УДК 517.54

Некоторые экстремальные задачи на лучевых системах

А. Л. Таргонский

(*Институт математики НАН Украины, Киев*)

targonsk@zu.edu.ua

В данной работе рассматриваются экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. Решено ряд задач так называемого "смешанного типа", то есть одни полюсы являются фиксированными, а другие – свободными.

Введение. В геометрической теории функций комплексного переменного экстремальные задачи о неналегающих областях представляют бурно развивающееся направление. Возникновение этого направления связывается с известной работой академика М.А.Лаврентьева [1], где была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно не пересекающихся односвязных областей. В последующем эта задача обобщалась и усиливалась в работах многих авторов (см. напр. [2 – 9]). В данной работе рассматриваются задачи подобного типа.

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — обозначают системы натуральных, вещественных и комплексных чисел соответственно.

Системой неналегающих областей (с. н. о.) называется конечный набор $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ произвольных областей любой связности таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \bigcap B_m = \emptyset$ $\forall k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Для всякого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ обозначим через Λ_n множество наборов n точек $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, где точки $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $0 \leq \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi$.

Пусть

$$\mu = \mu\left(A_{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \chi\left(|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{2k-1}|,$$

где $A_{2n} \in \Lambda_{2n}$, а $\chi\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$.

Величину $r\left(B, a\right)$ будем называть внутренним радиусом области B, относительно точки a (определение внутреннего радиуса области см., например [8]).

Рассмотрим следующий функционал

$$J_n = r^{\alpha_0}\left(B_0, 0\right) \cdot r^{\alpha_{n+1}}\left(B_\infty, \infty\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}\left(B_k, a_k\right),$$

где произвольная система точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \in \Lambda_n$, $n \geq 2$, произвольная с. н. о. $\{B_0, B_1, B_2, ..., B_n, B_\infty\}$, а фиксированные вещественные числа $\alpha_k \geq 0$, $k = 0, 1, ..., n, n+1$.

В работе, при любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ и при некоторых ограничениях на произвольную систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \in \Lambda_n$ и с. н. о. $\{B_0, B_1, B_2, ..., B_n, B_\infty\}$, оцениваются сверху значения функционала J_n, причем $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$. Следует отметить, что аналогичная задача для равномерной лучевой системы точек, при $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_0 = \alpha_{n+1} = \frac{n^2}{4}$, $\alpha_{2k} = 1$, $\alpha_{2k-1} = \alpha$ – произвольное вещественное неотрицательное число, $k = \overline{1, m}$, решена в работе [16, теорема 4]. Также, похожие задачи были рассмотрены в работах [5 – 18].

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Для любых $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и для произвольной системы точек $A_{2n} = \{a_k\}_{k=1}^{2n} \in \Lambda_{2n}$ такой, что*

$$\arg a_{2k-1} = \frac{2\pi}{n}\left(k-1\right), \quad a_{2k} = \exp\left\{\frac{\pi}{n}\left(2k-1\right)i\right\}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\mu\left(A_{2n}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n,$$

и произвольной с. н. о. $\{B_0, B_1, B_2, ..., B_{2n}\}$ такой, что

$$0 \in B_0, \quad a_k \in B_k, \ k = \overline{1, 2n},$$

$$B_{2k} \subset E_k := \left\{w : \ \frac{2\pi}{n}\left(k-1\right) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\right\}, \ k = \overline{1, n},$$

справедливо неравенство

$$r^{\frac{n^2}{4}}\left(B_0,0\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha}\left(B_{2k},a_{2k}\right)\cdot r\left(B_{2k-1},a_{2k-1}\right)\leq$$

$$\leq r^{\frac{n^2}{4}}\left(D_0,0\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha}\left(D_{2k},d_{2k}\right)\cdot r\left(D_{2k-1},d_{2k-1}\right), \tag{1}$$

где D_0, D_k, d_k, $k=\overline{1,2n}$ *соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=\frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}}+i\right)^3h^3-\left(w^{\frac{n}{2}}-i\right)^3\right)\left(\left(w^{\frac{n}{2}}+i\right)^3-\left(w^{\frac{n}{2}}-i\right)^3h^3\right)}{w^2\left(w^n+1\right)^2\left(w^n-3\right)^2}dw^2, \tag{2}$$

а $h\in[0;\,1)$ *— корень уравнения* $h^3+\frac{1}{h^3}=\frac{9}{\alpha}-2$.

