Праці Інституту математики НАН України 2004, том 47, 20-42

УДК 517.54

Оценки некоторых функционалов на классах неналегающих областей

А. Л. Таргонский

(*Институт математики НАН Украины, Киев*)

abahtin@imath.kiev.ua

В данной работе рассматриваются экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами, принадлежащими заданным множествам комплексной плоскости.

Введение. В геометрической теории функций комплексного переменного экстремальные задачи о неналегающих областях представляют известное классическое направление. Возникновение этого направления связывается с работой академика М.А.Лаврентьева [1], где была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно не пересекающихся односвязных областей. В последующем этот результат обобщался и усиливался в работах многих авторов (см. напр. [2 – 7]).

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Для всякого $n \in \mathbb{N} : n \geq 2$ набор n не равных нулю точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$ обозначим через $A_n := \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и обозначим $\tilde{A}_n := \{0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty\}$.

Точечным наборам A_n, $\tilde{A}_n$ поставим в соответствие наборы $F_n = \{B_1, ..., B_n\}$, $\tilde{F}_n = \{B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty\}$ произвольных попарно непересекающихся областей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ таких, что $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$ и $a_k \in B_k$ при всех $k = 1, 2, ..., n$. В случае, если области набора F_n являются односвязными, этот набор обозначим через F_n^0.

Назовем классами Ω_n, Ω_n^0 и $\tilde{\Omega}_n$ соответственно множества всех возможных пар (F_n, A_n), $\left(F_n^0, A_n\right)$ и $(\tilde{F}_n, \tilde{A}_n)$, для которых $0 \in B_0$,

$\infty \in B_\infty$ и $a_k \in B_k$ при $k = 1, 2, ..., n$, причем точки a_k не являются фиксированными.

Пусть U_w – единичный круг $|w| < 1$, а $U_w(R)$ – круг $|w| \le R$ комплексной w-плоскости. Обозначим $l := \{w : |w| = 1\}$.

Для произвольного $n \in \mathbb{N} : n \ge 2$ на классе Ω_n рассмотрим следующие функционалы

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

$$\Upsilon_n = \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \, |a_k|^{\frac{n}{2}-1}, \tag{2}$$

где $r\left(B, a\right)$ – внутренний радиус области B относительно точки a (определение внутреннего радиуса области см., например, в [6]).

На классе $\tilde{\Omega}_n$ рассмотрим функционал

$$J_n = \Big(r\left(B_0, 0\right) \, r\left(B_\infty, \infty\right)\Big)^{\alpha} \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \, |a_k|^{\frac{n}{2}-1}\right)^{\beta}. \tag{3}$$

Рассмотрим также на классе Ω_n^0 функционал

$$\Xi_4 = r^{\alpha}\left(B_1, a_1\right) \, r^{\beta}\left(B_2, a_2\right) \, r^{\beta}\left(B_3, a_3\right) \, r^{\alpha}\left(B_4, a_4\right), \tag{4}$$

где α, $\beta > 0$ и $\alpha \ne \beta$.

Целью данной работы является нахождение максимумов функционалов (1), (2) на классе Ω_n, максимума функционала (3) на классе $\tilde{\Omega}_n$ и максимума функционала (4) на классе Ω_n^0 при некоторых дополнительных предположениях о расположении точек a_k на плоскости. Отметим, что похожие задачи были рассмотрены в работах [5 – 19]. Заметим также, что идея построения функционалов (2) и (3) заимствована из работы [15].

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть пара* $\left(F_n^0, A_n\right) \in \Omega_n^0$, $n \in \mathbb{N}$ *такая, что*

$$B_k \subset U_w, \qquad k = \overline{1, n},$$

$$\arg a_k = \frac{2\pi}{n}(k-1), \quad 0 < |a_k| < 1, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{n/4}\right) |a_k| \le \left(\sqrt{2} - 1\right)^2,$$

