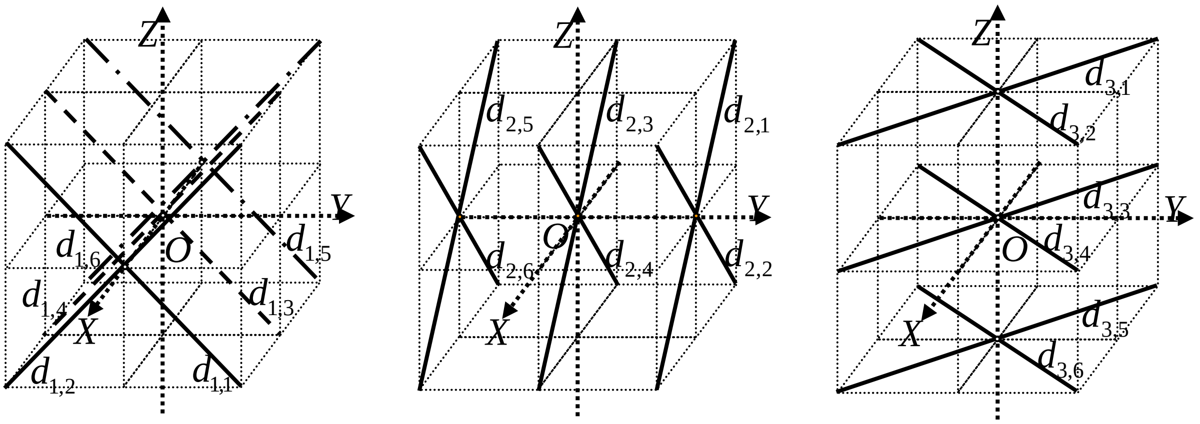
4) $c_{3,4}:\begin{cases} l_3 = 0; l_1 \cdot l_2 > 0 \\ z_0 > 0; y_0 < \ l_2/l_1 \ \ x_0 \end{cases}$

5) $c_{3,5}:\begin{cases} l_3 = 0; l_1 \cdot l_2 < 0 \\ z_0 < 0; y_0 > \ l_2/l_1 \ \ x_0 \end{cases}$

6) $c_{3,6}:\begin{cases} l_3 = 0; l_1 \cdot l_2 > 0 \\ z_0 < 0; y_0 > \ l_2/l_1 \ \ x_0 \end{cases}$

7) $c_{3,7}:\begin{cases} l_3 = 0; l_1 \cdot l_2 < 0 \\ z_0 < 0; y_0 < \ l_2/l_1 \ \ x_0 \end{cases}$

8) $c_{3,8}:\begin{cases} l_3 = 0; l_1 \cdot l_2 > 0 \\ z_0 < 0; y_0 < \ l_2/l_1 \ \ x_0 \end{cases}$



a *b* *c*

Рис. 4. Прямі з класу D

$d_{1,i}$ – представники 6 можливих типів прямих підкласу D_1 (що перетинають вісь OX) – рис. 4 a :

1) $d_{1,1}:\begin{cases} l_1 = 0, \quad l_2 \cdot l_3 < 0 \\ x_0 > 0, \quad l_2 z_0 = l_3 y_0 \end{cases}$

2) $d_{1,2}:\begin{cases} l_1 = 0, \quad l_2 \cdot l_3 > 0 \\ x_0 > 0, \quad l_2 z_0 = l_3 y_0 \end{cases}$

3) $d_{1,3}:\begin{cases} l_1 = 0, \quad l_2 \cdot l_3 < 0 \\ x_0 = 0, \quad l_2 z_0 = l_3 y_0 \end{cases}$

4) $d_{1,4}:\begin{cases} l_1 = 0, \quad l_2 \cdot l_3 > 0 \\ x_0 = 0, \quad l_2 z_0 = l_3 y_0 \end{cases}$

5) $d_{1,5}:\begin{cases} l_1 = 0, \quad l_2 \cdot l_3 < 0 \\ x_0 < 0, \quad l_2 z_0 = l_3 y_0 \end{cases}$

6) $d_{1,6}:\begin{cases} l_1 = 0, \quad l_2 \cdot l_3 > 0 \\ x_0 < 0, \quad l_2 z_0 = l_3 y_0 \end{cases}$

$d_{2,i}$ – представники 6 можливих типів прямих підкласу D_2 (що перетинають вісь OY) – рис. 4 b :

1) $d_{2,1}:\begin{cases} l_2 = 0, \quad l_3 \cdot l_1 < 0 \\ y_0 > 0, \quad l_3 x_0 = l_1 z_0 \end{cases}$

2) $d_{2,2}:\begin{cases} l_2 = 0, \quad l_3 \cdot l_1 > 0 \\ y_0 > 0, \quad l_3 x_0 = l_1 z_0 \end{cases}$

3) $d_{2,3}:\begin{cases} l_2 = 0, \quad l_3 \cdot l_1 < 0 \\ y_0 = 0, \quad l_3 x_0 = l_1 z_0 \end{cases}$

4) $d_{2,4}:\begin{cases} l_2 = 0, \quad l_3 \cdot l_1 > 0 \\ y_0 = 0, \quad l_3 x_0 = l_1 z_0 \end{cases}$

5) $d_{2,5}:\begin{cases} l_2 = 0, \quad l_3 \cdot l_1 < 0 \\ y_0 < 0, \quad l_3 x_0 = l_1 z_0 \end{cases}$

6) $d_{2,6}:\begin{cases} l_2 = 0, \quad l_3 \cdot l_1 > 0 \\ y_0 < 0, \quad l_3 x_0 = l_1 z_0 \end{cases}$

$d_{3,i}$ – представники 6 можливих типів прямих підкласу D_3 (що перетинають вісь OZ) – рис. 4 c :

1) $d_{3,1}:\begin{cases} l_3 = 0, \quad l_1 \cdot l_2 < 0 \\ z_0 > 0, \quad l_1 y_0 = l_2 x_0 \end{cases}$

2) $d_{3,2}:\begin{cases} l_3 = 0, \quad l_1 \cdot l_2 > 0 \\ z_0 > 0, \quad l_1 y_0 = l_2 x_0 \end{cases}$

3) $d_{3,3}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2<0 \\ z_0=0, & l_1y_0=l_2x_0 \end{cases}$

4) $d_{3,4}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2>0 \\ z_0=0, & l_1y_0=l_2x_0 \end{cases}$

5) $d_{3,5}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2<0 \\ z_0<0, & l_1y_0=l_2x_0 \end{cases}$

6) $d_{3,6}:\begin{cases} l_3=0, & l_1\cdot l_2>0 \\ z_0<0, & l_1y_0=l_2x_0 \end{cases}$

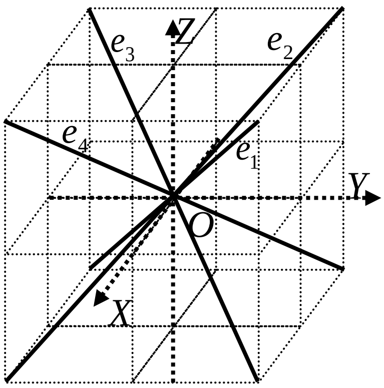


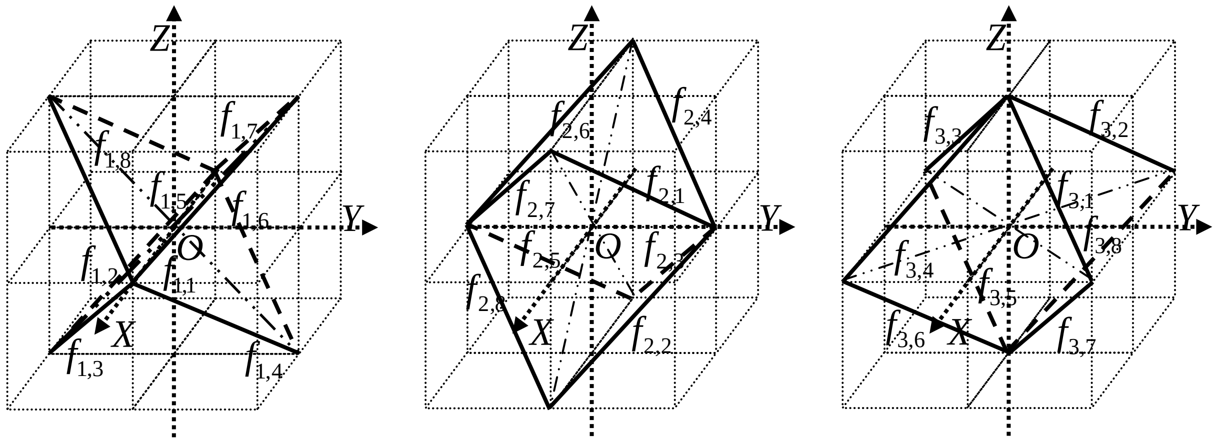
Рис. 5. Прямі з класу E

1) $e_1:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1 \\ x_0/l_1=y_0/l_2=z_0/l_3 \end{cases}$

2) $e_2:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1 \\ x_0/l_1=y_0/l_2=z_0/l_3 \end{cases}$

3) $e_3:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:-1 \\ x_0/l_1=y_0/l_2=z_0/l_3 \end{cases}$

4) $e_4:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1 \\ x_0/l_1=y_0/l_2=z_0/l_3 \end{cases}$



a *b* *c*

Рис. 6. Прямі з класу F

$f_{1,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу F_1 (що перетинають піввісь осі OX) – рис. 6 a :

1)

$f_{1,1}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1 \\ y_0\cdot z_0\ge 0; l_3y_0=l_2z_0; x_0> l_1/l_2\ \ y_0 \end{cases}$

5)

$f_{1,5}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1 \\ y_0\cdot z_0\ge 0; l_3y_0=l_2z_0; x_0< l_1/l_2\ \ y_0 \end{cases}$

2)

$f_{1,2}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:-1 \\ y_0\cdot z_0\le 0; l_3y_0=l_2z_0; x_0> l_1/l_2\ \ y_0 \end{cases}$

6)

$f_{1,6}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:-1 \\ y_0\cdot z_0\le 0; l_3y_0=l_2z_0; x_0< l_1/l_2\ \ y_0 \end{cases}$

3)

$f_{1,3}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1 \\ y_0\cdot z_0\ge 0; l_3y_0=l_2z_0; x_0> l_1/l_2\ \ y_0 \end{cases}$

7)

$f_{1,7}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1 \\ y_0\cdot z_0\ge 0; l_3y_0=l_2z_0; x_0< l_1/l_2\ \ y_0 \end{cases}$

4)

$f_{1,4}:\begin{cases} \operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1 \\ y_0\cdot z_0\le 0; l_3y_0=l_2z_0; x_0> l_1/l_2\ \ y_0 \end{cases}$

8)

$$f_{1,8}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1\\ y_0\cdot z_0\le 0; l_3 y_0 = l_2 z_0; x_0 < \ l_1/l_2 \ \ y_0\end{cases}$$

$f_{2,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу F_2 (що перетинають піввісь осі OY) – рис. 6 b :

1)

$$f_{2,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1\\ z_0\cdot x_0\ge 0; l_1 z_0 = l_3 x_0; y_0 > \ l_2/l_3 \ \ z_0\end{cases}$$

5)

$$f_{2,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1\\ z_0\cdot x_0\ge 0; l_1 z_0 = l_3 x_0; y_0 < \ l_2/l_3 \ \ z_0\end{cases}$$

2)

$$f_{2,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:1:1\\ z_0\cdot x_0\le 0; l_1 z_0 = l_3 x_0; y_0 > \ l_2/l_3 \ \ z_0\end{cases}$$

6)

$$f_{2,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:1:1\\ z_0\cdot x_0\le 0; l_1 z_0 = l_3 x_0; y_0 < \ l_2/l_3 \ \ z_0\end{cases}$$

3)

$$f_{2,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:1\\ z_0\cdot x_0\ge 0; l_1 z_0 = l_3 x_0; y_0 > \ l_2/l_3 \ \ z_0\end{cases}$$

7)

$$f_{2,7}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:1\\ z_0\cdot x_0\ge 0; l_1 z_0 = l_3 x_0; y_0 < \ l_2/l_3 \ \ z_0\end{cases}$$

4)

$$f_{2,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:-1\\ z_0\cdot x_0\le 0; l_1 z_0 = l_3 x_0; y_0 > \ l_2/l_3 \ \ z_0\end{cases}$$

8)

$$f_{2,8}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:-1\\ z_0\cdot x_0\le 0; l_1 z_0 = l_3 x_0; y_0 < \ l_2/l_3 \ \ z_0\end{cases}$$

$f_{3,i}$ – представники 8 можливих типів прямих підкласу F_3 (що перетинають піввісь осі OZ) – рис. 6 c :

1)

$$f_{3,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:-1\\ x_0\cdot y_0\ge 0; l_2 x_0 = l_1 y_0; z_0 > \ l_3/l_1 \ \ x_0\end{cases}$$

5)

$$f_{3,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:-1\\ x_0\cdot y_0\ge 0; l_2 x_0 = l_1 y_0; z_0 < \ l_3/l_1 \ \ x_0\end{cases}$$

2)

$$f_{3,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1\\ x_0\cdot y_0\le 0; l_2 x_0 = l_1 y_0; z_0 > \ l_3/l_1 \ \ x_0\end{cases}$$

6)

$$f_{3,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1\\ x_0\cdot y_0\le 0; l_2 x_0 = l_1 y_0; z_0 < \ l_3/l_1 \ \ x_0\end{cases}$$

3)

$$f_{3,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:1\\ x_0\cdot y_0\ge 0; l_2 x_0 = l_1 y_0; z_0 > \ l_3/l_1 \ \ x_0\end{cases}$$

7)

$$f_{3,7}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:1\\ x_0\cdot y_0\ge 0; l_2 x_0 = l_1 y_0; z_0 < \ l_3/l_1 \ \ x_0\end{cases}$$

4)

$$f_{3,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:1:1\\ x_0\cdot y_0\le 0; l_2 x_0 = l_1 y_0; z_0 > \ l_3/l_1 \ \ x_0\end{cases}$$

8)

$$f_{3,8}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:1:1\\ x_0\cdot y_0\le 0; l_2 x_0 = l_1 y_0; z_0 < \ l_3/l_1 \ \ x_0\end{cases}$$

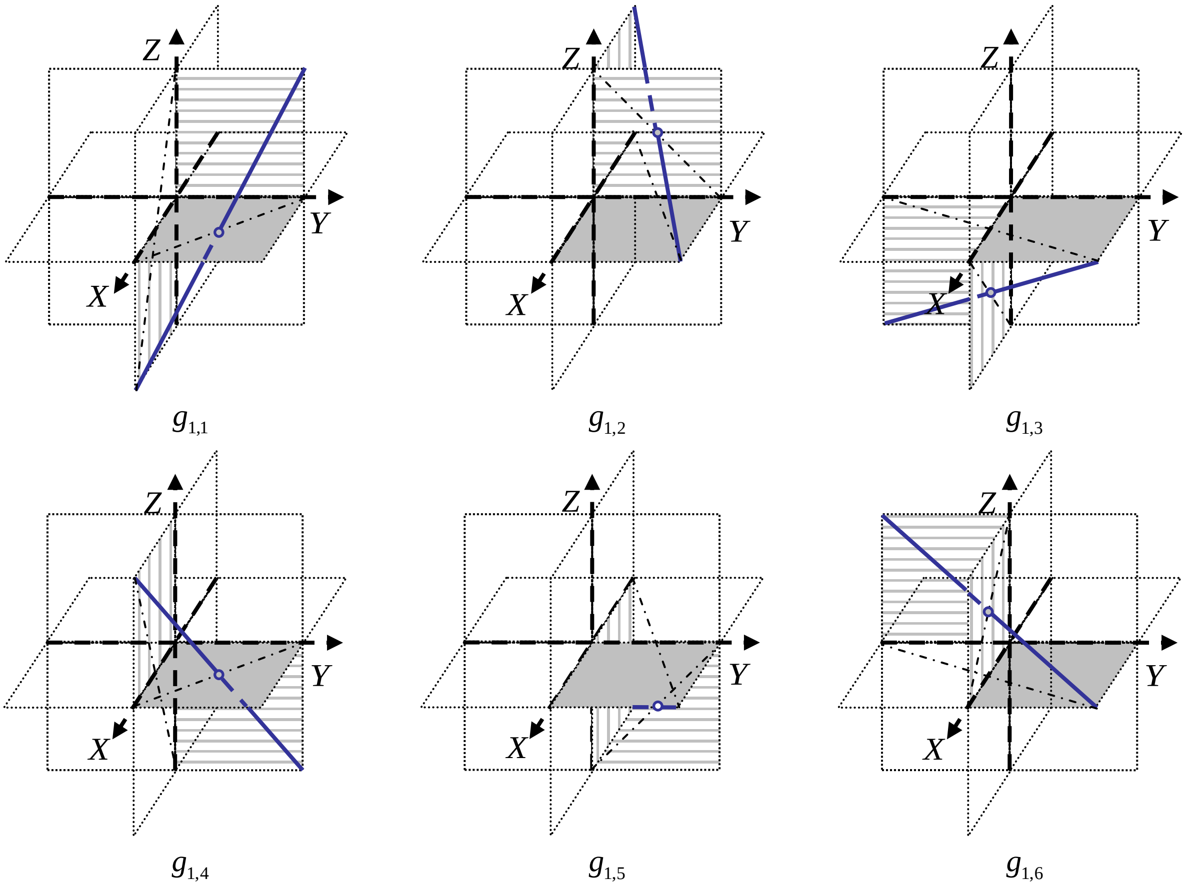


Рис. 8. $g_{1,i}$ – представники 6 можливих типів прямих підкласу G_1

(що перетинають чверть площину X_+OY_+)

1) $g_{1,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ x_0>l_1/l_3\ z_0,\quad y_0>l_2/l_3\ z_0\end{cases}$

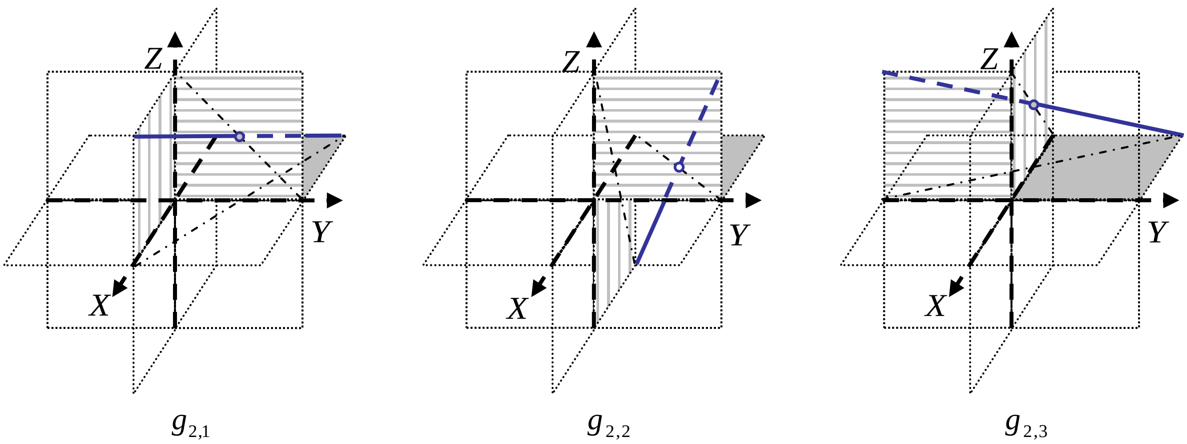
2) $g_{1,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:-1:1\\ z_0>l_3/l_1\ x_0,\quad y_0>l_2/l_1\ x_0\end{cases}$

3) $g_{1,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ x_0>l_1/l_2\ y_0,\quad z_0<l_3/l_2\ y_0\end{cases}$

4) $g_{1,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ x_0>l_1/l_3\ z_0,\quad y_0>l_2/l_3\ z_0\end{cases}$

5) $g_{1,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ y_0>l_2/l_1\ x_0,\quad z_0<l_3/l_1\ x_0\end{cases}$

6) $g_{1,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:-1:1\\ z_0>l_3/l_2\ y_0,\quad x_0>l_1/l_2\ y_0\end{cases}$



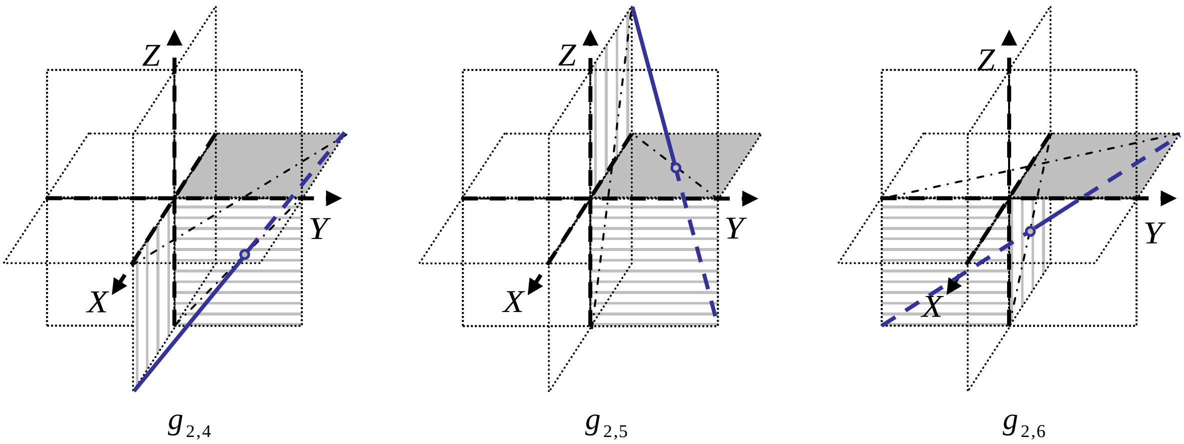


Рис. 9. $g_{2,i}$ – представники 6 можливих типів прямих підкласу G_2 (що перетинають чверть площину Y_+OX_-)

1) $g_{2,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1 \\ y_0 > l_2/l_1\ x_0, \quad z_0 > l_3/l_1\ x_0\end{cases}$

2) $g_{2,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:1:1 \\ y_0 > l_2/l_1\ x_0, \quad z_0 > l_3/l_1\ x_0\end{cases}$

3) $g_{2,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = 1:-1:1 \\ x_0 < l_1/l_2\ y_0, \quad z_0 > l_3/l_2\ y_0\end{cases}$

4) $g_{2,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:1:1 \\ y_0 > l_2/l_1\ x_0, \quad z_0 < l_3/l_1\ x_0\end{cases}$

5) $g_{2,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:-1:1 \\ x_0 < l_1/l_3\ z_0, \quad y_0 > l_2/l_3\ z_0\end{cases}$

6) $g_{2,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1 : \operatorname{sign} l_2 : \operatorname{sign} l_3 = -1:1:1 \\ x_0 < l_1/l_2\ y_0, \quad z_0 < l_3/l_2\ y_0\end{cases}$

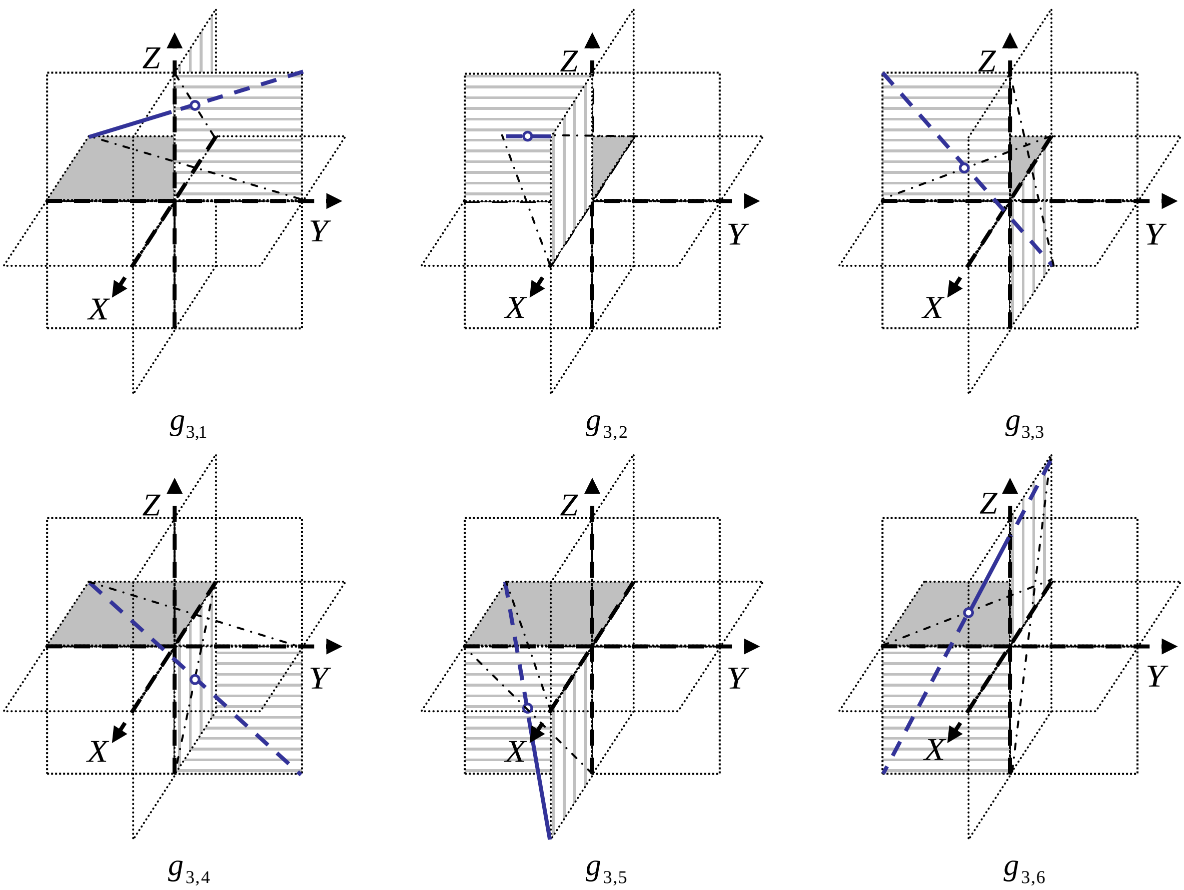


Рис. 10. $g_{3,i}$ – представники 6 можливих типів прямих підкласу G_3 (що перетинають чверть площину X_-OY_-)

1) $g_{3,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ x_0< l_1/l_2\ y_0,\quad z_0> l_3/l_2\ y_0\end{cases}$ 2) $g_{3,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ y_0< l_2/l_1\ x_0,\quad z_0> l_3/l_1\ x_0\end{cases}$

3) $g_{3,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ x_0< l_1/l_3\ z_0,\quad y_0< l_2/l_3\ z_0\end{cases}$ 4) $g_{3,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:-1\\ x_0< l_1/l_2\ y_0,\quad z_0< l_3/l_2\ y_0\end{cases}$

5) $g_{3,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:-1\\ y_0< l_2/l_1\ x_0,\quad z_0< l_3/l_1\ x_0\end{cases}$ 6) $g_{3,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ x_0< l_1/l_3\ z_0,\quad y_0< l_2/l_3\ z_0\end{cases}$

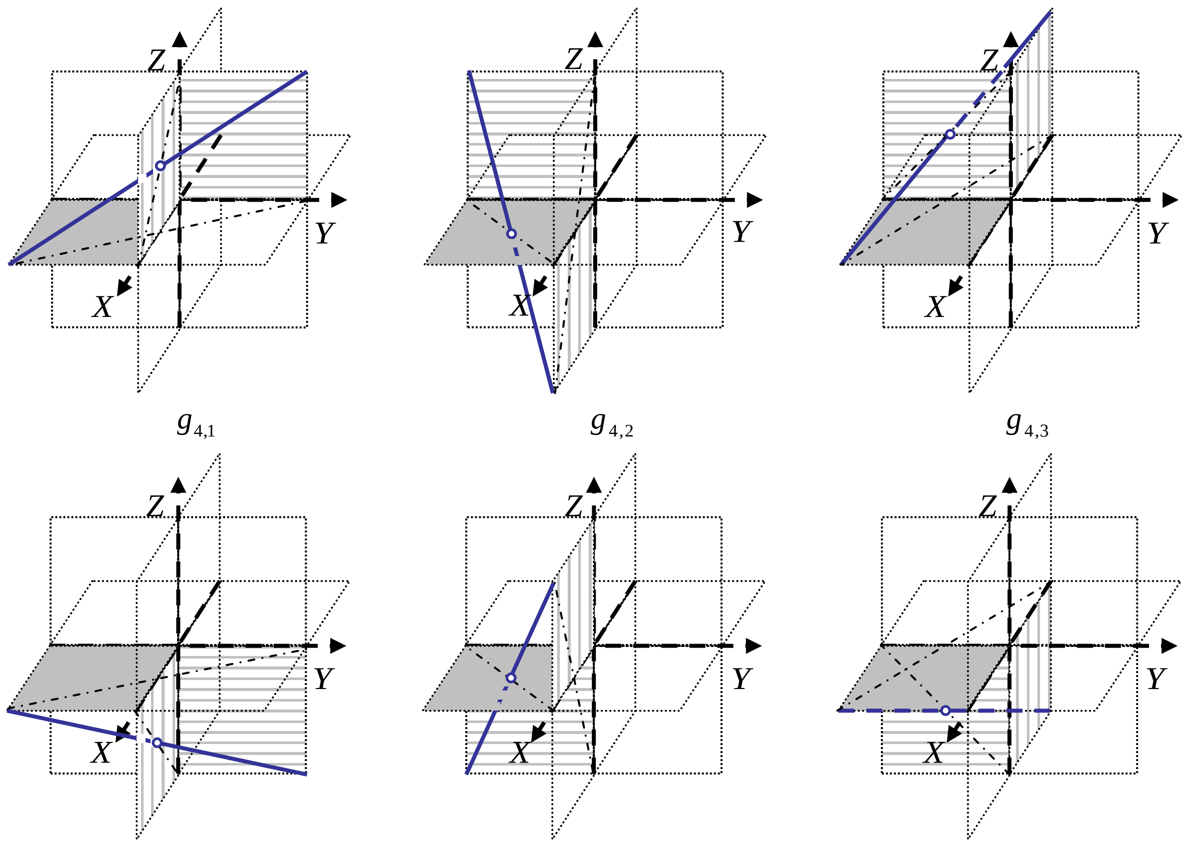


Рис. 11. $g_{4,i}$ – представники 6 можливих типів прямих підкласу G_4 (що перетинають чверть площину $Y_{-}OX_{+}$)

1) $g_{4,1}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ x_0> l_1/l_2\ y_0,\quad z_0> l_3/l_2\ y_0\end{cases}$ 2) $g_{4,2}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:-1:1\\ x_0> l_1/l_3\ z_0,\quad y_0< l_2/l_3\ z_0\end{cases}$

3) $g_{4,3}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=-1:1:1\\ y_0< l_2/l_1\ x_0,\quad z_0> l_3/l_1\ x_0\end{cases}$ 4) $g_{4,4}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ x_0> l_1/l_2\ y_0,\quad z_0< l_3/l_2\ y_0\end{cases}$

5) $g_{4,5}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:1:1\\ x_0> l_1/l_3\ z_0,\quad y_0< l_2/l_3\ z_0\end{cases}$ 6) $g_{4,6}:\begin{cases}\operatorname{sign} l_1:\operatorname{sign} l_2:\operatorname{sign} l_3=1:-1:1\\ y_0< l_2/l_1\ x_0,\quad z_0< l_3/l_1\ x_0\end{cases}$

Висновки. Авторський досвід упровадження запропонованого змістового наповнення дозволяє стверджувати, що залучення студентів до класифікації геометричних об'єктів є саме тим видом навчально-наукової діяльності, який дозволяє: розвивати відповідні практичні навички; сприяє свідомому засвоєнню умов і критеріїв геометричних властивостей-ознак, а не перетворюється у формальну їх перевірку шляхом підстановки вихідних даних у необхідні аналітичні рівності.

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры/ П.С.Александров. – М.: Наука, 1968. – 912 с.

2. Атанасян Л.С. Геометрія. Частина 1: Навчальний посібник для студентів фізмат факультетів педінститутів / Л.С.Атанасян. – К.: Вища школа, 1976, – 456 с.

3. Збірник задач з аналітичної геометрії / За редакцією В.В. Кириченка. – Камянець-Подільський: Аксіома, 2013. – 225 с.

4. Клочко В.І. Комп'ютерно-орієнтована методика узагальнення і систематизації знань та вмінь в процесі навчання студентів аналітичної геометрії: Монографія / В.І. Клочко, М.Б. Ковальчук – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 116 с.

5. Моденов П.С. Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. – М.: МГУ, 1969. – 699 с.

6. Моденов П.С. Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. – М.: Наука, 1976. – 384 с.

7. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. – [4-е изд.]. – М.: Высшая школа, 1967. – 655 с.

8. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия / А.В.Погорелов. – [3 изд.] – М., Наука, 1968, – 176 с.

9. Сморжевський Ю.Л. Узагальнення і конкретизація як прийоми евристичної діяльності та їх диференційоване формування в учнів на уроках стереометрії // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2004. – Вип. 22. – С. 121–126.

10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер – М.: Наука, 1964. – 336 с.

Резюме. **Кадубовский А.А., Алдошина А.В. К ВОПРОСУ О КЛАССИФИКАЦИИ ПРЯМЫХ ПРОСТРАНСТВА В КУРСЕ АНАЛИТЕЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.** *Освещается авторский опыт формирования у будущих учителей математики навыков обобщения и конкретизации на примере изучения темы «Прямая в пространстве» путем содержательного ее наполнения вопросом о классификации прямых пространства по признаку взаимного расположения относительно координатных осей и плоскостей декартовой системы координат.*

Ключевые слова*: обобщение и конкретизация, классификация прямых пространства, координатная ось, координатная плоскость, критерии.*

Abstract. **Kadubovsky A., Aldoshina A. ON THE CLASSIFICATION OF THE DIRECT SPACE LINES OF AWARE ANALYTIC GEOMETRY.** *Author highlights the experience of forming students - mathematicians pedagogical colleges skills generality and specificity for example, studying the topic "direct location in space" by filling it meaningful question of classification on the basis of lines of mutual arrangement relative to the coordinate axes and planes of the Cartesian coordinate system.*

The aim of the article is to highlight the author's experience developing skills generalization, as appropriate empirical and theoretical levels of thinking on the classification of lines of example on the above grounds.

