УДК 517.5

П. М. Тамразов (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. А. Сарана (Житомир. пед. ин-т)

КОНТУРНО-ТЕЛЕСНЫЕ СВОЙСТВА ТОНКО ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ *

We prove contour-solid theorems for the holomorphic functions defined in finely open sets of the complex plane.

Доведено контурно-тілесні теореми для тонко голоморфних функцій, заданих на тонко відкритих множинах комплексної площини.

1. Введение. В работах [1, 2] установлены усиленные контурно-телесные теоремы соответственно для субгармонических и голоморфных функций в открытых множествах комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В [3, 4] получены аналоги результатов работы [1] для тонко гипогармонических функций в тонко открытых множествах на $\mathbb{C}$, а в [5] приведены некоторые аналоги результатов работы [2] для тонко голоморфных функций в тонко открытых множествах на $\mathbb{C}$. В настоящей работе дается уточнение, усиление и обобщение результатов работы [5]. При этом используются методы, разработанные в [1, 2].

2. Основные условия и обозначения. Если множество E содержится в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, используем следующие обозначения (см. [4]): $CE := \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, $b(E)$ — база множества E в $\overline{\mathbb{C}}$, $\tilde{E} := E \bigcup b(E)$ — тонкое замыкание множества E в $\overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\partial}_f E$ — тонкая граница множества E в $\overline{\mathbb{C}}$, $\partial_f E := \mathbb{C} \bigcap \overline{\partial}_f E$, $(E)_i := E \setminus b(E)$ — множество всех тонко изолированных точек множества E, $(E)_l := E \setminus (E)_i$.

Для любого тонко открытого множества G выполнены соотношения $(G)_i = \varnothing$, $b(G) = \tilde{G}$ [6, с. 29].

Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — тонко открытое множество. Функция $\varphi : D \to \mathbb{C}$ называется *тонко голоморфной*, если каждая точка $z \in D$ имеет тонкую окрестность $V \subset D$, компактную в $\overline{\mathbb{C}}$ (в стандартной топологии) и такую, что сужение функции φ на множество V равно сужению на V некоторой функции, голоморфной в открытой окрестности множества V [7].

Функция φ, определенная в открытом множестве $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, является тонко голоморфной тогда и только тогда, когда она голоморфна в D [8, с. 126].

Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех функций $\mu : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, для каждой из которых множество $I_\mu = \{ x : \mu(x) > 0 \}$ связно и сужение функции $\log \mu(x)$ на I_μ вогнуто относительно $\log x$. Пусть $\mathfrak{M}^*$ — класс всех $\mu \in \mathfrak{M}$, для которых множество I_μ не пусто. Для $\mu \in \mathfrak{M}^*$ через x_μ^- и x_μ^+ обозначим соответственно левый и правый концы промежутка I_μ. Очевидно, $0 \le x_\mu^- \le x_\mu^+ \le +\infty$. Существуют пределы

$$\mu_0 := \lim_{x \to 0} \frac{\log \mu(x)}{\log x}, \quad \mu_\infty := \lim_{x \to +\infty} \frac{\log \mu(x)}{\log x}$$

и выполняются соотношения

$$\mu_0 \ge \mu_\infty, \quad \mu_0 > -\infty, \quad \mu_\infty < +\infty, \tag{1}$$

* Выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № UB 4000), Международного научного фонда и Украины (грант № UB 4200) и INTAS (грант № 94-1474).

а если $x_\mu^- > 0$ (аналогично $x_\mu^+ < +\infty$), то положим $\mu_0 = +\infty$ (соответственно $\mu_\infty = -\infty$). Для $\mu \equiv 0$ в качестве μ_0 и μ_∞ можно использовать произвольные конечные числа, удовлетворяющие условиям (1). При $\mu_0 < +\infty$ определим целое m_0 условиями $m_0 - 1 < \mu_0 \leq m_0$, а при $\mu_\infty > -\infty$ — целое m_∞ условиями $m_\infty \leq \mu_\infty < m_\infty + 1$.

Классы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ рассмотрены в [2]. Когда $\mu(\cdot)$ пробегает класс $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}^*$, функция $\log\mu(\cdot)$ пробегает соответственно класс L или L^* из работ [1, 4].

Пусть G — тонко открытое множество в $\mathbb{C}$ и $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Для функции f: $G \to \mathbb{C}$ введем величины

$$f_{a,G} := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{z \to a,\, z \in G}} \dfrac{\log|f(z)|}{|\log|z-a||} & \text{при } a \in \partial_f G; \\[2ex] 0 & \text{при } a \notin \partial_f G, \end{cases}$$

$$f_{\infty,G} := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{z \to \infty,\, z \in G}} \dfrac{\log|f(z)|}{\log|z|} & \text{при } \infty \in \overline{\partial_f} G; \\[2ex] 0 & \text{при } \infty \notin \overline{\partial_f} G. \end{cases}$$

3. Локальные контурно-телесные результаты. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$ *— фиксированная точка;* $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ *— тонко открытое множество;* $\mu \in \mathfrak{M}$; f: $(\tilde{G} \setminus \{a\}) \cap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в* G *и удовлетворяющая условию*

~~ограниченно в~~ на каждой ограниченной вместе множеств G_j отделимых от т. a

$$|f(z)| \leq \mu(|z-a|) \qquad \forall\, z \in (\partial_f G) \setminus \{a\}. \tag{2}$$

Положим $z_1 = a$, $z_2 = \infty$. *Предположим, что при каждом* $s = 1, 2$ *(независимо друг от друга) для каждой тонко связной компоненты* G_j *множества* G, *для которой* $z_s \in b(G_j)$ $(= \tilde{G}_j)$, *выполняется неравенство*

$$f_{z_s, G_j} < +\infty, \tag{3}$$

а если $z_s \notin b(C\,G_j)$, *то предположим также, что при* $z_s = a$ *верно*

$$\mu_0 < +\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta - a|^{m_0 - 1}) \quad (\zeta \to a), \tag{4}$$