где $\chi(t) = \left(t + t^{-1}\right)/2$*. Тогда выполняется неравенство*

$$I_n \leq I_n^0, \tag{5}$$

в котором I_n^0 *– значение функционала* I_n *на паре* $\left(\left\{B_1^0, B_2^0, ..., B_n^0\right\}, \left\{\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{n}}, \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{n}} e^{\frac{2\pi}{n}i}, ..., \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{n}} e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)i}\right\}\right)$*, где области* B_k^0*,* $k = \overline{1,n}$*, являются круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\, dw^2 = -\frac{w^{n-2}\left(1+w^n\right)^2}{\left(-w^n + \left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)^2 \left(1 - w^n\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)^2}\, dw^2. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть компонента* $\tilde{A}_n$ *пары* $\left(\tilde{F}_n, \tilde{A}_n\right) \in \tilde{\Omega}_n$ *такая, что при всех* $k = \overline{1,n}$ *выполняются соотношения* $\arg a_k = \frac{2\pi}{n}(k-1)$, $0 < \varrho \leq |a_k| \leq R$*, где* R*,* ϱ *– фиксированные положительные числа. Тогда выполняется неравенство*

$$J_n \leq J_n^0, \tag{7}$$

в котором J_n^0 *– значение функционала* J_n *на парах вида* $\left(\left\{B_0^0, B_1^0, ..., B_n^0, B_\infty^0\right\}, \left\{0, R, R\, e^{\frac{2\pi}{n}i}, ..., R\, e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)i}, \infty\right\}\right)$*, где области* B_0^0*,* B_∞^0*,* B_k^0*,* $k = \overline{1,n}$*, являются круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\, dw^2 = -\frac{\alpha\, w^{2n} + \left(\beta\, n^2 - 2\alpha\right) R^n w^n + \alpha\, R^{2n}}{w^2\left(w^n - R^n\right)^2}\, dw^2. \tag{8}$$

Из теоремы 2 непосредственно вытекает ряд следствий, имеющих и самостоятельное значение.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 2 справедливо неравенство*

$$\left(r\left(B_0, 0\right)\, r\left(B_\infty, \infty\right)\right)^\alpha \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^\beta \leq J_n^0 \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\beta\left(1-\frac{n}{2}\right)},$$

при этом знак равенства реализуется тогда и только тогда, когда равенство достигается в (7).

Следствие 2. *Пусть выполняются условия теоремы 2 и, кроме того,* $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|^{\beta\left(1-\frac{n}{2}\right)} = M$, *где* M, *– фиксированное положительное число. Тогда справедливо неравенство*

$$\Big(r(B_0,0)\, r\,(B_\infty,\infty)\Big)^{\alpha} \left(\prod_{k=1}^{n} r\,(B_k,a_k)\right)^{\beta} \leq J_n^0\, M.$$

Следствие 3. *Пусть компонента* A_n *пары* $(F_n, A_n) \in \Omega_n$ *такая, что при всех* $k = \overline{1,n}$ *выполняются соотношения* $\arg a_k = \frac{2\pi}{n}(k-1)$, $0 < \varrho \leq |a_k| \leq R$, *где* R, ϱ *– фиксированные положительные числа. Тогда выполняется неравенство*

$$\Upsilon_n \leq \Upsilon_n^0, \tag{9}$$

в котором Υ_n^0 *– значение функционала* Υ_n *на парах* $\Big(\big\{B_1^0, B_1^0, ..., B_n^0\big\}\,,$ $\Big\{R, R\,e^{\frac{2\pi}{n}i}, ..., R\,e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)i}\Big\}\Big)$, *где области* B_k^0, $k = \overline{1,n}$, *являются круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\;dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{\left(w^n - R^n\right)^2}\;dw^2.$$

Следствие 4. *При выполнении условий следствия 3 справедливо неравенство*

$$I_n \leq \Upsilon_n^0 \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1-\frac{n}{2}},$$

при этом знак равенства реализуется тогда и только тогда, когда равенство достигается в (9).

Следствие 5. *Пусть выполняются условия следствия 3 и, кроме того,* $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|^{\beta\left(1-\frac{n}{2}\right)} = M$, *где* M, *– фиксированное положительное число. Тогда справедливо неравенство*

$$I_n \leq \Upsilon_n^0\, M.$$

Теорема 3. *Пусть компонента* A_4 *пары* $\left(F_4^0, A_4\right) \in \Omega_4^0$ *такая, что* $a_k \in l$ *при всех* $k = 1, 2, 3, 4$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\Xi_4 \leq \Xi_4^0, \tag{10}$$

в котором Ξ_4^0 *– значение функционала* Ξ_4 *на паре* $\left(\left\{B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0\right\},\right.$ $\left.\left\{a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0\right\}\right)$ *, при этом области* B_k^0*,* $k = 1, 2, 3, 4$*, являются круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\ dw^2 = \frac{(w-\varrho)^2\left(w-\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\left(w-a_1^0\right)^2\left(w-a_4^0\right)^2\left(w-a_2\right)^2\left(w-a_3^0\right)^2}\ dw^2, \qquad (11)$$