In this article the authors first determined that there is exactly 133 essentially different types of lines on the specified attribute and shows the corresponding analytical conditions under which the straight line defined canonical equation is representative of one of these types of lines.

Experience of implementing the proposed semantic content suggests that attracting students to the classification of geometric objects is exactly the kind of educational - scientific activity, allows us to develop appropriate skills, promotes conscious appreciation of the conditions and criteria of geometric properties - signs, and does not turn into a formal test them by substituting source data necessary analytical equality.

Key words: *generalization and specification, classification of direct space coordinate axis coordinate plane, criteria.*

References

1. Aleksandrov P.S. Lectures on analytic geometry, supplemented by the necessary information from the algebra / P.S. Alexandrov. – Moscow: Science, 1968. – 912 p.

2. Atanasyan L.S. Geometry. Part 1: Textbook for Students of Physics Faculties Pedagogical Inst. / L.S. Atanasyan – K.: High School, 1976 – 456 p.

3. Collection tasks analytical geometries / edited by V.V. Kirichenko . – Kamyanets-Podilsky : Axiom , 2005 – 228 p .

4. Klochko V.I. Computer-oriented method of generalization and systematization of knowledge and skills in teaching students analytical geometry: Monograph / V.I.Klochko, M.B.Kovalchuk – Vinnitsa: NTB, 2009. – 116 p.

5. Modenov P.S. Analytic Geometry / P.S. Modenov. – Moscow: Moscow State University, 1969. – 699 p.

6. Modenov P.S. Collection tasks analytic geometry / P.S. Modenov, A.S. Parkhomenko. – M.: Science, 1976. – 384 p.

7. Mushelishvili N.I. Course analytic geometry / N.I. Mushelishvili. – [4-a ed.]. – M.: Higher School, 1967. – 655 p.

8. Pogorelov A.V. Analytic geometry / A.V.Pogorelov – [3rd ed.] – M., Science, 1968 – 176 p.

9. Smorzhevskij Y.L. Generalization and specification techniques like heuristic activity and differentiated development of students in the classroom geometry / / Didactics of mathematics: Problems i study: between collected sciences works – 2004 – № 22 – P. 121 – 126.

10. Tsuberbiller O.N. Tasks and exercises in analytic geometry / O.N. Tsuberbiller – Moscow: Science, 1964. – 336 p.

Стаття представлена професором Н.М. Лосєвою.
Надійшла до редакції 28.11..2013 р.

ІНТЕНСИФІКАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ ПІД ЧАС ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ЗАСОБАМИ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

І.М. Реутова,
канд. пед. наук,
ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»,
м. Маріуполь, УКРАЇНА,
e-mail: irinareutova@rambler.ru

Розглянуто шляхи інтенсифікації навчальної діяльності студентів технічних спеціальностей засобами інформаційно-комунікаційних технологій. Проаналізовано можливості та переваги використання різних видів програмних засобів на практичних заняттях з теорії ймовірностей та математичної статистики.

Ключові слова: *інтенсифікація навчальної діяльності, інформаційно-комунікаційні технології, навчання математичних дисциплін.*

Постановка проблеми. За умов стрімкого науково-технічного прогресу виникає потреба у формуванні нового типу мислення майбутніх фахівців інженерної галузі, яке б уможливлювало їх мобільність, здатність орієнтуватись у потоці наукової й технічної інформації, швидко розв'язувати професійні завдання. Тому сучасні роботодавці висувають все більш високі вимоги до професійно важливих якостей випускників технічних ВНЗ, серед яких зазначається вільне володіння ІКТ та вміння його застосування і модернізації. Формування цих якостей важливо починати вже під час навчання майбутніх інженерів математичним дисциплінам, зокрема теорії ймовірностей та математичної статистики. Одним із пріоритетних напрямів державної політики є розвиток інформаційного суспільства в Україні та впровадження новітніх інформаційно-комунікаційних технологій в усі сфери суспільного життя. А це в свою чергу вимагає комп'ютеризації процесу навчання, що уможливлює його оптимізацію, активізацію, індивідуалізацію та диференціацію.

Аналіз актуальних досліджень. Проблемам інтенсифікації навчального процесу ВНЗ, його оптимізації, активізації, індивідуалізації, диференціації, присвячені роботи педагогів та психологів, серед яких Ю.К Бабанський [1], О.А.Біда [2], В.В.Давидов [5], М.І.Лазарєв [8] та інші. Інтенсифікація процесу навчання математичних дисциплін цікавила таких науковців як К.В.Власенко [4], М.І.Жалдак [6], Т.С.Максимова [9], С.А.Раков [12], О.І.Скафа [14], Ю.В.Триус [16] та інших.

В роботах цих вчених висвітлюються можливості організації інтенсивної навчальної діяльності та важелі управління нею на основі ІКТ. Більшість вищевказаних дослідників одностайно наголошують на важливості застосування CAS, ППЗ, серед яких ЕДК, у ході навчання математичних дисциплін, але питання інтенсифікації процесу навчання теорії ймовірностей та випадкових процесів через впровадження в нього програмних засобів досі залишається розв'язаним не в повній мірі. Крім того, у працях науковців розглядаються шляхи формування інтенсивної навчальної діяльності у ході навчання математичних дисциплін, серед яких виокремлюється деякі питання застосування ІКТ з метою фундаменталізації та оптимізації процесу навчання. Цим питанням приділяли увагу такі вчені методисти, як К.В.Власенко [3], В.І.Клочко [7], В.А.Петрук [11], С.О.Семеріков [13], О.І.Скафа [14].

У контексті даного дослідження, цікавим є визначення інтенсифікації процесу навчання, що пропонує Д.Ш. Матрос [10]. Інтенсифікація ним визначається як запровадження в навчання нових методів і засобів, що забезпечують подальше підвищення якості підготовки спеціалістів на основі активізації навчання; більш повного врахування психолого-педагогічних закономірностей формування знань, умінь і навичок; урахування індивідуальних особливостей психіки учнів; використання психофізіологічних засобів підтримки працездатності учнів та викладачів, а також інших досягнень науково-технічного прогресу в галузі підготовки кадрів. Але в його дослідженні не приділяється достатньо уваги комп'ютеризації процесу навчання.

Підсумовуючи проведений аналіз наукових статей щодо організації інтенсивної навчальної діяльності та управління нею, можна зробити висновок, що вона передбачає:1) підвищення активності студента на заняттях, що вимагає більш досконалого підготування викладача; 2) застосування чіткого керівництва діяльністю студентів з боку викладачів на основі застосування евристичних прийомів; 3) укрупнення одиниць засвоєння; 4) збільшення числа задач і завдань, що виконуються під час як аудиторної, так і самостійної роботи; 5) застосування комп'ютерних засобів навчання, що максимально активізують дію студентів у конкретній ситуації; 6) застосування інтенсивного контролю, що сприяє здійсненню зворотнього зв'язку студента з викладачем.

Таким чином, розв'язання окреслених нами проблем ми вбачаємо у систематичному використанні ІКТ під час практичних занять з теорії ймовірностей та математичної статистики.

Мета статті *розглянути роль інформаційно-комунікаційних технологій в інтенсифікації навчальної діяльності студентів під час практичних занять з теорії ймовірностей та математичної статистики.*

Виклад основного матеріалу. О.І.Скафа [14] вказує, що використання ІКТ під час навчання уможливлює візуалізацію навчального матеріалу, сприйняття абстрактних математичних об'єктів і методів; забезпечує зворотній зв'язок між студентом та викладачем; сприяє прискоренню темпу навчання за рахунок використання комп'ютера для рутинних обчислювальних процедур, а також надає можливості контролю за результатами засвоєння.

Із цією думкою згодна і К.В.Власенко [4], яка вважає, що майбутній інженер мусить на власному досвіді переконатися в ефективності і доцільності застосування ІКТ у своїй навчальній та професійній діяльності. Тобто, завдання викладача полягає не тільки у навчанні майбутнього інженера використанню програмних засобів під час навчання математичних дисциплін, а й у розв'язуванні питання «що робить інженер, а що – комп'ютер» під час кожного заняття, кожної теми, розділу і, можливо, кожного завдання.

Крім того, нас цікавить думка М.І.Жалдака [6], який зазначає, що використання комп'ютера під час навчання математичних дисциплін надає можливість значно збільшити обсяг матеріалу, що засвоюється студентом, завдяки тому, що він подається в більш загальному, систематизованому вигляді, при чому не в статичному, а в динамічному. Він наголошує, що особливого значення при цьому набуває розвиток творчого мислення студента через реалізацію проблемної ситуації або постановку завдання та уможливлюється принцип розвивального навчання, коли замість збільшення обсягу матеріалу, що необхідно засвоїти студентові, увага приділяється формуванню вмінь використовувати цей матеріал. На це вказує і Ю.В.Триус [16], який розглядаючи можливості використання систем комп'ютерної математики зазначає, що їх треба розглядати як потужний інструмент комп'ютерної підтримки діяльності педагогів, студентів, інженерів, науковців. Адже, використання таких систем, з одного боку, не заперечує математичну інтуїцію студента та його творчу участь у розв'язуванні проблем, а, з іншого боку, – дозволяє економити час за рахунок автоматизації рутинних розрахунків. А це, на нашу думку, дає змогу розглянути більший обсяг матеріалу та доповнити коло завдань професійно орієнтованими.

Ми погоджуємось із думкою багатьох науковців, що ефективність використання інформаційних технологій залежить не лише від їхньої технічної досконалості, а, значною мірою, від існування досконалої методики їхнього застосування та змісту навчально-методичного забезпечення, що уможливлює формування інтенсивної навчальної діяльності майбутнього інженера під час навчання теорії ймовірностей та математичної статистики. Розглянемо можливості застосування різних ППЗ, CAS та ЕДК під час проведення практичних занять з теорії ймовірностей та математичної статистики.

Так, на думку О.В.Співаковського [15], ППЗ – не просто пакети прикладних програм для використання у процесі навчання різних предметів, ППЗ – це дидактичні засоби, призначенні для досягнення цілей навчання: формування знань, умінь і навичок, контролю якості, їх засвоєння тощо. Тому, під час навчання теорії ймовірностей та математичної статистики є доцільним використання ППЗ Gran 1. Вищевказаний ППЗ доцільно застосовувати для побудови полігонів чи гістограм, графіків функції розподілу ймовірностей, графіків функції щільності розподілу, для обчислення числових характеристик вибірки, тощо. Характеризуючи ППЗ Gran 1, О.І.Скафа [14] зазначає, що його використання сприяє формуванню у студентів таких евристичних умінь, як спостереження явищ у плані логічних та математичних категорій; аналіз фактів; виділення об'єктів, важливих для пошуку розв'язання задачі; висунення різноманітних гіпотез з обґрунтуванням їх можливості; передбачення результатів. Таким чином, педагогічні переваги доповнення традиційних засобів навчання використанням ППЗ Gran 1 є очевидними.

Для розв'язування технічних (рутинних) задач використовуються різноманітні CAS та системи автоматизації математичних обчислень, зокрема Reduce, Mathcad, Derive, Maple, Mathematica, Excel та інші. Особливий інтерес для нас представляють ті, що можуть бути застосовані під час навчання теорії ймовірностей та математичної статистики, як то наприклад Statistica, SYSTAT, TableCurve 2D, TableCurve 3D тощо. Але ці системи характеризуються виключно високим ступенем інтеграції. Розв'язання завдань в них вимагає лише введення вихідних даних і вибору режиму роботи. Після активації цього режиму студент одразу отримує відповідь, яка не демонструє проникнення в сутність завдання та не розкриває підходів, що було використано під час розв'язання. Тобто за допомогою цих систем можна розв'язати завдання не знаючи основ теорії ймовірностей та математичної статистики. Враховуючи це, ми пропонуємо застосування різних CAS під час навчання теорії ймовірностей та математичної статистики після того, як відбулося створення ймовірнісної моделі і студентам залишилося або виконати громіздкі розрахунки, або перевірити результат.

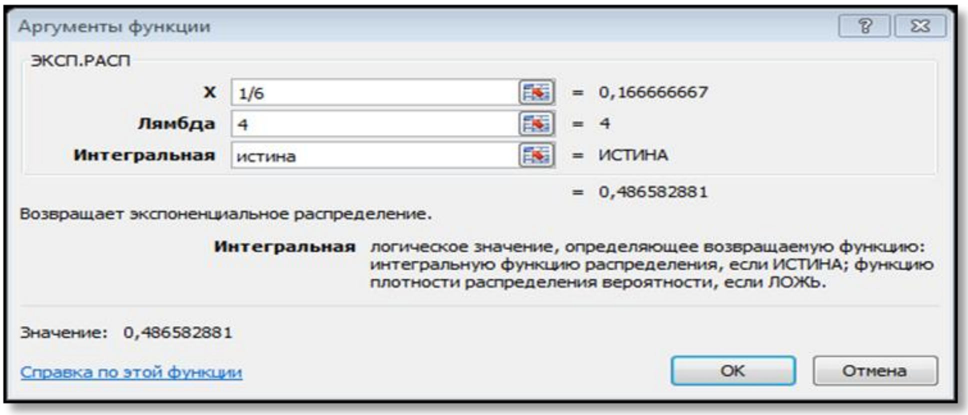
Ми вважаємо, що навчання теорії ймовірностей та математичної статистики під час практичних занять майбутніх інженерів має спиратися на програмні системи невисокого ступеня інтеграції, як то, наприклад, Mathcad чи Excel. У Mathcad та Excel широко представлено арсенал засобів для розв'язання задач теорії ймовірностей та математичної статистики, а саме наявність великої кількості відповідних вбудованих функцій. Крім того характерною рисою пакета Mathcad є використання звичних стандартних математичних позначань. Документ на екрані виглядає так само як звичайний математичний розрахунок для інженерних досліджень. Таким чином, педагогічні переваги доповнення традиційних засобів навчання використанням Excel також не викликають сумнівів. Так, наприклад, під час розв'язування завдання ми застосовуємо навчально-методичні інструкції, що сприяють усвідомленню роботи з програмним засобом.

Завдання: контрольний пункт перевіряє технічний стан автомобілів. Час між проходженнями машин контрольного пункту розподілений за показниковим законом $F(t)=1-e^{-4t}, (t>0)$, де час t – вимірюється у годинах. Знайдіть ймовірність того, що випадковий водій буде очікувати від 10 до 30 хвилин.

Навчально-методичні інструкції.

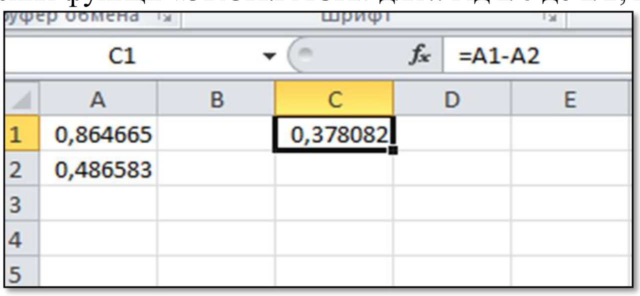
1. На панелі інструментів оберіть «Вставити функцію»;
2. У вікні, що з'явиться оберіть категорію «Статистичні» та функцію «ЭКСП.РАСП»;
3. Заповніть аргументи функції «ЭКСП.РАСП»;
4. Зафіксуйте отриманий результат.

1. Знаходиться значення функції «ЭКСП.РАСП» для *x = 1/6*, що дорівнює 0,486



2. Аналогічно знаходиться значення функції «ЭКСП.РАСП» для *x = 1/2,* що дорівнює 0,86.

3. Знаходиться значення функції «ЭКСП.РАСП» для *x* від *1/6* до *1/2*, що дорівнює 0,378 .



Нами передбачається аналогічне застосування CAS Mathcad під час проведення практичних занять з теорії ймовірностей та математичної статистики.

Крім того, з метою підтримання мотивації до створення власного навчального продукту діяльності під час практичних занять з теорії ймовірностей та математичної статистики, ми вважаємо, доцільним використання евристико-дидактичних конструкцій (ЕДК). О.І.Скафа, розробляючи методичну систему евристичного навчання математики, виділяє ЕДК як засіб формування евристичних вмінь в навчанні математики. Це пояснюється тим, що побудова ЕДК передбачає використання студентами різних евристичних прийомів.

Ми погоджуємось із думкою К.В.Власенко [3] про те, що використання ЕДК є необхідною умовою інтенсифікації навчального процесу під час навчання майбутніх інженерів математичних дисциплін, тому що ці програми підвищують активність і самостійність студентів у набутті й систематизації знань за максимально диференційованої допомоги з боку викладача.

Розглянемо приклади застосування вже існуючих ЕДК, створених під керівництвом доктора пед. наук О.І.Скафи, з метою інтенсифікації навчання теорії ймовірностей та математичної статистики під час практичних занять або самостійної роботи студентів.

Так, наприклад доцільним буде застосування евристичного тренажеру «Gauss», створеного Т.С.Максимовою [9], під час розв'язування систем алгебраїчних рівнянь у завданнях з теми «Процеси гибелі та розмноження». Розв'язання таких завдань передбачає складання системи алгебраїчних рівнянь, розв'язання якої може відбуватись методом Гаусса. Цей метод вивчався студентами у І семестрі навчання вищої математики, тому його актуалізацію доцільно організувати за допомогою вищезазначеного ЕДК. Під час роботи з програмою «Gauss» студент має можливість на кожному кроці розв'язання завдання здійснити різні перетворення матриці системи запропоновані програмою. Обрання якоїсь з гілок розв'язання (перетворення матриці) відбувається в порядку переваги, що за словами Т.С.Максимової [9], створює умови для підвищення мотивації навчання. Використання в навчанні студентів даної програми сприяє усвідомленню механізму роботи з методом Гаусса та зміцненню комплексних міжпредметних зв'язків.

Висновки. Підсумовуючи вищезазначене, можна зробити висновок, що використання математичних пакетів для створення різних форм інформаційної підтримки навчання майбутніх інженерів теорії ймовірностей та математичної статистики є потужним інструментом для реалізації діяльнісного підходу в процесі навчання вищої математики, формування евристичних прийомів евристичної діяльності, управління самостійною діяльністю студентів, що забезпечує інтенсифікацію навчальної діяльності студентів та ґрунтовну математичну підготовку майбутніх інженерів.

1. *Бабанский Ю.К. Интенсификация процесса обучения / Ю.К. Бабанский. – М.: Знание, 1987. – 78 с.*

2. *Біда О.А. Сучасні тенденції в організації самостійної роботи студентів ВНЗ [Електронний ресурс]: е-журнал «Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку» / О.А.Біда, О.П.Савченко. – Вип. 2. – 2010. – Режим доступу: http://intellect–invest.org.ua/ukr / pedagog_editions_e-magazine _pedagogical _science _vypuski _n2_2010 _st_14/*

3. *Власенко К.В. Категорії дидактичних засобів формування мотивації інтенсивної навчальної діяльності студентів інженерно–машинобудівних спеціальностей / К.В.Власенко // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2009. – Вип. 31. – С. 16–23.*

4. *Власенко К.В. Теоретико-методичні засади навчання вищої математики майбутніх інженерів-машинобудівників з використанням інформаційних технологій: дис…докт. пед. наук: 13.00.02 «Теорія і методика навчання (математика)»/ Катерина Володимирівна Власенко; Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького. – Черкаси, 2011. – 585 с.*

5. *Давыдов В.В. Деятельностная теория мышления / В.В.Давыдов. – М.: Научный мир, 2005. – 240 с.*

6. *Жалдак М.І. Математика (алгебра і початкі аналізу) з комп'ютерною підтримкою / М.І.Жалдак, А.В.Грохольська, О.Б.Жильцов. – К.: МАУП, 2003.– 304 с.*

7. *Клочко В.І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі: дис... д-ра пед. наук: 13.00.02 «Теорія та методика навчання математики» / Віталій Іванович Клочко; НПУ ім. М.П.Драгоманова. – Вінниця, 1998. – 396 с.*

8. *Лазарєв М.І. Полісистемне моделювання змісту технологій навчання загальноінженерних дисциплін: Монографія / М.І.Лазарєв. – Харків: Вид-во Нац. фармацевтичного університету, 2007. – 355 с.*

9. *Максимова Т.С. Методика формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності студентів вищих технічних навчальних закладів на практичних заняттях з вищої математики: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 «Теорія і методика навчання математики» / Т.С. Максимова; НПУ ім. М.П. Драгоманова. – К., 2006. – 285 с.*

10. Матрос Д. Ш. Управление качеством образования на основе новых информационных технологий и образовательного мониторинга / Д.Ш. Матрос, Д.М. Полев, Н.Н. Мельникова. – М. : Педагогическое общество России, 1999. – 96 с.

11. Петрук В. А. Теоретико-методичні засади формування базових професійних компетенцій у майбутніх фахівців технічних спеціальностей : дис... докт.пед. наук : 13.00.04 «Теорія і методика професійної освіти» / Віра Андріївна Петрук ; Вінницький національний технічний ун-т. – Вінниця, 2008. – 519 с.

12. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія / С.А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.

13. Семеріков С. О. Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі : Монографія / С. О. Семеріков; науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг: Мінерал; К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – 340 с.

14. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография / Е.И.Скафа. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.

15. Співаковський О.В. Теоретико-методичні основи навчання вищої математики майбутніх вчителів математики з використанням інформаційних технологій: дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 «Теорія і методика навчання (математика)» / Олександр Володимирович Співаковський; Національний педагогічний ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Київ, 2003. – 535 с.

16. Триус Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики: Монографія / Триус Ю. В. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 400 с.

Резюме. **Реутова И.Н. ИНТЕНСИФИКАЦИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ.** *Рассмотрены пути интенсификации учебной деятельности студентов технических специальностей средствами информационно-коммуникационных технологий. Проанализированы возможности и преимущества использования различных видов программных средств на практических занятиях по теории вероятностей и математической статистике.*

Ключевые слова: *интенсификация учебной деятельности, информационно-коммуникационные технологии, обучение математическим дисциплинам.*

Abstract. **Reutova I. INTENSIFICATION OF EDUCATIONAL ACTIVITY OF STUDENTS ON A PRACTICAL TRAINING ON PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS**. *Based on the analysis of scientific papers highlighted features of intensive training activities and management. The ways of intensification of educational activity of students of technical specialties by means of information and communication technologies are studied. The expediency of application in practical classes on the theory of probability and mathematical statistics of educational software, CAS, packages Mathcad, Excel and heuristic – didactic designs is proved. It is noted that the use of information and communication technologies to optimize study time by automating routine calculations. Emphasizes that the task of the teacher is not only in the formation of the ability to use software, but also the formation of ability to assess the feasibility and effectiveness of their use. It is shown that the use of mathematical packages for creating informational support in training of future engineers is a powerful tool for the implementation of the activity approach, forming methods of heuristic activity, management of independent activing of students, provides an intensification of training and thorough training of future engineers.*

Key words: *intensification of educational activity, information and communication technologies, training in mathematics*

References

1. Babansky Y. Intensification of the process of learning / Y. Babanskii. – Moscow: Knowledge, 1987. – 78 p.

2. Bida O. Recent trends in the organization of independent work of university students [electronic resource]: e-journal "Teaching science: history, theory, practice and trends" / O.Bida, O.Savchenko. – Issue #2. – 2010. – Mode of access: http://intellect–invest.org.ua/ukr / pedagog_editions_e-magazine _pedagogical _science _vypuski _n2_2010 _st_14/

3. Vlasenko K.Categories didactic tools for building motivation intensive training of students of engineering and engineering specialties / K. Vlasenko / / Didactics of mathematics: Problems and Investigations: International collection of scientific works. - Donetsk: DonNU, 2009. – Issue #.31. – P. 16-23.

4. Vlasenko K.V. Theoretical and methodological foundations of higher mathematics education of future engineers and machine builders using information technology: dis ... Dr. ped. sciences: 13.00.02 "Theory and Methods of Education (Mathematics)" / K. Vlasenko; Cherkasy National University by B.Khmelnitsky. – Cherkasy, 2011. – 585 p.

5. Davydov V. Activity theory thinking / V.Davydov – Scientific World, 2005. – 240p.

6. Zhaldak M. Mathematics (Algebra and initial analysis) of computer support / M.Zhaldak, A.Grokholsky, A.Zhiltcov. – K.: IAPM, 2003. – 304 p.

7. Klochko V. New information technology teaching mathematics in a technical high school: dis ... Dr. ped. sciences: 13.00.02 "Theory and Methods of Teaching Mathematics" / V. Klochko; NPU by M. Dragomanov. – Vinnitsa, 1998. – 396 p.

8. Lazarev M. Polisystem content modeling technology training general engineering disciplines: Monograph / M. Lazarev. – Kharkov: Publishing house Nat. Pharmaceutical University, 2007. – 355 p.

9. Maksymova T.S. Methodic of forming of professionally-directional heuristic activity of students of technical higher educational institutions on practical studies in higher mathematics: dis. …can.ped. sciences: 13.00.02 «Theory and methods of teaching mathematics». – NPU by M.P.Dragomanov. – Kyiv, 2006. – 285 p.

10. Matros D. Quality management education based on new information technologies and educational monitoring / D.Matros, D.Polev, N.Melnikov. – Moscow: Pedagogical Society of Russia, 1999. – 96 p.

11. Petruk V. Theoretical and methodological basis for the formation of basic professional competence of future professionals specializing in Engineering: dis ... dr.ped. sciences: 13.00.04 "Theory and Methods of Professional Education" / V. Petruk; Vinnytsia National Technical University. – Vinnitsa, 2008. – 519 p.

12. Rakov S. mathematical education: a competency based approach using ICT: Monograph / S. Rakov. – Kharkiv.: Fact, 2005. – 360 p.

13. Semerikov S. fundamentalization informatychnyh learning courses in higher education: Monograph / S. Semerikov; scientific editor Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine, doctor of sciences, professor M. Zhaldak. – Krivoy Rog: Mineral; K.: NPU by M. Drahomanov, 2009. – 340 p.

14. Skafa O. Heuristic learning of mathematics: the theory, methodology, technology. Monograph / O Skafa. – Donetsk: DonNU, 2004. – 439 p.

15. Spivakovsky A. Theoretical and Methodological Foundations of Mathematics teaching future math teachers using information technology: dis. ... Dr. ped. sciences: 13.00.02 "Theory and Methods of Education (Mathematics)" / A.Spivakovsky; NPU by Drahomanova. – Kyiv, 2003. – 535 p.

16. Trius Y. Computer-oriented teaching of mathematics learning: Monograph / Y. Trius. – Cherkasy: Brama-Ukraine, 2005. – 400 p.

Стаття представлена професором О.І. Скафою.
Надійшла до редакції 27.02.2014 р.

ОКРЕМІ АСПЕКТИ ІНТЕГРАЦІЇ МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТА ФАХОВИХ ДИСЦИПЛІН

Ю.М.Ткач,
канд. педагог. наук, доцент,
Чернігівський національний технологічний університет,
м. Чернігів, УКРАЇНА,
e-mail:tkachym@mail.ru

Висвітлено окремі аспекти інтеграції математики, інформаційно-комунікаційних технологій та фахових дисциплін. Зазначено, що для того щоб досягти високого освітнього рівня майбутніх фахівців у галузі економіки треба модернізувати математичну освіти. Одним із шляхів її забезпечення має стати інтеграція математики, фахових дисциплін та інформаційно-комунікаційних технологій. Наведено приклад інтеграції математики, ІКТ та однієї зі спеціальних дисциплін майбутніх економістів. Зроблено висновок про те, що у випадку застосування запропонованих нами прийомів у навчанні математики у студентів формується стійкий інтерес до вивчення дисципліни, з'являється внутрішня мотивація до навчання в цілому.

Ключові слова: *інтеграція, математика, інформаційно-комунікаційні технології, фахові дисципліни.*

Постановка проблеми. В умовах розвитку вищої школи України економічна освіта також повинна трансформуватись. У першу чергу треба змінити вимоги до підготовки студента. Майбутній фахівець в галузі економіки повинен під час навчання у вищому навчальному закладі набути таких компетентностей, які нададуть йому можливість професійно керувати підприємством (або фірмою), створювати та ефективно вести власний бізнес, приймати рішення в швидкоплинних умовах на основі цілісного сприйняття економічних явищ та процесів. Разом з тим, сучасний період розвитку суспільства характеризується чисельними інтеграційними процесами в економічній, інформаційній, культурній та інших сферах життя людини. Пожвавлення цих процесів повинно відбувається і в освітній сфері.

У процесі навчання у вищому навчальному закладі майбутні фахівців у галузі економіки вивчають досить широкий перелік навчальних дисциплін. Розширення масштабів та поглиблення наукового пізнання, що спостерігаються у навчальних програмах, супроводжується посиленням роз'єднаності і ослабленням зв'язків між дисциплінами. Це в свою чергу може призвести до зниження ефективності пізнавального процесу та якості підготовки студентів, у тому числі економічних спеціальностей. У той же час вимоги до рівня підготовки майбутніх фахівців, які висуваються державою, підвищуються. Таким чином, у навчальному процесі повинен відбуватись процес інтеграції між дисциплінами фундаментальної та фахової підготовки, мають бути визначені спільності у методичному та методологічному плані підготовки з кожної окремої дисципліни та розкриті цілісність знань та вмінь на основі інтегративного підходу. Не виняток і математична підготовка студентів економічних спеціальностей.

Нині економіці України особливо необхідні висококваліфіковані фахівці економічної галузі здатні працювати самостійно, творчо, активно, зацікавлено, креативно. Важливим у цьому плані є формування у студентів логічного, алгоритмічного та економічного мислення, а також прагнення до самоаналізу та аналізу діяльності інших.

Оскільки однією із фундаментальних дисциплін для студентів економічних спеціальностей вищого навчального закладу є вища математика, то передусім проблема інтеграції має розв'язуватись у процесі навчання вищої математики.

Про значущість проблеми інтеграції свідчить і те, що їй завжди приділялась увага видатними психологами, дидактами та методистами.

Аналіз актуальних досліджень. Проблемі інтеграції приділяли значну увагу Платон, Аристотель, Кант, Гегель, А.Ейнштейн, І.Г.Песталоцці, І.Ф.Гербарт, А.Дістервег, Дж.Дьюї, В.Кілпатрик та інші. К.Ушинський вперше (у XIX ст.) теоретично обґрунтував окремі аспекти інтеграції навчального змісту на основі встановлення міжпредметних зв'язків. Пізніше (на початку XX ст.) видатні вітчизняні та закордонні науковці, так як М.Гейне, П.Янковський, О.Александров, О.Кулініч, Д.Скуратівський та інші пропагували ідею інтеграції змісту освіти та пропонували її реалізовувати у вигляді міжпредметних комплексів. Із середини XX ст. І.Зверєв, В.Федорова, Н.Борисенко, А.Усова, В.Максимової, В.Ільченко, М.Іванчук та інші розробляли концепції навчання на інтегративній основі. Їх дослідження засвідчили, що інтеграція відображає міжпредметні зв'язки у змісті й методах навчання як гуманітарних так і природничо-математичних дисциплін.

Сучасні погляди на застосування інтеграційного підходу у навчанні природничих, технічних та математичних дисциплін викладені у роботах В.Андрущенка, П.Атутова, В.Бевз, В.Безрукової, М.Берулави, О.Білик, О.Булейко, Л.Васіної, С.Гончаренка, К.Гуза, Р.Гуревича, О.Дятлової, І.Зязюна, І.Козловської, Д.Коломийця, С.Клепка, О.Левчук, Ю.Мальованого, Р.Пастушенко, В.Разумовського, Ж.Сарани, Я.Собка, Н.Талалуєвої, С.Тищенка, В.Фоменка, Т.Якимович та ін. Науковцями доведено, що здійснення інтеграційного підходу у навчанні забезпечить формування цілісних, комплексних знань та вмінь у студентів, що сприятиме усвідомленню майбутнім фахівцем, у галузі економіки зокрема, глибинних взаємозв'язків структурних компонентів аналізованого явища.

Проблеми змісту вищої школи розкривали у своїх роботах В.Краєвський, В.Лєдньов, І.Лернер та ін. Питання навчання студентів економічних спеціальностей у ВНЗ досліджували Н.Ванжа, Г.Дутка, Л.Нічуговська, Г.Пастушок, О.Фомкіна та ін. Професійну спрямованість навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах нематематичного профілю досліджували С.Беденко, В.Клочко, Т.Крилова та ін.

Досить широко висвітлено питання впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес математики такими дослідниками як Ю.Горошко, М.Жалдак, О.Жильцов, В.Клочко, Т.Крамаренко, Г.Михалін, Н.Морзе, С.Раков, Ю.Рамський, О.Співаковський, П.Стеблянко, Ю.Триус та ін. Проте практика використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні вищої математики свідчить, що у більшості випадків викладачі їх застосовують лише для ілюстрації або унаочнення теоретичного матеріалу.

Метою статті *є висвітлення окремих аспектів інтеграції математики, інформаційно-комунікаційних технологій та фахових дисциплін.*

Виклад основного матеріалу. Основною тенденцією розвитку сучасної вищої освіти стає інтеграція різних способів пізнання оточуючого середовища, зокрема, під час навчання студентів економічних спеціальностей важливим є вивчення глибинних зв'язків між економічними процесами. Математика є потужним засобом пізнання у економічній галузі. Тому вона має значні можливості для підвищення рівня підготовки студентів економічних спеціальностей університетів.

Таким чином, з метою забезпечення високого освітнього рівня майбутніх фахівців у галузі економіки треба модернізувати математичну освіти. Одним із шляхів має стати інтеграція математики та фахових дисциплін із застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій.