Теорема 2. *Для любых* $n\geq3$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\left[0,\,\frac{1}{2}\right]$ *и для произвольной системы точек* $A_{2n}=\{a_k\}_{k=1}^{2n}\in\Lambda_{2n}$ *такой, что*

$$\arg a_{2k-1}=\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right),\quad a_{2k}=\exp\left\{\frac{\pi}{n}\left(2k-1\right)i\right\},\quad k=\overline{1,n},$$

$$\mu\left(A_{2n}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n,$$

и произвольной с. н. о. $\{B_1,B_2,...,B_{2n},B_\infty\}$ *такой, что*

$$\infty\in B_\infty,\quad a_k\in B_k,\ k=\overline{1,2n},$$

$$B_{2k}\subset E_k=\left\{w:\ \frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)<\arg w<\frac{2\pi}{n}k\right\},\ k=\overline{1,n},$$

справедливо неравенство

$$r^{\frac{n^2}{4}}\left(B_\infty,\infty\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha}\left(B_{2k},a_{2k}\right)\cdot r\left(B_{2k-1},a_{2k-1}\right)\leq$$

$$\leq r^{\frac{n^2}{4}}\left(D_\infty,\infty\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha}\left(D_{2k},d_{2k}\right)\cdot r\left(D_{2k-1},d_{2k-1}\right),$$

где D_∞, D_k *и* d_k, $k=\overline{1,2n}$ *соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 =$$

$$= -\frac{w^{n-2}\cdot\left(\left(w^{\frac{n}{2}}+i\right)^3 h^3+\left(w^{\frac{n}{2}}-i\right)^3\right)\left(\left(w^{\frac{n}{2}}+i\right)^3+\left(w^{\frac{n}{2}}-i\right)^3 h^3\right)}{\left(w^n+1\right)^2\left(w^n-\frac{1}{3}\right)^2}dw^2,$$

а $h\in[0;\,1)$ *— корень уравнения* $h^3+\frac{1}{h^3}=\frac{9}{\alpha}-2$.

Теорема 3. *Для любых* $n\geq 3$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\left[0,\,\frac{1}{2}\right]$ *и для произвольной системы точек* $A_{2n}=\{a_k\}_{k=1}^{2n}\in\Lambda_{2n}$ *такой, что*

$$\arg a_{2k-1}=\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right),\quad a_{2k}=\exp\left\{\frac{\pi}{n}\left(2k-1\right)i\right\},\quad k=\overline{1,n},$$

$$\mu\left(A_{2n}\right)=1,$$

и произвольной с. н. о. $\{B_1,B_2,...,B_{2n}\}$ *такой, что*

$$a_k\in B_k,\quad k=\overline{1,2n},$$

$$B_{2k}\subset E_k=\left\{w:\ \frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)<\arg w<\frac{2\pi}{n}k\right\},\ k=\overline{1,n},$$

справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha}\left(B_{2k},a_{2k}\right)\cdot r\left(B_{2k-1},a_{2k-1}\right)\leq\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha}\left(D_{2k},d_{2k}\right)\cdot r\left(D_{2k-1},d_{2k-1}\right),$$

где D_k *и* d_k, $k=\overline{1,2n}$ *соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 =$$

$$= \frac{w^{n-2}\cdot\left(\left(w^{\frac{n}{2}}-i\right)^2 h^2-\left(w^{\frac{n}{2}}+i\right)^2\right)\left(\left(w^{\frac{n}{2}}-i\right)^2-\left(w^{\frac{n}{2}}+i\right)^2 h^2\right)}{\left(w^{2n}-1\right)^2}dw^2,$$

а $h\in[0;\,1)$ *— корень уравнения* $h^2+\frac{1}{h^2}=\frac{4}{\alpha}-2$.