где ϱ *– корень уравнения*

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\psi\,(\beta-\alpha)\left(2\beta-\alpha\cos^2\psi\right)}{\beta\left(\beta-2\alpha\cos^2\psi\right)}$$

при $\psi = \arccos\left(\frac{1}{|\beta-\alpha|}\sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}\ \left((\alpha+\beta)\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}-\alpha^2-\beta^2\right)}\right)$, $a_1^0 = e^{i\psi}$*,* $a_4^0 = \overline{a}_1^0$*,* $a_3^0 = \overline{a}_2^0$*,* $a_2^0 + \overline{a}_2^0 = -2\frac{\alpha}{\beta}\cos\psi$*. Все остальные экстремальные пары получаются из указанной выше пары с помощью поворота комплексной плоскости вокруг начала координат.*

3. Доказательства.

Доказательство теоремы 1. Используем метод кусочно-разделяющего преобразования, разработанный В.Н. Дубининым (см., например, [5, 6]). Пусть

$$\Lambda_k = \{w : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\},\ k = 1, 2, ..., n.$$

При всех $k = \overline{1,n}$ функция $\varphi_k = (-1)^k i w^{n/2}$ однолистно отображает область Λ_k на правую полуплоскость $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Обозначим $a_{n+1} := a_1$, $\varphi_k\left(a_k\right) =: \omega_k^{(1)}$, $\varphi_k\left(a_{k+1}\right) =: \omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$.

При всех $k = \overline{1,n}$ справедливы асимптотические соотношения

$$|\varphi_k(w) - \varphi_k(a_m)| \sim \frac{n}{2}|a_m|^{\frac{n}{2}-1}\,|w-a_m|, \quad w \to a_m, \quad m = k, k+1. \ (12)$$

При $k = 2, ..., n$ результат разделяющего преобразования области B_k относительно семейства функций $\{\varphi_{k-1}, \varphi_k\}$ обозначим $\left\{G_{k-1}^{(2)}, G_k^{(1)}\right\}$. Результатом разделяющего преобразования области B_1 относительно семейства $\{\varphi_1, \varphi_n\}$ является пара областей $\left\{G_1^{(1)}, G_n^{(2)}\right\}$. Очевидно, что при всех $k = 1, 2, .., n$ наборы областей $\left\{G_k^{(1)}, G_k^{(2)}\right\}$ являются системами попарно неналегающих многосвязных областей.

Следствием результатов работ [5, 6] и соотношений (12) являются следующие неравенства:

$$r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{r(G_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)})\, r(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})}{\frac{n^2}{4}\ |a_k|^{n-2}} \right)^{1/2}, \quad k = 2, 3, ..., n, \tag{13}$$

$$r(B_1, a_1) \leq \left(\frac{r(G_1^{(1)}, \omega_1^{(1)})\, r(G_n^{(2)}, \omega_n^{(2)})}{\frac{n^2}{4}\ |a_1|^{n-2}} \right)^{1/2}. \tag{14}$$

Неравенства (13), (14) позволяют записать следующую оценку функционала (1):

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{r(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})\, r(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)})}{\frac{n^2}{4}\ \left(|a_k|\,|a_{k+1}|\right)^{(n-2)/2}} \right)^{1/2}. \tag{15}$$

Преобразуем оценку (15) к виду

$$I_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{n/4} \right) |a_k| \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(r(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})\, r(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}) \right)^{1/2}}{\left(|a_k|^{n/2} + |a_{k+1}|^{n/2} \right)}. \tag{16}$$

Из оценки (16) при условиях теоремы следует неравенство

$$I_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \left(\sqrt{2}-1\right)^2 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{r(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})\, r(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)})}{|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^2} \right)^{1/2}. \tag{17}$$

Из результатов работы [14] следует, что максимум правой части неравенства (17) достигается при выполнении условий

$$|\omega_k^{(l)}| = |\omega_p^{(s)}| = \sqrt{2}-1, \qquad l, s = 1, 2; \quad k, p = 1, 2, ..., n.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$|a_1| = |a_2| = ... = |a_n| = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2/n}. \tag{18}$$

Также имеем равенство

$$\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{n/4}\right)|a_k| = \left(\sqrt{2}-1\right)^2,$$

которое выполняется, в частности, при условии (18). Это означает, что максимум функционала (1) достигается при условии (18) и все пары $(\{G_k^{(1)}, G_k^{(2)}\}, \{\omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}\})$ совпадают с экстремалью работы [14].