Важливою складовою інформатизації освітнього процесу є накопичення досвіду використання ІКТ у навчальному процесі. Даному питанню присвячені наукові роботи М.І.Жалдака (система підготовки учителя до використання інформаційних технологій у навчальному процесі), А.В.Пенькова (використання нової інформаційної технології при викладанні математики в старших класах середньої школи), Ю.В.Горошка (вплив нової інформаційної технології на практичну значущість результатів навчання математики в старших класах середньої школи), Ю.І.Машбиця (психолого-педагогічні проблеми комп'ютерного навчання) та ін. Застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій навчання математики у вищій школі були присвячені докторська дисертація В.І.Клочка, С.А.Ракова, О.В.Співаковського, Ю.П.Тріуса. Усі вказані вище дослідження довели доцільність навчання студентів (учнів) на основі ІКТ не тільки математики, а й багатьох інших предметів. Отже, застосовування ІКТ під час навчання математики у ВНЗ є доцільним.

Наведемо приклад, інтеграції математики, ІКТ та однієї зі фахових дисциплін майбутніх економістів «Гроші та кредит».

Під час вивчення теми «Функції багатьох незалежних змінних» дисципліни «Вища математика» можна студентам запропонувати самостійно (тобто у поза аудиторний час) дослідити діяльність фондової біржі.

Зауважимо, що тема «Фондові біржі» буде вивчатись на третьому курсі в дисципліні «Гроші та кредит». Про це треба повідомити студентів, з метою їх мотивації та з тим, щоб вони усвідомили важливість та необхідність дослідження запропонованого питання у їх подальшому навчанні).

У ході дослідження питання діяльності фондової біржі у цілому та України зокрема, студенти мають зосередитись на індексах фондового ринку, які на думку провідних економістів є основними показниками стану фінансового ринку країни.

Фондові індекси були придумані для того, щоб інвестори бачили тенденції розвитку фондового ринку. На їх підставі експерти прогнозують подальшу поведінку ринку. Якщо економіка певної країни демонструє хороші темпи зростання, то інвестори всього світу намагаються купувати акції її компаній. Це викликає не тільки зростання цін цих акцій, а й зростання курсу національної валюти держави.

Фондовий індекс UX є вимірювачем доходу, який може бути отриманий власником конкретного набору акцій. Це числове представлення руху цін набору акцій щодо їх базового значення на початкову дату в минулому.

Таким чином, в Україні біржові індекси є важливим інструментарієм для вітчизняних та іноземних інвесторів у складі загальної фінансової інформації для прийняття ними інвестиційних рішень.

Одним із цих показників є Індекс Української біржі (надалі Індекс UX).

На сьогоднішній день Індекс UX розраховується на основі цін 10 акцій "блакитних фішок" України – акцій найбільш великих українських компаній, лідерів у своїх галузях (табл. 1).

Список цінних паперів, що використовуються для розрахунку індексу, визначається Індексним комітетом і складається не менше ніж з 10 найбільш ліквідних акцій українських компаній. Вибір акцій здійснюється на основі експертної оцінки серед цінних паперів , допущених до торгів на Біржі.

Експертна оцінка заснована на використанні такої інформації як: обсяг торгів, частота укладання угод, наявність попиту та пропозиції, величина спреду, капіталізація з урахуванням кількості акцій, що перебувають у вільному обігу, галузева приналежність емітентів цінних паперів. Також можуть враховуватися й інші фактори, що впливають на ліквідність акцій.

Таблиця 1

Перелік акцій «блакитних фішок»

Код	Назва	Кількість випущених акцій	Коефіцієнт, який враховує free-float (Wi)	Коефіцієнт, який обмежує вагу акцій (Ci)	Вага акції станом на 30.08.2013, %
ALMK	Алчевський металургійний комбінат, аз	25 775 254 803	4%	1	5,05%
AVDK	Авдіївський коксохімічний завод, аз	195 062 500	7,50%	1	6,04%
AZST	Азовсталь, аз	4 204 000 000	4%	1	13,53%
BAVL	Райффайзен Банк Аваль, аз	29 977 749 080	3,5%	1	12,97%
CEEN	Центренерго, аз	369 407 108	22%	0,3783798	20,00%
DOEN	Донбасенерго, аз	23 644 301	14%	1	9,87%
ENMZ	Єнакієвський металургійний завод, аз	10 550 688	9%	1	4,09%
MSICH	Мотор Січ, аз	2 077 990	24%	0,1819597	20,00%
UNAF	Укрнафта, аз	54 228 510	0,5%	1	3,90%
USCB	Укрсоцбанк, аз	18 140 137 719	1,5%	1	4,53%

При прийнятті рішення про склад Списку цінних паперів досліджується статистична інформація про торги за три попередні місяці.

Індекс UX розраховується як відношення сумарної ринкової капіталізації цінних паперів (MC_n), включених до списку для розрахунку індексу (далі - Список цінних паперів), до сумарної ринкової капіталізації цінних паперів на початкову дату (MC_1), помножене на значення індексу на початкову дату (I_1) і на поправочний коефіцієнт (Z_n):

$$I(\text{UX}) = Z_n * I_1 * \frac{MC_n}{MC_1}.$$

У свою чергу сума ринкової капіталізації акцій на поточний час в українських гривнях (MC_n) обчислюється за формулою:

$$\mathrm{MC_n} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{W_i} * \mathrm{P_i} * \mathrm{Q_i} * \mathrm{C_i},$$

де W_i – поправочний коефіцієнт, що враховує кількість і-их акцій у вільному обігу (коефіцієнт free-float),

C_i – коефіцієнт, який обмежує частку капіталізації і-ой акції (ваговий коефіцієнт);

Q_i – загальна кількість і-их акцій,

P_i – ціна і-тої акції в гривнях на момент розрахунку n,

N – число акцій у Списку цінних паперів.

Для запропонованих вище формул початкові значення наступні**:**

I_1 = 500 за підсумками торгів 26 березня 2009, MC_1 = 1243418850,

Z_n = 2,8480384 (дата останнього оновлення 18.03.2013).

Розкриття інформації про індекс і методика його розрахунку здійснюється на веб-сайті Біржі [2].

Для спрощення обчислення та економії часу студентам можна запропонувати використати ІКТ, наприклад табличний процесор Microsoft Excel. При цьому використовується значна кількість функцій, наприклад: =СУММ; =СРЗНАЧ; =СТЕПЕНЬ та ін. Для прогнозування та формулювання висновків, використовують графіки, побудовані на основі отриманих даних за допомогою функції – Мастер Диаграм.

Значення Індексу UX публікуються що п'ятнадцять секунд між 10:30 й 17:30 та транслюються усім учасникам торгів через біржовий термінал – прикладом якого є система QUIK (рис. 1). QUIK - це програмний комплекс для організації доступу до біржових і позабіржових торговельних систем в режимі реального часу [1]. На основі технічного аналізу, теорії Доу, яка описує поведінку цін акцій в час (аналіз акцій «блакитних фішок» України тощо), можна визначити перспективу руху значення Індексу Української біржі, що дасть змогу отримати певну картину, на базі якої робити певні економічні дії.

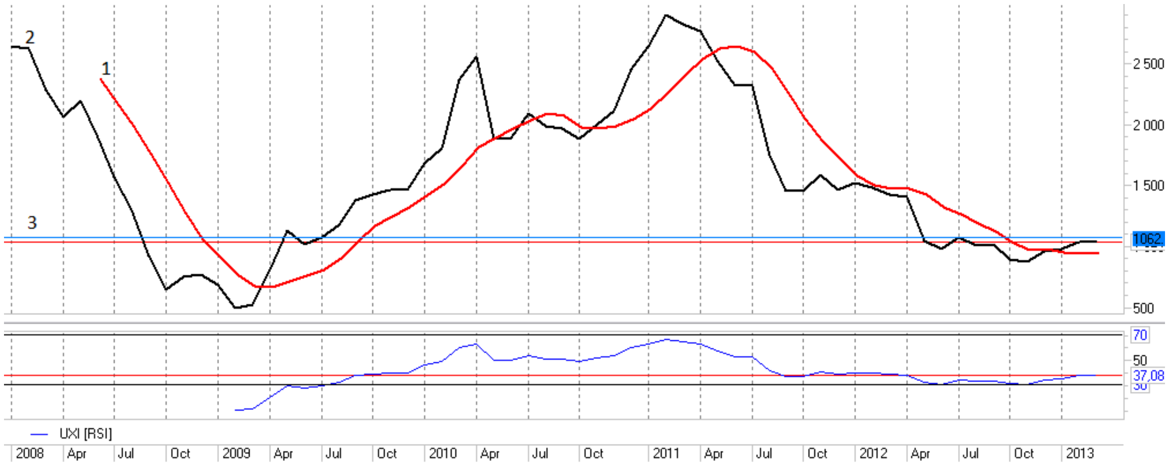


Рис.1 Графік динаміки Індексу (UX)

На графіку (рис.1) зображено динаміку Індеку UX, де вісь абсцис – проміжок часу, вісь ординат – ціна індексу. За графіком можна стверджувати, що починаючи з 2011 року і до жовтня 2012 року індекс рухався у спадному напрямку, не даючи значних імпульсів вгору. Зараз, як бачимо, рівень спаду призупинився, ціна Індексу на даний момент перевищує середні піврічні ціни (рис.1, лінія1). Може відбутися так званий «розворот ринку», якщо ціна (рис.1, лінія2) «проб'є» лінію опору із значенням 1062 (рис. 1, лінія 3).

Таким чином, з того, що було зазначено нами вище, студенти мають зробити висновок, що математика та інформаційно-комунікаційні технології досить активно використовуються в роботі фондової біржі. Вони є потужним засобом, без якого, на нашу думку, функціонування фондової біржі на сьогоднішній день не представляється можливим.

У подальшому у ході вивчення теми «Емпіричні формули» дисципліни «Вища математика» студентам варто запропонувати аналогічно дослідити питання доцільності включення до переліку «блакитних фішок» тих чи тих українських компаній. Подібні операції із використанням математичного апарату студентам треба буде здійснювати під час вивчення у подальшому таких фахових дисциплін як «Статистика» та «Економетрика».

Студентами були зібрані дані про значення цін акцій «блакитних фішок» України та значення ф’ючерса на індекс UX по закінченню торговельного дня на певну дату, які подані в таблиці 2.

Таблиця 2

Ціни акцій «блакитних фішок»

Дата (2013 рік)	Значення індексу UX	ALMK	AVDK	AZST	BAVL	CEEN	DOEN	ENMZ	MSICH	UNAF	USCB
04.01	1476,74	0,1073	6,236	1,378	0,134	8,624	28,91	71,04	2227	364,7	0,173
03.02	1555,36	0,109	6,161	1,518	0,138	9,254	31,91	72,38	2390	377,3	0,1906
06.03	1406,58	0,0969	5,408	1,395	0,1192	8,11	28,1	62,55	2344	326	0,1736
02.04	1428,25	0,0921	5,172	1,291	0,1227	8,048	28,82	67,85	2807	290,9	0,2169
15.05	1119,3	0,0636	3,595	0,955	0,1096	6,213	20,51	43,56	2471	213	0,1922
07.06	828,57	0,0475	2,19	0,659	0,0854	4,348	16,7	30,23	1861	164,8	0,1522
03.07	1144,19	0,0652	3,716	1,11	0,1036	6,8	22,73	43,77	2370	178	0,195
07.08	1095,02	0,0564	3,77	0,956	0,0988	7,1	24,15	37,88	2315	169,5	0,1707
05.09	952,27	0,0527	3,247	0,814	0,0878	6,157	18,14	31,69	2079	157,6	0,1564
04.10	949,72	0,054	3,36	0,799	0,0789	6,097	18,52	34,52	2140	149	0,1646
12.11	850,21	0,0471	2,865	0,642	0,0676	5,6	18,2	38,7	1920	138,8	0,143
11.12	930,73	0,0541	3,297	0,76	0,857	5,615	20,92	37,28	1995	137,4	0,1362

Таким чином, треба з’ясувати: який існує зв'язок між ціною кожної окремо взятої акції та ціною ф’ючерса на індекс UX.

Ф’ючерс – це різновид так званого форвардного контракту, який укладається в майбутньому. Тобто це документ, який засвідчує зобов’язання придбати (продати) цінні папери, товари або кошти у визначений час та на визначених умовах у майбутньому. Покупець ф’ючерсного контракту має право придбати такий контракт протягом строку його дії іншим особам без погодження умов такого продажу з продавцем контракту [3].

Побудуємо лінійну залежність ціни ф’ючерса від індексу UX кожної зазначених у таблиці 1 компаній.

Обчислимо за допомогою Excel коефіцієнт лінійної кореляції, та запишемо результати в таблицю 3.

Таблиця 3

Коефіцієнти кореляції

	Ціна ф’ючерсаіндексу UX
ALMK	0,978511102
AVDK	0,975278828
AZST	0,989981672
BAVL	0,165801945
CEEN	0,963199621
DOEN	0,971387544
ENMZ	0,964739821
MSICH	0,731502493

UNAF	0,95368613
USCB	0,707696162

Отже, як видно з результатів розрахунків, між ціною акцій «блакитних фішок» та ціною ф'ючерса індексу UX існує дуже міцний лінійний зв'язок, та важко не помітити, що ціна акцій BAVL здійснює досить малий вплив на ціну ф'ючерса на індекс UX.

Результативний показник може реагувати на зміну іншого з запізненням, тому треба визначити лаг такої залежності. У результаті відповідних обчислень студентами було встановлено, що модель залежності ціни ф'ючерса індексу UX від цін акцій «блакитних фішок» України потрібно будувати без урахування лагу.

Після цього за допомогою можливостей табличного процесора Excel студенти побудували лінійне рівняння регресії, що показує залежність ціни індексу UX від зміни цін акцій "блакитних фішок" України.

Модель має вигляд:

$$y = 93{,}217 - 3897{,}54x_1 + 88{,}255x_2 + 304{,}44x_3 + 29{,}984x_4 - 11{,}66x_5 + 6{,}198x_6 + 0{,}797x_7 +$$
$$+ 0{,}052x_8 + 0{,}994x_9 + 1225{,}103x_{10}$$

де

x_1 – ALMK;	x_3 – AZST;
x_2 – AVDK;	x_4 –BAVL;
x_5 – CEEN;	x_6 – DOEN;
x_7 – ENMZ;	x_8 – MSICH;
x_9 – UNAF;	x_{10} – USCB.

Коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = 0{,}9998\ .$$

Фактичне значення F-критерію Фішера: $F_{факт} = 679{,}2$.

Знаходимо табличне значення критерію Фішера за допомогою функції FРАСПРОБР, при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$, ступенях вільності $k_1 = 10$, $k_2 = 1$

$F_{табл} = 241{,}9$.

Оскільки $F_{факт} > F_{табл}$, то побудоване рівняння регресії є достовірним.

У результаті аналізу побудовано рівняння студентами був зафіксований цікавий факт, котрий дозволив зробити певні припущення: з поміж всіх інших, коефіцієнт кореляції між значенням ціни ф'ючерса індексу UX та ціни акцій BAVL =0,165801945, що свідчить про дуже слабкий зв'язок між вище зазначеними факторами. Тому, на основі отриманих даних, студенти зробили висновок про необхідність перегляду Індексним комітетом Української біржі доцільність розміщення акцій BAVL в Списку цінних паперів для розрахунку індексу UX.

Висновки. Наведені вище приклади не вичерпують всіх можливих варіантів навчання математики на інтеграційній основі, вони лише ілюструють один із можливих варіантів інтеграції математики, ІКТ та фахових дисциплін. У результаті застосування запропонованих нами прийомів у навчанні математики у студентів формується стійкий інтерес до вивчення дисципліни, з'являється внутрішня мотивація до навчання в цілому.

Резюме. **Ткач Ю.Н. ОТДЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ИНТЕГРАЦИИ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН.** *В статье освещены отдельные аспекты интеграции математики, информационно-коммуникационных технологий и специальных дисциплин. Отмечено, что для того чтобы достичь высокого образовательного уровня будущих специалистов в области экономики нужно модернизировать математическую образования. Одним из путей ее обеспечения должна стать интеграция математики, профессиональных дисциплин и информационно-коммуникационных технологий. Приведен пример интеграции математики, ИКТ и одной из специальных дисциплин будущих экономистов. Сделан вывод о том, что в случае применения предложенных нами приемов в обучении математике студентов формируется устойчивый интерес к изучению дисциплины, появляется внутренняя мотивация к обучению в целом.*

Ключевые слова: *интеграция, математика, информационно-коммуникационные технологии, профессиональные дисциплины.*

Abstract. **Tkach Yu. SOME ASPECTS OF INTEGRATION OF MATHEMATICS, ICT AND PROFESSIONAL DISCIPLINES**. *The article deals with some aspects of information and communication technologies for the implementation of the integration of mathematics and professional disciplines. It is noted that in order to achieve a high level of education of future professionals in the field of economics need to upgrade math education. One way to ensure it is the integration of mathematics and professional disciplines with the use of information and communication technologies. An important part of the educational informatization process is the accumulation of experience in the use of ICT in the learning process. An example of the integration of mathematics, ICT and one of the special subjects of future economists, including "Money and Credit". In the example presented some aspects of the stock exchange through the use of special software and by means of mathematics. A students build an empirical formula insert some objects in prices on the stock exchange. Specifically, we construct a linear dependence on the index futures prices UX each of these companies in the article. It is concluded that in the case of our proposed methods in teaching mathematics to students formed strong interest in studying the subject, there is intrinsic motivation for learning in general.*

Key words: *integration, mathematics, information and communication technology, professional disciplines.*

References

1. *Program complex QUIK: [Electron. resource]. – Mode of access: http:// www.quik.ru/about/.*
2. *Ukrainian Exchange / Index description: [electrons. resource]. – Mode of access: http://www.ux.ua/ru/index/ux/description.aspx.*
3. *Futures Contract / Definitions [Electron. resource]. – Mode of access:http://uk.m.wikipedia.org/wiki/%D0%A4'%D1%8E%D1%87%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82.*

Стаття представлена професором О.І.Скафою.
Надійшла до редакції 11.02.2014 р.

ПРИВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ К ИЗВЕСТНЫМ УРАВНЕНИЯМ И СИСТЕМАМ

Г.М. Улитин,
доктор техн. наук, профессор,
Донецкий национальный технический университет,
г. Донецк, УКРАИНА,
e-mail: ulitin@dgtu.donetsk.ua

Розглянуто прийоми, що дозволяють звести розв’язання певного класу лінійних диференційних рівнянь зі змінними коефіцієнтами до рівнянь, розв’язки яких відомі, а також систем таких рівнянь до систем зі сталими коефіцієнтами. Одержані умови таких зведень, вони визначають взаємозв’язок між коефіцієнтами, розглянуті приклади. Методика, що наведена, може бути використана у навчанні математики студентів технічного університету.

Ключові слова: *навчання математики в технічному університеті, лінійні диференціальні рівняння, системи лінійних диференціальних рівнянь.*

Постановка проблемы. Одним из важнейших факторов повышения качества высшего инженерного образования в Украине является формирование математических компетентностей будущих инженеров. Это означает, что студенты технических направлений подготовки должны быть способными выполнять профессиональную деятельность на основе знаний и умений, сформированных при изучении математических дисциплин.

Курс высшей математики в техническом университете предусматривает решение линейных дифференциальных уравнений и их систем с постоянными коэффициентами. Однако в ходе научно-исследовательской работы студентов может возникнуть необходимость решения линейных дифференциальных уравнений и систем с переменными коэффициентами. Программой же курса не предусмотрено рассмотрение подобных заданий.

Анализ актуальных исследований. Как известно, нет общих методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений и систем с переменными коэффициентами. Существует относительно немного таких уравнений [1], решения которых известны, при этом, как, правило, – в специальных функциях. Поэтому представляет интерес случай, когда данное уравнение или систему с переменными коэффициентами можно привести к известным уравнениям и системам путём замены.

В работе [2] рассмотрен случай, когда линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены, и получено необходимое условие для такой замены.

Цель статьи – *рассмотрение общего подхода для возможности приведения любых линейных дифференциальных уравнений и их систем к решению известных уравнений и систем.*

Изложение основного материала. Остановимся на случае однородных уравнений (для неоднородных можно применить метод вариации произвольных постоянных) на примере дифференциального уравнения третьего порядка

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0 \quad (1)$$

и пусть известно решение уравнения

$$\dddot{y} + a_1(t)\ddot{y} + a_2(t)\dot{y} + a_3(t)y = 0, \quad (2)$$

где точка означает дифференцирование по аргументу t.

Для уравнений других порядков идея остаётся аналогичной.

В работе [3] рассмотрена замена вида $t = \varphi(x)$ и приведены необходимые и достаточные условия приведения уравнения (1) к уравнению (2). Здесь рассмотрим случай замены вида $x = \psi(t)$. Поступая, как и в работе [3], приравнивая коэффициенты в уравнениях (1) и (2), приходим к равенствам:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{\frac{a_3(t)}{p_3(x)}}; \qquad -\frac{3\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + p_1(\psi(t))\dot{\psi} = a_1(t);$$

$$\frac{3\ddot{\psi}^2}{\dot{\psi}^2} - \frac{\dddot{\psi}}{\dot{\psi}} - p_1(\psi(t))\ddot{\psi} + p_2(\psi(t))\dot{\psi}^2 = a_2(t). \quad (3)$$

Из первого дифференциального уравнения в соотношениях (3) определяем функцию $x = \psi(t)$ (необходимое условие приведения к уравнению (2)). Остальные два равенства, в которые входят только коэффициенты уравнений (1) и (2), представляют собой достаточные условия приведения для данной замены.

В частности, для уравнений второго порядка равенства (3) принимают вид:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{a_2(t)}{p_2(x)}}; \qquad -\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + p_1(\psi(t))\dot{\psi} = a_1(t). \quad (4)$$

Применять ли рассмотренную замену или замену, представленную в работе [3], зависит от конкретного случая и та или иная замена имеет свои преимущества или недостатки.

В качестве примера проинтегрируем уравнение:

$$y'' + e^{2x} y = 0.$$

Попробуем его привести к уравнению Бесселя:

$$\ddot{y} + \frac{1}{t}y + y = 0.$$

Для определения замены воспользуемся первым условием (4), получим:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{1}{e^{2x}}} \Rightarrow x = \ln t.$$

Легко убедиться в выполнении второго условия. Таким образом, получаем решение данного уравнения, выраженное в функциях Бесселя

$$y = C_1 J_0(e^x) + C_2 Y_0(e^x).$$

Особый интерес представляет случай, когда уравнение можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами. Такие уравнения называются приводимыми [2]. Тогда в условиях (3) необходимо положить $a_1 = const$ и $a_2 = const$.

Например, найдём общее решение уравнения

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \left(\frac{3}{x^2} - \frac{9x^2}{2}\right)y' + x^3 y = 0.$$

Определим замену из первого условия (3) $x = \sqrt{t}$. Можно убедиться в том, что удовлетворяются и последние два условия.

Подставляя эту замену в уравнение (1), получаем:

$$8\dddot{y} - 9\dot{y} + y = 0.$$

Его общее решение

$$y = C_1 e^{-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)t} + C_3 e^t$$

и, соответственно, решение данного уравнения

$$y = C_1 e^{-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)x^2} + C_2 e^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)x^2} + C_3 e^{x^2}.$$

Такой приём нетрудно распространить на уравнения любого порядка. Рассмотрим, например, уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0.$$

Здесь $p_n = \dfrac{a_n}{x^n}$ и тогда нам требуется проверить только замену $x = e^t$ и $t = \ln x$. Находим производные:

$$y' = e^{-t}\dot{y};$$
$$y'' = e^{-2t}\left(\ddot{y} - \dot{y}\right);$$
$$y''' = e^{-3t}\left(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}\right);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Замечаем, что после такой замены уравнение Эйлера принимает вид:

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n y = 0,$$

где постоянные коэффициенты $b_0, \ldots, b_n$ выражаются через постоянные коэффициенты в уравнении Эйлера, т. е. уравнение Эйлера является приводимым [2]. Аналогично можно проинтегрировать и уравнение Чебышева.

Кроме того, можно подобрать функцию $u(x)$ в замене $y = uz$, где $z(x)$ – искомая функция, а вид $u(x)$ определяется из условия приведения. Рассмотрим это на примере уравнения:

$$\left(x^2 + 1\right)y'' + y = 0.$$

Из вида уравнения представим $y = z\left(x^2+1\right)^k$, а параметр $k = \frac{1}{2}$ определим из условия приведения. Тогда получаем уравнение для функции z:

$$z'' + \frac{2x}{x^2+1}z' + \frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}z = 0,$$

которое является приводимым с заменой $x = tgt$.

Рассмотрим на примере уравнения (1) ещё один приём приведения его к уравнению с постоянными коэффициентами. Решение будем искать в виде $y = uv$. Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем:

$$u''' + u''\left(p_1 + \frac{3v'}{v}\right) + u'\left(p_2 + 2p_1\frac{v'}{v} + 3\frac{v''}{v}\right) +$$
$$+ u\left(p_3 + p_2\frac{v'}{v} + p_1\frac{v''}{v} + \frac{v'''}{v}\right) = 0. \qquad (5)$$

Чтобы уравнение (5) было уравнением с постоянными коэффициентами должны выполняться условия:

$$p_1 + \frac{3v'}{v} = C_1;$$
$$p_2 + 2p_1\frac{v'}{v} + 3\frac{v''}{v} = C_2; \qquad (6)$$
$$p_3 + p_2\frac{v'}{v} + p_1\frac{v''}{v} + \frac{v'''}{v} = C_3.$$

Интегрируя первое из условий (6), находим

$$v = \exp\left(-\frac{1}{3}\int p_1 dx + \frac{C_1}{3}x\right). \qquad (7)$$

Если подставить выражение (7) в два последних условий (6), то получим достаточные условия приведения для этого подхода. Не нарушая общности, произвольную постоянную C_1 можно положить равную нулю и тогда достаточные условия приведения при такой замене примут вид:

$$p_2 - \frac{1}{3}p_1^2 - p_1' = const;$$
$$p_3 - \frac{1}{3}p_2 p_1 + \frac{2}{27}p_1^3 - \frac{1}{3}p_1'' = const. \qquad (8)$$

В качестве примера проинтегрируем уравнение:

$$y''' - 3\cos x y'' + 3\left(\cos^2 x + \sin x\right)y' +$$
$$+ \cos x\left(1 - \cos^2 x - 3\sin x\right)y = 0.$$

Проверим выполнение условий (8):

$$p_2 - \frac{1}{3}p_1^2 - p_1' = 3\cos^2 x +$$
$$+ 3\sin x - 3\cos^2 x - 3\sin x = 0.$$

Аналогично, получаем:

$$p_3 - \frac{1}{3}p_2 p_1 + \frac{2}{27}p_1^3 - \frac{1}{3}p_1'' = 0.$$

Условия выполняются, поэтому используем подстановку $y = ue^{\sin x}$. В силу того, что все константы равны нулю, для функции u получаем уравнение (можно это проверить и непосредственно):

$$u''' = 0 \;\Rightarrow\; u = C_1 + C_2 x + C_3 x^2,$$

т. е. общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x\right)e^{\sin x}.$$

Аналогичным методом можно пользоваться и для линейных систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \ldots + p_{1n}y_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \ldots + p_{nn}y_n, \end{cases} \quad (9)$$

где $p_{ij}(x)$ – непрерывные функции.

Решение системы (9) будем искать в виде $y_i = u_i v_i$ и представим систему следующим образом:

$$\begin{cases} u_1' = \left(p_{11} - \dfrac{v_1'}{v_1}\right)u_1 + p_{12}\dfrac{v_2}{v_1}u_2 + \ldots + p_{1n}\dfrac{v_n}{v_1}u_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1' = p_{n1}\dfrac{v_1}{v_n} + \ldots + \left(p_{nn} - \dfrac{v_n'}{v_n}\right)u_n. \end{cases} \quad (10)$$

Потребуем, чтобы выражения в скобках были равны нулю, для этого $v_i = \exp\left(\int p_{ii}dx\right)$. Если подставить это выражение в систему (10), то она упростится и необходимые условия её приведения к системе уравнений с постоянными коэффициентами будут иметь вид $p_{ij}p_{ji} = const\ (i \neq j)$. Достаточные условия приведения носят довольно громоздкий вид. Поэтому остановимся на случае двух уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}y_1 + p_{12}y_2; \\ y_2' = p_{21}y_1 + p_{22}y_2. \end{cases} \quad (11)$$

Необходимое условие приведения к уравнению с постоянными коэффициентами будет $p_{12}p_{21} = const$ и тогда система (11) примет вид [4]:

$$\begin{cases} u_1' = p_{12}\exp\left(\int (p_{22} - p_{11})dx\right)u_2; \\ u_2' = p_{21}\exp\left(\int (p_{11} - p_{22})dx\right)u_1. \end{cases} \quad (12)$$

Если из первого уравнения системы (12) выразить функцию u_2 через u_1, то получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u_1'' + \left(p_{11} - p_{22} - \frac{p_{12}'}{p_{12}}\right)u_1' - p_{12}p_{21}u_1 = 0\,. \quad (13)$$

Чтобы уравнение (13) было уравнением с постоянными коэффициентами должно выполняться условие:

$$p_{11} - p_{22} - \frac{p_{12}'}{p_{12}} = const\,. \quad (14)$$

Таким образом, систему (11) можно привести к решению уравнению с постоянными коэффициентами, если выполняются условия:

$$p_{12}p_{21} = const;$$

$$p_{11} - p_{22} - \frac{p_{12}'}{p_{12}} = const\,. \quad (15)$$

В качестве примера проинтегрируем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{2}{x}y_1 + x^2 y_2; \\ y_2' = \dfrac{2}{x^2}y_1 - y_2. \end{cases}$$

Легко проверить, что условия (15) выполняются. Тогда получим:

$$v_1 = \exp\left(\int \frac{2}{x}dx\right) = x^2$$

и для функции u_1 имеем уравнение:

$$u_1'' + u_1' - 2u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Затем определяем функцию

$$y_1 = u_1v_1 = \left(C_1e^x + C_2e^{-2x}\right)x^2.$$

Из первого уравнения данной системы находим:

$$y_2 = \frac{1}{x^2}(C_1e^x\left(x^2 + 2x - 2x\right) +$$
$$+C_2e^{-2x}\left(2x - 2x^2 - 2x\right)) = C_1e^x - 2C_2e^{-2x}.$$

Выводы. Рассмотренные приёмы позволяют расширить класс интегрируемых линейных дифференциальных уравнений и систем и могут быть использованы в том или ином объёме в учебном процессе.

1. *Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э.Камке. – М.: Наука. 1976.-576 с.*
2. *Сканави М.И. О приводимых линейных дифференциальных уравнениях / М.И Сканави // Научно-методические статьи по математике. – М.: Высшая школа. – 1972. – Вып.2. – С. 78-80.*
3. *Улитин Г.М. Некоторые приёмы приведения линейных дифференциальных уравнениях с переменными коэффициентами*

к известным уравнениям / Г.М.Улитин // Зб. наук.-метод. робіт. – Донецьк: ДонНТУ. – 2011. – Вип.2. – С. 283-287.

4. Улитин Г.М. Об одном приёме приведения линейных дифференциальных уравнений и систем с переменными коэффициентами к уравнениям и системам с постоянными коэффициентами / Г.М.Улитин, С.И.Клёмина // Эвристика и дидактика точных наук. – Донецк: ТЕАН. – 1993. – Вып.1. – С. 30-33.

Резюме. **Улитин Г.М. ПРИВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ К ИЗВЕСТНЫМ УРАВНЕНИЯМ И СИСТЕМАМ.** *Рассмотрены приемы, позволяющие свести решение определенного класса линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к уравнениям, решения которых известны, а также систем таких уравнений к системам с постоянными коэффициентами. Полученные условия таких преобразований, которые определяют взаимосвязь между коэффициентами, рассмотрены примеры. Описанная методика может быть использована в обучении математике студентов технического университета.*

Ключевые слова: *обучение математике в техническом университете, линейные дифференциальные уравнения, системы линейных дифференциальных уравнений.*

Abstract. **Ulitin G. TRANSFORMATION OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS TO WELL-KNOWN EQUATIONS AND SYSTEMS.** *Taking into account that there are no common methods of solution of linear differential equations and systems with variable coefficients, some methods of reduction of linear differential equations and systems to the known equations and equation systems are offered in this article. In particular some methods of reduction of equations and systems with variable coefficients to equations and systems with constant coefficients are offered. The formulas are received and they define necessary and sufficient conditions of reduction of equations and systems to equations and systems with constant coefficients. The theorem of Erugin on the change for this case turned out from these formulas for the necessary conditions. All the methods of reduction base on the usage of a new substitution of variable quantity or substitution of analogical one for Bernuly's method for the solution of linear differential equations of the first order. For example, the solutions of linear differential equations of the second and the third orders are shown. In particular the solution of Eiler's equation is received which is also adduced. The shown examples confirm efficiency of such methods usage. The recommendations for their usage are given. Such methods of integration of linear differential equations and systems can be used in an educative process or by researchers who use mathematical models with linear differential equations and systems.*

Key words: *mathematics teaching at the technical University, linear differential equations, systems of linear differential equations.*

References

1. Kamke E. Reference book on differential equations. – M.: Science. 1976. – 576 p.

2. Skanavy M.I. About the adducting linear differential equation // Scientific and methodic articles on mathematics. – M.: Higher school. – 1972. – Vol. 2. – P. 78-80.

3. Ulitin G.M. The some methods reduction to linear differential equations with constant coefficients of linear differential equations with variable coefficients // Collected scientific and methodic articles. – Donetsk: DonNTU. – 2011. – Vol. 7. – P. 283-287.

4. Ulitin G.M., Klemina S.I. About one method of adducting linear differential equations and system to equations and system with constant coefficients // Heuristic and didactics method for exact sciences. – Donetsk: TEAN. – 1993. – Vol. 1. – P. 30-33.

Стаття надійшла до редакції 22.03.2014 р.

ПЕРЕВІРКА ЕФЕКТИВНОСТІ ФОРМУВАННЯ ВМІННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ

О.О. Чумак,
асистент,
Донбаська державна машинобудівна академія,
м. Краматорськ, Україна,
e-mail: chumaklena@mail.ru

Висвітлюються результати перевірки рівнів сформованості вміння математичного моделювання майбутніх інженерів під час навчання теорії ймовірностей та випадкових процесів. Пропонуються критерії оцінювання ефективності функціонування розробленої методичної системи. Розглядаються статистичні методи, що використовувались для оцінки за критеріями у ході етапів експерименту. Наводяться графічні інтерпретації отриманих результатів. Аргументуються висновки щодо особливостей впровадження результатів дослідження.