3. Доказательства.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 опирается на метод кусочно-разделяющего преобразования, разработанного В. Н. Дубининым ([7 – 9]).

Пусть функция $\pi_k(w) = (-1)^k i w^{\frac{n}{2}}$ конформно отображает область $E_k = \left\{w : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\right\}$ на правую полуплоскость для всех $k = \overline{1,n}$.

Функции $z_k(w) = \frac{\pi_k(a_{2k}) - \pi_k(w)}{\pi_k(a_{2k}) + \pi_k(w)}$, $k = \overline{1,n}$, $z_0(w) := z_n(w)$ конформно отображают правую полуплоскость на внутренность единичного круга. Семейство функций $z_k(w)$ осуществляет разделяющее преобразование относительно областей E_k, $z_k(a_{2k}) = 0$, $k = \overline{1,n}$.

Заметим, что

$$|z_k(w) - 1| \sim 2 \cdot |w|^{\frac{n}{2}}, \quad w \to 0,\ k = \overline{1,n},$$

$$|z_k(w) - z_k(a_m)| \sim n \cdot \frac{|a_m|^{\frac{n}{2}-1}}{1 + |a_m|^n} \cdot |w - a_m|,\ k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$w \to a_m,\ m = 2k-1, 2k+1,$$

где $a_{2n+1} := a_1$.

Результатом разделяющего преобразования областей B_{2k-1}, относительно семейства функций $\{z_{k-1}(w), z_k(w)\}$, $k = \overline{1,n}$ являются области $\left\{G_{k-1}^{(3)}, G_k^{(2)}\right\}$, $k = \overline{1,n}$, где $G_0^{(3)} := G_n^{(3)}$. Ясно, что $z_k(a_{2k-1}) =:$ $=: \lambda_k^{(2)} \in G_k^{(2)}$, $z_k(a_{2k+1}) =: \lambda_k^{(3)} \in G_k^{(3)}$, $k = \overline{1,n}$.

Из теоремы 1.9 [8] и соотношений (3) получаем неравенство

$$r(B_{2k-1}, a_{2k-1}) \leq \left[\frac{r\left(G_{k-1}^{(3)}, \lambda_{k-1}^{(3)}\right) \cdot r\left(G_k^{(2)}, \lambda_k^{(2)}\right)}{\frac{n \cdot |a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}}{1+|a_{2k-1}|^n} \cdot \frac{n \cdot |a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}}{1+|a_{2k-1}|^n}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где $\lambda_0^{(3)} := \lambda_n^{(3)}$.

Для области B_0 в результате применения разделяющего преобразования относительно семейства $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$ получаем набор областей $G_k^{(1)}$, таких что $z = 1 \in G_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$ для которых справедливо неравенство

$$r(B_0, 0) \leq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^n r\left(G_k^{(1)}, 1\right)\right]^{\frac{2}{n^2}}. \tag{5}$$

Для областей B_{2k}, $k = 1, 2, ..., n$ в результате применения разделяющего преобразования относительно семейства $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$ получаем набор областей $G_k^{(0)}$, $G_k^{(\infty)}$, таких что $z=0\in G_k^{(0)}$, $z=\infty\in G_k^{(\infty)}$, $k=\overline{1,n}$ для которых справедливо неравенство

$$r\left(B_{2k},a_{2k}\right)=\frac{4}{n}\cdot\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Из неравенств (4) – (6) получим

$$r^{\frac{n^2}{4}}\left(B_0,0\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha}\left(B_{2k},a_{2k}\right)\cdot r\left(B_{2k-1},a_{2k-1}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2^{n\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)}}{n^{n(\alpha+1)}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|a_{2k-1}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|a_{2k-1}\right|\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\times$$

$$\times\left[r\left(G_k^{(2)},\lambda_k^{(2)}\right)\cdot r\left(G_k^{(3)},\lambda_k^{(3)}\right)\cdot r\left(G_k^{(1)},1\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