Осуществляя замену локального параметра $\zeta = iw^{n/2}$ в квадратичном дифференциале (см. [14])

$$Q(\zeta)\, d\zeta^2 = \frac{\left(\zeta^2-1\right)^2}{\left(\zeta^2+(\sqrt{2}-1)^2\right)^2\left(1+\zeta^2(\sqrt{2}-1)^2\right)^2}\, d\zeta^2,$$

получим квадратичный дифференциал (6). Отсюда также следует и соотношение (5). Теорема доказана.

Замечание. Иной вариант этой теоремы при других ограничениях приведен в работе [12].

Доказательство теоремы 2. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, используем метод кусочно-разделяющего преобразования. Проводя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 1, получаем следующую оценку функционала (2):

$$J_n \le \left(\frac{2}{n}\right)^{n\beta} \prod_{k=1}^{n} \left\{ \left(r(G_0^{(k)}, 0)\, r(G_\infty^{(k)}, \infty) \right)^{2\alpha/n^2} \left(r(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\; r(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}) \right)^{\beta/2} \right\}, \qquad (19)$$

где $\{G_0^{(k)}\}_{k=1}^n$ и $\{G_\infty^{(k)}\}_{k=1}^n$ результаты разделяющего преобразования областей B_0 и B_∞ относительно семейства функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$.

Как следует из теоремы 1 работы [19] максимум правой части неравенства (19) достигается при выполнении условий

$$|\omega_k^{(l)}| = |\omega_p^{(s)}| = R_* = R^{n/2}, \qquad l, s = 1, 2; \quad k, p = 1, 2, ..., n.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$|a_1| = |a_2| = ... = |a_n| = R.$$

Это означает, что при выполнении последнего равенства достигается максимум функционала (2) и все пары $(\{G_0^{(k)}, G_k^{(1)}, G_k^{(2)} G_\infty^{(k)}\}, \{0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}, \infty\})$, $k = \overline{1, n}$, совпадают с экстремалью, полученной в теореме 1 работы [19].

Осуществляя замену локального параметра $\zeta = iw^{n/2}$ в квадратичном дифференциале из теоремы 1 работы [19], получаем квадратичный дифференциал (8). Отсюда следует справедливость неравенства (7). Теорема доказана.

Заметим, что в случае $\alpha = 0$ из неравенства (19) получаем следующую оценку

$$\Upsilon_n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(r(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})\, r(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}) \right)^{1/2}$$

и при завершении доказательства теоремы 2 вместо теоремы 1 работы [19] достаточно воспользоваться классическим результатом М.А. Лаврентьева [1].

Доказательство теоремы 3. Существование экстремальных пар $\left(\left\{B_1^0, ..., B_4^0\right\}, \left\{a_1^0, ..., a_4^0\right\}\right)$ доказывается стандартным образом.

К экстремальным парам применим дополнительную вариацию

$$\xi = \frac{w - \varepsilon}{1 - w\overline{\varepsilon}}, \tag{20}$$

где $|\varepsilon| < 1$. Используя вариацию (20) подобно тому, как это сделано в работах [17, 18], получаем нормирующее условие, которому удовлетворяют точки a_k^0, $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\alpha \left(a_1^0 + a_4^0\right) + \beta \left(a_2^0 + a_3^0\right) = 0. \tag{21}$$

Используя условие $a_k^0 \in l$ при $k = 1, 2, 3, 4$, условие (21), а также тот факт, что функционал (4) инвариантен относительно поворота комплексной плоскости вокруг начала координат, получаем

$$a_4^0 = \overline{a}_1^0 = e^{i\psi},\ \psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad a_3^0 = \overline{a}_2^0. \tag{22}$$

Для дальнейшего изучения экстремальных пар применим вариационную формулу Дюрена-Шиффера [20]

$$w^* = w + \frac{A\rho^2}{w_0} \frac{w}{w - w_0} - \frac{\overline{A}\rho^2}{\overline{w_0}} \frac{w^2}{1 - w\overline{w_0}} + O(\rho^3), \tag{23}$$

где $\rho > 0$ – достаточно малый параметр, $A = A(\rho)$ – параметр граничной вариации, $\rho^{-3}\left|O\left(\rho^3\right)\right|$ – величина, равномерно ограниченная на любом компакте комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащем точек w_0 и $(\overline{w_0}\,)^{-1}$.