а при $z_s = \infty$

$$\mu_\infty > -\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta|^{m_\infty + 1}) \quad (\zeta \to \infty). \tag{5}$$

Тогда выполняется одна и только одна из двух возможностей: либо верно соотношение

$$|f(\zeta)| \leq \mu(|\zeta - a|) \qquad \forall\, \zeta \in G, \tag{6}$$

либо имеет место следующий исключительный случай: $G = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $\mu(x) = \beta x^m$ $\forall\, x > 0$, $f(\zeta) = c(\zeta - a)^m$ $\forall\, \zeta \in G$, m *— целое число,* $m = m_0 = m_\infty$, $|c| > \beta \geq 0$, β, c *— постоянные.*

Теорема 1 является частным случаем следующего более общего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$ *— фиксированная точка;* $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ *— тонко открытое множество;* Q *— множество, которое содержится в* $\overline{\partial_f} G$, *со-*

держит точки $z_1 = a$ *и* $z_2 = \infty$, *но не содержит никаких неполярных компактов;* $\mu \in \mathfrak{M}$; $f\colon G \to \mathbb{C}$ *— тонко голоморфная функция, ограниченная на каждой части множества* G, *отделимой от точек* $z_1 = a$ *и* $z_2 = \infty$, *и удовлетворяющая условию*

$$\operatorname*{fine\,lim}_{\zeta \to z,\, \zeta \in G} f(\zeta) \le \mu(|z-a|) \qquad \forall z \in (\partial_f G)\setminus Q. \tag{7}$$

Предположим, что при каждом $s = 1, 2$ *(независимо друг от друга) для каждой тонко связной компоненты* G_j *множества* G, *для которой* $z_s \in b(G_j)$ $(= \tilde{G}_j)$, *выполняется неравенство* (3), *а если* $z_s \notin b(CG_j)$, *то предположим также, что при* $z_s = a$ *верно* (4), *а при* $z_s = \infty$ *верно* (5). *Тогда реализуется одна и только одна из двух возможностей: либо верно соотношение* (6), *либо имеет место следующий исключительный случай:* $G = \mathbb{C}\setminus Q$, $\mu(x) = \beta x^m$ $\forall x > 0$, $f(\zeta) = c(\zeta - a)^m$ $\forall \zeta \in G$, m *— целое число,* $m = m_0 = m_\infty$, $|c| > \beta \ge 0$, β, c *— постоянные.*

Пусть D — тонко открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$.

Мы используем теорему Б. Фугледе о тонко гипогармоническом продолжении [6, с. 96] (теорема 9.14), сформулированную в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть функция* u *тонко гипогармонична в* $D\setminus E$, *где* E *— некоторое полярное подмножество тонко открытого множества* D. *Тогда если функция* u *ограничена сверху в некоторой тонкой окрестности каждой точки множества* E, *то она имеет тонко гипогармоническое продолжение на множество* D. *Это продолжение единственно и задается формулой*

$$u(z) = \overline{\operatorname*{fine\,lim}_{\zeta \to z,\, \zeta \in D\setminus E}}\; u(\zeta) \quad \forall z \in E.$$

Из этого утверждения и теоремы 4 из работы [9] вытекает следующий факт.

Утверждение 2. *Пусть* $E \subset D$ *— полярное множество, а* $\varphi\colon D\setminus E \to \mathbb{C}$ *— тонко голоморфная функция, ограниченная в тонкой окрестности каждой точки из* E. *Тогда* φ *продолжается на* E *до функции, тонко голоморфной в* D.

Поведение тонко голоморфных функций возле своих нулей характеризуется следующим свойством [7] (п. 4.3).

Утверждение 3. *Тонко голоморфная функция, определенная в тонкой области* D *и отличная от постоянной, может иметь не более счетного числа нулей. Каждый нуль* d *тонко голоморфной функции в тонкой области* D *имеет конечный порядок* n, *определяемый любым из следующих эквивалентных условий:*

1) $f^{(k)}(d) = 0$ *для* $k < n$ *и* $f^{(n)}(d) \ne 0$;

2) *существует тонко голоморфная в* D *функция* g *такая, что* $g(d) \ne 0$ *и* $f(z) = g(z)(z-d)^n$ $\forall z \in D$.

Для $z \in \mathbb{C}$ через ε_z будем обозначать меру Дирака, сосредоточенную в $\{z\}$. Меру, полученную в результате выметания меры ε_z на множество $W \subset \mathbb{C}$, будем обозначать через ε_z^W [6, с. 25].

Пусть множество D ограничено. Для $w, \zeta \in \mathbb{C}$, $w \ne \zeta$, существует тонкая функция Грина:

$$g_D(w, \zeta) := \int \log \frac{|w-z|}{|w-\zeta|} \, d\varepsilon_\zeta^{CD}(z).$$

Для $\varepsilon \in (0, 1)$, $w, z \in \mathbb{C}$ введем функцию $l_\varepsilon(w, z) := \log \max\{\varepsilon, |w-z|\}$ и обозначим

$$H_D(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) := \int l_\varepsilon(w, \cdot) \, d\varepsilon_\zeta^{CD}.$$

Нам понадобится следующее утверждение из [4].