Ключові слова: *теорія ймовірностей та випадкових процесів, майбутні інженери, педагогічний експеримент, математичне моделювання.*

Постановка проблеми. Сучасне інформаційне суспільство та зростаючі темпи розвитку науки і техніки вимагають високого рівня компетентності випускників вищих технічних навчальних закладів. Для дослідження властивостей технологічних процесів і можливості впливу на них, для прогнозування результатів ймовірнісних подій майбутні інженери мають бути обізнаними в сфері теорії ймовірностей та випадкових процесів (ТЙ та ВП). У зв’язку з цим проблема навчання математичному моделюванню майбутніх інженерів у вищій технічній школі набуває безапеляційної актуальності.

Аналіз актуальних досліджень. Різні аспекти удосконалення процесу навчання теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів у вищих навчальних закладах (ВНЗ) розглядались багатьма сучасними науковцями. Питання щодо використання статистичних методів для перевірки ефективності впровадженої методики навчання математичних дисциплін знайшли своє відображення у роботах М.І. Грабаря [1], Т.М.Задорожньої [2], О.І.Скафи [3], О.В.Трунової [4], І.В.Хом’юк [5] тощо.

Із врахуванням вагомого теоретичного підґрунтя, нами запропоновано методичну систему навчання теорії ймовірностей та випадкових процесів студентів технічних ВНЗ, що спрямована на розвиток їхнього вміння математичного моделювання. В основі методичної системи лежить навчання майбутніх інженерів способам «розвитку» завдання [6].

У зв’язку з цим, **мета статті** *полягає у висвітленні результатів педагогічного експерименту, під час якого відбувалась перевірка рівнів сформованості вміння математичного моделювання майбутніх інженерів у ході навчання теорії ймовірностей та випадкових процесів. Запропоновано методичні рекомендації по застосуванню статистичних методів, що використовувались для оцінки критеріїв у ході етапів експерименту.*

Виклад основного матеріалу. Педагогічний експеримент проводився в період з 2007 р. по 2013 р. та включав три основних етапи: констатувальний, пошуковий та формувальний. До участі в експерımенті загалом було залучено близько 858 студентів і викладачів математичних кафедр Донбаської державної машинобудівної академії, Приазовського державного технічного університету, м. Маріуполь, Донецького національного технічного університету, Вінницького національного технічного університету, Автомобільно-дорожнього інституту ДВНЗ «Донецький національний технічний університет», м. Горлівка, Дніпродзержинського державного технічного університету, Донецького національного університету. Відповідно до вимог педагогічного експерименту були сформовані експериментальні й контрольні групи.

На констатувальному етапі (2007 – 2009 рр.) аналізувалися психолого-педагогічні та теоретичні основи проблеми дослідження, які дали можливість зробити висновок про те, що студенти інженерних спеціальностей не володіють у достатній мірі вміннями, необхідними для подальшого навчання спеціальним дисциплінам інженерного циклу. З’ясовувалась думка викладачів електротехніки, тріботехніки та основ надійності, що відзначили низький рівень підготовки з математичного моделювання студентів ІІІ-го і IV-го курсів, та вказали на їхні труднощі під час застосування елементарних вмінь з ТЙ та ВП у цих дисциплінах.

У ході пошукового етапу (2009 – 2011 рр.) проходив пошук методів, форм і засобів навчання ТЙ та ВП, в тому числі комп’ютерних, які сприяють розвитку мотивації навчальної діяльності студентів, формуванню в них вміння математичного моделювання. Були визначені теоретичні основи побудови методичної системи.

Третій, формувальний етап (2011 – 2013рр.) був спрямований на апробацію, уточнення й упровадження розробленої методичної системи навчання ТЙ та ВП майбутніх інженерів. Загалом, на третьому етапі було завершено кількісний та якісний аналіз експериментальних даних.

На основі аналізу наукової літератури, розуміння специфіки професійної діяльності майбутнього інженера та вимог до його особистості експеримент уможливив виокремлення рівнів розвитку математичного моделювання майбутніми інженерами: *високий, достатній, середній, низький*.

Високий рівень – студент у процесі розв’язування професійно орієнтованих завдань без ускладнень самостійно виконує усі етапи математичного моделювання, в тому числі з використанням засобів ІКТ, проводить аналіз умови, формалізує її та будує математичну модель до завдання, досліджує модель, робить висновки та їх аналіз.

Достатній рівень – студент розв’язує професійно орієнтовані завдання без ускладнень, виконує усі етапи математичного моделювання, в тому числі з використанням засобів ІКТ, але потребує при цьому евристичної підказки з боку викладача. Особистий інтерес виявляється в поєднанні з зовнішніми стимулами.

Середній – в студента не сформовані вміння формалізації умови професійно орієнтованого завдання та побудови моделі до нього, студент вміє досліджувати вже побудовану математичну модель, в тому числі з використанням засобів ІКТ. Студенту притаманні неглибокі знання щодо використання вмінь з ТЙ та ВП у майбутній професійній діяльності.

Низький – у студента сформовані лише деякі окремі вміння дослідження вже побудованих моделей до професійно орієнтованих завдань. Цей рівень характеризується пасивним ставленням студента до майбутньої професійної діяльності. ІКТ використовує тільки під керівництвом викладача.

Розглянемо, як змінювався *рівень розвитку в студентів вміння математичного моделювання* протягом експерименту. Для цього використаємо результати нульової контрольної роботи, яка містила завдання на побудову математичних моделей. Результати проведеної роботи з розв’язування майбутніми інженерами цих завдань представлені у таблиці 1.

Таблиця 1

Розподіл студентів за рівнями вміння математичного моделювання на констатувальному етапі експерименту

Рівень / Групи	Високий		Достатній		Середній		Низький	
ЕГ, $n_1 = 428$	10	2,33%	24	5,6%	139	32,47%	255	59,6%
КГ, $n_2 = 430$	13	3,02%	15	3,48%	149	34,65%	253	58,85%

Результати першого діагностичного зрізу свідчать про досить низький рівень його розвитку в майбутніх інженерів. Завдання, що передбачали побудову математичної моделі та її дослідження, успішно розв'язали лише 2,33% студентів у експериментальній групі та 3,02% у контрольній групі. Звідки робимо висновок про важливість спеціальної підготовки студентів у курсі навчання ТЙ та ВП.

Покажемо вплив запропонованої методичної системи на перерозподіл рівня розвитку вміння математичного моделювання під час навчання ТЙ та ВП. Другий діагностичний зріз проводився під час формувального етапу експерименту. На цей момент студенти навчались першому модулю «Теорія ймовірностей, елементи математичної статистики». У студентів перевірялось вміння будувати та досліджувати моделі до завдань із можливістю використання при цьому інформаційно комунікаційних технологій. Аналіз результатів показав, що рівні розвитку вмінь математичного моделювання в студентів технічних спеціальностей мають певні розбіжності в експериментальних і контрольних групах.

Третій діагностичний зріз був проведений по закінченню вивчення ТЙ та ВП. Результати проведеної роботи представлено у таблиці 2.

Таблиця 2

Розподіл студентів за рівнями вміння математичного моделювання на формувальному етапі експерименту (другий модуль)

Рівень / Групи	Високий		Достатній		Середній		Низький	
ЕГ, $n_1 = 428$	78	18,22%	189	44,16%	144	33,64%	17	3,98%
КГ, $n_2 = 430$	35	8,14%	156	36,28%	165	38,37%	74	17,21%

Відмінності результатів, що спостерігалися ми вважали випадковими. Оскільки вибірки студентів у нашому дослідженні є випадковими та незалежними, властивість мала неперервний розподіл та вимірювалась за шкалою порядку з чотирма категоріями (низький, середній, достатній, високий). За цим ми застосували критерій χ^2.

Статистика критерію. Нами було висунуто дві гіпотези: нульову та альтернативну. Нульова гіпотеза H_0 полягала в тому, що ймовірності попадання об'єктів першої та другої вибірки в кожну з чотирьох категорій рівні, тобто $p_{1i} = p_{2i}$, де p_{ki} – ймовірність того, що об'єкт *k*-ої вибірки опиниться в *i*-й категорії ($\forall i = \overline{1;4}$, $k = \overline{1;2}$). У зв'язку з цим мали альтернативну гіпотезу H_1: $p_{1i} \neq p_{2i}$ хоча б для однієї категорії, тобто різниця між обома розподілами достатньо значна. Гіпотеза H_1 полягала у впливі запропонованої методики навчання ТЙ та ВП на розвиток вміння математичного моделювання в майбутніх інженерів.

Значення статистики критерію T було обчислено за формулою

$$T = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_1 Q_{2i} - n_2 Q_{1i})^2}{Q_{1i} + Q_{2i}}.$$

Для першого модулю отримано:

$$T = \frac{1}{428 \cdot 430} \cdot \left(\frac{(428 \cdot 60 - 430 \cdot 15)^2}{60 + 15} + \frac{(428 \cdot 176 - 430 \cdot 123)^2}{176 + 123} + \frac{(428 \cdot 130 - 430 \cdot 187)^2}{130 + 187} + \frac{(428 \cdot 62 - 430 \cdot 105)^2}{62 + 105} \right) = 57,73$$

Прийняття рішення. Обрано рівень значущості $\alpha = 0,05$. За цим рівнем значущості та степенями свободи $\nu = 4 - 1 = 3$ критичне значення статистики критерію T дорівнює $x_{1-\alpha} = 7,815$. Тобто, $T_{спостер.} > x_{1-\alpha}$ $(57,73 > 7,815)$. Таким чином, за правилом прийняття рішень для критерію χ^2 отриманий результат свідчить про відхилення нульової гіпотези на користь альтернативної про вплив методичної системи на розвиток вміння математичного моделювання в майбутніх інженерів. Аналогічно для другого модулю отримано:

$$T = \frac{1}{428 \cdot 430} \cdot \left(\frac{(428 \cdot 78 - 430 \cdot 35)^2}{78 + 35} + \frac{(428 \cdot 189 - 430 \cdot 156)^2}{189 + 156} + \frac{(428 \cdot 144 - 430 \cdot 165)^2}{144 + 165} + \frac{(428 \cdot 17 - 430 \cdot 74)^2}{17 + 74} \right) = 56,66.$$

Аналогічно маємо $x_{1-\alpha} = 7,815$. Тоді, $T_{спостер.} > x_{1-\alpha}$ $(56,66 > 7,815)$. Таким чином, обробка результатів контрольної роботи з другого модуля дала можливість констатувати вплив застосованої методичної системи на розвиток у студентів технічних спеціальностей вміння математичного моделювання.

Графічне представлення результатів зображено на рис. 1.

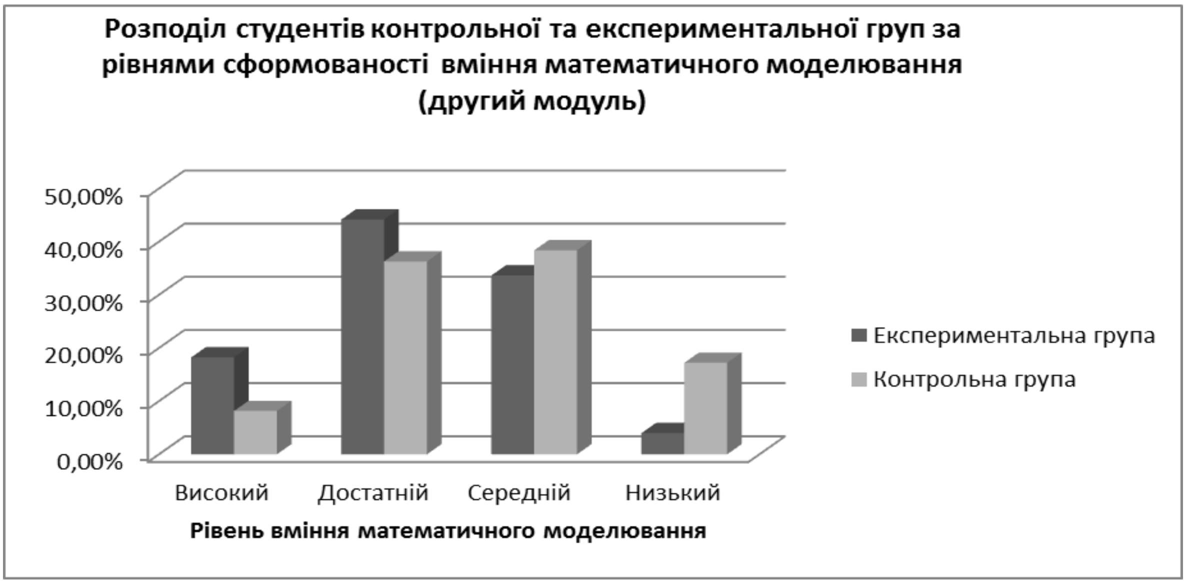


Рис. 1. Розподіл студентів контрольної та експериментальної груп за рівнями сформованості вміння математичного моделювання

Висновки. На підставі аналізу і статистичної обробки результатів, що отримано в ході експерименту, маємо зробити висновок: запропонована методична система сприяє позитивній динаміці рівнів сформованості вміння математичного моделювання ймовірнісних явищ та випадкових подій в майбутніх інженерів. Проте, дане дослідження не вичерпує всіх аспектів проблеми формування ймовірнісних вмінь студентів. Подальшого аналізу вимагають результати сформованості вміння математичного моделювання під час навчання «Основ надійності» студентів IV курсу ВТНЗ.

1. *Грабарь М.И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы / М.И. Грабарь, К.А. Краснянская. – М.: Педагогіка, 1977. – 136 с.*

2. *Задорожня Т.М. Початки теорії ймовірностей та математичної статистики в змісті математичної освіти коледжів фінансово-економічного спрямування: автореф. дис. на здобуття наукового ступеню канд. пед. наук: 13.00.02 / Задорожня Тетяна Миколаївна; Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. – К., 2007. – 20с.*

3. *Скафа Е.И. Организация педагогического эксперимента в области методики обучения математике: сущность и основные этапы проведения / Е.И. Скафа // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2005. – Вип. 23. – С. 105–108.*

4. *Трунова О.В. Навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики: автореф. дис. на здобуття наукового ступеню канд. пед. наук: 13.00.02 / Трунова Олена Василівна; Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. – К., 2007. – 24с.*

5. *Хом'юк І.В. Теоретико-методичні засади формування базового рівня професійної мобільності майбутніх інженерів: монографія / І.В. Хом'юк. – Вінниця: ВНТУ, 2012. – 380 с.*

6. *Чумак О.О. Навчально-методичний посібник «Практичні заняття з теорії ймовірностей, ймовірнісних процесів та математичної статистики» для студентів технічних закладів освіти / О.О.Чумак // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2013. – Вип. 39. – С. 112–118.*

Резюме. **Чумак Е.А. ПРОВЕРКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВО ВРЕМЯ ОБУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ.** *В статье освещаются результаты проверки уровней сформированности умения математического моделирования будущих инженеров во время обучения теории вероятностей и случайных процессов. Автором выделяются критерии оценивания эффективности функционирования разработанной методической системы. Рассматриваются статистические методы, которые были использованы для оценки согласно критериям в ходе этапов эксперимента. В работе приводятся графические интерпретации полученных результатов и формулируются выводы об особенностях внедрения результатов исследования.*

Ключевые слова: *теория вероятностей и случайных процессов, будущие инженеры, педагогический эксперимент, математическое моделирование.*

Abstract. **Chumak E. VERIFICATION OF THE EFFICIENCY OF FORMING THE ABILITY OF MATHEMATICAL MODELING WHILE STUDYING PROBABILITY THEORY AND RANDOM PROCESSES BY FUTURE ENGINEERS.** *The paper describes educational experiment stages, conducted through the period from 2007 to 2013. Theoretical, psychological and pedagogical basis of the research problems were analyzed during the stated period. In the course of the search phase the search for methods, forms and means of teaching the theory of probability and stochastic processes took place, including the computer-aided ones, which contribute to the motivation of learning activities of students to form the skills of mathematical modeling. The stage of formation* *was aimed at approbation, refinement and implementation of the developed methodical system of study of probability theory and random processes by future engineers.*

Based on the analysis of scientific literature and understanding of the professional activity of future engineers the levels of mathematical modeling of future engineers are allocated and described as high, sufficient, medium and low.

The paper considers statistical methods of assessment by criteria during the stages of the experiment, namely non-parametric Pearson consent criterion. The efficiency of the developed methodological training system of the observable discipline as well as the enhancement of the ability of forming mathematical modeling of future engineers is confirmed. Furthermore, the paper provides graphical interpretation of the results and conclusions regarding the features argued for the introduction of the study.

Key words: *probability theory and stochastic processes, future engineers, pedagogical experiment, mathematical modeling.*

References

1. Grabar M. Application of mathematical statistics in educational research. Nonparametric methods / M. Grabar, K. Kras nyanskaya. – M.: pedagogika, 1977. – 136 p.

2. Zadorozhna T. The origins of probability theory and mathematical statistics in the content of mathematics education college financial-economic nature: Author. Thesis. for the degree of Cand. ped. sciences: 13.00.02 / Zadorozhna Tatiana; Nat. ped. Univ them. M. Drahomanova. – K., 2007. – 20 p.

3. Scafa O. Organization of pedagogical experiment in methods of teaching mathematics: the nature and main stages of / O. Scafa // Didactics of mathematics: Problems and Investigations : Intern. Collected. scientific papers. – Donetsk, 2005. – № 23. – P. 105-108.

4. Trunova E. Teaching principles of probability theory and statistics in joining the high schools and classrooms with advanced study of mathematics: Author. Thesis. for the degree of Cand. ped. sciences: 13.00.02 / Trunova Elena; Nat. ped. Univ them. M. Drahomanova. – K., 2007. – 24 p.

5. Hom'yuk I. Theoretical and methodological basis for forming the baseline for future professional mobility engineers: monograph / I. Hom'yuk. – Vinnitsa: VNTU, 2012. – 380 p.

6. Chumak E. Instructor's Manual «Practical training in probability theory, stochastic processes, and mathematical statistics» for students of technical education institutions / E. Chumak // Didactics of mathematics: Problems and Investigations : Intern. Collected. scientific papers. – Donetsk, 2013. – № 39. – P. 112-118.

Стаття представлена професором К.В.Власенко.
Надійшла до редакції 22.12.2013 р.

НАУКОВІ ЗАСАДИ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

РОЛЬ КУРСУ «ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ» У ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Д.Є. Бобилєв,
викладач,
Криворізький національний університет,
м. Кривий Ріг, УКРАЇНА
e-mail: dmytrobobyliev@gmail.com

Виділено загальні ідеї функціонального аналізу (на прикладі метричних просторів) в математиці і показано, як евристичні уміння допомагають ефективно розв'язувати важливі проблеми методики, зокрема, систематизації й узагальнення шкільного курсу математики. Розглядається, як саме вивчення цієї дисципліни в рамках евристичної технології навчання дозволяє застосовувати міждисциплінарно евристичні прийоми.

Ключові слова: *евристичні уміння, метричний простір, відстань, функціональний аналіз.*

Постановка проблеми. Аналіз методичної літератури показав, що недостатня кількість досліджень присвячена розкриттю можливостей застосування метричних просторів у шкільній практиці і методичній підготовці майбутніх учителів математики. В той же час, важливо приділяти увагу методиці формування в учнів розуміння понять відстані і *n*-вимірного метричного простору, оскільки вони пов'язанні з важливими застосуваннями узагальнених ідей відстані в сучасній математиці. В навчальних планах підготовки магістрів і спеціалістів спеціальності *8.04020101 Математика** і *7.04020101 Математика** передбачено вивчення курсу функціонального аналізу. Мета даного курсу: формування наукового світогляду, одним з елементів якого є розуміння ролі функціонально-аналітичних методів у математиці і точному природознавстві; опанування початками теорії функціональних просторів, лінійних операторів рівнянь; розвиток уміння будувати, досліджувати методами функціонального аналізу моделі з різних областей теоретичної і прикладної математики; створення необхідної математичної основи для подальшого вивчення функціонального аналізу і його застосувань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемі реалізації евристичних ідей, діалектиці евристичної діяльності в навчанні математики на сьогодні приділяли увагу такі математики та методисти, як Г.П. Бевз, М.І. Бурда, Ю.М. Колягін, Ю.М. Кулюткін, Л. Ларсон, Т.М. Міракова, В.М. Осинська, Ю.О. Палант, Д. Пойа, Г.І. Саранцев, Є.Є. Семенов, О.І. Скафа, З.І. Слєпкань, Н.А. Тарасенкова, Л.М. Фрідман, С.І. Шапіро, П.М. Ерднієв та інші.

Аналіз робіт вище вказаних авторів підтверджує, що в основі евристичного підходу лежить психологія творчого мислення, процедура пошуку нового, спроба формалізації творчої діяльності. Спираючись на означення формування евристичної діяльності за О.І. Скафою [5], в рамках формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності студентів під час вивчення функціонального аналізу ми будемо розуміти нові освітні продукти та новоутворення особистісних якостей майбутнього фахівця, які він набуває у процесі навчання, які виробляють у нього уміння усвідомлено діяти в ситуації вибору, грамотно ставити та досягати власні цілі, діяти продуктивно як під час навчання так і в майбутній професійній діяльності. Як показує аналіз змісту функціонального аналізу, саме вивчення цієї дисципліни в рамках евристичної технології навчання дозволяє застосовувати евристичні прийоми міждисциплінарно, що вказує на більш високий розвиток евристичних умінь майбутніх фахівців з математики та методики її навчання.

Метою статті *є визначення загальних ідей функціонального аналізу (на прикладі метричних просторів) в математиці і представлення того, як технології евристичного навчання цієї дисципліни допомагають ефективно розв'язувати важливі проблеми, зокрема, сприяють систематизації й узагальненню шкільних математичних знань*.

Виклад основного матеріалу. Еволюцію поняття метричного простору в математиці можна зрозуміти лише простеживши його розвиток від виникнення основних метричних понять: довжини і відстані. Абстрактно-математичне поняття «відстань» тісно пов'язане із абстрактно-математичним поняттям «метричний простір». Ці поняття за своїм походженням є геометричними і тому їх генезис невіддільний від розвитку ідеї простору в геометрії. Поняття відстань і метричний простір виникли як абстракція над абстракцією в результаті зіставлення вже введених у математику абстрактних понять. Втративши матеріалізовану конкретність, абстрактно-математичні поняття відстань і метричний простір набули великої загальності. Наприклад, евклідові та неевклідові простори є лише окремими випадками метричного простору, оскільки їх метрика може розглядатись як конкретна інтерпретація його аксіом. Отже, еволюція поняття метричного простору дозволяє реалізовувати методи евристичного навчання.

Під час вивчення модуля «Метричні простори» доцільно звертати увагу студентів на зв'язок функціонального аналізу з методикою навчання математики. Для цього, в рамках модуля, слід розглянути різні науково-методичні концепції відстані. При цьому студентам необхідно самостійно порівняти концепцію відстані Кагана-Біркгофа і концепція відстані Евкліда-Колмогорова.

Концепція відстані Кагана-Біркгофа. Поняття відстані в класичній формі тлумачиться як дійсне невід'ємне число. Таке тлумачення відстані запропонував математик В.Ф. Каган (1869 – 1953). Система аксіом Кагана геометрії Евкліда спирається на поняття відстані як інваріанта групи аксіом переміщень, а відстань інтерпретується як дійсне невід'ємне число. Ідею Кагана було розвинуто при побудові шкільного курсу геометрії. Найповніше цю ідею було втілено в працях Джорджа Давіда Біркгофа (1884 –1944). Дана концепція знайшла відображення в різних посібниках і підручниках з геометрії для загальноосвітньої школи [3].

За Каганом-Біркгофом, поняття відстані можна аксіоматично означити так:

1) для кожної пари точок A і B визначено відстань, яку позначають $\rho(A, B)$;

2) відстань $\rho(A, B)$ є невід'ємним дійсним числом;

3) $(\forall A, B)[\rho(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B]$;

4) $(\forall A, B)[\rho(A,B) = \rho(B,A)]$;

5) $(\forall A, B, C)[\rho(A,C) \leq \rho(A,B) + \rho(B,C)]$.

Концепція Кагана-Біркгофа, коректна з наукового боку, має ряд істотних недоліків методичного характеру, в ній, зокрема:

1) величини пов'язані з процесом вимірювання, що заважає розумінню поняття числа;

2) тлумачення поняття відстані як числа приводить до зачарованого кола: доцільність введення дробових і ірраціональних чисел мотивується потребами ви-

мірювання величин, а пізніше ці величини визначаються як числа;

3) не кожному відрізку можна поставити у відповідність його довжину – число доти, поки не введено множину невід'ємних чисел.

Студенти, під керівництвом викладача, повинні були самостійно знайти вказані вище недоліки і пояснити, чому дана концепція не знайшла місце в курсі математики, хоча широко використовується в сучасній науці.

Концепція відстані Евкліда-Колмогорова. Світогляд учнів допомагає формувати концепція, в основі якої лежить чітке розмежування геометричної фігури як носія величини, самої величини і її числового значення – невід'ємного дійсного числа. Такою є концепція відстані, що бере початок від Евкліда і розвинута в працях А.М.Колмогорова, а також В.Кліффорда, В.М.Депутатова та ін. У даній концепції відстань розглядається як невід'ємна скалярна величина. Введення поняття «величина» в шкільний курс математики дає змогу підійти до питання про вимірювання довжин, площ, об'ємів, розглядаючи величини як геометричну властивість протяжності, яку можна кількісно характеризувати дійсним числом. Деякі сучасні вчені вважають, що математика XX ст. може обійтись без поняття величини. Із ними можна погодитись лише в чистій математиці, де поняття величини явно не використовується. Що стосується прикладної математики, то тут поняття величини відіграє фундаментальну роль. Тому воно важливе і в шкільному курсі, де особлива увага звертається на практичні застосування математики [4].

У концепції Евкліда-Колмогорова поняття відстані аксіоматично означається так:

1) для кожної пари точок A і B визначено відстань, яку позначають $|AB|$;

2) відстань $|AB|$ є невід'ємною скалярною величиною;

3) $(\forall A, B)[|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B]$;

4) $(\forall A, B)[|AB| = |BA|]$;

5) $(\forall A, B, C)[|AC| \leq |AB| + |BC|]$.

Слід звернути увагу майбутніх вчителів математики, що в шкільних підручниках для позначення відстані і її числового значення використовується один символ: $|XY|$. Але в функціональному аналізі доцільно дотримуватися чіткого розмежування в позначеннях відстані $|XY|$ та її числового значення $\rho(X, Y)$.

При вивченні різних підходів визначення відстані студентам можна запропонувати самостійно довести, що числові значення відстаней в концепції Евкліда-Колмогорова є відстанями в концепції Кагана-Біркгофа.

Тлумачення відстані як величини лежить в основі аксіоматики шкільного курсу геометрії, запропонованої академіком А.М. Колмогоровим. Основними, неозначуваними поняттями тут є: «точка», «відстань», «пряма» – у планіметрії Евкліда; «точка», «відстань», «пряма», «площина» – у стереометрії Евкліда.

Система аксіом А.М.Колмогорова складається з 14 аксіом. Якщо в трьох із цих аксіом замінити відстань як величину її числовим значенням, то дістанемо аксіоми метричного простору.

Як вправу, студентам можна запропонувати довести, що всі евклідові площини ізометричні між собою.

Також доцільно, на практичному занятті, при введенні поняття метричного простору розглянути зі студентами знаходження відстаней між фігурами геометричним способом. Суть полягає в тому, що ми сполучаємо точки, відстань між якими треба знайти, відрізком прямої і довжину цього відрізка (як геометричну властивість протяжності) беремо за шукану відстань, якій можемо поставити у відповідність певну (при вибраній одиниці вимірювання) числову характеристику – числове значення відстані.

Після цього, за допомогою евристичних питань (Як знайти відстань від точки до фігури? Від однієї фігури до іншої?) і мозкового штурму на занятті отримати відповідь, яка необхідна для нарисної геометрії, картографії, фотометрії та інших прикладних наук. Правильне розв’язання цих питань можна знайти, виходячи з того, що геометричні фігури є точкові множини. Тому можна скористатися поняттям відстані між двома множинами. У функціональному аналізі за відстань від точки x до множини M беруть нижню межу відстаней від точки x до змінної точки y множини M:

$$d(x,M) = \inf_{y\in M} d(x,y),$$

а за відстань між двома множинами M_1 і M_2 – нижню межу відстаней між змінними точками x і y відповідно множин M_1 і M_2:

$$d(M_1,M_2) = \inf_{\substack{x\in M_1\\ y\in M_2}} d(x,y).$$

На основі отриманих відповідей можна дати такі означення:

Означення 1. Відстанню від точки A до фігури Ф називають найменшу (якщо вона існує) з відстаней від точки A до всіх точок фігури Ф.

Слід зауважити (постановкою студентам евристичних запитань), що така (найменша) відстань не завжди існує. Наприклад, не існує відстані від точки A до відкритого відрізка BC, якщо точки A, B, C лежать на одній прямій, або ортогональна проекція точки A не належить відрізку BC.

Означення 2. Відстанню від фігури $Ф_1$ до фігури $Ф_2$ називають найменшу (якщо вона існує) з відстаней від усіх точок фігури $Ф_1$ до всіх точок фігури $Ф_2$.

Ця відстань також не завжди існує. Наприклад, не існує відстані між двома відкритими відрізками, які лежать на одній прямій, між графіком показникової функції і віссю абсцис.

Оскільки розглядаємо геометричні фігури як множину точок, то ставити задачу про знаходження відстаней доцільно лише для фігур, перерізом яких є порожня множина; відстань між фігурами, перерізом яких є не порожня множина, вважається рівною нулю.

Знаходження найкоротших відстаней між двома точками на многогранних поверхнях у школі зводять до побудови розгорток цих поверхонь. На перший погляд у студентів може виникнути думка, що розв’язування таких задач не спонукає до роздумів: побудуй розгортку, сполучи на ній вказані точки відрізком і задачу розв’язано. Те, що такі висновки поспішні, можна довести на прикладі задачі про павука і муху [2].

Задача. *Зал має розміри 12×12×30 м. На одній з менших стін посередині, на відстані 1 м від підлоги сидить муха. На протилежній стіні – павук. Який найкоротший шлях повинен пройти павук, щоб схопити муху?*

Найчастіше, навіть студенти, розв’язують цю задачу, як показано на рис. 1 і дістають відповідь $\rho\,(A, B) = 42$ м. Але цей розв’язок неправильний, бо є багато різних варіантів побудови розгортки, зокрема, такий, як подано на рис. 2. У цьому випадку $\rho\,(A, B) = \sqrt{\rho^2(A,C) + \rho^2(C,B)} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$.

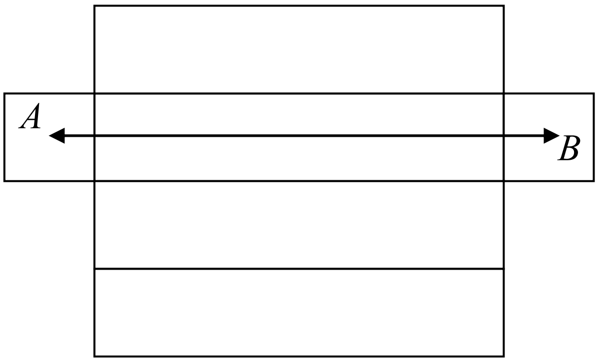


Рис. 1

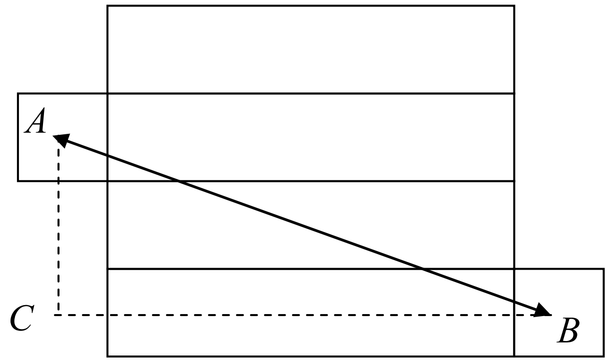


Рис. 2

Після отримання розв'язку даної задачі і, розглянувши внутрішню метрику, можна з'ясувати, разом зі студентами, питання про відстань між двома точками на деяких поверхнях тривимірного евклідового простору. Для цього в науковій літературі здебільшого використовують методи диференціальної геометрії. Для наших цілей краще використати методи синтетичної геометрії, які ближчі до практики шкільного викладання. З таких позицій з'ясовано питання внутрішньої метрики і в роботі [1].

Також доцільно розглянути деякі питання внутрішньої метрики циліндричної, конічної та сферичної поверхонь. Ці поверхні обертання розглядаються в курсі математики середньої школи. Вони є доступною для розуміння учнями ілюстрацією можливостей різних означень відстані між двома точками.

Поняття відстані і метричного простору займають особливе місце в системі наукових знань. Особливо потрібні знання метричних понять старшокласникам, але формування цих понять починається з початкової школи. У програмі з математики для I-III класів значне місце відведено вивченню основних величин, зокрема довжин і площ. Це створює передумови для формування в учнів молодших класів початкових понять про відстань і метричний простір.

В якості самостійної роботи студенти отримують завдання проаналізувати реалізацію різних науково-методичних концепцій відстані в шкільних підручниках.

В заключному огляді модуля «Метричні простори» доцільно провести зі студентами евристичну бесіду, в якій ще раз підкреслити, що у шкільному курсі геометрії вивчають властивості фігур у двовимірному або тривимірному евклідовому просторі, який є моделлю метричного простору. З числовими метричними просторами зустрічаються в курсі алгебри і початків аналізу. Загальне абстрактно-математичне поняття метричного простору слід використовувати для з'ясування таких питань, як несуперечливість, незалежність і категоричність (повнота) системи аксіом. Компактна і проста аксіоматика метричного простору найбільш придатна для цього.

Висновки. У результаті аналізу змісту курсу функціонального аналізу виділено загальні ідеї функціонального аналізу (на прикладі метричних просторів) в математиці і показано, як евристичні уміння допомагають ефективно розв'язувати важливі проблеми методики, зокрема, систематизації й узагальнення шкільних курсу математики. Показано, що евристичне навчання сприяє розвитку пізнавальної активності та продуктивного мислення студентів та є основою формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності майбутніх вчителів математики.