Аналогично тому, как это сделано в работах [10, 17, 18], на основании формулы (23) получаем значение внутреннего радиуса для варьированных пар $(\{B_k^*\}_{k=1}^4, \{a_k^*\}_{k=1}^4)$:

$$r\left(B_k^*, a_k^*\right) = r\left(B_k^0, a_k^0\right)\left\{1 - \rho^2 \mathrm{Re} A\left[\frac{2a_k^0}{w_0\left(a_k^0 - w_0\right)^2}\right] + O\left(\rho^3\right)\right\}. \quad (24)$$

Используя равенства (22) – (24), получаем соотношение

$$\Xi_4^* = \Xi_4\left\{1 + \frac{8\left(\alpha+\beta\right)}{\beta^2}\times\right.$$

$$\left.\times\rho^2 \mathrm{Re} A\left[\frac{A_1 w^4 - A_2 w^3 + A_3 w^2 - A_2 w + A_1}{\left(w-a_1\right)^2\left(w-\overline{a}_1\right)^2\left(w-a_2\right)^2\left(w-\overline{a}_2\right)^2}\right] + O\left(\rho^3\right)\right\}, \quad (25)$$

где Ξ_4^* — значение функционала (4) на варьированных парах,

$$A_1 = \beta\left(\beta - 2\alpha\cos^2\psi\right), \quad A_2 = 2\left(\beta-\alpha\right)\left(2\beta - \alpha\cos^2\psi\right)\cos\psi,$$

$$A_3 = 2\left(\beta^2 + 2\left(\alpha-\beta\right)^2\cos^2\psi\right).$$

Теперь, используя соотношение (25) и основную лемму метода граничной вариации Шиффера [21], приходим к заключению о том, что $\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{4} B_k^0\right)$ есть замыкание объединения конечного числа траекторий квадратичного дифференциала

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{A_1 w^4 - A_2 w^3 + A_3 w^2 - A_2 w + A_1}{\left(w-a_1\right)^2\left(w-\overline{a}_1\right)^2\left(w-a_2\right)^2\left(w-\overline{a}_2\right)^2}\,dw^2. \quad (26)$$

Далее для определенности будем считать, что $\alpha < \beta$. На основании результатами монографии [2, глава 7] делаем вывод о том, что траектории квадратичного дифференциала (26) симметричны относительно l, при этом возможны только следующие два случая размещения его нулей.

I. Квадратичный дифференциал (26) имеет два простых нуля $z_1 = b \in l$, $z_2 = \overline{b} \in l$ и один нуль второй кратности $z_3 = 1$.

II. Квадратичный дифференциал (26) имеет два нуля второй кратности $z_1 = \varrho$, $0 < \varrho < 1$, $z_2 = 1/\varrho$.

Рассмотрим каждый из случаев.

В случае I квадратичный дифференциал (26) имеет вид

$$Q(w)\ dw^2 = \frac{(w-b)\left(w-\overline{b}\right)(w-1)^2}{(w-a_1)^2\,(w-\overline{a}_1)^2\,(w-a_2)^2\,(w-\overline{a}_2)^2}\ dw^2. \tag{27}$$

Сравнивая квадратичные дифференциалы (26), (27) и используя при этом теорему Виета, получаем систему

$$\begin{cases} b+\overline{b}+2=\frac{A_2}{A_1}\,, \\ 2b+2\overline{b}+2=\frac{A_3}{A_1}\,, \end{cases}$$

из которой следует кубическое уравнение относительно $\cos\psi$:

$$\alpha\,(\beta-\alpha)\cos^3\psi+\left(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2\right)\cos^2\psi-2\beta\,(\beta-\alpha)\cos\psi+\beta^2=0. \tag{28}$$

Уравнение (28) имеет корни

$$(\cos\psi)_1=1\,,\quad (\cos\psi)_2=\frac{\beta}{\beta-\alpha}\,,\quad (\cos\psi)_3=-\frac{\beta}{\alpha}\,.$$

Поскольку эти корни не удовлетворяют условиям (22), то приходим к выводу о том, что случай I не возможен.