Лемма 1. *Для произвольных* $\zeta \in D$ *и* $w \in \mathbb{C}$ *существует предел* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} H_D(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) =: h_D(w, \zeta)$, *который (тонко) субгармоничен по* $w \in \mathbb{C}$ *и удовлетворяет соотношению*

$$h_D(w, \zeta) - \log|w-\zeta| = g_D(w, \zeta) \quad \forall \zeta \in D, \quad w \in \mathbb{C}$$

Доказательство теоремы 2. Обозначим

$$G \bigcap \{\zeta : |\zeta - a| < 1\} =: D_a, \qquad G \bigcap \{\zeta : |\zeta - a| > 1\} =: D^a$$

Зафиксируем произвольные $\sigma > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\mu(x) \le \sigma x^\nu \quad \forall x > 0. \tag{8}$$

Это возможно, так как $\mu \in \mathfrak{M}$. Пусть $q > \sigma$ таково, что

$$|f(\zeta)| < q \qquad \forall \zeta \in G \bigcap \{\zeta : |\zeta - a| = 1\} \tag{9}$$

Докажем, что $|f(\zeta)| \le q|\zeta - a|^\nu$ $\forall \zeta \in D_a$. Вначале докажем, что

$$|f(\zeta)| \le q|\zeta - a|^\nu \quad \forall \zeta \in D_a. \tag{10}$$

Предположим, что (10) не выполняется. Пусть D — произвольная тонко связная компонента множества D_a, в какой-нибудь точке ζ' которой $|f(\zeta')| > q|\zeta' - a|^\nu$. Обозначим через D_* множество всех $\zeta \in D$, в которых

$$|f(\zeta)| \ge q|\zeta - a|^\nu \quad \zeta \in D_*. \tag{11}$$

Тогда D_* — непустое тонко замкнутое в D множество, а $D \setminus D_*$ — непустое тонко открытое множество. Поэтому $\partial_f D_* \subset D \cup \partial_f D$, а так как $D \bigcap \partial_f D = \varnothing$, то $(\partial_f D_*) \bigcap \partial_f D = (\partial_f D_*) \setminus D$. Из условий (7)–(9) следует

$$\operatorname*{fine\,lim}_{\zeta \to z,\ \zeta \in D} |f(\zeta)| < q|z - a|^\nu \quad \forall z \in (\partial_f D) \setminus Q,$$

а поэтому $\partial_f D_* \subset D \cup Q$. Отсюда и из соотношения $D \cap Q = \varnothing$ (которое является следствием соотношений $Q \bigcap G = \varnothing$ и $D \subset G$) следует $Q \bigcap \partial_f D_* = (\partial_f D_*) \setminus D$. Таким образом, $Q \bigcap \partial_f D_* = (\partial_f D) \bigcap \partial_f D_*$. Следовательно, множество $Q \bigcap \partial_f D_*$ тонко замкнуто в $\mathbb{C}$ и поэтому полярно. Обозначим $Q_1 := Q \bigcap (\{a\} \cup \partial_f D_*)$. Множество Q_1 полярно, а на непустом множестве $(\partial_f D) \setminus Q_1$ справедливо неравенство

$$\operatorname*{fine\,lim}_{\zeta \to z,\ \zeta \in D} |f(\zeta)| < q|z - a|^\nu \quad \forall z \in (\partial_f D) \setminus Q_1. \tag{12}$$

Для $\zeta \in \mathbb{C}$ обозначим $u(\zeta) := \log|f(\zeta)|$. Функция $u(\zeta)$ тонко гипогармонична на множестве G.

Если точка $z_1 = a$ тонко отделима от D, то она отделима от D и в стандартной топологии, и поэтому функция $u(\zeta)$ ограничена сверху в D согласно условию теоремы. Тогда из (12) и принципа максимума для тонко гипогармонических функций [6, с. 76] с учетом полярности множества $Q \bigcap \partial_f D_*$ и тонкой связности D следует

$$u(\zeta) \leq \nu \log|\zeta - a| + \log q \quad \forall\, \zeta \in D_a.$$

Но это противоречит соотношениям $\zeta' \in D_* \subset D_a$ и предположенной оценке в точке $\zeta' \in D$. Следовательно, в этом случае оценка (10) верна.

Пусть теперь точка a является тонко граничной точкой для D, а потому $a \in b(D)$. Тогда то же самое верно для той компоненты G_j множества G, которая содержит D, т. е. $a \in b(G_j)$.

Рассмотрим случай, когда $a \in b(CG_j)$ и $f_{a, G_j} < +\infty$. Так как в некоторой окрестности V точки a

$$\sup_{\zeta \in G_j \cap V} \frac{u(z)}{|\log|\zeta - a||} < +\infty,$$

то существует постоянная $A > |\nu|$ такая, что функция $\theta(\zeta) := u(\zeta) + A \log|\zeta - a|$ ограничена сверху в D_a и на основании данного выше определения точки ζ' и оценки (12) получаем

$$\theta(\zeta') > (\nu + A)\log|\zeta' - a| + \log q, \tag{13}$$

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\ \zeta \in D} \theta(\zeta) < (\nu + A)\log|z - a| + \log q \quad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus Q_1. \tag{14}$$

Из определения l_ε и (14) следует оценка

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\ \zeta \in D} \theta(\zeta) < (\nu + A)\, l_\varepsilon(a, z) + \log q \quad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus Q_1. \tag{15}$$

В D функция θ ограничена сверху и тонко гипогармонична, функция $H_D(l_\varepsilon(a, \cdot), w)$ ограничена снизу и тонко гармонична по w при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$. Поэтому из (15) и того, что множество $Q \bigcap \partial_f D_*$ полярно, на основании принципа максимума следует, что при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$ верно

$$\theta(\zeta) \leq (\nu + A)\, H_D(l_\varepsilon(a, \cdot), \zeta) + \log q \quad \forall\, \zeta \in D.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, на основании леммы 1 получаем

$$\theta(\zeta) \leq (\nu + A)\, h_D(a, \zeta) + \log q =$$

$$= (\nu + A)\big(\log|\zeta - a| + g_D(a, \zeta)\big) + \log q \quad \forall\, \zeta \in D.$$

Из условия $a \in b(CG_j)$ следует, что $a \in b(CD)$, и поэтому $g_D(a, \zeta) = 0$. Следовательно,

$$\theta(\zeta) \leq (\nu + A)\log|\zeta - a| + \log q \quad \forall\, \zeta \in D.$$

Но это противоречит соотношению (13). Следовательно, при условиях $a \in b(CG_j)$ и $f_{a, G_j} < +\infty$ снова верно (10).