В силу условий теоремы 1 из (7) получаем

$$r^{\frac{n^2}{4}}\left(B_0,0\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha}\left(B_{2k},a_{2k}\right)\cdot r\left(B_{2k-1},a_{2k-1}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2^{n\left(2\alpha+\frac{3}{2}\right)}}{3^{\frac{n}{2}-1}\cdot n^{n(\alpha+1)}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\times$$

$$\times\left[r\left(G_k^{(2)},\lambda_k^{(2)}\right)\cdot r\left(G_k^{(3)},\lambda_k^{(3)}\right)\cdot r\left(G_k^{(1)},1\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Используя работу [9] из (8) получаем оценку

$$r^{\frac{n^2}{4}}\left(B_0,0\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha}\left(B_{2k},a_{2k}\right)\cdot r\left(B_{2k-1},a_{2k-1}\right)\leq\frac{2^{n\left(2\alpha+\frac{3}{2}\right)}}{3^{\frac{n}{2}-1}\cdot n^{n(\alpha+1)}}\times$$

$$\times\left(\left(r\left(B_0^0,0\right)\cdot r\left(B_\infty^0,\infty\right)\right)^{\alpha}\cdot r\left(B_1^0,1\right)\cdot r\left(B_2^0,\lambda_2^0\right)\cdot r\left(B_3^0,\lambda_3^0\right)\right)^{\frac{n}{2}},$$

где B_0^0, B_∞^0, $\left\{B_k^0\right\}_{k=1}^{3}$, λ_2^0, λ_3^0 соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{\left(w^3+h^3\right)\left(w^3+\frac{1}{h^3}\right)}{w^2\left(w^3-1\right)^2}dw^2, \tag{9}$$

а $h \in [0;\,1)$ — корень уравнения $h^3 + \frac{1}{h^3} = \frac{9}{\alpha} - 2$.

Используя свойства разделяющего преобразования, получаем неравенство (1). С помощью замены переменной квадратичный дифференциал (9) получаем из квадратичного дифференциала (2). *Теорема 1 доказана.*

Доказательство теоремы 2 проводится, в основном, аналогично доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. При доказательстве этой теоремы также используется метод кусочно-разделяющего преобразования В. Н. Дубинина.

Результатом разделяющего преобразования областей B_{2k-1}, относительно семейства функций $\{z_{k-1}(w), z_k(w)\}$, $k = \overline{1,n}$, где функции z_k введено при доказательстве теоремы 1, являются области $\left\{G_{k-1}^{(2)}, G_k^{(1)}\right\}$, $k = \overline{1,n}$, $G_0^{(2)} := G_n^{(2)}$. Ясно, что $z_k(a_{2k-1}) =: \lambda_k^{(1)} \in G_k^{(1)}$, $z_k(a_{2k+1}) =: \lambda_k^{(2)} \in G_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, где $a_{2n+1} := a_1$.

Воспользовавшись соотношениями (3) получаем неравенство

$$r(B_{2k-1}, a_{2k-1}) \leq \left[\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, \lambda_{k-1}^{(2)}\right) \cdot r\left(G_k^{(1)}, \lambda_k^{(1)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}}{1+|a_{2k-1}|^n} \cdot \frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}}{1+|a_{2k-1}|^n}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,n}, \quad (10)$$

где $\lambda_2^{(0)} := \lambda_2^{(n)}$.

Результат разделяющего преобразования для областей B_{2k}, $k = \overline{1,n}$ будем обозначать так как и при доказательстве теоремы 1.