1. *Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей / А.Д.Александров. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948 – 388 с.*
2. *Гарднер М. Математические головоломки и развлечения / М. Гарднер. – М.: Мир, 1971. – 512 с.*
3. *Семенович О.Ф. Геометрія. Аксіоматичний підхід / О.Ф. Семенович. – К.: Рад. школа, 1976. – 168 с.*
4. *Слєдзінський І.Ф. Метричні простори в шкільному курсі математики / І.Ф.Слєдзінський, І.Ф.Тесленко. – К.: Рад. школа, 1978. – 110 с.*
5. *Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография / Е.И.Скафа. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.*

Резюме. **Бобылев Д. РОЛЬ КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» В ПОДГОТОВКЕ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ.** *В статье выделены общие идеи функционального анализа (на примере метрических пространств) в математике и показано, как эвристические умения помогают эффективно решать важные проблемы методики, в частности, систематиза-*

ции и обобщения школьного курса математики. Рассматривается, как изучение этой дисциплины в рамках эвристической технологии обучения позволяет применять эвристические приемы междисциплинарно.

***Ключевые слова**: эвристические умения, метрическое пространство, расстояние, функциональный анализ.*

Abstract. **Bobyliev D. COURSE «FUNCTIONAL ANALYSIS» IN TRAINING FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS.** *The article highlighted the general ideas of functional analysis (for example, metric spaces) in mathematics and shows how the heuristic ability to effectively help solve important problems of methodology, including the systematization and generalization of the mathematics school. We consider how the study of the subjects of heuristic learning technology allows you to use heuristic techniques across disciplines.*

Analyzed the methodological literature and show that the number of studies reveal opportunities for application of metric spaces in school practice and methodical training of future mathematics teachers is insufficient. At the same time, emphasized how important it is to pay attention to technique development of students' understanding of the concepts of distance and n-dimensional metric space as they associate with important applications of generalized distance ideas in modern mathematics.

It reveals the evolution of the concept of metric space in mathematics and, on this basis, we can understand the origin of the basic concepts of metric: lengths and distances. Abstract mathematical concept of "distance" is closely associated with the abstract mathematical concept of "metric space". These concepts in origin is geometric and thus their genesis is inseparable from the idea of space geometry. The concept of distance and metric space have emerged as an abstraction of an abstraction as a result of matching are introduced to mathematics abstract concepts. Lost materialized concrete, abstract mathematical concepts and distance metric space gained great generality. Thus the evolution of the concept of metric space allows us to implement methods of heuristic learning.

The concept of distance and metric spaces have a special place in the system of scientific knowledge. It is therefore particularly useful knowledge metric concepts high school students, but the formation of these concepts begins with the elementary school. Program in Mathematics for classes I-III considerable space is devoted to the study of the basic variables, including length and area. It creates conditions for development of students' junior elementary notions of distance and metric space.

Key words: *heuristic skills, metric space, distance, functional analysis.*

References

1. *Aleksandrov A.D. Vnutrennyaya geometriya vyipuklyih poverhnostey / A.D.Aleksandrov. – M.-L.: Gostehizdat, 1948 – 388 p.*
2. *Gardner M. Matematicheskie golovolomki i razvlecheniya / M. Gardner. – M.: Mir, 1971. – 512 p.*
3. *Semenovich O.F. Geometriya. Aksiomatichniy pidhid / O.F. Semenovich. – K.: Rad. shkola, 1976. – 168 p.*
4. *Sledzinskiy I.F. Metrichni prostori v shkilnomu kursi matematiki / I.F. Sledzinskiy, I.F.Teslenko. – K.: Rad. shkola, 1978. – 110 p.*
5. *Skafa O. Evristicheskoe obuchenie matematike: teoriya, metodika, tehnologiya. Monografiya / O. Skafa. – Donetsk: Izd-vo DonNU, 2004. – 439 p.*

Стаття представлена професором О.І.Скафою.
Надійшла до редакції 02.04.2014 р.

ТЕОРІЯ ЗАДАЧ РОЗВИВАЛЬНОГО НАВЧАННЯ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИКИ

С.П. Семенець,
доктор педагог. наук, професор,
Житомирський державний університет ім. Івана Франка,
м. Житомир, УКРАЇНА,
e-mail: sergij.semenets@zu.edu.ua

Розкрито основні протиріччя діючої системи методичної підготовки майбутніх учителів математики, обґрунтовано теорію задач розвивального навчання методики математики, висвітлено зміст і структуру задачної системи навчально-методичної діяльності студентів, виявлено змістово-теоретичні дії, що застосовуються в процесі розв'язування виділених типів задач.

Ключові слова: *теорія, розвивальне навчання, задачна система, задачі методики математики, змістово-теоретичні дії.*

Постановка проблеми. Процеси демократизації, гуманізації, міжнародної інтеграції детермінують необхідність побудови нових моделей математичної освіти, що передбачають перенесення акцентів на особистісно розвивальні технологій навчання. Концептуальним слугує положення про те, що *оволодіння технологією розвивального навчання математики має здійснюватися в процесі реалізації відповідної педагогічної технології у ВНЗ.* У зв'язку з цим нагальним стає розв'язання низки протиріч у системі методичної підготовки майбутніх учителів математики між: інформаційним перевантаженням навчального процесу та зорієнтованістю на запам'ятовування і відтворення за наперед заданим (готовим) зразком; інтегрованим змістом освітньо-кваліфікаційної характеристики фахівця, вимогою формування системних знань і дискретним (фактологічним, емпіричним) характером набутих методичних знань і способів дій; значним збільшенням кількості годин на самостійну роботу студентів і проблемою їхнього учіння методики математики як суб'єктної діяльності; дедуктивним змістом математики, абстрактними математичними структурами і методами дослідження, які розвивають, передусім, науково-теоретичне мислення та реалізованою асоціативно-рефлекторною теорією научіння, традиційно усталеною методикою навчання математики, що передбачають актуалізацію емпіричного мислення, встановлення суб'єкт-об'єктних відносин у системі «викладач-студент», проектування таких відносин у системі «вчитель-учень».

З огляду на вищезазначене потребує *розроблення й науково-теоретичного обґрунтування концептуальна модель розвивального навчання в системі методичної підготовки майбутніх учителів математики.*

Аналіз актуальних досліджень. Проблемам методики розвивального навчання математики, а також підготовки вчителів до реалізації розвивального навчання присвячені роботи Е.І.Александрової, О.Б.Воронцова, Х.Ж.Ганєєва, В.І.Горбачова, В.В.Давидова, О.В.Калабіної, І.В.Малафіїка, З.К.Меретукової, З.І.Слєпкань, М.Г.Шалунової та інших [1; 2; 3; 6; 7; 12]. Окремі теоретичні та методичні аспекти розвивального навчання математики студіювалися в наших роботах: сформульовано принцип розвивальної наступності, створено теорію задач розвивальної математичної освіти, розроблено розвивально-задачний метод та розвивально-суб'єктну форму навчання математики, обґрунтовано зміст і структуру рефлексії процесу учіння математики, класифіковано уроки математики в системі розвивального навчання, висвітлено специфіку методик формування математичних понять, вивчення теорем і навчання розв'язування задач [8; 9; 10]. Однак дотепер недостатньо дослідженою залишається проблема реалізації задачного підходу до формування навчально-методичної діяльності майбутніх учителів математики в розвивальній освіті.

Мета статті – *розвинути теорію задач розвивального навчання методики математики, розкрити зміст і структуру задачної системи навчально-методичної діяльності студентів, а також виявити змістово-теоретичні дії, що застосовуються в процесі розв'язування типових задач.*

Виклад основного матеріалу. Розвивальний підхід до навчання методики математики передбачає створення теорії задач, проектування задачної системи, що задає програму навчально-методичної діяльності студентів. Розроблення теорії задач розвивального навчання методики математики здійснюється на основі таких положень:

1. Відповідність концепції моделі педагогічної діяльності в розвивальній освіті, що репрезентує принцип сходження до самоактуалізованої особистості, орієнтує на розвиток науково-теоретичного та концептуально-парадигмального мислення.

2. Реалізація принципу розвивальної наступності системи задач: кожен наступний тип задач відрізняється від попереднього вищим рівнем змістово-теоретичного узагальнення.

3. Дотримання принципу фрактальності задачних систем, що передбачає виконання двох умов:

- *ізоморфізм задачної системи розвивального навчання елементарної (шкільної) математики та задачної системи розвивального навчання методики математики;*
- *проектування структурно-функціональних компонентів задачної системи розвивального навчання елементарної (шкільної) математики у відповідні компоненти задачної системи розвивального навчання методики математики.*

4. На кожному рівні задачної системи особливою задачею є рефлексія процесу учіння методики математики, що передбачає самоаналіз, самооцінку, самоконтроль. Складовою цієї рефлексії як складного системного утворення є рефлексія процесу учіння елементарної (шкільної) математики.

Примітно, що принцип сходження до самоактуалізованої особистості лежить в основі побудови аксіологічної системи розвивальної професійно-педагогічної освіти, а принцип розвивальної наступності – репрезентує правило, що додержується в процесі постановки різного типу задач. Доцільність дотримання принципу фрактальності задачних систем пояснюється одночасним розв'язуванням задач різного рівня змістово-теоретичного узагальнення (у педагогічних системах "учитель-учень" і "викладач-студент"), біекцією структур навчальної та навчально-професійної діяльності, наступністю розвитку особистості в шкільному та студентському віці.

Відповідно до зазначених положень навчально-методична діяльність студентів має здійснюватися на чотирьох рівнях задачної системи розвивального навчання методики математики (рис. 1).

Особливості змісту методики навчання математики як навчальної дисципліни зумовлюють специфіку змістово-теоретичних дій, які застосовуються під час розв'язування виділених типів задач. Так, під *структурно-дидактичним аналізом* теми шкільної математики (дидактичної одиниці) розуміється система операцій, спрямованих на:

1) визначення дидактичних цілей навчання математики;

2) структурування змісту навчального матеріалу математики (структурно-математичний аналіз), формування змістових узагальнень (визначення теоретичних основ, провідної ідеї, методу математичного пізнання, структури задачної системи розвивального навчання математики, способів і методів розв'язування типових задач);

3) виділення основних навчальних задач, прийомів, способів і методів навчального математичного пізнання (проектування етапності розвивально-задачного методу навчання математики);

4) встановлення організаційних форм навчання математики (колективних, колективно розподілених та індивідуальних), проектування розвивально-суб'єктної форми проведення уроку математики;

5) визначення засобів навчального пізнання (учіння математики), форм контролю, діагностики та корекції знань учнів, критеріїв засвоєння навчального матеріалу математики на трьох рівнях (обов'язковому, підвищеному, поглибленому);

6) проектування способів рефлексії навчальної математичної діяльності школярів (самоконтролю, самооцінки);

7) рефлексію виконаної навчально-методичної діяльності.

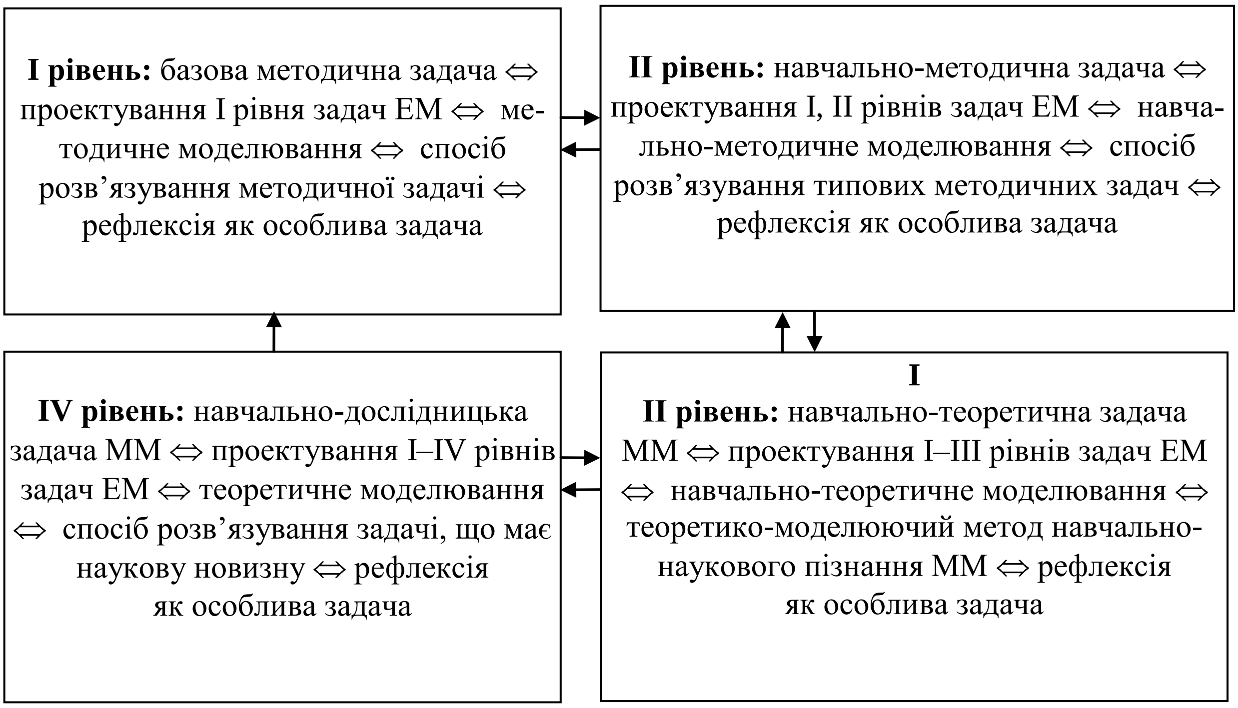


Рис. 1. Задачна система розвивального навчання методики математики

Як один із видів системного аналізу структурно-дидактичний аналіз дозволяє створити навчально-методичну модель (дидактичну абстракцію), що має реалізовуватися вчителем у процесі розвивального навчання математики. Побудову навчально-методичної моделі можна трактувати як *структурно-дидактичний синтез.*

Структурно-дидактичний аналіз, як дія вищого рівня змістово-теоретичного узагальнення в структурі навчально-професійної діяльності вчителя математики, включає іншу змістово-теоретичну дію – структурно-математичний аналіз. Тому для формування цієї дії необхідно забезпечити цілісне засвоєння дії структурно-математичного аналізу, яка в задачній ситуації вищого рівня змістово-теоретичного узагальнення виступає в ролі спеціальної операції. Згідно з теорією навчальної діяльності виконання такої операції має бути досконалим, тобто характеризуватися високим рівнем оволодіння [4].

Структурно-математичний аналіз навчального матеріалу передбачає виконання мислительних операцій, що забезпечують:

1) *обґрунтування теоретико-методологічних основ навчального матеріалу (провідної математичної ідеї, методів математичного пізнання та дослідження);*

2) *з'ясування основних математичних понять, відношень і їх властивостей (аксіом) згідно з поняттям математичної структури;*

3) *визначення структури системи означувальних понять і відношень, з'ясування способів їх введення (означення);*

4) *виділення основних теорем (ознак, властивостей, критеріїв), обґрунтувань їх структури, способів і методів доведення;*

5) *строге математичне обґрунтування виконуваних перетворень (алгебричних, трансцендентних, геометричних);*

6) *виділення основних типів математичних (базових) задач, їх структур, прийомів, способів та методів розв'язування;*

7) *рефлексію процесу учіння математики (самоконтроль і самооцінку).*

У створеній задачній системі розвивального навчання методики математики перший рівень займають базові методичні задачі. Виходячи з того, що будь-яка задача – це реалізація цілей у певних умовах, під задачею методики математики називатимемо задачу, що розв'язується з метою визначення складу та змісту структурних компонентів методичної системи навчання математики (цілей, змісту, методів, організаційних форм, засобів навчання контролю та оцінки) у процесі вивчення дидактичної одиниці (теми). Логічною основою методичних дій слугують навчально-пізнавальні дії, які виступають у більш узагальненій формі та перебувають у взаємозв'язку.

Процес *розв'язування задач методики математики* зводиться до виконання дій і операцій:

- *постановка методичної задачі;*
- *структурно-дидактичний аналіз задачі;*
- *визначення цілей навчання математики;*
- *структурування навчального матеріалу математики (за результатами структурно-математичного аналізу);*
- *вибір прийомів, способів, методів навчання математики з метою організації навчально-математичної діяльності учнів;*
- *визначення організаційних форм навчання математики, встановлення співвідношення між колективними, колективно розподіленими формами навчальної роботи (груповою, парною) та індивідуальною;*
- *вибір засобів навчання математики (навчальних підручників та посібників, довідкової літератури, навчального обладнання, педагогічних програмних засобів);*
- *встановлення форм контролю, діагностики та корекції навчальних досягнень учнів з математики;*
- *визначення способів рефлексії процесу учіння математики;*
- *самоаналіз, самоконтроль і самооцінка засвоєння способу розв'язування задачі методики математики.*

До базових належать методичні задачі, що розв'язуються вчителем на першому рівні задачної системи розвивального навчання математики, під час постановки та розв'язування базових (прикладних, практичних) задач елементарної (шкільної) математики [8]. У процесі розв'язування таких задач формуються вміння відбирати (створювати) базові (прикладні, практичні) задачі, виконувати змістово-теоретичні дії, організовувати колективну та колективно розподілену навчальну діяльність з метою знаходження способу розв'язання поставленої задачі, а також методичні вміння, які відносяться до першої та другої групи методичних умінь [5]. З огляду на специфіку предмета математики, її змістового компонента, що включає два блоки (теоретичний матеріал і математичні задачі), базові методичні задачі можуть мати теоретичний і практичний зміст.

Методичні задачі тісно пов'язані з навчальними. Цей зв'язок виявляється в тому, що навчальні задачі передбачають виконання деяких методичних дій, і навпаки, – у процесі розв'язування методичних задач виконуються дії, що характерні для розв'язування навчальних задач. Логічною основою навчально-методичних дій слугують навчально-пізнавальні дії, які в порівнянні з вищезазначеними методичними діями виступають у більш узагальненій формі та перебувають у взаємозв'язку. Тому навчально-методичні задачі в порівнянні з методичними задачами вирізняються вищим рівнем узагальненості, окрім виконання навчальних дій (постановки та розв'язування навчальних задач), передбачають відшукання способів розв'язування типових методичних задач, розробку методики навчання математики. Аналогічно тому як в розвивальному навчанні математики на основі знайденого способу розв'язування базових задач ставляться та розв'язуються навчальні задачі, у розвивальному навчанні методики математики знайдене розв'язання базової методичної задачі слугує основою для постановки навчально-методичної задачі. Процес розв'язування навчально-методичних задач математики передбачає виконання такої системи дій:

1. *Прийняття від викладача або самостійна постановка студентами навчально-методичної задачі.*

2. *Аналіз програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів.*

3. *Структурно-дидактичний аналіз навчального матеріалу.*

4. *Визначення системи цілей навчання математики (цілепокладання та мотивація), конструювання та проектування їх реалізації у шкільному навчально-виховному процесі від загальних (предметних) до тих, що ставляться в процесі вивчення конкретної теми.*

5. *Структурування навчального матеріалу математики, його теоретичної і задачної складових (за результатами виконання структурно-математичного аналізу).*

6. *Виділення основних навчальних задач, вибір прийомів, способів, методів навчання математики. Планування етапності розвивально-задачного методу навчання математики.*

7. *Встановлення організаційних форм навчання математики, співвідношення між колективними, колективно розподіленими формами навчальної роботи. Проектування етапності розвивально-суб'єктної форми проведення уроку математики.*

8. *Вибір засобів навчання математики, аналіз діючих підручників, планування їх використання в шкільному навчально-виховному процесі.*

9. *Планування форм контролю, діагностики та корекції навчальних досягнень учнів з математики.*

10. *Проектування способів рефлексії учнями процесу учіння математики.*

11. *Постановка навчальних задач математики, проектування способів розв'язування типових задач (побудова навчальних моделей).*

12. *Створення навчально-методичної моделі (структурно-дидактичний і структурно-математичний синтез), що задає спосіб дій у типових задачних ситуаціях навчального та методичного змісту.*

13. *Побудова системи частинних методичних задач, що розв'язуються загальним способом.*

14. *Контроль виконаних навчально-методичних дій.*

15. *Самоаналіз виконаної діяльності*

(процесу учіння методики математики), самооцінка засвоєння загального способу дій як результату розв'язування навчально-методичної задачі.

Згідно із принципом розвивальної наступності навчально-теоретичні задачі методики математики мають ще вищий рівень змістового теоретичного узагальнення і пов'язуються з вивченням наскрізних змістових ліній, обґрунтуванням теоретико-методологічних засад шкільної математики та методики її навчання. У процесі розв'язування навчально-теоретичних задач методики математики застосовуються загальнонаукові теоретичні методи пізнання та мислення: *історичний і логічний, аксіоматичний і структурно-системний, моделювання та сходження від абстрактного до конкретного.*

Метод сходження від абстрактного до конкретного застосовується на двох рівнях: *внутрішньоматематичному та внутрішньодидактичному.* На внутрішньоматематичному рівні відбувається логічне сходження від математичних теорій і методів, які вивчаються в системі фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики, до теоретичної та практичної (задачної) складової шкільної (елементарної) математики. На внутрішньодидактичному рівні здійснюється логічне сходження від побудованих навчально-теоретичних (навчально-методичних) моделей, узагальнених способів навчально-методичних дій до навчальних ситуацій на уроці, під час вивчення теми. Цей процес передбачає постановку та розв'язування навчальних, методичних і навчально-методичних задач математики.

Найвищу сходинку в задачній системі розвивального навчання методики математики займають навчально-дослідницькі задачі. Окрім рівня змістово-теоретичного узагальнення характеристичною ознакою такого типу задач виступає міра новизни продукту, що одержується за результатами виконання навчально-теоретичної діяльності з математики та методики її навчання. Мірою новизни слугує не суб'єктивний, а суспільний досвід, об'єктивно нові знання та способи діяльності, які можуть мати як математичний, так і навчально-методичний зміст. Водночас навчально-дослідницькі задачі методики математики займають найнижчий рівень у ієрархії науково-дослідницьких задач, оскільки за змістом і способом розв'язування передбачають застосування як навчальних (навчально-теоретичних), так і науково-дослідницьких дій. Такі задачі розв'язуються студентами під час написання курсових й дипломних (кваліфікаційних) робіт, передбачають розробку та наукове обґрунтування авторської (інноваційної) методики навчання, її експериментальне впровадження в ході активних педагогічних практик. Окрім цього, вони співвідносяться з навчально-дослідницькими задачами математики і вимагають теоретичного обґрунтування та методичного забезпечення дослідницької роботи учнів, що виконується в системі Малої академії наук України. Змістово-операційний склад дій процесу розв'язування навчально-дослідницьких задач методики математики представлений у нашій роботі [11].

Висновки. З огляду на поставлену наукову проблему подальший розвиток теорії розвивального навчання пов'язується з науково-теоретичним обґрунтуванням системи професійно-педагогічної підготовки в розвивальній освіті, що забезпечує готовність майбутніх учителів до реалізації розвивального навчання в шкільній практиці. Теорія задач розвивального навчання методики математики розробляється на основі принципів розвивальної наступності та фрактальності задачних систем, які представляються на чотирьох рівнях змістово-теоретичного узагальнення і репрезентують ідею сходження до самоактуалізованої особистості. Обґрунтовано, що провідну роль у процесі розв'язування виділених типів задач відіграють структурно-дидактичний і структурно-математичний аналіз як особливі змістово-теоретичні дії та різновиди системного аналізу. Рефлексії процесу учіння методики математики як одному із ключових завдань розвивального навчання будуть присвячені наші подальші роботи.

1. Александрова Э.И. Научно-методические основы построения начального курса математики в системе развивающего обучения: монография / Э.И. Александрова. – Омск : ГОУ ДПО ИПКРО, 2006. – 332 с.

2. Горбачёв В.И. Технология развивающего обучения в курсе алгебры средней школы: дис. ... доктора пед. наук: 13.00.02 / В.И.Горбачёв. – Брянск, 2000. – 335 с.

3. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения / В.В.Давыдов. – М.: Интор, 1996. – 544 с.

4. Дусавицкий А.К. Развитие личности в учебной деятельности /А.К.Дусавицкий. – М.: Дом педагогики, 1996. – 204 с.

5. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учебное пособие для студентов физ.-мат спец. пед. ин-тов / под ред. Е.И.Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

6. Малафіїк І.В. Теорія та методика формування системності знань у старшокласників: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук: спец. 13.00.09 „Теорія навчання” /І.В.Малафіїк. – К., 2007. – 40 с.

7. Меретукова З.К. Теоретические и практические основы подготовки учителя к развивающему обучению: дис. … доктора пед. наук: 13.00.01 /З.К.Меретукова. – М., 1998. – 303 с.

8. Семенець С.П. Теорія задач розвивальної математичної освіти /С.П.Семенець // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2008. – Вип. 30. – С. 130–134.

9. Семенець С.П. Методика формування математичних понять (розвивальний підхід) / С.П.Семенець // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2012. – Вип. 37. – С. 68–73.

10. Семенець С.П. Методика вивчення теорем у розвивальній математичній освіті /С.П.Семенець //Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2012. – Вип. 38. – С. 92–97.

11. Семенець С.П. Розвивально-креативний підхід до формування науково-дослідницької діяльності студентів з методики навчання математики /С.П.Семенець //Нові технології навчання: наук.-метод. збірник /Інститут інноваційних технологій і змісту освіти Міністерства освіти і науки, Академія міжнародного співробітництва з креативної педагогіки. – Київ-Вінниця, 2012. Вип. 71. – С. 225–232.

12. Слєпкань З. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики /З.Слєпкань. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. – 240 с.

Резюме. **Семенец С.П. ТЕОРИЯ ЗАДАЧ РАЗВИВАЮЩЕГО ОБУЧЕНИЯ МЕТОДИКЕ МАТЕМАТИКИ.** *Раскрыты основные противоречия действующей системы методической подготовки будущих учителей математики, обоснована теория задач развивающего обучения методике математики, выяснены содержание и структура задачной системы учебно-методической деятельности студентов, выявлены содержательно-теоретические действия, применяемые при решении типичных задач.*

Ключевые слова: *теория, развивающее обучение, задачная система, задачи по методике математики, содержательно-теоретические действия.*

Abstract. **Semenets S. THEORY OF PROBLEMS DEVELOPING TRAINING METHODOLOGY OF MATHEMATICS.** *Disclosed the basic contradictions of the current system of methodical preparation of future mathematics teachers; grounded theory of problems developing* *training methodology of mathematics. Clarified the content and structure of the system task instructional activities of students; identified content- theoretical actions are used for solving typical problems. To achieve this goal, the concept model of pedagogical activities in developing education, which embodies the principle of the ascent to the actualized person, directed at the development of scientific-theoretical and conceptual and paradigmatic thinking The principle of the developmental continuity, whereby each subsequent type of problems differs substantially-higher level of theoretical generalization. Shows the principle of the fractal system task developmental education in elementary mathematics and task system developing training methodology of mathematics; understand the operational components of structural and mathematical and structural and didactic analysis. Contains the role and place of reflection of the learning process methodology of mathematics; highlighted modes of action for typical tasks of developing training methodology of mathematics.*

Key words: *theory, developing training, a task system problem by the method of mathematics and theoretical meaningful action.*

References

1. *Alexandrova E.I. Scientific and methodological bases of construction of the initial course of mathematics for the developmental education: monograph / E.I. Alexandrova. – Omsk : GOU DPO IPKRO, 2006. – 332 p.*
2. *Gorbachev V.I. Technology developing training course in high school algebra : dis. Dr. ... ped. Sciences : 13.00.02 / V.I. Gor bachev. – Bryansk, 2000. – 335 p.*
3. *Davydov V.V. Theory of developmental education / V.V. Davydov. – M. : Intor, 1996. – 544 p.*
4. *Dusavitskiy A.K. Personality development in educational activity / A.K. Dusavitskiy. – M. : House pedagogy, 1996. – 204 p.*
5. *Laboratory and practical work on teaching mathematics: Textbook for students of special Phys. ped. in-tov / ed. E.I. Lyaschenko. – M. : Education, 1988. – 223 p.*
6. *Malafiyik I.V. Theory and method of forming the systems of knowledge in high school students: Dissertation for the degree of doctor of pedagogical sciences specials : 13.00.09 "Theory of Learning" / I.V. Malafiyik. – K., 2007. – 40 p.*
7. *Meretukova Z.K. Theoretical and practical principles for teachers to develop learning : dis. Dr. ... ped. Sciences : 13.00.01 / Z.K. Meretukova. – Moscow, 1998. – 303 p.*
8. *Semenets S.P. Theory of developmental tasks of mathematical education / S.P. Semenec / Didactics of mathematics : Problems and Investigations / Intern. Collected sciences works. – Vol. 30. – Donetsk : Donetsk National University Publishing House, 2008. – P. 130–134.*
9. *Semenets S.P. Method of forming mathematical concepts (Developing Approach) / S.P. Semenets / Didactics of mathematics : Problems and Investigations : Internat Collected sciences works. – Vol. 37. – Donetsk : Donetsk National University, 2012. – P. 68–73.*
10. *Semenets S.P. Method for studying theorems in developing mathematical education / S.P. Semenets / Didactics of mathematics: Problems and Investigations : Internat Collected sciences works. – Vol. 38. – Donetsk : Donetsk National University Publishing House, 2012. – P. 92–97.*
11. *Semenets S.P. Developing creative approach to building research activities of students in methods of teaching mathematics / S.P. Semenets / New learning technologies : Scientific-method collection / Institute of Innovative Technology and Education, Ministry of Education, Academy of International Cooperation of creative pedagogy. – Kyiv-Vinnytsia, 2012. – Issue 71. – P. 225–232.*
12. *Slyepkan Zinaida. Psycho-pedagogical and methodological foundations of developmental education mathematics / Zinaida Slyepkan. – Ternopol : Text and Materials, 2006. – 240 p.*

Стаття надійшла до редакції 14.01.2014 р.

МЕТОДИЧНА НАУКА – ВЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ

TRIANGULAR FUZZY LOGIC MODEL FOR LEARNING ASSESSMENT

(Трикутна модель нечіткої логіки для оцінки успішності)

Dr. Igor Ya. Subbotin, Professor,
Department of Mathematics, College of Letters and Sciences,
National University, Los Angeles, USA,
e-mail: isubboti@nu.edu
N. Bilotskii, Associate Professor,
Department of Mathematics,
Kiev National Pedagogic University, UKRAINE,
e-mail: mikbil@mail.ru

Створені Л.А. Заде нечіткі логіки, довели свою корисність в багатьох застосуваннях, включаючи проектування, теорія управління, бізнес, медицина, освіта і так далі. У цій статті розглядаються деякі застосування нечіткої логіки для оцінки результатів навчання. Ця стаття продовжує серію статей авторів, присвячених цій темі. Тут ми розглядаємо нові, більш точні трикутні нечіткі моделі для оцінки успішності.

Ключові слова: *нечітка логіка, нечіткі моделі, оцінка рівня знань, трикутні моделі.*

Introduction. There are some impressive efforts towards the formalizing of the learning process (see, for example, [PG], [VJ]). Evaluating our students' work, we assess their knowledge and skills by assigning grades. Since the process of learning has a fuzzy nature, we can look around for the implementation of already existing proven to be effective in fuzzy situations tools. While assessing our students' knowledge acquisition, we are not completely sure about a particular numerical grade, which could belong to the two adjacent groups of grades with different degrees of membership.

In 1965, L.A.Zadeh ([Z1], [Z2]) introduced the ideas of so called fuzzy logic as a prospective tool in the control theory for solving some engineering problems that could not be solved with the standard mathematics tools because of their very complicated nature. This theory lets us handle and process information in a similar way as the human brain does. Fuzzy logic has been successfully developed by many researchers and has been proven to be extremely productive in many applications (see, for example, [D], [JVR], [KF], [W], [B], and others).

This fuzzy logic approach could be realized in the following diagram 1, describing so called membership function, which simply assigns to each of the considered element its degree of belonging to the corresponding sets. Formally, it could be described as a function $F = \{(x, f(x): x \in U\}$, where U is the universal set of the discourse, and the range $E(F)$ of function F is [0, 1]. It is a very common approach to divide the interval of the specific grades on three parts and assign the corresponding grade using + and - . For example, 80 – 82 = B-, 83 – 86 = B, 87 – 89 = B+. On the diagram 1 student Z has, lets say, 0.25 or 25% degree membership in the set corresponds to the grade C and, therefore, 0.75 or 75% degree membership in the set B, while student X has the 1.0 degree membership in the set corresponds to the grade A. It follows from the simple geometric considerations that in the described cases all degrees of membership for the same element complement each other to 1. It is worthy to note that the same kind of simple geometric arguments that this rules are valid for any boundary distributions (for example, 80 - 81 – B - , not 80 – 82 as above, and so on). Moreover, we do not have to make these boundaries even symmetrical.