Пусть теперь $a \notin b(CG_j)$. Из условий теоремы следует, что тогда выполняется (4). Функция $\Psi(\zeta) := f(\zeta)/(\zeta - a)^{m_0 - 1}$ тонко голоморфна в G и

$$\operatorname{fine\,lim}_{\zeta \to a,\, \zeta \in G} \Psi(\zeta) = 0.$$

Применяя утверждения 2 и 3, убеждаемся, что функция $\Psi(\zeta)$, продолженная в точку a значением 0, тонко голоморфна в $G \bigcup \{a\}$ и поэтому имеет в точке a нуль конечного порядка. Отсюда следует существование целого k и тонко голоморфной в $G \bigcup \{a\}$ функции φ такой, что $\varphi(a) \neq 0$ и

$$f(\zeta) = \varphi(\zeta)(\zeta - a)^k \quad \forall\, \zeta \in G. \tag{16}$$

Из определения $f_{a,G}$ видно, что $k = -f_{a,G}$. Таким образом, f_{aG} — целое. Доопределим функцию f в точке a с помощью равенства (16) до тонко мероморфной в $G \bigcup \{a\}$ функции, которая в точке a имеет нуль порядка k при $k > 0$ и полюс порядка $|k|$ при $k < 0$. Очевидно, $f_{a,D} \leq f_{a,G}$. Из (8) и определения μ_0 и m_0 видно, что $m_0 \geq \mu_0 \geq \nu$. Из условия (4) и соотношения (16) следует, что $k \geq m_0$.

Если $a \in b(D_*)$, то из (11) следует, что $-f_{a,D} \leq \nu$. Тогда имеет место такая цепочка соотношений:

$$-f_{a,G} \leq -f_{a,D} \leq \nu \leq \mu_0 \leq m_0 \leq k = -f_{a,G},$$

и поэтому $k = m_0 = \nu$. Из (16) и условий теоремы вытекает, что функция φ ограничена в D_a, а из (12) следует

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\, \zeta \in D} |\varphi(\zeta)| \leq q \qquad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus Q_1.$$

Следовательно, в D верно $|\varphi(\zeta)| \leq q$ и $|f(\zeta)| \leq q\,|\zeta - a|^k$. Но это противоречит предположенной оценке $|f(\zeta')| > q\,|\zeta' - a|^\nu$ в точке $\zeta' \in D$.

Если же $a \notin b(D_*)$, то существует тонкая окрестность V точки a такая,что $\overline{V} \subset (D \bigcup \{a\}) \setminus D_*$ [6, с. 68], и поэтому в $\overline{V}$ имеем

$$|f(\zeta)| \leq q\,|\zeta - a|^\nu. \tag{17}$$

Множество $C\overline{V}$ тонко открыто; следовательно, множество $D \bigcap C\overline{V} = D \bigcap \overline{V}$ тонко открыто и тонко отделимо от точки a. Для каждой тонко связной компоненты W множества $D \setminus \overline{V}$ верно $\partial_f W \subset (\overline{V} \bigcap D) \bigcup \partial_f D$, причем W отделимо от точки a в стандартной топологии, поскольку V содержит полные окружности с центром a как угодно малых радиусов. Поэтому f ограничена в W. На $(\partial_f W) \bigcap \overline{V} \bigcap D$ верно (17), а вследствие (12) квазивсюду на $(\partial_f W) \bigcap \partial_f D$ верно неравенство

Ронкин ст. 93

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\, \zeta \in W} |f(\zeta)| \leq q\,|z - a|^\nu.$$

Поэтому согласно принципу максимума [6, с. 76] приходим к выводу, что оценка (17) верна в W и поэтому также в $D \setminus \overline{V}$ и в D. Но это противоречит предположенной оценке в точке ζ'.

Этим доказано, что при условии $a \notin b(CG_j)$ снова верно (10).

Справедлив также аналог оценки (10) для множества D^a. В этом можно убедиться, рассмотрев образы множеств D^a, Q, G при отображении $\zeta_1 := 1/(\zeta - a)$ и применив приведенные выше рассуждения к точкам $a_1 := 0$, функциям $f_1(\zeta_1) := f(\zeta)$, $\mu_1(x) := \mu(1/x)$ и числам $\nu_1 := -\nu$, $\sigma_1 := \sigma$,

$q_1 := q$ (что законно вследствие инвариантности условий теоремы относительно указанной замены). В результате получаем аналог оценки (10), из которого при обратной замене объектов получаем соотношение

$$|f(\zeta)| \le q|\zeta-a|^{\nu} \quad \forall\, \zeta \in D^{a}. \tag{18}$$

Из (9), (10) и (18) следует

$$|f(\zeta)| \le q|\zeta-a|^{\nu} \quad \forall\, \zeta \in G. \tag{19}$$

Предположим, что в G не выполняется оценка

$$|f(\zeta)| \le \sigma|\zeta-a|^{\nu}. \tag{20}$$

Тогда при некотором $\sigma' > \sigma$ в G не верна также оценка

$$|f(\zeta)| \le \sigma'|\zeta-a|^{\nu}. \tag{21}$$

Зафиксируем произвольную тонко связную компоненту G' множества G такую, что (21) не выполняется в некоторой ее точке ζ'. Обозначим через G_* множество всех тех $\zeta \in G'$, в которых $f(\zeta) \ge \sigma'|\zeta-a|^{\nu}$. По аналогии с доказательством соответствующих свойств множества $\partial_f D_*$ (см. выше) убеждаемся, что множество $Q \bigcap \overline{\partial}_f G_*$ тонко замкнуто и поэтому полярно. При этом имеем