Рассмотрим теперь случай II. В этом случае квадратичный дифференциал (26) имеет вид

$$Q(w)\ dw^2 = \frac{(w-\varrho)^2\left(w-\frac{1}{\varrho}\right)^2}{(w-a_1)^2\,(w-\overline{a}_1)^2\,(w-a_2)^2\,(w-\overline{a}_2)^2}\ dw^2. \tag{29}$$

Сравнивая квадратичные дифференциалы (26) и (29) и используя при этом теорему Виета, получаем систему

$$\begin{cases} 2\varrho+2\frac{1}{\varrho}=\frac{A_2}{A_1}\,, \\ 4+\varrho^2+\frac{1}{\varrho^2}=\frac{A_3}{A_1}\,, \end{cases}$$

из которой следует биквадратное уравнение относительно $\cos\psi$:

$$\alpha\left(\beta-\alpha\right)^{2}\cos^{4}\psi+4\beta\left(\alpha^{2}+\beta^{2}\right)\cos^{2}\psi-4\beta^{3}=0. \tag{30}$$

Таким образом, получаем

$$\cos^{2}\psi=2\beta\,\frac{-\alpha^{2}-\beta^{2}\pm\left(\alpha+\beta\right)\sqrt{\alpha^{2}-\alpha\beta+\beta^{2}}}{\alpha\left(\beta-\alpha\right)^{2}}.$$

Очевидно, что условиям (22) удовлетворяет только один корень уравнения (30):

$$\cos\psi=\frac{1}{|\beta-\alpha|}\sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}\,\left(\left(\alpha+\beta\right)\sqrt{\alpha^{2}-\alpha\beta+\beta^{2}}-\alpha^{2}-\beta^{2}\right)}.$$

Таким образом, при $\alpha<\beta$ соотношения (10) и (11) доказаны. Случай $\alpha>\beta$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Частный случай теоремы 4 при $\alpha=\beta$ установлен в работе [3].

Выражаю глубокую благодарность А.К. Бахтину за постановку задач и ценные указания.

Литература

[1] Лаврентьев М. А. К теории конформных отображений, *Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР*, 1934, – **5.** – С. 159 – 245.

[2] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения.* – М: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

[3] Бахтина Г. П. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях:* Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.

[4] Кузьмина Г. В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, 2001. – **276.** – С. 253 – 275.

[5] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций:* Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1988. – 193 с.

[6] Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного, *Успехи мат. наук.*, 1994. – **49,** № 1 (295). – С. 3 – 76.

[7] Ковалев Л. В. О трех непересекающихся областях, *Дальневосточный математический журнал.*, 2000. – **1,** № 1. – С. 3 – 7.

[8] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. *Некоторые экстремальные задачи теории конформных отображений* , Экстремальные задачи теории однолистных функций. – Киев, 2002. – С. 10 – 14. – (Препр. НАН Украины. Ин-т математики; 2002.6).

[9] Дубинин В. Н. Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения, *Зап. научн. семин. ЛОМИ.*, 1997. – **237.** – С. 56 – 73.

[10] Бахтин А. К. *Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности*, Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. – Киев, 2003. – С. 1 – 45. – (Препр. НАН Украины. Ин-т математики; 2003.6).

[11] Бахтин А. К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности, *Доп. Нац. Акад. наук України.*, 2004. – № 8. – С. 7 – 15.

[12] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах, *Доп. Нац. Акад. наук України.*, 2004. – № 7. – С. 7 – 13.

[13] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. *Некоторые экстремальные задачи теории неналегающих областей со свободными полюсами на лучах*, Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. – Киев, 2003. – С. 46 – 67. – (Препр. НАН Украины. Ин-т математики; 2003.6).

[14] Кузьмина Г. В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей в круге, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, 1983. – **125.** – С. 99 – 113.

[15] Bahtin A. K. Extremal problems for non-overlapping domains with free poles on closed curves, *International Workshop on Potential Theory and Free Boundary Flows:* Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2003. – С. 4.

[16] Таргонский А. Л. Об одной экстремальной задаче для трех неналегающих областей, *International Conference on Complex Analysis and Potential Theory:* Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2001. – С. 84.

[17] Бахтин А. К. О произведении внутренних радиусов симметричных неналегающих областей, *Укр. мат. журн.*, 1997. – **49,** № 11. – С. 1454 – 1464.

[18] Бахтин А. К. Некоторые задачи в теории неналегающих областей, *Укр. мат. журн.*, 1999. – **51,** № 6. – С. 723 – 731.

[19] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Некоторые экстремальные задачи на классе неналегающих областей, *Наст. сб.*

[20] Duren P.L., Schiffer M. A variation method for function schlicht in annulus, *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, 1962. – **9.** – P. 260 – 272.

[21] Schiffer M. A method of variation within the family of simple functions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1938. - **44.** - P. 432 - 449.