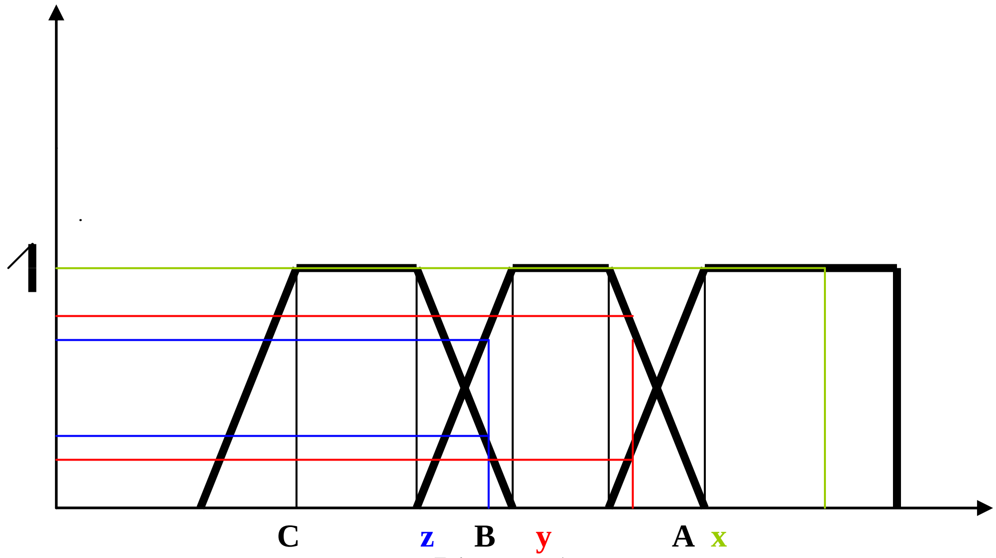


Diagram 1

As we already mentioned in the previous papers [SB, SBB, SMB, VS], we will base our consideration on the ideas of Voss [VJ], who developed the argument that learning as a specific case of knowledge transfer consists of successive problem-solving activities, in which the input information is represented of existing knowledge with the solution occurring when the input is appropriately represented. This process implements the following states: a) representation of the input data, b) interpretation of this data, c) generalization of the new knowledge, and d) categorization of this knowledge. The states a and b could be unified in one state of interpretation the new knowledge. In the article [VM], the following fuzzy logic applications have been developed. Let A_i, $i = 1,2,3$, be the states of interpretation, generalization, and categorization respectively, and a,b,c,d,e – the linguistic variables of negligible, low, intermediate, high, and complete acquisition of knowledge respectively of each of the A_i. Voskoglou considers the set $U = \{a,b,c,d,e\}$ and represents the A_i's as fuzzy sets in U. He denotes by n_{ia}, n_{ib}, n_{ic}, n_{id}, n_{ie} the numbers of the students that have achieved negligible, low, intermediate, high, and complete acquisition of the state A_i respectively and defines a membership function

m_{A_i} by $m_{A_i}(x) = \dfrac{n_{ix}}{n}$ for each $x \in U$ and, therefore, one can write $A_i = \{(x, \dfrac{n_{ix}}{n}): x \in U\}$, where $\sum_{x\in U} m_{A_i}(x) = 1, i = 1,2,3.$ A fuzzy relation can be considered here as a fuzzy set of triples, each one of which possess a degree of membership belonging [0, 1]. Consider farther the fuzzy relation

$$R = \{(s, m_R(s) : s = (x, y, z) \in U^3\}$$

where the membership function defined by $m_R(s) = m_{A_1}(x)\ m_{R_2}(y) m_{R_3}(z)$, for all s = $=(x, y, z) \in U^3$.

This fuzzy relation R represents all the possible profiles of student's behavior during the learning process. Further, M. Voskoglou develops the procedure of comparing few groups of students based on his ideas and supplies the article with examples showing the simplicity of its applications.

We will try to employ another approach to the assessment of students learning. The main base of this approach has been developed in [SB and SBB]. This approach is visible, does not implement any complicated calculations, and, what is important, can be employed to a single student assessment and to the class assessment as well. Depending on evaluation criteria, this approach could be used for the comparing or just for individual independent assessment.

There is a commonly used in the fuzzy logic approach to measure the performance with the pair of numbers (x_c,y_c) as coordinates of the center of mass (the so-called "centroid method") of the represented figure U, which we can calculate using the following well-known formulas:

(1) $$x_c = \frac{\iint_F x dx dy}{\iint_F dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_F y dx dy}{\iint_F dx dy}.$$

It is not a problem to calculate such numbers using the formulas above; however it could take some significant amount of time. So it would be much more useful in everyday life to simplify the situation as described in diagram 1. For this, we use a rectangular diagram 2. This process implements the following states: C) representation of the input data and interpretation of this data (y_1), B) generalization of the new knowledge (y_2), and A) categorization of this knowledge (y_3). In this case, formulas (1) can be easily transformed to the following simple formulas [SBB]:

(2) $$x_c = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1 + 3y_2 + 5y_3}{y_1 + y_2 + y_3}\right), \quad y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{y_1 + y_2 + y_3}\right).$$

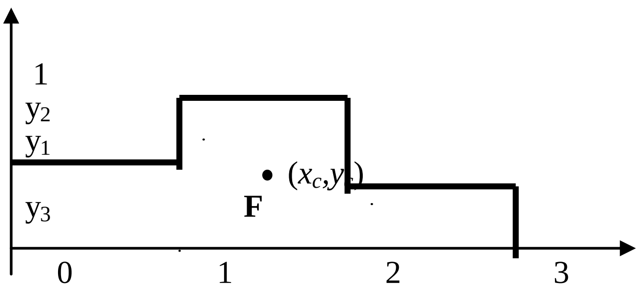


Diagram 2

It is easy to see that the formulas (2) can be generalized for the case when our figure consists not only from three rectangles, but from n rectangles In this case we will come to the following formulas [SBB]:

(3) $$x_c = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}\right), \quad y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i}\right).$$

However, this consideration does not reflect the commonly used situation when the teacher is not sure about the grading and assessing the performance of the students whose performance could be assess as marginal between and close to two adjacent levels.

For example, it is something like between 81 and 79 percents. The proposed below 'triangular model" fits this situation. In general, this model looks more precise.

Instead of rectangles, in the triangular model we use triangles. But the most important advantage here is that we allow these triangles have intersections. Namely, we allow to any two adjacent triangles have 25% of their bases belongs to both of them. This way, we cover the situation of uncertainty of assessment of marginal grades described above.

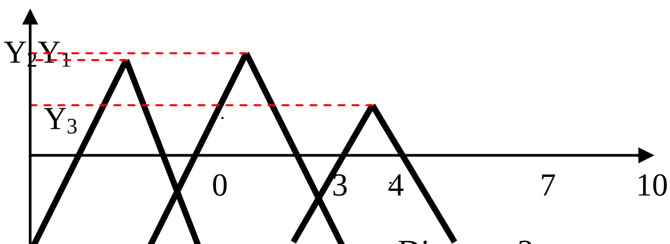


Diagram 3

Note, that the triangular form not only better realizes the case of marginal grades. It also correlates the marginal grades through the shape of the triangles in the intersections and this way makes needed correlations.

For the center of mass coordinates we will use the following formulas from the commonly used definition:

(4) $X_c = \frac{1}{M}\sum_1^n m_i x_i$; $Y_c = \frac{1}{M}\sum_1^n m_i y_i$,

where m_i is the mass of the *i*-triangle, and (x_i, y_i) is the coordinates of its center of mass, M is the mass of the considered figure. In our specific case, we can assume that $\sum_1^n Y_i = 1$; the center of mass of a triangle is the point of intersection of its medians, and since this point divides the median in the proportion 2:1 from the vertex, we can conclude that $y_i = 1/3Y_i$. Without loss of generality, for the sake of easy calculations, we assume first that the triangles in the Diagram 3 are isosceles, and their bases are 4 units each. Then $X_i = 3i-1$. At the end of calculation, we will easily return to the on - unit base by simple dividing by 4.Taking into account, that we can allow the density of the figure to be 1, we can equal the mass of a figure to its area. So, $m_i = S_i = 2Y_i$. Considering any pair of adjacent triangles and taking into account that $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$, after some simple elementary geometric reasoning we find that

(5) $X_c = \frac{2}{M}(2Y_1 + 5Y_2 + 8Y_3)$; $Y_c = \frac{2}{3M}(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2)$;

$M = 2 - \frac{Y_1 Y_2}{4(Y_1 + Y_2)} - \frac{Y_2 Y_3}{4(Y_2 + Y_3)}$.

In the general case of n triangles, we have the following formulas

(6) $X_c = \frac{2}{M}\sum_1^n (3i-1)Y_i$; $Y_c = \frac{2}{3M}\sum_1^n Y_i^2$;

$M = 2 - \sum_1^{n-1} \frac{Y_i Y_{i+1}}{4(Y_i + Y_{i+1})}$.

In order to transform our formulas to the case of the one –unit base for x, we just need to divide the results by 4. So finally, we obtaine

$X_c = \frac{1}{2M}(2Y_1 + 5Y_2 + 8Y_3)$;

$Y_c = \frac{1}{6M}(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2)$;

$M = 0.5 - \frac{Y_1 Y_2}{16(Y_1 + Y_2)} - \frac{Y_2 Y_3}{16(Y_2 + Y_3)}$.

(7) $X_c = \frac{1}{2M}\sum_1^n (3i-1)Y_i$; $Y_c = \frac{1}{6M}\sum_1^n Y_i^2$;

$M = 0.5 - \sum_1^{n-1} \frac{Y_i Y_{i+1}}{16(Y_i + Y_{i+1})}$.

In our previous article [SBB] we have considered some examples of comparing the performances of two classes in some marginal cases. In the case when it is not clear how to decide which class performance is better we usually compare classes' GPAs (Grade Point Averages in the American system's meaning), and the indicators commonly called "the quality of knowledge" – the ratio of the sum of the numbers of all B and A to whole amount of grades. There are some ambiguous cases here. For example, consider the following two classes' grades:

Ratio of the class students reached the following stage of knowledge acquisition	Class I	Class II
C	10	0
B	0	20
A	50	40

For these both classes the GPA is 3.7. "The quality of knowledge" for the second class is higher than for the first one. The standard deviation for the second class is definitely smaller. So from the common point of view and from the statistical point of view the situation in the second class is better. However, some instructors could prefer the situation in the first class, since there are much more "perfect" students in this class. Everything is determined by the set of goals preference.

As we can see $x_{c1} = x_{c2} = 2\frac{1}{3} = 2.33$ and $y_{c1} > y_{c2}$. It means that in this case the centers of mass lie on the same vertical line $x = 2.33 < 2.5$, and the first center is a bit higher. So the second class performs better by the following standards from [SBB].

Among two or more classes the class with the biggest x_c performs better;

If two or more classes have the same $x_c \geq 2.5$, then the class with the higher y_c performs better. If two or more classes have the same $x_c \leq 2.5$, then the class with the lower y_c performs better.

Consider the same example using our formulas (7).

Y	Class I	Class II
Y_1	0.17	0

Y_2	0	0.33
Y_3	0.83	0.67

We obtain:

$X_{c1}= 1.75$

$X_{c2}= 1.81$

So, our triangular model in one step also shows that the second class performs slightly better than the first one. It means that the triangular model is more sensitive even in marginal cases.

[B] BINAGHI E. A Fuzzy Logic Inference Model for a Rule-based System in Medical Diagnosis. Expert Systems, Vol 7, No. 3, pp. 134-141, 1990.

[D] DOWLING E.T., Mathematics for Economists, Schaum's Outime Series, McGraw - Hill, New York, 1980.

[JVR] JAMSHIDI M., VADIEE N. and ROSS T. (eds.). Fuzzy logic and Control, Prentice-Hall, 1993.

[KF] KLIR G.J. - FOLGER T.A., Fuzzy sets: Uncertainty and Information, Prentice - Hall Int., London, 1988.

[SB] SUBBOTIN, I., BILOTSKIY, N., Fuzzy logic application to assessment of results of iterative learning. Didactics of Mathematics: Problems and Investigations, 2012. v.37. p.89-93.

[SBB] SUBBOTIN I., BADKOOBEHI H., BILOTSKIY, N.: Application of Fuzzy logic to learning assessment. Didactics of Mathematics: Problems and Investigations: 22. - Doneck: Company TEAN, 2004. - 136 p., pp. 38-41.

[SMB] SUBBOTIN, I., F.MOSSOVAR-RAHMANI, F.,N. BILOTSKII, N Fuzzy logic and the concept of the Zone of Proximate Development. Contemporary trends in the development of mathematics and its application aspects 2012: Proceeding of the first International Scientific Internet-Conference (May 17, 2012). Doneck, 2012, p. 301-302.

[VM] VOSKOGLOU M.G., The process of learning mathematics: a fuzzy set approach, Heuristics and Didactics of Exact Sciences, V 10, p.9 – 13, 1999.

[VS] VOSKOGLOU, M., SUBBOTIN, I., Fuzzy measures for students' analogical reasoning skills. Contemporary trends in the development of mathematics and its application aspects 2012: Proceeding of the first International Scientific Internet-Conference (May 17, 2012). Doneck, 2012, p. 219-220.

[VJ] VOSS J. F., Learning and transfer in subject-matter learning: A problem solving model, Int. J. Educ. Research,11, 607-622, 1987.

[W] WILLIAMS T. Fuzzy Logic Simplifies Complex Control Problems. Computer Design, pp. 90-102, March, 1991

[Z1] ZADEH, L. A. Fuzzy sets. Information and Control, 8, 338-353, 1965.

[Z2] ZADEH, L.A. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision processes. IEEE Trans. Systems, Man and Cybernatics, SMC-3, pp. 28-44, 1973.

Резюме. **Субботин И.Я., Билоцкий Н.Н. ТРЕУГОЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НЕЧЁТКОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ ОЦЕНКИ УСПЕВАЕМОСТИ.** *Созданные Л.А. Заде нечеткие логики, доказали свою полезность во многих приложениях, включая проектирование, теория управления, бизнес, медицина, образование и так далее. В настоящей статье рассматриваются некоторые приложения нечеткой логики для оценки результатов обучения. Эта статья продолжает серию статей авторов, посвященных этой теме. Здесь мы рассматриваем новые, более точные треугольные нечеткие модели для оценки успеваемости.*

Ключевые слова: *нечеткая логика, нечеткие модели, оценка уровня знаний, треугольные модели.*

Abstract. **Subbotin Ya., Bilotskii N. TRIANGULAR FUZZY LOGIC MODEL FOR LEARNING ASSESSMENT.** *Created by L.A. Zadeh, fuzzy logic has been proven to be extremely feasible in many applications, including engineering, control theory, business, medicine, education, and so on. The current article discusses some applications of fuzzy logic to assessment of learning. This article is a continuation of the series of the authors' papers dedicated to this theme. We consider here a new, more precised triangular fuzzy model for learning assessment.*

Key words: *Fuzzy Logic, Fuzzy models, Learning Assessment, Triangular Model.*

Стаття надійшла до редакції 28.01.2014 р.

LANGUAGE, MATHEMATICS AND CRITICAL THINKING: THE CROSS INFLUENCE AND CROSS ENRICHMENT

(Мова, математика і критичне мислення:
взаємний вплив та взаємне збагачення)

Dr. Igor Ya. Subbotin, Professor,
Department of Mathematics, College of Letters and Sciences,
National University, Los Angeles, USA,
e-mail: isubboti@nu.edu
Dr. Michael Gr. Voskoglou, Professor,
School of Technological Applications Graduate Technological Educational Institute,
Patras, GREECE
e-mail: mvosk@hol.gr

Обговорюється вплив словарного запасу на рівень критичного мисленню студента. Використовуючи наявну інформацію про Єдину Основну Навчальну Програму в американській освіті, автори на деяких конкретних прикладах за допомогою моделі нечіткої логіки обґрунтовують свою позицію.

Ключові слова: *математична лексика, критичне мислення, нечіткі моделі, оцінка знань.*

We will start with the very obvious thesis that for mathematics communications we use its professional language which nothing else as a regular language saturated with specially defined mathematics terms. However, beyond understanding theory and formulas, the students need to be proficient in application of math and science knowledge to different situations and challenges. “Hands-on, project-based math and science curriculum activities provide opportunities for students to think critically about the use of math and science in solving problems, deepening their knowledge of the basics. For example, in completing an engineering design project based on realistic constraints that professionals in the field may face, such as a change in federal safety requirements, students need to think critically about how to revise their design prototype to satisfy its design goals and meet its scientific requirements” [2].

That is why just the well developed reading comprehending skills are crucially important for solving mathematical content problem. Moreover, even being a skilful in the formal technical mathematics and communication of mathematics, the student, whose reading comprehension abilities are limited, will not be able to make any progress in the application of these mathematical skills to some problems or just simple questions related to real world. This issue was one of the central themes in the current USA educational reform which is so called the Common Core Curriculum, which sets goals for K-12 classrooms emphasizing depth over breadth. It requires much better communication skills in all mathematical subjects. The student will be required not only to find the correct answer, but be ready to explain this answer and to justify and discuss all possible ways of solution. So, in other words, the student critical thinking abilities should be well developed.

The complexity of critical thinking is evident from the fact that there is no definition that is universally accepted. However, a great number of critical thinking skills as identified by are agreed upon by many authors. Some of these skills are: analysis and synthesis, making judgements, decision making, and drawing warranted conclusions and generalisations, etc. If we look at the critical thinking definitions, such as for instance “…disciplined thinking that is clear, rational, open-minded, and informed by evidence" [3]; "…purposeful, self-regulatory judgment which results in interpretation, analysis, evaluation, and inference, as well as explanation of the evidential, conceptual, methodological, criteriological, or contextual considerations upon which that judgment is based" (see [4, p. 26]), "the skill and propensity to engage in an activity with reflective skepticism" [6]. New York: Teachers College Press.; "…disciplined, self-directed thinking which exemplifies the perfection of thinking appropriate to a particular mode of domain of thinking" [7], and so on, we can easily trace reflections of those ideas in the Common Core documents (see, for example, [1]).

So, the implementing of the standards which require serious development of critical thinking skills became extremely important in the teaching of mathematics in USA schools.

The Mathematics Standards include "..two types of standards: Eight Mathematical Practice Standards (identical for each grade level) and Mathematical Content Standards (different at each grade level). Together these standards address both "habits of mind" that students should develop to foster mathematical understanding and expertise and skills and knowledge — what students need to know and be able to do. The mathematical content standards were built on progressions of topics across grade levels, informed by both research on children's cognitive development and by the logical structure of mathematics" [1].

The Standards mandate that eight principles of mathematical practice be taught:

1. Make sense of problems and persevere in solving them.
2. Reason abstractly and quantitatively.
3. Construct viable arguments and critique the reasoning of others.
4. Model with mathematics.
5. Use appropriate tools strategically.
6. Attend to precision.
7. Look for and make use of structure.
8. Look for and express regularity in repeated reasoning.

None of those principles can be right implemented without well developed reading comprehensive student's skills. There are no needs to prove this obvious statement. We just want to support it by the following interesting example, which we justify using the centroid fuzzy model. For general facts on fuzzy sets we refer freely to the book [5].

A classroom application

In one of the Los Angeles Unified District inner city school having very diverse student population (Hispanic 53% , Asian 22%, Black 18%, White 7%), Algebra 2 District Assessment Test was given. The test contents can be found in the appendix attached to the article. A very professional and dedicated teacher, who conducted this test, gave it in two his Algebra 2 classes. One of them was a regular class, another was a so-called "shelter" class, which means that waist majority of the students in this class are students for whom English is a second language, not a native tongue. It would be logical to expect that this "shelter" class test's results will be worse than in the regular class. However, the situation was opposite. Surprisingly, the "shelter" class performed better. It happened because the teacher, taking into account that the students in this class were not proficient in English, constantly worked on a daily bases on developing the students' mathematics vocabulary and comprehension in reading mathematics content problems. This training affected student's critical thinking and problem solving abilities. The results of the test are in the following chart.

Table 1

Algebra 2 (Periodic Assessment). Shelter class

% Scale	Grade	Amount of students	% of students
89-100	A	0	0
77-88	B	5	13
65-76	C	6	16
53-64	D	9	24

Less than 53	F	18	47
Total		38	

Regular class

% Scale	Grade	Amount of students	% of students
89-10	A	0	0
77-88	B	1	3
65-76	C	5	17
53-64	D	3	10
Less than 53	F	20	70
Total		29	

The methods of assessing a group's performance usually applied in practice are based on principles of the bivalent logic (yes-no). However these methods are not probably the most suitable ones. On the contrary, fuzzy logic, due to its nature of including multiple values, offers a wider and richer field of resources for this purpose. This gave us the impulsion to compare the results of performance of the above two classes by implementing the following fuzzy model and a defuzzification technique known as the *centroid method*.

According to this method, the centre of gravity of the graph of the membership function involved provides an alternative measure of the system's performance. The application of the centroid method in practice is simple and evident and, in contrast to the measures of uncertainty which can be also used as alternative defuzzification techniques (for example see [12] and its references), needs no complicated calculations in its final step. The techniques that we shall apply here have been also used earlier by the authors in [9-11], [13], etc.

Given a fuzzy subset $A = \{(x, m(x)): x \in U\}$ of the universal set U of the discourse with membership function $m: U \rightarrow [0, 1]$, we correspond to each $x \in U$ an interval of values from a prefixed numerical distribution, which actually means that we replace U with a set of real intervals. Then, we construct the graph F of the membership function $y=m(x)$.There is a commonly used in fuzzy logic approach to measure performance with the pair of numbers (x_c, y_c) as the coordinates of the *centre of gravity (centoid)*, say F_c, of the graph F, which we can calculate using the following well-known formulas:

(1)

$$x_c = \frac{\iint_F x\,dxdy}{\iint_F dxdy}, \quad y_c = \frac{\iint_F y\,dxdy}{\iint_F dxdy}$$

Concerning the described assessment, we characterize a student's performance as very low (F) if $x \in [0, 1)$, as low (D) if $x \in [1, 2)$, as intermediate (C) if

$x \in [2, 3)$, as high (B) if $x \in [3, 4)$ and as very high (A) if $x \in [4, 5]$ respectively.

Denote by C_1 the shelter class and by C_2 the regular class respectively and set

U={A, B, C, D, F}. We are going to represent the C_i's, i=1, 2 , as fuzzy subsets of U. For this, if n_{iA}, n_{iB}, n_{iC}, n_{iD} and n_{iF} denote the number of students of class C_i who achieved very low, low, intermediate, high and very high success respectively, we define the membership function m_{C_i} in terms of the frequencies, i.e. by

$$m_{C_i}(x)=\frac{n_{ix}}{n}$$

for each x in U. Thus we can write $C_i = \{(x, \frac{n_{ix}}{n}) : x \in U\}$, i=1,2.

Therefore in this case the graph F of the corresponding fuzzy subset of U is the bar graph of Figure 1 consisting of five rectangles, say F_i, i=1,2,3, 4, 5 , whose sides lying on the x axis have length 1.

In this case $\iint_F dxdy$ is the area of F which is equal to $\sum_{i=1}^{5} y_i$. Also $\iint_F x\,dxdy$

$= \sum_{i=1}^{5} \iint_{F_i} xdxdy = \sum_{i=1}^{5} \int_{0}^{y_i} dy \int_{i-1}^{i} xdx = \sum_{i=1}^{5} y_i \int_{i-1}^{i} xdx =$

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}(2i-1)y_i$, and

$\iint_F ydxdy = \sum_{i=1}^{5} \iint_{F_i} ydxdy = \sum_{i=1}^{5} \int_{0}^{y_i} ydy \int_{i-1}^{i} dx =$

$\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{y_i} ydy = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$. Therefore formulas (1) are transformed into the following form:

(2)

$$x_c = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 7y_4 + 9y_5}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}\right),$$

$$y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}\right).$$

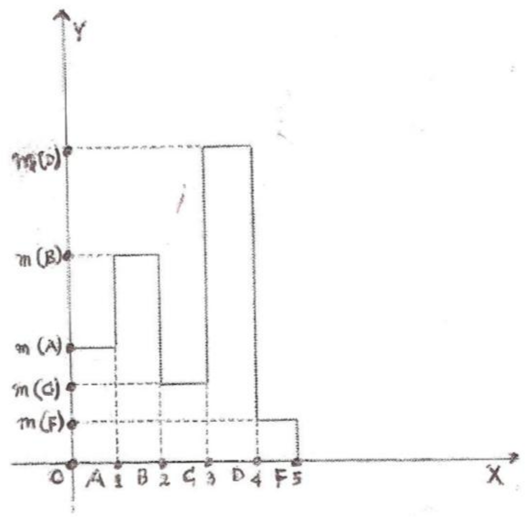


Figure 1: Bar graphical data representation

Normalizing our fuzzy data by dividing each m(x), $x \in U$, with the sum of all membership degrees we can assume without loss of the generality that $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 1$. Therefore we can write:

(3)

$$x_c = \frac{1}{2}\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 7y_4 + 9y_5\ ,$$

$$y_c = \frac{1}{2}\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2$$

with $y_i = \frac{m(x_i)}{\sum_{x \in U} m(x)}$.

But $0 \le (y_1-y_2)^2 = y_1^2+y_2^2-2y_1y_2$, therefore $y_1^2+y_2^2 \ge 2y_1y_2$,with the equality holding if, and only if, $y_1=y_2$.

In the same way one finds that $y_1^2+y_3^2 \ge 2y_1y_3$, and so on. Hence it is easy to check that $(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)^2 \le 5(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2)$, with the equality holding if, and only if $y_1=y_2=y_3=y_4=y_5$.

But $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 1$, therefore

(4)

$$1 \le 5(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2),$$

with the equality holding if and only if $y_1=y_2=y_3=y_4=y_5=\frac{1}{5}$.

Then the first of formulas (3) gives that $x_c = \frac{5}{2}$. Further, combining the inequality (4) with the second of formulas (3), one finds that $1 \le 10y_c$, or $y_c \ge \frac{1}{10}$ Therefore the unique minimum for y_c corresponds to the centre of gravity $F_m(\frac{5}{2}, \frac{1}{10})$.

The ideal case is when $y_1=y_2=y_3=y_4=0$ and $y_5=1$. Then from formulas (3) we get that $x_c = \frac{9}{2}$ and $y_c = \frac{1}{2}$.Therefore the centre of gravity in this case is the point

$$F_i(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}).$$

On the other hand, in the worst case $y_1=1$ and $y_2=y_3=y_4= y_5=0$. Then by formulas (3), we find that the centre of gravity is the point $F_w(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Therefore the “area” where the centre of gravity F_c lies is represented by the triangle $F_w F_m F_i$ of Figure 2.

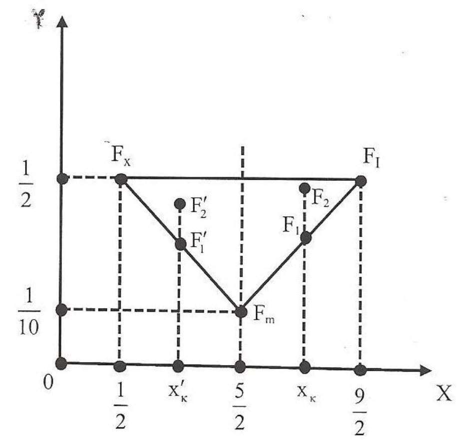


Figure 2: Graphical representation of the “area” of the centre of gravity

Then from elementary geometric considerations it follows that the greater is the value of x_c the better is the group's performance. Also, for two groups with the same $x_c \geq 2{,}5$, the group having the centre of mass which is situated closer to F_i is the group with the higher y_c; and for two groups with the same $x_c < 2.5$ the group having the centre of mass which is situated farther to F_w is the group with the lower y_c. Based on the above considerations it is logical to formulate our criterion for comparing the groups' performances in the following form:

- *Among two or more groups the group with the biggest x_c performs better.*
- *If two or more groups have the same $x_c \geq 2.5$, then the group with the higher y_c performs better.*
- *If two or more groups have the same $x_c < 2.5$, then the group with the lower y_c performs better.*

We apply this model to the given in the table 1 case. For the shelter class, we have the following:

$y_c = 0.5(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2) = 0.5(0.47^2 + 0.24^2 + 0.16^2 + 0.13^2) =$

$0.5(0.221 + 0.058 + 0.026 + 0.017) = 0.16$;

$x_c = 0.5(0.47+3\cdot 0.24+5\cdot 0.16+7\cdot 0.13) = 0.5(0.47+0.72+0.80+0.91) = 1.45$.

For the regular class :

$y_c = 0.5(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2) = 0.5(0.70^2 + 0.10^2 + 0.17^2 + 0.03^2) =$

$0.5(0.490 + 0.010 + 0.028 + 0.001) = 0.27$;

$x_c = 0.5(0.70+3\cdot 0.10+5\cdot 0.17+7\cdot 0.03) = 0.5(0.70+0.30+0.85+0.21) = 1.33$.

So, according to the above stated criterion, the shelter class demonstates a better performance on this test.

Appendix. Algebra 2 Periodic Assessment [8]

Four Situations

1. Sketch a graph to model each of the following situations. Think about the shape of the graph and whether it should be a continuous line or not.

A: Candle

Each hour a candle burns down the same amount. x = the number of hours that have elapsed. y = the height of the candle in inches.

B: Letter

When sending a letter, you pay quite a lot for letters, weighing up to an ounce. You then pay a smaller, fixed amount for each additional ounce (or part of an ounce.)

x = the weight of the letter in ounces.

y = the cost of sending the letter in cents.

C: Bus

A group of people rent a bus for a day. The total cost of the bus is shared equally among the passengers.

x = the number of passengers.

y = the cost for each passenger in dollars.

D: Car value

My car loses about half of its value each year.

x = the time that has elapsed in years.

y = the value of my car in dollars.

2. The formulas below are models for the situations. Which situation goes with each formula? Write the correct letter (A, B, C or D) under each one.

$y = \frac{300}{x}$.

$y = 12 - 0.5x$.

$y = 30 + 20x$.

$y = 2000 \cdot (0.5)^x$.

3. Answer the following questions using the formulas. Under each answer show your reasoning.

How long will the candle last before it burns completely away?

How much will it cost to send a letter weighing 8 ounces?

If 20 people go on the coach trip, how much will each have to pay?

How much will my car be worth after 2 years?

References

[1] California Common Core State Standards Mathematics, Adopted by the California State Board of Education August 2010 and modified January 2013http://www.cde.ca.gov/be/st/ss/documents/ccssmathstandardaug2013.pdf

[2] Critical Thinking/Math & Science. How Can Critical Thinking & Problem Solving Skills Support Math and Science Curric-

ulum at the 9-12 Level? http://route21.p21.org/?Itemid=167&id=21 &option=com_content&view=article Accessed: February 12, 2013.

[3] Dictionary.com, "critical thinking," in Dictionary.com Unabridged. Source location: Random House, Inc. http://dictionary.reference.com/browse/critical thinking. Available: http://dictionary.reference.com. Accessed: February 12, 2013.

[4] Facione, Peter A. Critical Thinking: What It is and Why It Counts, Insightassessment.com, 2011.

[5] Klir, G. J. & Folger, T. A., Fuzzy Sets, Uncertainty and Information, Prentice-Hall, London, 19

[6] McPeck, J. Thoughts on subject specificity. In S. Norris (Ed.), The generalizability of critical thinking (pp. 198–205). New York: Teachers College Press. 1992.

[7] Paul,R. Teaching critical thinking in the strong sense: A focus on self-deception, world views and a dialectical mode of analysis. Informal Logic Newsletter 4(2), (1982) 2-7.

[8] Student Materials Functions and Everyday Situations © 2012 MARS, Shell Center, University of Nottingham.

[9] Subbotin, I. Ya. Badkoobehi, H., Bilotckii, N. N., Application of fuzzy logic to learning assessment. Didactics of Mathematics: Problems and Investigations, 22, 38-41, Donetsk, 2004.

[10] Subbotin, I.Ya., Badkoobehi, H., Bilotskii, N.N., Fuzzy logic and learning assessment, Didactics of Mathematics: Problems and Investigations, 24, Donetsk, 112-118, 2005.

[11] Subbotin, I. Ya, Voskoglou, M. Gr., Applications of fuzzy logic to Case-Based Reasoning, International Journal of Applications of Fuzzy Sets, 1, 7-18, 2011.

[12] Voskoglou, M. Gr., Stochastic and fuzzy models in Mathematics Education, Artificial Intelligence and Management, Lambert Academic Publishing, Saarbrucken, Germany, 2011 (for more details look at http://amzn.com./3846528218).

[13] Voskoglou, M. Gr., Fuzzy Logic and Uncertainty in Mathematics Education, International Journal of Applications of Fuzzy Sets, 1, 45-64, 2011.

Резюме. **Субботин И., Воскоглоу М. ЯЗЫК, МАТЕМАТИКА И КРИТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ: ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ И ВЗАИМНОЕ ОБАГОЩЕНИЕ.** *В этой статье авторы обсуждают влияние словарного запаса на уровень критического мышлению студента. Используя имеющуюся информацию о Единой Основной Учебной Программе в американском образовании, авторы на некоторых конкретных примерах с помощью модели нечеткой логики обосновывают свою позицию.*

Ключевые слова: *математическая лексика, критическое мышление, нечеткие модели, оценка знаний.*

Abstract. **Subbotin I., Voskoglou M. LANGUAGE, MATHEMATICS AND CRITICAL THINKING: THE CROSS INFLUENCE AND CROSS ENRICHMENT.** *In this article, the authors discuss the relations between the language proficiency and mathematical thinking, and the influence of the vocabulary development on the expansion of student's critical thinking abilities. Using available information regarding the so-called Common Core Curriculum reform in USA education, some concrete examples and supporting justification based on the centroid fuzzy model were given.*

Key words: *mathematical vocabulary, critical thinking, fuzzy models, learning assessment.*

Стаття надійшла до редакції 16.02.2014 р.

О МЕТОДИЧЕСКИХ ПРИЕМАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФИГУР

С.Е. Батовский,
студент,
П.Г. Стеганцева,
канд. физ.-мат. наук, доцент,
Запорожский национальный университет,
г. Запорожье, УКРАИНА,
e-mail: steg_pol@mail.ru

Розглядаються методичні та дидактичні особливості навчання розв'язанню задач на відновлення геометричних фігур. Обговорюються засоби підвищення мотивації навчання, можливості застосування спеціальних позначень, наводиться приклад побудови і реалізації алгоритму відтворення параболи за її фрагментом.

Ключові слова: *задача на побудову, парабола, теорема Паскаля, оптична властивість параболи, дотична до параболи.*

Постановка проблемы. При обучении математике каждой задаче отводится важная роль. Задачи на построение – одна из значительных составляющих курса геометрии. Среди последних можно выделить задачи на восстановление геометрических фигур. Для решения таких задач требуется широкий математический кругозор, изобретательность, творческий подход. С другой стороны, они же и формируют все эти качества. Каждая такая задача – небольшое исследование, и этот факт является очень существенным в вопросах повышения эффективности учебного процесса, которые постоянно обсуждаются на страницах периодических изданий [2]. Вместе с тем, задачам на восстановление фигур практически не уделяется внимания. В связи с их рассмотрением возникает целый ряд вопросов: как сформулировать условие задачи, как найти и описать алгоритм решения задачи, как описать используемые элементарные построения и другие.