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta\to z,\ \zeta\in G'} |f(\zeta)| \le \sigma|z-a|^{\nu} \qquad \forall\, z \in (\partial_f G')\setminus(Q \bigcap \partial_f G_*). \tag{22}$$

Функция $\varphi(\zeta) := \log(|f(\zeta)|/(\sigma|\zeta-a|^{\nu}))$ тонко гипогармонична и ограничена сверху в G'. Предположим, что $(\partial_f G')\setminus(Q\bigcap\partial_f G_*) \ne \varnothing$. Тогда к функции $\varphi(\zeta)$ применим принцип максимума [6, с. 76] и на основании (22) получим

$$\log\frac{|f(\zeta)|}{\sigma|\zeta-a|^{\nu}} \le 0 \quad \forall\, \zeta \in G'$$

и потому

$$|f(\zeta)| \le \sigma|\zeta-a|^{\nu} \quad \forall\, \zeta \in G',$$

что противоречит предположению о нарушении в G' оценки (20). Следовательно, $(\partial_f G')\setminus(Q\bigcap\partial_f G_*) = \varnothing$ и множество $\partial_f G'$ содержится в Q, а так как оно тонко замкнуто, то является полярным множеством. Значит, $G' = \mathbb{C}\setminus\partial_f G' = G$, и отсюда вытекает $G' \subset G \subset \mathbb{C}\setminus Q \subset \mathbb{C}\setminus\partial_f G' \subset G'$, т. е. $G' = G = \mathbb{C}\setminus Q = \mathbb{C}\setminus\partial_f G' = \mathbb{C}\setminus\partial_f G$, $Q = \overline{\partial}_f G' = \overline{\partial}_f G$. Поэтому множество Q тонко замкнуто и полярно, а на основании утверждения 2 функция $f(\zeta)$ продолжается на множество $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ до тонко голоморфной функции $f_*(\zeta)$ с сохранением неравенства

$$|f_*(\zeta)| \le q|\zeta-a|^{\nu}.$$

Тонко гипогармоническая и ограниченная сверху в $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ функция $\log(|f_*(\zeta)|/(\sigma|\zeta-a|^{\nu}))$ постоянна, и верно равенство

$$f_*(\zeta) = c(\zeta-a)^{\nu} \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}\setminus\{a\} \tag{23}$$

с некоторой постоянной c, $\sigma < |c| \le q$. На основании утверждения 3 число ν должно быть целым. Из соотношений (4) и (5) следует $\mu_0 \le m_0 \le \nu \le m_\infty \le \mu_\infty$, а с учетом (1) получаем $\mu_0 = m_0 = \nu = m_\infty = \mu_\infty$.

Если $\mu \equiv 0$, то из (7) и вида f следует, что имеет место исключительный случай из утверждения теоремы 2.

Пусть теперь $\mu \in \mathfrak{M}^*$. Из равенства $\mu_0 = \mu_\infty$ следует $I_\mu = (0, +\infty)$. Так как множество $\overline{\partial}_f G = CG = Q$ полярно, то точки a и ∞ принадлежат множеству $b(G)$ и не принадлежат (пустому) множеству $b(CG)$. При этом функция $\log \mu(|z-a|)$ конечна и гипергармонична в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, а функция

$$\varphi_*(\zeta) := \log \frac{|f_*(\zeta)|}{\mu(|\zeta - a|)}$$

конечна, ограничена сверху и тонко гипогармонична в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Поэтому

$$\varphi_*(\zeta) \equiv \log \delta \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \tag{24}$$

с некоторой постоянной $\delta > 0$. Из (23) и (24) следует $\mu(x) = (|c|/\delta)\, x^\nu \quad \forall\, x \in (0, +\infty)$, а с учетом (8) получаем $\sigma \ge |c|/\delta$. Поэтому $\sigma > 1$. Следовательно, если в $\mathbb{C}$ оценка (20) не верна, то имеет место исключительный случай теоремы 2, причем $|c| > \beta \ge 0$, а постоянная ν однозначно определяется функцией $f(\zeta)$.

Теперь предположим, что исключительный случай теоремы 2 не имеет места. Тогда при любых $\nu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$, удовлетворяющих условию (8), в G верно (20). Пусть $\zeta_0 \in G$ и $G(\zeta_0)$ — тонко связная компонента множества G, содержащая точку ζ_0.

Сначала положим $\mu \in \mathfrak{M}^*$. Если $x_\mu^- < |\zeta_0 - a| < x_\mu^+$, то можно выбрать $\nu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ такие, что выполняется (8) и

$$\mu(|\zeta_0 - a|) = \sigma |\zeta_0 - a|^\nu$$

Отсюда и из (20) следует

$$f(\zeta_0) \le \mu(|\zeta_0 - a|). \tag{25}$$

Если $|\zeta_0 - a| \notin [x_\mu^-, x_\mu^+]$, то за счет выбора $\nu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ при сохранении условия (8) число $\sigma|\zeta_0 - a|^\nu$ может быть сделано меньше произвольного заданного числа $\varepsilon > 0$. Поэтому из (20) следует

$$f(\zeta_0) = 0. \tag{26}$$

Если же $|\zeta_0 - a|$ равно x_μ^- или x_μ^+, то в соответствии с доказанным получаем $f(\zeta_0) = 0$, поскольку ζ_0 — тонко внутренняя точка множества G, а функция $f(\zeta)$ тонко непрерывна. Следовательно, при $\mu \in \mathfrak{M}^*$ оценка (25) всегда верна.

Если $\mu \equiv 0$, то для любых $\nu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ верно (8), откуда следуют соотношения (25), (26) для любого $\zeta_0 \in G$.

Теорема 2, а вместе с нею и теорема 1 доказаны.