Воспользовавшись соотношениями (6) и (10) получим следующую оценку

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha}(B_{2k}, a_{2k}) \cdot r(B_{2k-1}, a_{2k-1}) \leq \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, \lambda_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}}{1+|a_{2k-1}|^n}} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{r\left(G_k^{(1)}, \lambda_k^{(1)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}}{1+|a_{2k-1}|^n}}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{n}\cdot\left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\alpha}. \quad (11)$$

Из неравенства (11) имеем следующее соотношение

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha}(B_{2k}, a_{2k}) \cdot r(B_{2k-1}, a_{2k-1}) \leq \left(\frac{2^{2\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}\right)^{n} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \chi\left(|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{2k-1}| \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \times$$
$$\times \left[r\left(G_k^{(1)},\lambda_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)},\lambda_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

В силу условий теоремы 2 из неравенства (12) имеем

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha}\left(B_{2k},a_{2k}\right)\cdot r\left(B_{2k-1},a_{2k-1}\right) \leq \left(\frac{2^{2\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}\right)^{n}\times$$
$$\times \prod_{k=1}^{n}\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left[r\left(G_k^{(1)},\lambda_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)},\lambda_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Используя работу [9] из (13) получаем оценку

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha}\left(B_{2k},a_{2k}\right)\cdot r\left(B_{2k-1},a_{2k-1}\right) \leq \left(\frac{2^{2\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}\right)^{n}\times$$
$$\times\left(\left(r\left(B_0^0,0\right)\cdot r\left(B_\infty^0,\infty\right)\right)^{\alpha}\cdot r\left(B_1^0,\lambda_1^0\right)\cdot r\left(B_2^0,\lambda_2^0\right)\right)^{\frac{n}{2}},$$

где с. н. о. $\left\{B_0^0,B_1^0,B_2^0,B_\infty^0\right\}$ и точки λ_1^0, λ_2^0 соответственно, являются круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\left(w^2-h^2\right)\left(w^2-\frac{1}{h^2}\right)}{w^2\left(w^2+1\right)^2}dw^2,$$

$h\in[0;\,1)$ — корень уравнения $h^2+\frac{1}{h^2}=\frac{4}{\alpha}-2$.

Аналогично окончанию доказательства теоремы 1, используя свойства разделяющего преобразования получаем утверждение теоремы. *Теорема 3 доказана.*

Выражаю глубокую благодарность А. К. Бахтину за постановку задач и ценные указания.

Литература

[1] Лаврентьев М. А. К теории конформных отображений, *Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР*, 1934, – **5.** – С. 159 – 245.

[2] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

[3] Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.

[4] Дженкинс Дж. А. Однолистные функции и конформные отображения. – М: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

[5] Бахтина Г. П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.

[6] Кузьмина Г. В. Методы геометрической теории функций I, II, *Алгебра и анализ*, – 1997. – **9,** № 3. – С. 41 – 103, № 5. – С. 1 – 50.

[7] Дубинин В. Н. Метод симметризации в задачах о неналегающих областях, *Мат. сб.*, – 1985. – **128,** № 1. – С. 110 – 123.

[8] Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного, *Успехи мат. наук*, – 1994. – **49,** № 1 (295). – С. 3 – 76.

[9] Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении, *Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР*, – 1988. – **168.** – С. 48 – 66.

[10] Бахтин А. К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности, *Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами.* – Киев, 2003. – С. 1 – 45. – (Препр. НАН Украины. Ин-т математики; 2003.6).

[11] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Некоторые экстремальные задачи теории неналегающих областей со свободными полюсами на лучах, *Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами.* – Киев, 2003. – С. 46 – 67. – (Препр. НАН Украины. Ин-т математики; 2003.6).

[12] Бахтин А. К. Экстремальные задачи со свободными полюсами на окружности, *Доп. Нац. Акад. наук України*, – 2005. – № 5. – С. 7 – 10.

[13] Бахтин А. К. Некоторые задачи в теории неналегающих областей, *Укр. мат. журн.*, 1999. – **51,** № 6. – С. 723 – 731.

[14] Бахтин А. К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучевых системах, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – **1,** № 3. – С. 235 – 243.

[15] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах, *Доп. Нац. Акад. наук України*. – 2004. – № 7. – С. 7 – 13.

[16] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Некоторые экстремальные задачи на классе неналегающих областей, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – **1,** № 3. – С. 244 – 253.

[17] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы, *Нелінійні коливання*. – 2005. – **8,** № 3. – С. 298 – 303.

[18] Таргонский А. Л. Оценки некоторых функционалов на классе неналегающих областей, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – **1,** № 3. – С. 305 – 317.