Цели статьи – *на примере задачи о восстановлении параболы продемонстрировать некоторые приемы, помогающие ответить на поставленные вопросы*.

Изложение основного материала.

1. Формулировка задачи как средство усиления мотивации обучения.

Приведем две формулировки одной из задач на восстановление фигур.

- На листе бумаги изображена только небольшая часть параболы. Можно ли по ней восстановить всю параболу и оси координат, пользуясь циркулем и линейкой?

Трудно предположить, где и когда такая задача может возникнуть, и, вследствие этого, возникает вопрос, заинтересует ли она учащихся. Но если вспомнить, что многие физические законы, такие как, например, траектории движения тел в магнитных полях, описываются кривыми второго порядка, можно предложить другую формулировку этой задачи.

- По результатам наблюдений ученых за неким космическим объектом выяснилось, что он движется по параболе, а также, что существует большая вероятность столкновения этого объекта с Землей. Как проверить это предположение?

Есть также возможность сформулировать эту задачу в шуточной форме, как это сделано в источнике, найденном авторами в сети Internet.

- На плоскости изображен график функции $y = x^2$. Незнайка стер оси координат, отрезок единичной длины и весь график за исключением некоторого маленького участка. Можно ли восстановить оси координат и единичный отрезок, а также другие точки графика?

2. Использование общепринятых и специальных обозначений.

Важной методической задачей является нахождение и описание алгоритма решения задачи. Алгоритм решения любой задачи на построение включает ряд подзадач, среди которых элементарные построения и их композиции, причем они могут повторяться. Это делает описание алгоритма громоздким, отвлекает от основной идеи решения задачи. Для преодоления указанных трудностей в статье предлагается использовать, наряду с общепринятыми, следующие специальные обозначения для подзадач:

Line (A,B) – построение прямой, проходящей через точки A и B,

Circle (O,R) – построение окружности радиуса R с центром в точке O,

Center (A,B) – построение середины отрезка AB,

X-Line (a,O) – построение прямой, проходящей через точку O перпендикулярно прямой a,

H-Line (a,O) – построение прямой, проходящей через точку O параллельно прямой a,

Reflex (a,b) – построение прямой, симметричной прямой b относительно прямой a.

Все эти построения принято называть элементарными или основными, их алгоритмы можно найти в учебной литературе по геометрии.

Попытки использовать при решении некоторых методических и дидактических задач специальных обозначений предпринимаются и другими авторами [1].

3. Создание и реализация алгоритма решения задачи.

Примем вторую из предложенных формулировок задачи. Она предоставляет дидактическую возможность использования элементов математического моделирования. Анализ условия приводит к следующим выводам: объект движется по траектории, являющейся некоторой параболой. Учёные некоторое время уже наблюдают за объектом, а, значит, часть траектории (то есть часть параболы) уже известна. Чтобы проверить предположение, необходимо восстановить всю траекторию движения объекта, а именно – параболу.

Итак, математическая постановка задачи следующая: Можно ли с помощью циркуля и линейки построить оси координат и любую точку параболы, имея лишь один ее фрагмент?

Ответ на этот вопрос положительный, причем если снять требование построения осей координат, то возможность построения любой точки параболы следует из теоремы Паскаля: *Если шестиугольник вписан в кривую второго порядка, то точки пересечения трех пар его противоположных сторон принадлежат одной прямой*. Восстановление же осей координат является более сложной задачей. Решение задачи в ее полной формулировке можно разбить на четыре этапа:

- Определение направления оси параболы;
- Построение двух касательных в известных точках параболы;
- Восстановление фокуса и директрисы;
- Построение произвольной точки параболы.

Рассмотрим эти этапы, демонстрируя эффективность предложенных специальных обозначений.

Определение направления оси параболы

Необходимо построить произвольную прямую, параллельную оси параболы. Для этого достаточно воспользоваться известным свойством: *Середины всех параллельных между собой хорд параболы принадлежат прямой, которая параллельна ее оси симметрии*.

1. Обозначим крайние точки фрагмента параболы буквами A и B, а сам фрагмент буквой γ;

2. a = **Line** (A,B);

3. E = **Center** (A,B);

4. b = **H-line** (a,C)**,** где $C \in \gamma$;

5. F = **Center** (C,D)**,** где $D = b \cap \gamma$;

6. x = **Line** (E,F) – искомая прямая;

Построение двух касательных в известных точках параболы

Это построение возможно благодаря теореме Паскаля для вписанного пятиугольника: *Касательная к линии второго порядка, проведённая через вершину вписанного пятиугольника, пересекается со стороной, противолежащей этой вершине, в точке, которая лежит на прямой, проходящей через точки пересечения двух других пар несмежных сторон этого пятиугольника.*

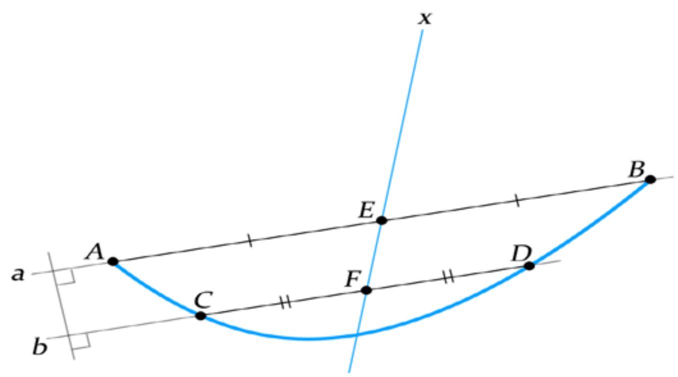


Рис. 1. Построение прямой, параллельной оси параболы

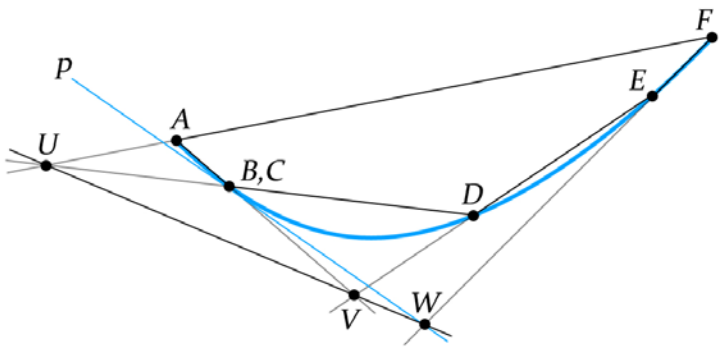


Рис. 2. Построение касательной прямой

1. Выбираем на фрагменте γ параболы пять точек A, B=C, D, E, F (двумя буквами обозначается точка, к которой проводится касательная);

2. **Line** (A,F)**,** **Line** (C,D);

3. U=**Line** $(A,F) \cap$ **Line** (C,D);

4. **Line** (A,B)**,** **Line** (E,D);

5. V=**Line** $(A,B) \cap$ **Line** (E,D);

6. **Line** (U,V), **Line** (E,F);

7. W=**Line** $(U,V) \cap$ **Line** (E,F);

8. p=**Line** (B,W) – искомая касательная.

Аналогично строится вторая касательная к γ, будем для нее использовать обозначение q.

Восстановление фокуса и директрисы

Эти построения основаны на применении оптического свойства параболы: *Пучок лучей, параллельных оси симметрии параболы, отражаясь от неё, собирается в её фокусе.* Теперь мы сможем через точки касания построенных касательных провести прямые, параллельные оси параболы (достаточно двух прямых), и отразить их от касательных.

1. Обозначим точки касания фрагмен-

та γ с касательными p и q буквами P и Q соответственно;

2. y=**H-Line** (x, P); z=**H-Line** (x, Q);

3. y' =**Reflex** (p, y), z' =**Reflex** (q, z);

4. $F = y' \cap z'$ – искомый фокус;

5. **Circle** (P,PF); A= $y \cap$ **Circle** (P,PF);

6. **Circle** (Q,,QF); B= $z \cap$ **Circle** (Q,,QF));

7. d=**Line** (A, B) – искомая директриса.

Построение произвольной точки параболы

Как указывалось выше построение произвольной точки параболы можно осуществить с помощью теоремы Паскаля, причем для этого нужно иметь только пять ее точек. Но в нашем случае, когда уже восстановлены фокус и директриса, естественнее воспользоваться определением параболы – *каждая ее точка равноудалена от директрисы и фокуса.*

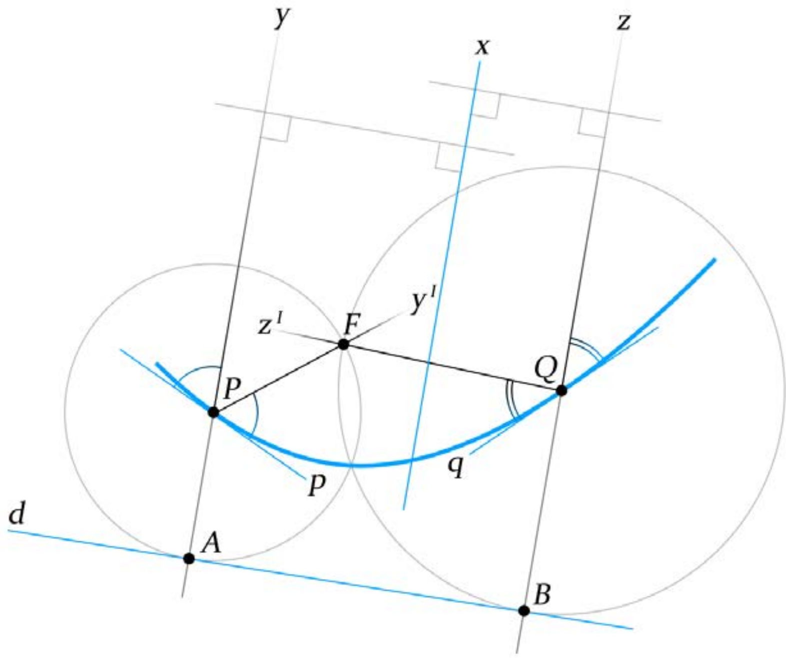


Рис. 3. Построение фокуса и директрисы параболы

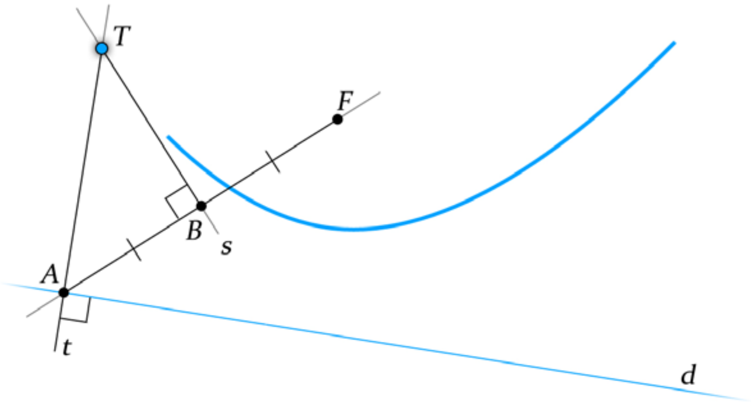


Рис. 4. Построение точки параболы

1. t=**X-Line** (d, A), где A – произвольная точка директрисы d;

2. B=**Center** (A,F);

3. s =**X-Line** (AF, B);

4. T=$t \cap s$ - искомая точка параболы.

Выводы. В статье предложены некоторые рекомендации методического характера, связанные с задачами на восстановление геометрических фигур. Они могут быть полезны преподавателям методики математики, учителям школ, студентам, которые готовят себя к педагогической работе, и всем, интересующимся математикой.

1. Гуртовий Ю.В. Використання знаково-символічних засобів при побудові графіків функцій / Ю.ВГуртовий, Л.І.Лутченко, Ю.В.Яременко // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2010. – Вип. 33. – С. 101–106.

2. Ровенська О.Г. Проблемний підхід у викладанні вищої математики для інженерних спеціальностей / О.Г. Ровенська // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2011. – Вип. 35. – С. 49–52.

Резюме. **Батовский С., Стеганцева П. О МЕТОДИЧЕСКИХ ПРИЕМАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФИГУР.** *Рассматриваются методические и дидактические особенности обучения решению задач на восстановление геометрических фигур. Обсуждаются способы повышения мотивации обучения, возможности применения специальных обозначений, приводится пример построения и реализации алгоритма восстановления параболы по ее фрагменту.*

Ключевые слова: *задача на построение, парабола, теорема Паскаля, оптическое свойство параболы, касательная к параболе.*

Abstract. **Batovsky S., Stegantseva P. ON THE METHODICAL APPROACHS OF THE SOLUTION OF THE PROBLEMS ON THE RESTORATION OF THE FIGURES.** *The problems on the restoration of the figures make one of the types of the construction problems. These problems are considered to be the research problems. One needs the mathematical scope, gumption and creativity to solve the problems connected with the restoration of the figures Moreover, such problems itself form these features. That is why the problems on the restoration of the figures hold a prominent place in the academic activities.*

One considers the methodical and didactical particularities of the training of the solution of the problems on the restoration of the geometrical figures. Some methodical approaches have been presented for the solution of the problem connected with the restoration of the parabola on its given fragment. The use of the special designations is one of such approaches. In order to construct an algorithm the authors have used the material which is beyond the scope of the mathematics in the secondary school. This material is the subject of the advanced studying of mathematics. One discusses the ways of the stimulation of the training and the possibilities of the application of the special symbols. One gives an example of the construction and the realization of the algorithm of the parabola restoration by its fragment.

Key words: *the problem of the construction, parabola, Pascal's theorem, the optical property of the parabola, the tangent to the parabola.*

References

1. Gurtovy Y.V., Lutchenko L.I., Yaremenko Y.V. The use of the designation techniques for the construction the function graphs / Y.V. Gurtovy, L.I Lutchenko, Y.V. Yaremenko // Didactics of the mathematics: problems and investigation: International collection scientific works. – Donetsk, 2010. – Issue 33. – P. 101–106.

2. Rovenska O.G. The problem approach to the teaching of the mathematics for the engineering profession / O.G. Rovenska // Didactics of the mathematics: problems and investigation: International collection scientific works. – Donetsk, 2011. – Issue 35. – P. 49–52.

Стаття представлена професором О.І. Скафою.
Надійшла до редакції 20.02.2014 р.

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОНЯТИЮ «ИНФОРМАЦИЯ»

К.С. Бородкина,
учитель математики и информатики,
Донецкая специализированная школа I – III ступеней
с углубленным изучением отдельных предметов и курсов №33,
г. Донецк, УКРАИНА,
e-mail: K.S.Borodkina@yandex.ru

Розглянуті деякі аспекти і різні підходи до поняття «інформація». Аналіз досліджень з даного питання показує велику кількість різних тлумачень загальновідомого поняття. Зосереджена увага на психолого-педагогічному визначенні поняття інформації та обґрунтовується те, що інформація виникає у свідомості людини в результаті її пізнавальної діяльності.

Ключові слова: *інформація, відомості, повідомлення, дані.*

Постановка проблемы. В развитии современного общества важную роль играет процесс его информатизации. Он предусматривает массовое привлечение методов и современных способов сбора, обработки, представления, передачи и хранения информации на основе средств вычислительной техники.

Что же такое информация? Первоисточником данного термина является латинское слово informatio (изложение, истолкование, разъяснение), а вошло оно в русский язык, по мнению П.Я.Черных, в эпоху Петра I [14].

Понятие информации является одним из фундаментальных в современной науке. Информацию, наряду с веществом и энергией, рассматривают в качестве важнейшей сущности мира, в котором мы живем. Однако если задаться целью и формально определить понятие «информация», то сделать это будет чрезвычайно сложно. Аналогичными «неопределяемыми» понятиями, например, в математике является «точка» или «прямая».

Анализ исследований и публикаций. Важной составляющей новой парадигмы образования является идея непрерывного обучения, реализация которого направлена на преодоление главного противоречия – стремительные темпы роста объемов информации в мире и ограничение возможностей их усвоения человеком [2]. Немало работ украинских и зарубежных исследователей, посвящено проблеме совершенствования понятия «информация» в социальной сфере, в частности в образовании. Среди них Ф.Л.Бауэр, Д.И.Блюменау, Н.Винер, С.У.Гончаренко, Г.Гооз, М.И.Жалдак, Н.Н.Моисеев, Н.В.Морзе, С.И.Ожегов, Ю.Н.Столяров, А.П.Суханов, Р.Хартли, К.Шеннон, И.И.Юзвишин и др. Вопрос о раскрытии сущности понятия «информация» является на сегодняшний день дискуссионным и открытым даже на уровне терминологического аппарата.

Поэтому **целью статьи** *является уточнение некоторых аспектов и различных подходов к понятию «информация».*

Изложение основного материала исследования. Об информации много спорят, говорят, пишут и до сих пор не приходят к единому толкованию этого понятия, приемлемому для всех. Наличие разных мнений по одному и тому же поводу чаще всего говорит о том, что мы имеем дело с плохо изученным явлением.

В качестве примера приведем разнообразие толкований понятия «информация», представленное в информационных ресурсах России [8]:

информация – это несистематизированные, неупорядоченные и неустоявшиеся сведения;

информация – сведения, не прошедшие проверку на истинность и достоверность, т.е. «сырой» материал;

информация – фактические данные;

информация – сведения, не относящиеся к области науки и техники, а используемые в обыденной жизни (донаучные сведения);

информация – это сведения, снимающие неопределенность системы;

информация – сведения, обладающие новизной;

информация – сведения о том, где находятся эти сведения, т.е. сведения о сведениях (в современной терминологии - метаинформация);

информация – все то, что, так или иначе, зафиксировано в знаковой форме в виде документов;

информация – текущие поступления в документальные фонды;

информация – это то, что поступает в наш мозг из многих источников и во многих формах, и, взаимодействуя там, образует нашу структуру знания;

информация – это единственный и универсальный способ передачи знаний, эмоциональных переживаний и волевых усилий между людьми.

Перечень такого рода «определений» можно продолжать очень долго. Некоторые исследователи считают, что информацией можно называть новые полученные знания, а то, что уже известно – информацией не является. Причем не уточнено, кому известно и как давно полученная информация известна.

Анализ исследований по данному вопросу показывает обилие разных подходов к этому, казалось бы, общеизвестному и устоявшемуся понятию. Насколько специалисты разных отраслей далеки от окончательного понимания сущности информации, было показано Ю.Н.Столяровым [12].

Так, известно знаменитое высказывание «отца» кибернетики Н.Винера: «Информация есть информация, а не материя и не энергия». Тем самым исследователь отказался от формулирования определения информации, считая, что оно сродни с такими категориями, как движение, жизнь, сознание [3].

Академик Н.Н.Моисеев также считал, что универсального определения понятию информации не только нет, но и быть не может из-за его широты [9].

На общелексическом уровне понятие «информация» чаще всего толкуется как сведения, сообщения, осведомляющие о каких-то событиях, явлениях, процессах передаваемые от человека к человеку.

Однако это не исчерпывает всего содержания понятия «информация». Так, существует информация об окружающей действительности, которую человек получает через свои органы чувств, и она далеко не во всех случаях исходит от другого человека (температура окружающей среды, рельеф местности, время суток и т.п.).

В «Словаре русского языка» С.И.Ожегов определяет информацию как сведения об окружающем мире и протекающих в нем процессах, воспринимаемых человеком или специальным устройством [10]. Автор раскрывает понятие «сведения» – это познания в какой-либо области, известия, сообщения, знания, представление о чем-либо [10].

В Энциклопедическом словаре: информация – (от лат. informatio – разъяснение – изложение) определяется как:

1) первоначальная – сведения, передаваемые людьми устным, письменным или другим способом (с помощью условных сигналов, технических средств и т. д.);

2) общенаучное понятие, включающее обмен сведениями между людьми, человеком и автоматом, автоматом и автоматом; обмен сигналами в животном и растительном мире; передачу признаков от клетки к клетке, от организма к организму.

Значение слова «информация» по Бизнес словарю толкуется как:

1) значение, приписываемое данным на основе известных соглашений, относящихся к их представлению;

2) сведения, данные, значения экономических показателей, являющиеся объектами хранения, обработки и передачи;

3) одна из трех фундаментальных субстанций (вещество, энергия, информация), составляющих сущность мироздания и охватывающих любой продукт мыслительной деятельности, знания и образы [11].

В потоке информации все труднее ориентироваться. Подчас выгоднее создавать новый интеллектуальный продукт, нежели вести поиск аналогов, созданных ранее. Вот почему сегодня информация становится понятием первой необходимости и расхожими являются две истины:

1. Кто владеет информацией, тот владеет миром.

2. Он слишком много знал...

Информация, по мнению И.И.Юзвишина, – это «генерализационно-фундаментальная субстанция единого кодово-сотового пространства Вселенной, включающего воздух, воду, землю, солнечные и другие светоносные лучи, поля, их следы и весь спектр космических излучений, материализованных и дематериализованных сред, и выражающаяся через массу, скорость, энергию и другие формы».

Информация – универсальная субстанция, пронизывающая все сферы человеческой деятельности, служащая проводником знаний и сведений, инструментом общения, взаимопонимания и сотрудничества, утверждения стереотипов мышления и поведения (ЮНЕСКО).

Возможно, что причина такой несогласованности заключается в том, что слово «информация» имеет бытовое происхождение и применялось задолго до его проникновения в науку. Это действительно так, но объясняет лишь одну сторону проблемы. Вторая состоит в многоликости и многомерности понятия «информация». Существование такого количества определений характеризует информацию как общенаучную категорию, как «универсальную субстанцию».

Недетерминированный подход к понятию информации встречается также достаточно широко. Он состоит в отказе от определения информации на том основании, что оно является фундаментальным, как, например, материя и энергия. Так, например, мы не найдем определения информации и в таком уважаемом справочном издании, как Британская энциклопедия. Определение можно получить лишь косвенным образом через статью «Обработка информации и информационные системы», где говорится, что «... этот термин используют применительно к фактам и суждениям, получаемым в повседневной жизни от других живых существ, из средств массовой информации, из электронных баз данных, а также путем наблюдения явлений окружающей среды» [0].

Информация нужна человеку не вообще, а конкретно и в нужное время для ориентирования в окружающем мире и принятия решений о своих дальнейших действиях. Рассмотрим некоторые примеры определения «информация» [11]:

Пример 1. Вы хотите узнать, который час. Вы смотрите на часы и видите лишь положение стрелок относительно делений на циферблате – это данные, которые при наличии соответствующего метода обработки *могут стать информацией для вас.* В данном случае методы обработки данных включают в себя знание цены деления шкалы (5 минут или 1 час), арифметические правила умножения и сложения и пр. Применение этих методов к данным о положении стрелки позволит вам получить информацию о текущем времени.

Пример 2. Все файлы, хранящиеся в памяти компьютера, записаны в двоичном коде. Но если вы в текстовом редакторе откроете файл, созданный в графическом редакторе, то в лучшем случае увидите на экране набор малопонятных символов. Методы обработки двоичных кодов в этих программных средствах различны. Только применение соответствующих методов обработки (в нашем случае – выбор нужного редактора) позволит вам увидеть, какой рисунок содержится в файле.

Итак, *в информатике* информацию можно рассматривать как продукт *взаимодействия данных и методов их обработки,* адекватных решаемой задаче.

Пример 3. Идея, пришедшая в голову вашему другу и которой он с вами поделился, с бытовой точки зрения является для вас информацией, если вы ее поняли. С точки зрения технического подхода это не информация. С точки зрения новизны – информация. Согласно подходу к информации как снятой неопределенности, рассказ друга будет для вас информацией, только если он содержит неизвестные до сих пор вам ответы на некоторые вопросы.

Выводы. До сих пор нет согласования в научных кругах о четком толковании вышеуказанного понятия. Становясь предметом изучения многих наук, в каждой из них данное понятие конкретизируется и обогащается. Отсюда – множество определений понятия «информация». В законе Украины «О защите экономической конкуренции», на наш взгляд, подробнее дается определение этого понятия чем в законе Украины «Об информации».

Информация – сведения в любой форме, виде и сохраненные на любых носителях (в том числе переписка, книги, пометки, иллюстрации (карты, диаграммы, органиграммы, рисунки, схемы и т.п.), фотографии, голограммы, кино- , видео- ,микрофильмы, звуковые записи, базы данных компьютерных систем или полное или частичное воспроизведение элементов), объяснения лиц и любые другие публично объявленные или документированные сведения [6] .

Для сравнения в педагогическом словаре С.У.Гончаренко дается такое определение понятия информации: информация (от лат. informatio – объяснение, преподавания) – одно из общих понятий науки; в широком смысле – новые сведения об окружающем мире, получаемые в результате взаимодействия с ним. В последнее время информация широко используется во всех отраслях науки, в частности философии, психологии, педагогике, социологии, лингвистике. В педагогике и психологии – содержание любого сообщения, данные о чем-то, которые рассматриваются в аспекте передачи их во времени и пространстве [4].

Итак, по мнению М.И.Жалдака [6], информация возникает в сознании человека в результате его собственной познавательной деятельности. Соглашаясь с мнением ученого, действительно нет нужды пытаться выяснить точный смысл понятия информация, т. е. пытаться дать определение этого понятия.

Анализируя различные подходы к понятию «информация» ученым, исследователям по данному вопросу, полезно помнить слова известного немецкого педагога-демократа А.В.Дистервега: «Развитие и образование ни одному человеку не могут быть переданы или сообщены. Каждый, кто желает к ним приобщиться, должен достигнуть этого собственной деятельностью, собственными силами, собственным напряжением» [5].

1. *Блюменау Д.И. Информация и информационный сервис. – Ленинград: Наука, 1989. – 192с.*
2. *Богачик М. Формування інформаційної компетентності старшокласників загальноосвітніх навчальних закладів [Электронный ресурс] / М.Богачик. – Режим доступа: http:// archive.nbuv.gov.ua/portal/Soc_ Gum/ Npd/ 2009_ 4/ Bogachik.pdf. – Заголовок с титула экрана.*
3. *Винер Н. Кибернетика или Управление и связь в животном и машине /2-е изд. / Н.Винер. – М.: Сов. радио, 1968 – 201с.*
4. *Гончаренко С. Український педагогічний словник / С.Гончаренко. – К.: Либідь, 1997. – 374 с.*
5. *Дистервег А. Избранные педагогические сочинения / А.Дистервег. – М.: Просвещение, 1956. – 374 с.*
6. *Закон України від 11 січня 2001 року «Про захист економічної конкуренції» // Відомості Верховної Ради України. – 2001. – № 12.*
7. *Жалдак М.І. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання / М.І.Жалдак //Науковий часопис. – Київ: НПУ ім. М.П.Драгоманова. 2005. – Вип. 9. – С. 3-14.*
8. *Информационные ресурсы России: Национальный доклад // Информационные ресурсы России. 2004. – № 2. – С. 2-18.*
9. *Моисеев Н.Н. Алгоритмы развития / Н.Н.Моисеев. – М.: Наука. 1987. – 304 с.*
10. *Ожегов С.И. Словарь русского языка / С.И.Ожегов. – М., 1952. – С. 220.*
11. *Основные подходы к определению понятия «информация» [Электронный ресурс] / Основные подходы к определению понятия «информация» – Режим доступа: http:// do.gendocs.ru/docs/index-270006.html. – Заголовок с титула экрана.*
12. *Столяров Ю.Н. Сущность информации / Ю.Н.Столяров. – М.: ГПНТБ, 2000. – 120 с.*
13. *Суханов А.П. Информация и прогресс /*

А.П.Суханов. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1988. – 192 с.

14. Черных П.Я. Историко-этимологи ческий словарь русского языка / П.Я.Черных. – М., 1993. – С. 335.

Резюме. **Бородкина К.С. РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОНЯТИЮ «ИНФОРМАЦИЯ».** *В статье уточнены некоторые аспекты и различные подходы к понятию «информация». Анализ исследований по данному вопросу показывает обилие разных подходов к этому, казалось бы, общеизвестному и устоявшемуся понятию. Рассмотрены понятия «информация», но, несмотря на затраченные многими исследователями большие усилия, до настоящего времени не удалось определить его, по-видимому, прежде всего потому, что информация относится к наиболее общим понятиям, как, например, понятие «точка» или «прямая». В заключении, соглашаясь с мнением М.И.Жалдака, отмечается, что нет нужды пытаться выяснить точный смысл понятия информация, т.е. пытаться дать определение этого понятия.*

Ключевые слова: *информация, сведения, сообщения, данные.*

Abstract. **Borodkina K. DIFFERENT APPROACHES TO THE CONCEPT OF «INFORMATION».** *The article specifies some aspects and different approaches to the concept of "information". In the "Dictionary of Russian language" gives this definition of information – this information about the world and its processes, perceived by the person or a special device. Information – universal substance that permeates all spheres of human activity, serving conductor knowledge and information tool for communicating, understanding and cooperation, adoption patterns of thinking and behaviour. Analysis of research on the subject shows an abundance of different approaches to this, it would seem, a well-known and established concepts. The concepts of "information", but despite many researchers expended great efforts to date could not be determined through such concepts and, apparently, primarily because the information relates to the most general concepts, such as the concept of "point" or "straight". In conclusion, agreeing with M.I. Zhaldak really no need to try to figure out the exact meaning of the notion of information, try to define this concept.*

Key words: *information, messages, data.*

References

1. *Blyumenau D I. Clearing Information and service. – Leningrad: Science, 1989. – 192 p.*
2. *Bohachyk M. Formation of information competence of senior pupils of secondary schools [electronic resource] / M. Bohachyk. – Mode of access:http://archive.nbuv.gov.ua/portal/Soc_Gum /Npd / 2009_4/Bogachi.pdf – Title with the title screen.*
3. *Wiener N. Cybernetics or Management and Communications in the animal and machine / 2nd ed. – M.: Radio Soviet, 1968. – 201 p.*
4. *Goncharenko S. Ukrainian Pedagogical Dictionary / Intern. Foundation "Renaissance." Downloads. "Transformation companies in liberal education." – K.: Lybed, 1997. – 374 p.*
5. *Dysterveh A. Favourites Teaching essay . – M.: "Enlightenment.", 1956. – 374 p.*
6. *Law of Ukraine of 11 January 2001 "On Protection of Competition " // Supreme Council of Ukraine . – 2001. – № 12. – P. 64.*
7. *Zhaldak M.I. "Computer-oriented learning system." Issue 9. Scientific Journal. – K.: NPU M.P. Drahomanova, 2005. – P. 3-14*
8. *Clearing Resources of Russia: Nationally report // Clearing Resources., 2004. – № 2. – P. 21*
9. *Moiseev N.N. Algorithms development. – M.: Science, 1987. – 304 p.*
10. *Ozhegov S.I. Dictionary Russia language. – Moscow, 1952, 220 p.*
11. *Approaches to Determining Basic concepts "info" [electronic resource] / Basic Approaches to Determination concepts "info" – Mode of access: http://do.gendocs.ru/ docs/index-270006.html- title with the title screen.*
12. *Stolyarov U.N. The essence of information. – Moscow: SPSL , 2000. – 120 p.*
13. *Sukhanov A.P. Information and progress. – Novosibirsk. "Science" Siberian of department., 1988. – 192 p.*
14. *Chernih P.Y. Historical and etymological dictionary Russia language. – Moscow, 1993. – 335 p.*

Стаття представлена професором О.І.Скафою.
Надійшла до редакції 28.03.2014 р.

ПРО СПЕЦІАЛЬНІ МЕТОДИ ЕВРИСТИЧНОГО НАВЧАННЯ НА ЕВРИСТИЧНИХ ФАКУЛЬТАТИВАХ З МАТЕМАТИКИ

І.В.Гончарова,
канд. педагог. наук, доцент,
Ю.В.Пустова,
магістр,
Донецький національний університет,
м. Донецьк, УКРАЇНА,
e-mail: i-v-goncharova@mail.ru

Розглянуто спеціальні методи евристичного навчання на етапі «занурення» учнів в евристичну діяльність і самостійного використання евристичних прийомів на заняттях евристичного факультативу з математики.

Ключові слова: *евристичні прийоми, евристичний факультатив, спеціальні методи евристичного навчання.*

Постановка проблеми. Вивчення математики в школі направлено на досягнення, у першу чергу, цілей інтелектуального розвитку учнів, формування якостей мислення, що характерні для математичної діяльності та необхідні людині для життя в сучасному суспільстві, для соціальної орієнтації й вирішення практичних проблем.

У сферу інтересів особистості входить уміння адаптуватися до нових умов життя: аналізувати ситуацію, адекватно змінювати організацію своєї діяльності, вміти добувати інформацію й користуватися нею [4]. Якщо з цієї точки зору звернутися до цілей шкільної математичної освіти, то однією з важливих задач є формування й розвиток евристичних умінь учнів.

Задачі, які людина повинна вміти розв’язувати у процесі своєї діяльності, вкрай різноманітні. Навчити в школі розв’язанню всіх задач, які можуть зустрітися в житті, неможливо: їх кількість практично неосяжна. У той же час учням треба надати можливість показати загальний підхід до розв’язування задач, підготувати до того, щоб у майбутньому вони вміли розв’язувати самі різні задачі [1]. Зробити це можна, прищеплюючи учням навички самостійного пошуку нових закономірностей, ознайомлюючи їх з достатньо загальними прийомами самостійного цілеспрямованого пошуку розв’язання задач [1], тобто з евристичними прийомами.

Аналіз актуальних досліджень. Проблемі реалізації евристичних ідей, формуванню евристичних прийомів діяльності у навчанні математики приділяли увагу такі науковці, як В.І.Андрєєв, А.К.Артемов, Г.Д.Балк, К.В.Власенко, Ю.М.Колягін, Ю.М.Кулюткін, Т.М.Міракова, В.М.Осинська, Ю.О.Палант, Дж.Пойа, Є.Є.Семенов, О.І.Скафа, З.І.Слєпкань, Н.А.Тарасенкова, Л.М.Фрідман та інші. Питання щодо формування евристичних умінь розкрито у працях К.В.Власенко, О.Ю.Бондиревої, Т.С.Максимової, В.Б.Мілушева, Т.Рібо, О.І.Скафи.