4. Глобальные контурно-телесные результаты. Для произвольного тонко открытого множества $G \in \mathbb{C}$ имеем $b(CG) = C(G \cup (CG)_i)$ и $b(CG) \cap \cap\, \partial_f G = (\partial_f G)_l$. Поэтому из теоремы 2, если в ней в качестве a взять произвольную точку $z \in (\partial_f G)_l$, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть фиксированы тонко открытое множество $G \subset \mathbb{C}$ и мажоранта $\mu \in \mathfrak{M}$. Пусть $f\colon\ \tilde{G} \bigcap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в G, ограниченная на каждой ограниченной части множества G и удовлетворяющая неравенству*

$$|f(z) - f(\zeta)| \le \mu(|z-\zeta|) \qquad \forall\, z, \zeta \in \partial_f G, \quad z \ne \zeta. \tag{27}$$

Для каждой тонко связной компоненты G_j множества G, для которой $\infty \in \tilde{G}_j$, дополнительно предположим, что выполняется условие (3) *с точкой $z_s = \infty$, а если $\infty \in (\overline{\partial_f G})_i$, то предположим, что выполняется* (5) *и $\mu_\infty \ge 0$. Тогда верно*

$$|f(z) - f(\zeta)| \le \mu(|z-\zeta|) \quad \forall\, z \in (\partial_f G)_l, \quad \forall\, \zeta \in \tilde{G} \bigcap \mathbb{C}, \quad z \ne \zeta. \tag{28}$$

Доказательство. Предположим, что $w \in (\partial_f G)_l$, и при фиксированном w рассмотрим функцию $\varphi(\zeta) := f(\zeta) - f(w)$. Для точки $z_s = \infty$ условие (3) равносильно условию $\varphi_{z_s G_j} < +\infty$ (для каждой тонко связной компоненты G_j множества G, для которой $\infty \in \tilde{G}_j$), а если $\infty \in (\overline{\partial_f G})_i$ и $\mu_\infty \ge 0$, то условие (5) равносильно тому, что $\varphi(\zeta) := o(|\zeta|^{m_\infty + 1})$ при $\zeta \to \infty$. Таким образом, функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, в том числе соотношению типа (2), причем исключительный случай утверждения теоремы 1 невозможен. Отсюда следует оценка (28) для точки $z = w$, а вследствие произвольности w эта оценка верна и для всех $z \in (\partial_f G)_l$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть фиксированы тонко открытое множество $G \subset \mathbb{C}$, точка $z_0 \in (\partial_f G)_i \bigcup G$ и мажоранта $\mu \in \mathfrak{M}$ с $\mu_0 < +\infty$. Пусть $f\colon\ \tilde{G} \bigcap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в G, ограниченная на каждой ограниченной части множества G и удовлетворяющая условию* (27) *и*

$$|f(z) - f(z_0)| \le o(|z - z_0|^{m_0 - 1}) \qquad (z \to z_0). \tag{29}$$

Для каждой тонко связной компоненты G_j множества G, для которой $\infty \in \tilde{G}_j$, дополнительно предположим, что выполняется условие (3) *с точкой $z_s = \infty$, а если $\infty \in (\overline{\partial_f G})_i$, то предположим, что выполняется* (5) *и $\mu_\infty \ge 0$. Тогда реализуется одна из двух возможностей: либо соотношение*

$$|f(z) - f(z_0)| \le \mu(|z - z_0|) \qquad \forall\, z \in \tilde{G} \setminus \{z_0, \infty\}, \tag{30}$$

либо следующий исключительный случай: $(\partial_f G)_l = \varnothing$, $\mu(x) = \beta x^m$ $\forall\, x > 0$, $f(\zeta) = c(\zeta - z_0)^m + b$ $\forall\, \zeta \in \tilde{G}$, m — натуральное, $m = m_0 = m_\infty$, $|c| > \beta \ge 0$, β, c, b — постоянные; если $z_0 \in (\partial_f G)_i$ или $m = 1$, то множество $\mathbb{C} \setminus G$ содержит не более одной точки, а (30) *невозможно.*

Доказательство. Введем функцию $\varphi(\zeta) := f(\zeta) - f(z_0)$. Применяя к ней теорему (3), получаем (28). Так как $z_0 \notin b(CG)$ и $\mu_0 < +\infty$, то можно положить $a := z_0$ и из соотношений (27) – (29) получить для функции φ соотношения типа (2) – (5). Поэтому для функции φ и множества $G \setminus \{z_0\}$ выполнены все условия теоремы 2. Применяя эту теорему, конкретизируем ее утверждение на основании того, что в исключительном случае верно $\mu(x) = \beta x^m$, $\varphi(\zeta) = c(\zeta - z_0)^m$, $f(\zeta) = c(\zeta - z_0)^m + f(z_0)$, $|c| > \beta \ge 0$, а так как функция $f(\zeta)$ тонко непрерывна в точке $z_0 \notin b(CG)$, то $m \ge 1$. Из (27) и $|c| > \beta$ вытекает следующее: если $z_0 \in (\partial_f G)_i$ или $m = 1$, то $\mathbb{C} \setminus G$ содержит не более одной точки, и в любом из этих случаев (30) невозможно.

Теорема 4 доказана.

Справедлив следующий глобальный контурно-телесный результат, получаемый с помощью теорем 3 и 4.

Теорема 5. *Пусть фиксированы тонко открытое множество $G \subset \mathbb{C}$ и мажоранта $\mu \in \mathfrak{M}$, для которых $\partial_f G \neq \varnothing$, $\mu_0 \leq 1$. Пусть $f\colon \tilde{G} \cap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в G, ограниченная на всякой ограниченной части множества G и удовлетворяющая условию* (27). *Для каждой тонко связной компоненты G_j множества G, для которой $\infty \in \tilde{G}_j$, дополнительно предположим, что выполняется условие* (3) *с точкой $z_s = \infty$, а если $\infty \in (\overline{\partial_f G})_i$, то предположим, что выполняется* (5) *и $\mu_\infty \geq 0$. Тогда имеет место одна и только одна из двух возможностей: либо соотношение*

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq \mu(|z-\zeta|) \quad \forall\, z, \zeta \in \tilde{G} \cap \mathbb{C}, \quad z \neq \zeta, \tag{31}$$

либо следующий исключительный случай: $\mu(x) = \beta x \ \ \forall\, x > 0$, $f(\zeta) = c\zeta + b$ $\forall\, \zeta \in G$, $|c| > \beta \geq 0$, β, c, b — постоянные, множество $\mathbb{C} \setminus G$ содержит не более одной точки.

Установлен также контурно-телесный результат, в котором нет условия $\mu_0 \leq 1$, но предполагается, что функция $f(\zeta)$ непрерывна (и конечна) в точке ∞.

Теорема 6. *Пусть фиксированы тонко открытое множество $G \subset \mathbb{C}$ и мажоранта $\mu \in \mathfrak{M}$. Пусть $f\colon \tilde{G} \to \mathbb{C}$ — конечная, тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в G, удовлетворяющая условию* (27) *и непрерывная в точке ∞ (если G — неограниченное множество). Если $\infty \in (\overline{\partial_f G})_i$, то дополнительно предположим, что $\mu_\infty \geq 0$. Тогда верно* (31).

Вначале докажем следующий принцип максимума для разности значений тонко голоморфной функции, являющийся аналогом леммы 4 из [2].

Лемма 2. *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — тонко открытое множество, $f\colon \tilde{G} \to \mathbb{C}$ — конечная, тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в G, непрерывная в ∞ (если G — неограниченное множество) и $f \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда $(\partial_f G)_l \neq \varnothing$ и при каждом $\delta > 0$ верно*

$$\sup_{z \in (\partial_f G)_l} \ \sup_{\zeta \in \tilde{G},\, |\zeta - z| = \delta} |f(\zeta) - f(z)| = \sup_{\zeta, z \in \tilde{G},\, |\zeta - z| = \delta} |f(\zeta) - f(z)|. \tag{32}$$

Доказательство леммы. Множество $(\partial_f G)_i$ полярно, и функция f может быть тонко голоморфно продолжена на него (см. утверждение 2). Поэтому без ограничения общности будем считать, что $(\partial_f G)_i = \varnothing$.

Предположим, что $(\partial_f G)_l = \varnothing$. Тогда $\tilde{G} = \overline{\mathbb{C}}$ и функция f конечна и тонко голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ (см. утверждение 2), следовательно, она голоморфна на $\overline{\mathbb{C}}$, что противоречит условию $f \not\equiv \mathrm{const}$. Значит, $(\partial_f G)_l \neq \varnothing$.

Зафиксируем $\delta > 0$. Левую и правую части (32) обозначим соответственно через $A(\delta)$ и $B(\delta)$. Очевидно, $A(\delta) \leq B(\delta)$. Предположим, что $A(\delta) < B(\delta)$. Тогда существуют точки $\zeta_1, \zeta_2 \in G$, для которых

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| = A(\delta), \qquad |\zeta_1 - \zeta_2| = \delta. \tag{33}$$

Функция $\varphi(\zeta) := |f(\zeta + \zeta_1) - f(\zeta + \zeta_2)|$ определена, конечна и тонко непрерывна на пересечении T множеств $T_n := \{\zeta : \zeta - \zeta_n \in \tilde{G}\}$, $n = 1, 2$, а если T содержит точку ∞, то $\varphi(\infty) = 0$. Обозначим через G_1 и G_2 тонко связные компоненты множества G, содержащие соответственно точки ζ_1 и ζ_2. Для каждого $n = 1, 2$ обозначим $D_n := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta + \zeta_n \in G_n\}$. Тонко открытое множество $D_0 := D_1 \bigcap D_2$ содержит точку $\zeta = 0$, а функция $\varphi(\zeta)$ тонко гипогармонична в D_0 и тонко непрерывна на $\tilde{D}_0$. Положим $(A(\delta) + \varphi(0))/2 =: t$ и обозначим через D тонко связную компоненту тонко открытого множества $\{\zeta \in D_0 : \varphi(\zeta) > t\}$, содержащую точку $\zeta = 0$. Множество D ограничено, так как в противном случае мы пришли бы к противоречию с равенством $\varphi(\infty) = 0$ и непрерывностью φ в ∞.

Пусть $z \in \partial_f D$. Если при этом хотя бы одна из точек $z + \zeta_1$, $z + \zeta_2$ принадлежит $(\partial_f G)_l$, то тогда $\varphi(z) < t$. В противном же случае $z \in D_0 \bigcap \partial_f D$ и тогда $\varphi(z) = t$. Но в силу принципа максимума для тонко гипогармонических функций [6, с. 76] это противоречит соотношению $\varphi(0) > t$, вытекающему из (33). Полученное противоречие доказывает равенство (32).

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 6. Зафиксируем произвольные $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 2 существуют точки $a \in (\partial_f G)_l$ и $w \in \tilde{G}$ такие, что $|a - w| = \delta$ и $|f(a) - f(w)| > A(\delta) - \varepsilon = B(\delta) - \varepsilon$. Применяя теоремы 1 и 3, получаем

$$\sup_{\zeta \in \tilde{G},\, |\zeta - a| = \delta} |f(\zeta) - f(a)| \le \mu(\delta).$$

Следовательно, $B(\delta) - \varepsilon \le \mu(\delta)$. Ввиду произвольности ε отсюда следует $B(\delta) \le \mu(\delta)$.

Теорема 6 доказана.