Дослідження науковців присвячені проблемам формування прийомів евристичної діяльності учнів під час навчання математики та студентів технічних ВНЗ, а також деяким аспектам формування евристичних умінь учнів на факультативних заняттях з математики [2]. У рамках останнього актуальними залишаються питання можливості щодо упровадження технології «занурення» учнів в евристичну діяльність у процесі розв'язування нестандартних задач.

Мета статті – *ознайомити на власному матеріалу із деякими спеціальними методами евристичного навчання, що сприяють формуванню досвіду евристичної діяльності на заняттях евристичного факультативу з математики.*

Виклад основного матеріалу. Для цілеспрямованого формування прийомів евристичної діяльності учнів важливого значення набуває евристичний факультатив – факультатив, що орієнтує учнів на пошук і створення нового в їх знаннях, уміннях, способах діяльності, особистісних якостях, матеріалізованих продуктах освіти через відкриття, власне проникнення, конструювання учнем своєї освітньої траєкторії в математиці [2].

Евристичний факультатив з математики принципово відрізняється від традиційного. Учні не тільки вчаться розв'язувати задачі, але й винаходити, придумувати і відкривати «нове». Основний зміст евристичних факультативів становлять евристичні прийоми: кожне заняття ознайомлює учнів із певною евристикою на різному навчальному матеріалі. Наприклад, «Використання симетрії», «Випробування на правдоподібність», «Ідея допоміжних невідомих», «Задача всередині задачі» тощо – теми занять евристичного факультативу.

Евристичні прийоми, що мають формуватися, виступають орієнтиром при конструюванні і підборі евристичних задач, які дозволяють цілеспрямовано створювати на заняттях факультативу педагогічні ситуації, що забезпечують тренінг учнів. Організаційні форми таких ситуацій визначаються, насамперед, тематикою факультативних занять і можуть бути досить варіативними: ігровими, пошуковими, дискусійними, ситуаціями взаємного навчання тощо.

Для ініціювання евристичної діяльності вчителю необхідно спланувати заняття факультативу так, щоб активізувати творчу та пізнавальну діяльність учнів. Тому ми пропонуємо розглянути деякі спеціальні методи евристичного навчання, які, на нашу думку, сприяють, як активізації роботи евристичного факультативу, так і формуванню досвіду евристичної діяльності учнів.

Метод «Ланцюжок». Учні, які сидять на перших партах, отримують чисті аркуші паперу. Кожний з них пише назву евристичного прийому і передає іншому учню (по ланцюжку). Кожен із наступних учнів пише по черзі певну теоретичну відомість або наводить приклади застосування щодо зазначеного евристичного прийому. Останній учень читає уголос усе, що писано на аркуші. Учитель разом із учнями аналізують і коментують почуте.

Наведемо приклад такого «ланцюжка» для заняття «Ідея допоміжного елемента»: «допоміжний елемент → вводиться в геометрії → допоміжний лінійний елемент → у планіметричних задачах лінійний елемент або відношення лінійних елементів зручно ввести, якщо розглянуті фігури подібні → допоміжний елемент – площа або об'єм → аналогічно введенню лінійного елементу → порівнюючи площі і об'єми окремих частин фігури, можна отримати рівняння відносно невідомих задачі → або необхідне співвідношення → допоміжний елемент – кут → вводиться якщо шукані або задані елементи зручно виразити за допомогою тригонометричних функцій».

Метод «Автор». Учням необхідно за матеріалом певного евристичного прийому запропонувати питання, схему тощо. Оцінювання відбувається колективно. Приклад схеми до заняття евристичного факультативу за темою «Ідея допоміжних невідомих» наведено на рис. 1.

Метод «Незакінчені фрази». Учням пропонуються незакінчені фрази, які вони повинні закінчити. Наприклад, «Аналогія – це схожість …»; «У геометрії аналогія використовується … (у визначенні понять, під час пошуку фігури за характеристичною властивістю її точок, просторова аналогія)».

Рис. 1

Метод «Зрозумій мене». Учень однієї фразою пояснює термін (назву евристики), інший повинен цей термін вгадати, записати на аркуші та пояснити іншою фразою, не схожою на першу, і т. д. Останній учень має назвати евристичний прийом, який мав на увазі перший учень. Проводиться по рядах.

Метод «Кросворд». Учні отримують схему кросворду та перелік запитань. Необхідно відповісти на запитання та заповнити кросворд. Наведемо запитання та схему до кросворду (рис. 2).

По вертикалі:

1. Суть цього евристичного прийому полягає у наступному. Якщо у вираз, рівність чи нерівність входять змінні або вирази з певною областю значень, то можна замінити одну або кілька змінних (виразів) виразами, що мають ту ж область значень. Як називаються невідомі, які ми вводимо при використанні цього евристичного прийому? (Допоміжні).

2. Щоб отримати фізичну картину поняття центру мас, розглянемо дві невеликі кульки з масами m_1 і m_2, з'єднаних жорстким «невагомим стрижнем». На цьому стрижні є така чудова точка O, що якщо підвісити всю систему в цій точці, то вона буде в рівновазі. Чим є точка О? (Барицентром).

4. При використанні цього евристичного прийому ми передбачаємо ті результати, до яких може звести пошук. Як називається цей евристичний прийом? (Прогнозування).

По горизонталі:

3. При використанні цього евристичного прийому ми спочатку розглядаємо часткові випадки, а потім шукаємо розв’язання задачі у загальному випадку. (Індукція)

5. Суть цього евристичного прийому полягає у наступному: поряд із вихідною задачею формулюють схожу, але більш просту допоміжну задачу; розв’язують цю допоміжну задачу, розбиваючи розв’язання на окремі етапи («кроки»); намагаються провести подібні міркування на кожному «кроці» стосовно до вихідної задачі. Як називається цей евристичний прийом? (Аналогія).

6. Як називається приклад, якого є достатньо для спростування істинності твердження? (Контрприклад).

Метод «Так чи ні». Учитель записує на зворотному боці дошки назву евристичного прийому. Учні мають вгадати його. Для цього вони задають вчителю навідні питання. Не можна ставити питання виду: «Це аналогія?», «Це переформулювання задачі?». Учні називають прийом тільки після того, як будуть впевнені, що це саме він. Учитель відповідає тільки так або ні.

Наприклад вчитель записав на дошці «переформулювання задачі». Наведемо можливі питання, відповіді на які наведено у дужках.

1). Цей прийом «наводить» нас на розв'язання задачі в загальному випадку? (Ні).

2). Під час використання цього евристичного прийому ми шукаємо схожість між об'єктами? (Ні).

3). Ми шукаємо приклад, який спростовує істинність даного твердження? (Ні).

4). Ми виражаємо шукану величину через дані величини? (Ні).

5). Під час використання цього евристичного прийому ми формозмінюємо текст задачі? (Так).

6). Ми замінюємо одну чи кілька змінних іншими виразами? (Ні).

7). Ми використовуємо цей евристичний прийом під час розв'язування геометричних задач? (Так).

8). При використанні цього евристичного прийому ми формулюємо умову задачі на іншій мові, в інших, більш-менш близьких термінах? (Так). Отже, шуканий евристичний прийом це «перефомулювання задачі».

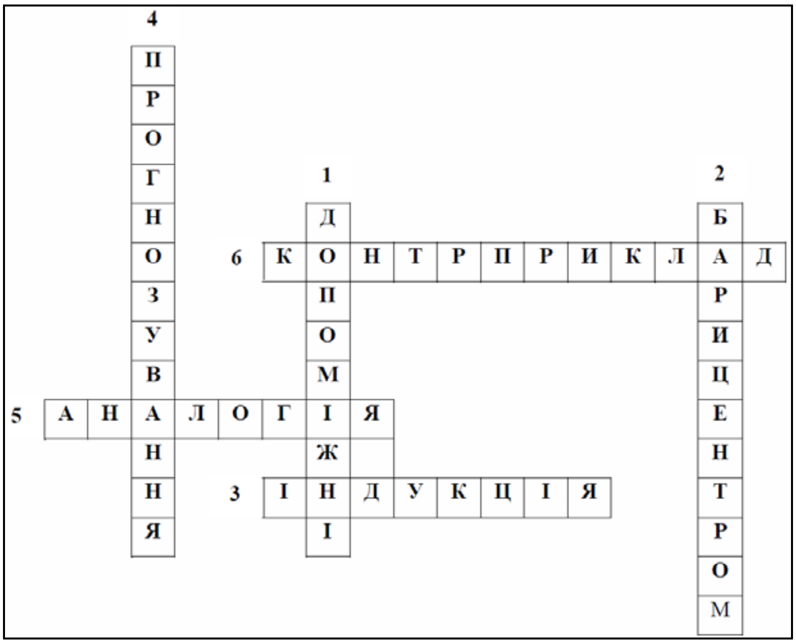


Рис. 2

Метод «Лото». Команди отримують даються картки (рис. 3). Вчитель витягує з мішечка жетони, називаючи їх номери, та зачитує запитання, номер якого збігається із номером жетона. Відповідає та команда, номер на картці якої є цей номер. При правильній відповіді на запитання номер на картці закривається. Перемагає та команда, у якої на картці буде більше жетонів. Наведемо приклади запитань (відповіді вказані у дужках).

3		**1**	**2**
7	**5**	**8**	
	6		**4**

Рис. 3

1). Суть цього евристичного прийому полягає в тому, що одна з невідомих у заданому рівнянні приймається в якості параметру, а всі наступні роздуми проводяться відносно іншого (інших) невідомого або параметру. Який евристичний прийом описано? (Вираз однієї змінної через іншу).

2). Що означає слово «аналогія»? («Аналогія» – грецьке слово, у перекладі означає «схожість»).

3). Назвіть, які існують типи заміни змінних при використанні евристичного прийому введення допоміжних невідомих. (Підстановки, які ведуть до зменшення кількості змінних; підстановки, які зберігають кількість змінних; підстановки, які збільшують кількість змінних).

4). Назва якого евристичного прийому з латині означає «наведення». (Індукція).

5). Що означає прогнозування? (Прогнозування – передбачення тих результатів, до яких може призвести пошук).

6). Який евристичний прийом використовується, якщо задача дається на звичайній, «життєвій» мові? (Переклад текстової задачі на математичну мову – переформулювання задачі).

7). Наведіть приклад використання контрприкладу у житті. (Для тих, хто стверджує, що усі ягоди поміщаються на долоні, можна поставити в контрприклад кавун. Якщо хтось стверджує, що відмінність птахів від інших тварин, це наявність крил, то йому можна привести у контрприклад безкрилого птаха ківі, який живе у Новій Зеландії, або кажанів).

8). Цей прийом є найкориснішим засобом для пошуку закономірностей. Його важливість відмічалась багатьма вченими-філософами. Уперше на його винятkову цінність звернули свою увагу англійський філософ Ф.Бекон та італійський фізик Г.Галілей. Назвіть цей прийом (Індукція).

Метод «Переслідування». Один учень розкриває зміст заняття, питання, інший намагається його «упіймати» – шукає помилки, нібито «переслідує» кожне його слово.

Метод «Третій зайвий». Учні з трьох даних задач мають обрати одну зайву. Для цього вони повинні їх розв’язати, виділити евристичні прийоми, які були використані під час пошуку їх розв’язання (два з них будуть однакові). Дві задачі, наприклад, будуть розв’язуватися за допомогою евристичного прийому, з яким учні ознайомилися на даному занятті, а одна – за допомогою прийому, з яким учні ознайомилися раніше.

Розглянуті методи, на нашу думку, можна використовувати на двох (другому та третьому) з п’ятьма технологічних блоків для конструювання системи занять евристичного факультативу: вступне заняття, основна частина, тренінг, контроль, рефлексія [2].

Для занять, що відносяться до другого технологічного блоку евристичного факультативу «Основна частина», підійдуть методи Автор», «Ланцюжок», «Незакінчені фрази», «Переслідування», «Третій зайвий». Їх доцільно використовувати у кінці заняття для підведення підсумків, або на наступному занятті для актуалізації вже відомих учням евристик.

Методи «Так чи ні», «Кросворд», «Лото» підійдуть для занять, що відносяться до третього технологічного блоку евристичного факультативу «Тренінг», під час яких розв’язуються задачі за допомогою багатьох розглянутих на попередніх заняттях евристичних прийомів. Крім того з їх допомогою можна актуалізувати знання учнів про евристичні прийоми.

Висновки. Використання спеціальних методів евристичного навчання на факультативних заняттях з математики, на наш погляд, сприятиме активізації творчого потенціалу та пізнавальної діяльності учнів, формуванню досвіду евристичної діяльності учнів, що, у свою чергу, сприятиме формуванню евристичних умінь.

1. *Артемов А.К. Об эвристических приемах при обучении геометрии / А.К.Артемов // Математика в школе, 1973. – №6. – С. 25-29.*

2. *Гончарова І.В. Методика формування евристичних умінь учнів основної школи на факультативних заняттях з математики: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / І.В.Гончарова. – Черкаси, 2009. – 20 с.*

3. *Горчакова І.А. Переваги евристичного підходу до розв’язання задач / І.А.Горчакова //*

Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2000. – Вип. 3(13). – С. 78–85.

4. Маркова В. Формирование мышления учащихся / В.Маркова // Математика, 2004. – №34. – С. 2-3, 12.

Резюме. **Гончарова И.В., Пустовая Ю.В. О СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТОДАХ ЭВРИСТИЧЕСКОГО ОБУЧЕНИЯ НА ЭВРИСТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТАТИВАХ ПО МАТЕМАТИКЕ.** *В работе описаны специальные методы эвристического обучения этапа «погружения» учащихся в эвристическую деятельность и самостоятельного использования эвристических приемов на занятиях эвристического факультатива по математике.*

Ключевые слова: *эвристические приемы, эвристический факультатив, специальные методы эвристического обучения.*

Abstract. **Goncharova I., Pustova J. ABOUT SPECIAL METHODS OF HEURISTIC LEARNING ON HEURISTIC ELECTIVES COURSES IN MATHEMATICS.** *The ability to adapt oneself to new conditions of life has been including into the sphere of personal interest. They are abilities to analyse the situation, to change the way of your activity; the ability to find the information and use it. One of the most important task is a forming and developing of heuristic abilities.*

Problems which must be solved by person are so different. It's impossible to teach someone to solve all kinds of problems. It's necessary to give the experience (to develop skills) of independent search of new conformity to natural laws, to acquaint themself with some common methods of solving problems.

In order to form the skills of heuristic activity it's important to organize the work of special optional course. The main idea of this course must be the orientation to seach and create something new in their knowledge, skills, abilities, ways of activity and personal qualities.

To initiate the heuristic activity the teacher must the optional course in such a way to activate their (pupil's) creative and cognitive activity. That is why we propose to learn some special methods of heuristic study which to our mind help to organize the work of optional course more effectively.

Using special methods of heuristic study at mathematic optional course helps to activate the creative potential and cognitive activity of pupils. It also helps to form experience of heuristic activity and skills.

Key words: *heuristic methods, heuristic elective course, special methods of heuristic learning.*

References

1. Artemov A. About heuristic receptions at teaching of geometry / A.Artemov // Mathematics at school, 1973. – №6. – P. 25-29.

2. Goncharova I. Methods of forming heuristic skills of primary school students in elective courses in mathematics: Author. Thesis. for obtaining sciences. degree candidate. ped. sciences: 13.00.02 "Theory and Methods of Teaching (Mathematics)" / I. Goncharov. – Cherkasy, 2009. – 20 p.

3. Gorchakova I. Advantages of the heuristic going near the decision of tasks / I. Gorchakova // Didactics of the mathematics: problems and investigation: International collection scientific works. – Donetsk, 2000. – Issue 3(13). – P. 78–85.

4. Markova V. Forming of thought of pupil's / V. Markova // Mathematics, 2004. – №34. – P. 2-3, 12.

Стаття представлена професором О.І. Скафою.
Надійшла до редакції 03.02.2014 р.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕКТИВНОМУ КУРСУ «ОСНОВЫ КРИПТОГРАФИИ» ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ЛИЦЕЕВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОДИРОВАНИЯ

Н.В.Коваленко,
канд. физ.-мат. наук, доцент,
Р.А.Ануфриенко,
магистр,
Донецкий национальный университет,
г. Донецк, УКРАИНА,
e-mail: natvladkov@rambler.ru

Розглянуто особливості та можливості засобів формування в учнів уміння розв'язувати задачі методом математичного моделювання, удосконалювати володіння загальними прийомами розумової діяльності при вивченні елективного курсу «Основи криптографії».

Ключові слова: *криптографія, елективний курс, коди, криптоаналіз.*

Постановка проблемы. XXI век – век информационных технологий. Телевидение, интернет, телефония… Каждый из нас ежедневно сталкивается с этим, обрабатывая огромное количество информации. В связи с этим появляются и особые потребности человечества, и соответствующие им услуги. Так, например, осуществляется предоставление информационных услуг, основным продуктом которых выступает разного рода информация. Информация становится самым ценным товаром, который все более и более требует защиты от недружественного ознакомления, подмены, фальсификации и т. д. Решать возникающие в связи с этим задачи было бы невозможно без привлечения самых разнообразных математических методов [3]. Неслучайно поэтому теория кодирования считается сейчас одним из наиболее важных разделов прикладной математики. Коды и кодирование – прежде всего средство для экономной, удобной и практически безошибочной передачи сообщений [1]. С целью такой защиты стремительно происходит развитие науки ***криптографии***, которая образует сегодня отдельное научное направление на стыке математики и информатики; кроме стандартных методов в криптографии широко используются кодирование и шифрование информации с использованием исключительно математических подходов, в частности, с помощью методов, основанных на теории линейной алгебры, теории чисел и т. д., поэтому целесообразным является знакомство учащихся с различными методами кодирования.

Анализ актуальных исследований. С основными понятиями и идеями теории кодирования знакомят в своей книге «Коды и математика» М.Н.Аршинов и Л.Е.Садовский [1], опираясь на основы криптографии и криптоанализа. А.В.Бабаш в книге «Криптография» [2] дает короткое описание криптографии и тот минимум информации, которого достаточно, чтобы самостоятельно оценивать какие-либо реальные криптосистемы. Следует отметить книги по фундаментальным разделам математики, которые непосредственно касаются теории кодирования. Книга известного норвежского математика О.Оре «Приглашение в теорию чисел» [9] раскрывает красоту математики на примере одного из ее старейших разделов — теории чисел. Изложение основ теории чисел в книге во многом нетрадиционно. Наряду с теорией сравнений, сведениями о системах счисления, в ней содержатся рассказы о магических квадратах, о решении арифметических ребусов и т. д. А.И.Кострикин в своей работе «Введение в алгебру» [5] рассматривает системы линейных уравнений, элементарную теорию матриц, теорию определителей, простейшие свойства групп, колец и полей, комплексные числа и корни многочленов. Наиболее важные разделы линейной алгебры изложены в максимально доступной форме.

Также криптографии, кодированию и шифрованию информации посвящены работы Э.Л.Блоха, В.В.Зяблова, Т.Касами, Токура Н., Е.Ивадари, Я.Инагаки, У.Питерсона, Э.Уэлдона и др.

Целью статьи *является рассмотрение актуальности разработки элективных курсов прикладной направленности для старшеклассников, в частности курса «Основы криптографии», формирующего умения использовать информационно-коммуникационные технологии, развивают формально-логическое и формально-операционное мышление учащихся, стимулируют развитие интереса к теоретическим проблемам математики и самостоятельности в приобретении новых знаний.*

Изложение основного материала. Одной из основных задач современного образования является формирование практически компетентной личности. Поиск новых возможностей усиления прикладной направленности элективных курсов для старшеклассников является перспективным направлением исследований в сфере методики обучения математике [11].

Элективные курсы, в частности, «Основы криптографии» как один из них, связаны, прежде всего, с удовлетворением индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника, они «компенсируют» во многом достаточно ограниченные возможности базовых и профильных курсов в удовлетворении разнообразных образовательных потребностей старшеклассников.

Основной целью и задачей элективного курса «Основы криптографии» является разрешение вопросов кодирования и защиты информации.

Код – это набор условных обозначений (или сигналов) для записи (или передачи) некоторых заранее определенных понятий. В более узком смысле под термином «кодирование» часто понимают переход от одной формы представления информации к другой, более удобной для хранения, передачи и обработки. Обратное преобразование называется ***декодированием*** [6].

Для общения мы используем код - русский язык: при разговоре этот код передается звуками, при письме - буквами. Водитель передает сигнал с помощью гудка или миганием фар. Мы встречаемся с кодированием информации при переходе дороги в виде сигналов светофора [1].

Таким образом, кодирование сводиться к использованию совокупности символов по строго определенным правилам.

Существуют три основных способа кодирования текста:

графический – с помощью специальных рисунков или значков;

числовой – с помощью чисел;

символьный – с помощью символов того же алфавита, что и исходный текст [8].

Коды появились в глубокой древности в виде криптограмм, когда ими пользовались для засекречивания важного сообщения от тех, кому оно не было предназначено. Уже знаменитый греческий историк Геродот (V век до н. э.) приводил примеры писем, понятных лишь для одного адресата. Собственная секретная азбука была у Юлия Цезаря. В средние века и эпоху Возрождения над изобретением тайных шифров трудились многие выдающиеся люди, в их числе философ Фрэнсис Бэкон, крупные математики Франсуа Виет, Джероламо Кардано, Джон Валлис [1]. Различные хитроумные приемы кодирования применяли шифровальщики при папском дворе и дворах европейских королей. Вместе с искусством шифрования развивалось и искусство дешифровки, или, как говорят, криптоанализа.

Первый код, предназначенный для передачи сообщений, связан с именем изобретателя телеграфного аппарата Сэмюэля Морзе и известен как азбука Морзе (рис. 1) [1].

При изложении материала, посвященного числовому кодированию, следует принять во внимание, что учащиеся-лицеисты недостаточно владеют знаниями по линейной алгебре и теории чисел, часто используемых в рамках этой темы, поэтому необходимо особенно тщательно подбирать задания, рассматриваемые на занятии, а также выбирать доступные подтемы. Приведем несколько тем и соответствующих заданий для занятий по элективному курсу «Основы криптографии», посвященных кодированию.

Рис. 1

Шифрование с помощью цифр [4]

На рисунке вы видите панель телефона. С помощью цифр зашифровано слово. Чтобы расшифровать его, нужно вместо каждой цифры написать одну из букв соответствующей клавиши. Например, 4161755 расшифровывается словом «марафон».

Пользуясь этим шифром можно расшифровать пословицы:

1)1235174 414123674;

2)222 7562592, 6143 742592;

3)1 74553 126222 - 7415634 75369, 1 . 247553 - 3 6153 616626069;

4)865 40204 553241289, 62 3614 554781289.

Ответ:

1) «Без наук как без рук»;

2) «Где хотенье, там и уменье»;

3) «В умной беседе - ума прикупить, а в глупой - и свой растерять»;

4) «Что людям пожелаешь, то и сам получаешь».

Матричный способ кодирования и декодирования [10]

Для того чтобы воспользоваться способом шифровки с помощью матриц, достаточно уметь считать на уровне 6 класса, знать порядок букв в алфавите и помнить всего 8 чисел. Расшифровать же его специалисты могут только с помощью компьютера.

Матрица – это прямоугольная таблица, составленная из элементов, имеющих произвольную природу. Элементы матрицы расположены в строки и столбцы. Матрица, в которой одинаковое количество строк и столбцов, называется квадратной. Мы будем пользоваться квадратными матрицами размером 2х2.

Для кодирования текста на русском языке пронумеруем все буквы по месту их расположения в алфавите - от 1 до 33, добавив знак «пробел, тире, точка», в общем, знак, означающий все, что угодно, исходя из смысла послания.

Возьмем простое предложение «Я и Шифр». Заменим каждую букву на число. Получим: 33, 34, 10, 34, 26, 10, 22, 18.

Построим из этой последовательности две матрицы

$$\begin{pmatrix} 33 & 34 \\ 10 & 34 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 22 & 18 \end{pmatrix}$$

Зашифруем это сообщение с помощью еще одной матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- назовем ее кодирующей матрицей, - по следующему правилу

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 & 34 \\ 10 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 33+3\cdot 10 & 2\cdot 34+3\cdot 34 \\ 1\cdot 33+2\cdot 10 & 1\cdot 34+2\cdot 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 170 \\ 53 & 102 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 22 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 26+3\cdot 22 & 2\cdot 10+3\cdot 18 \\ 1\cdot 26+2\cdot 22 & 1\cdot 10+2\cdot 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118 & 74 \\ 70 & 46 \end{pmatrix}$$

Тогда можно передать адресату следующий набор чисел: 96, 170,53, 102, 118,74,70,46.

Но как адресат поймет, что за сообщение ему отправили? Для этого нужно знать декодирующую матрицу и проделать с полученным текстом следующее:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 96 & 170 \\ 53 & 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 96-3\cdot 53 & 2\cdot 170-3\cdot 102 \\ -1\cdot 96+2\cdot 53 & -1\cdot 170+2\cdot 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 34 \\ 10 & 34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 118 & 74 \\ 70 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 118-3\cdot 70 & 2\cdot 74-3\cdot 46 \\ -1\cdot 118+2\cdot 70 & -1\cdot 74+2\cdot 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 22 & 18 \end{pmatrix}$$

Получим 33, 34, 10, 34, 26, 10, 22, 18, что после перевода в буквы будет означать «Я и Шифр», то есть исходный текст.

Таким образом, надо составлять фразы с числом букв, кратным 4, чтобы легко составлять матрицы, и знать кодирующую и декодирующую матрицы, а также правило умножения матриц. Произведение кодирующей и декодирующей матрицы должно быть равно единичной матрице. Этого и следовало ожидать, иначе мы бы не получили исходный текст.

Метод решеток на примере решетки Кардано [7].

Решетка Кардано – это прямоугольная карточка с отверстиями, чаще квадратная, которая при наложении на лист бумаги оставляет открытыми лишь некоторые его части. Число строк и столбцов четно. Карточка сделана так, что при ее последовательном повороте каждая клетка лежащего под ним листа будет занятой. Если решетка квадратная, то можно последовательно поворачивать ее вокруг центра квадрата на 90°. На рис. 2 приведен пример решетки: 1 – исходное состояние; 2…4 – результаты ее поворотов по часовой стрелке на 90° (рис.2).

Задание [12]. Пусть имеется следующая решетка размером 6 x 6 (рис. 3).

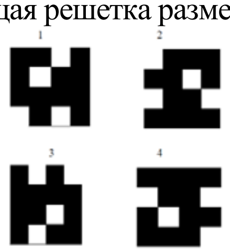


Рис. 2

Рис. 3

Шифровка:

ВАВОЧСМУНОТИМЫЖРОЕЬУХ-СОЙМДОСТОЯАСНТВ

Расшифровать сообщение, вращая решетку по часовой стрелке на 90°. Сообщение впишите в квадрат по строкам.

Выводы. Важнейшим условием хорошего усвоения учащимися материала, посвященного кодированию информации, на занятиях спецкурса «Основы криптографии» является наличие хорошо разработанной базы задач по соответствующей теме. Рассмотрено лишь незначительное количество практических заданий по теории кодирования, которые могут быть предложены на таких занятиях, но каждое из них можно назвать фундаментальным по той или иной подтеме.

1. Аршинов М.Н. Коды и математика (рассказы о кодировании) / М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский // Библиотечка «Квант». Вып. 30. – М.: Наука, 1983. – 1440 с.

2. Бабаш А.В. Криптография / А.В.Бабаш, Г.П. Шанкин. – М.: СОЛОН – ПРЕСС, 2007. – 512 с.

3. Коваленко Н.В. Математичне моделювання у факультативному курсі «Основи криптографії» для старшокласників / Н.В.Коваленко, Р.А.Удовиченко // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнар. зб. наук. робіт. – Вип. 39. – Донецьк: вид-во ДонНУ, 2013. – С. 138 – 141.

4. Кодирование информации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://pptonline.ru/slide/id/277134. – Название с экрана.

5. Кострикин А.И. Введение в алгебру / А.И.Кострикин. – М.: Физ.-мат.лит., 2000. – 272 с.

6. Марков А.А. Введение в теорию кодирования / А.А.Марков. – М.: Наука, 1982. – 192 с.

7. Метод решеток на примере решетки Кардано [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://sites.google.com/site/anisimovkhv/learning/kripto/lecture/tema.–Название с экрана.

8. Новик Д.А. Эффективное кодирование / Д.А.Новик. – М.: Энергия, 1965. – 234 с.

9. Оре О. Приглашение в теорию чисел / О.Оре. – М.: Наука, 1980. – 128 с.

10. Способы кодировании информации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://metodist.lbz.ru/authors/informatika/3/flash/5kl/gl1/7.php. – Название с экрана.

11. Швець В.О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики / В.О.Швець // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2009. – Вип. 32. – С. 16–24.

12. Шифры перестановки [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://sites.google.com/site/anisimovkhv/learning/kripto/lecture/tema5. – Название с экрана.

Резюме. **Коваленко Н.В., Ануфриенко Р.А. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕКТИВНОМУ КУРСУ «ОСНОВЫ КРИПТОГРАФИИ» ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ЛИЦЕЕВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОДИРОВАНИЯ.** *Рассмотрены особенности и возможности средств формирования у школьников умения решать задачи методом математического моделирования, совершенствовать овладение общими приемами умственной деятельности при изучении элективного курса «Основы криптографии».*

Ключевые слова: *криптография, элективный курс, коды, криптоанализ.*

Abstract. **Kovalenko N., Anufrienko R. METHODS OF TEACHING ELECTIVE COURSE «FOUNDATIONS OF CRYPTOGRAPHY» FOR STUDENTS OF LYCEUMS WITH THE USE OF CODE.** For a man who was not interested in modern information systems, encryption – it is rather a special attribute of public services or describing their activities novels. Actually encryption – one of the key components of modern security systems, element faced in one form or another almost anyone and the vast majority of computer users. Application secure encryption makes it possible commercial operations in networks, data processing, constituting a state secret, and so on. Modern world, which somehow facing each of us – the Internet world, so to some extent we have to deal with the realities of this world. For example, in the Internet can not be guaranteed against interception channel (and hence from the substitution of the key), it is impossible to know all the subscribers and create general inspection centers. In addition, any exchange trading requires the ability to produce a document from which «signatory» can not refuse, and «checking» center could impersonate anyone – and thus can not be trusted by definition. The question arises – what to do? Solved these problems by using cryptographic techniques that allow you to encrypt information and thus avoid its unwanted interception. Basics of cryptography, for example, elementary method of information encryption can teach a person still at school. In this article, just lit the urgency of developing an elective course «Basics of Cryptography», as well as examples of themes and related tasks for training in this discipline.

Key words: *cryptography, elective courses, codes, cryptoanalysis.*

References

1. Arshinov M.N., Sadowski L. Codes and Mathematics (stories about coding) // Library of Quantum. Issue 30. – Moscow: Nauka, 1983.

2. Babash A.V. Cryptography / A.V.Babash, G.P.Shankin. – M.: SOLON - PRESS, 2007. – 512 p.

3. Kovalenko N.V. Mathematical modeling in elective courses "Foundations of Cryptography" for high school students / N.V.Kovalenko, R.A.Udovichenko // Mathematics Curriculum: Problems and studies: international collection of scientific papers. – Ed. 39. – Donetsk. - 2013. – P. 138 - 141.

4. Encoding information [electronic resource]. – Mode of access: http://pptonline.ru/ slide/id/277134. – Title screen.

5. Kostrikin A.I. Introduction to algebra / A.I.Kostrikin. – M.: Physics - Mathematical Literature, 2000. – 272 p.

6. Markov A.A. Introduction to coding theory / A.A.Markov. – Moscow: Nauka, 1982. – 192 p.

7. Method of lattices example Cardan grille [electronic resource]. – Mode of access: https://sites.google.com/site/anisimovkhv/learning/kripto/lecture/tema5. –Title screen.

8. Novik D.A. Efficient encoding / D.A.Novik. – Moscow: Energiya, 1965. – 234p .

9. Ore O. Invitation to Number Theory / O.Ore. – Moscow: Nauka, 1980. – 128 p.

10. Methods of encryption of information [electronic resource]. – Mode of access: http://metodist.lbz.ru/authors/informatika/3/flash/5kl/gl1/7.php. – Title screen.

11. Shvets V.O. Mathematical modeling as a content line of a school mathematics / V.O.Shvets / / Mathematics Curriculum: Problems and studies: International collection of scientific papers. – Vip. 32. – Donetsk: view of Donetsk National University, 2009. – P. 16 - 24.

12. Permutation ciphers [electronic resource]. - Mode of access: https://sites.google.com/site/ anisimovkhv/learning/kripto/lecture/tema5. – Title screen.

Стаття представлена професором О.І.Скафою.
Надійшла до редакції 25.01.2014 р.

Наукове видання

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: ПРОБЛЕМИ І ДОСЛІДЖЕННЯ

МІЖНАРОДНИЙ ЗБІРНИК НАУКОВИХ РОБІТ

Випуск 41, 2014 рік

Рекомендовано до друку вченою радою
Донецького національного університету
30.05.2014 (протокол № 8)

Редакція збірника

Науковий редактор – доктор педагог. наук, проф. **Скафа Олена Іванівна**
Тел.: 050 520 46 41 E-mail: e.skafa@ukr.net

Технічний редактор: Гончарова І.В.
Комп'ютерна верстка: Гончарова І.В.
Художнє оформлення: Абраменкова Ю.В.

Відповідальний секретар:
к.п.н. Тимошенко Олена Вікторівна
E-mail: elenabiomk@mail.ru

Адреса редакції збірника:
Кафедра вищої математики і методики викладання математики,
Донецький національний університет, вул. Університетська, 24,
м. Донецьк, 83000, Україна

Узгоджені матеріали надсилати за адресою:
Тимошенко О.В., пр.Миру, 29/63, Донецьк-15, 83015, Україна

Збірник розповсюджується безкоштовно

Підписано до друку 02.06.2014 р. Формат 60x84/8. Папір типографський.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 10,4. Тираж 300 прим. Замовлення № 131/23

Видавництво Донецького національного університету
Україна, 83000, Донецьк, вул. Університетська, 24

Надруковано в типографії ООО "Цифрова типографія" на цифрових
лазерних видавничих комплексах Rank Xerox DocuTech 135 і DocuColor 2060.
Адреса: Донецьк, вул. Челюскінців, 291а. Тел. (062) 388 07 31