5. О знаке равенства в оценках локальных и глобальных теорем. Ответ на вопрос о достижении знака равенства в локальных оценках теорем 1 и 2 содержится в следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть фиксированы точка $a \in \mathbb{C}$, тонко открытое множество $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $\mu \in \mathfrak{M}$. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — тонко голоморфная функция, для которой верно $|f(z)| \le \mu(|z - a|)$ $\forall z \in G$ и $|f(\zeta_0)| = \mu(|\zeta_0 - a|)$ в фиксированной точке $\zeta_0 \in G$. Тогда в тонко связной компоненте $G(\zeta_0)$, содержащей точку ζ_0, справедливо равенство $f(\zeta) = c(\zeta - a)^\nu$ с некоторыми постоянными $\nu \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, а если $\mu(|\zeta_0 - a|) \ne 0$, то $\mu(|\zeta - a|) = |f(\zeta)|$ $\forall \zeta \in G(\zeta_0)$.*

Как следствие из теоремы 7 получаем теорему 8, дающую ответ на вопрос о достижении знака равенства в оценке теоремы 3.

Теорема 8. *Пусть $\mu \in \mathfrak{M}$, G — тонко открытое множество в $\mathbb{C}$, $f : \tilde{G} \bigcap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — тонко непрерывная функция, тонко голоморфная G и удовлетворяющая соотношению $|f(z) - f(\zeta)| \le \mu(|z - \zeta|)$ $\forall z, \zeta \in \tilde{G}$, $z \ne \zeta$. Пусть при некоторых $z_0 \in (\partial_f G)_l$, $\zeta_0 \in (\partial_f G)_i \bigcup G$ верно равенство $|f(z_0) - f(\zeta_0)| = \mu(|z_0 - \zeta_0|)$. Обозначим через G_0 тонко связную компоненту множества G, тонкое замыкание которой содержит точку ζ_0. Тогда выполняется соотношение*

$$f(\zeta) = f(z_0) + [f(\zeta_0) - f(z_0)]\left(\frac{\zeta - z_0}{\zeta_0 - z_0}\right)^\nu \quad \forall \zeta \in \tilde{G}_0$$

с некоторой постоянной $\nu \in (-\infty, +\infty)$. *Если при этом* $\mu(|z_0 - \zeta_0|) \neq 0$, *то выполняется также равенство*

$$\mu(|\zeta - z_0|) = |f(\zeta_0) - f(z_0)| \left(\frac{|\zeta - z_0|}{|\zeta_0 - z_0|} \right)^{\nu} \quad \forall \zeta \in \tilde{G}_0 .$$

Ответ на вопрос о достижении знака равенства в глобальных оценках теорем 4, 6 содержится в следующей теореме.

Теорема 9. *Пусть* $\mu \in \mathfrak{M}$, G *— тонко открытое множество в* $\mathbb{C}$, f: $\tilde{G} \cap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в* G *и удовлетворяющая соотношению* $|f(z) - f(\zeta)| \le \mu(|z - \zeta|)$ $\forall z, \zeta \in \tilde{G}$, $z \neq \zeta$. *Пусть при некоторых* $z_0, \zeta_0 \in (\partial_f G)_i \cup G$ $(z_0 \neq \zeta_0)$ *верно равенство* $|f(z_0) - f(\zeta_0)| = \mu(|z_0 - \zeta_0|)$. *Обозначим через* G_1 *и* G_2 *тонко связные компоненты множества* G, *тонкие замыкания которых содержат соответственно точки* z_0, ζ_0. *Тогда выполняется одно из следующих двух соотношений: либо*

$$f(\zeta) = \begin{cases} f(z_0) & \forall \zeta \in \tilde{G}_1 \cap \mathbb{C}, \\ f(\zeta_0) & \forall \zeta \in \tilde{G}_2 \cap \mathbb{C}, \end{cases} \tag{34}$$

либо

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) + \frac{f(z_0) - f(\zeta_0)}{z_0 - \zeta_0}(\zeta - \zeta_0) \qquad \forall \zeta \in (\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2) \cap \mathbb{C}. \tag{35}$$

Если при этом $\mu(|z_0 - \zeta_0|) \neq 0$, *то равенствам* (34) *и* (35) *отвечают соответственно равенства*

$$\mu(|z - \zeta|) = |f(z_0) - f(\zeta_0)| \qquad \forall z \in \tilde{G}_1 \cap \mathbb{C}, \quad \forall \zeta \in \tilde{G}_2 \cap \mathbb{C},$$

$$\mu(|z - \zeta|) = \frac{|f(z_0) - f(\zeta_0)|}{|z_0 - \zeta_0|}|z - \zeta| \qquad \forall z, \zeta \in (\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2) \cap \mathbb{C}.$$

1. *Тамразов П. М.* Усиленные контурно-телесные результаты для субгармонических функций // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 210–219.
2. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные результаты для голоморфных функций // Изв. АН СССР. – 1986. – **50**, № 4. – С. 835–848.
3. *Тамразов П. М., Сарана О. А.* Контурно-тілесні властивості тонко субгармонічних функцій. – Київ, 1994. – 14 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 94.33).
4. *Тамразов П. М., Сарана А. А.* Контурно-телесные свойства тонко гипогармонических функций // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1114–1125.
5. *Сарана О. А.* Контурно-тілесні теореми для тонко голоморфних функцій. – Київ, 1994. – 19 с. – Деп. в ДНТБ України, № 2346-Ук94.
6. *Fuglede B.* Finely harmonic functions // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer, 1972. – № 289. – 188 p.
7. *Fuglede B.* Finely holomorphic functions. A survey // Rev. roum. math. pures et appl. – 1988. – **33**. – P. 283–295.
8. *Fuglede B.* Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. – 1976. – **2**. – P. 113–127.
9. *Fuglede B.* Value distribution of harmonic and finely harmonic morphisms and applications in complex analysis // Ibid. – 1986. – **11**. – P. 111–136.

Получено 24.12.96