НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Е.А. Севостьянов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

ПРОЕКТ «НАУКОВА КНИГА»
(МОЛОДІ ВЧЕНІ)

КИЕВ
НАУКОВА ДУМКА
2014

УДК 517.5

Монография посвящена изучению свойств пространственных отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности, в частности, так называемых отображений с конечным искажением, активно исследуемых на протяжении последних 10–15 лет. Описан ряд свойств так называемых Q-отображений и кольцевых Q-отображений, являющихся подвидом отображений с конечным искажением и включающих класс отображений с ограниченным искажением по Решетняку. В частности, для Q-отображений приведены теоремы об их дифференцируемости почти всюду, принадлежности классу ACL, аналоги теорем типа Сохоцкого-Вейерштрасса, Лиувилля, Пикара, Иверсена и ряд других.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории функций и отображений.

У монографії розглянуто властивості просторових відображень з необмеженою характеристикою квазіконформності, зокрема, так званих відображень зі скінченним спотворенням, які активно досліджуються протягом останніх 10–15 років. Описано властивості так званих Q-відображень та кільцевих Q-відображень, які є підвидом відображень зі скінченним спотворенням і містять відображення з обмеженим спотворенням за Решетняком. Зокрема, для Q-відображень наведено теореми про їх диференційовність майже всюди, належність до класу ACL, аналоги теорем типу Сохоцького–Вейєрштрасса, Ліувілля, Пікара, Іверсена та інші.

Для науковців, аспірантів і студентів, що спеціалізуються в галузі теорії функцій і відображень.

Рецензенты:
член-кор. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор *В.Я. Гутлянский*
доктор физ.-мат. наук, профессор *Ю.Б. Зелинский*
доктор физ.-мат. наук, профессор *В.В. Волчков*

Утверждено к печати ученым советом
Института прикладной математики и механики НАН Украины
(протокол № 7 от 18.06.2013)

Видання здійснено за державним замовленням
на випуск видавничої продукції

Научно-издательский отдел физико-математической и технической литературы

Редактор *В.В. Вероцкая*

ISBN 978-966-00-1412-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как известно, наиболее распространенным подходом изучения аналитических функций на плоскости является подход, использующий разложение этих функций в равномерно сходящийся ряд. При помощи такого характеристического свойства могут быть определены (доказаны) многие полезные факты комплексного анализа.

Менее известным, не изучающимся в общем курсе теории комплексной переменной, но не менее эффективным является метод, при котором используется свойство аналитических функций искажать специальным образом конформный модуль семейства кривых. Мерой познания этого метода являются понимание и осмысление понятия конформного модуля. Однако это понимание оставляет читателю существенно больше возможностей для исследования по сравнению с разложением в ряды, поскольку применение конформного модуля не ограничивается приложением лишь к отдельно взятому классу. Как аналитические функции, так и более общие отображения могут быть полноценно исследованы только при помощи конформного модуля, при этом свойство их разложения в равномерно сходящийся ряд может быть не задействовано.

Основные приведенные результаты касаются значительно более широких классов, чем аналитические функции, хотя многие из изложенных справедливы и для них. Чтение книги не требует специальной подготовки, поскольку монография начинается с азов геометрического подхода; предполагается лишь знание базовых принципов математического анализа на уровне университетского курса.

Известный математик, основатель школы по теории отображений Георгий Дмитриевич Суворов считал, что "сегодня идеалом (и целью!) в теории функций можно считать достижение такой ситуации, когда мы будем располагать большим числом различных классов функций и для каждого класса иметь разработанный каталог свойств (метрических и топологических)" [268, с. 325]. Подробное исследование отдельно взятого класса отображений и получение для него подобного каталога и есть целью данной монографии.

Книга посвящена изучению свойств пространственных отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности, в частности, так называемых отображений с конечным искажением, активно изучаемых на протяжении 10—15 лет в работах многих известных математиков [6–9, 23–26, 35–45, 62, 64, 72, 73, 75, 76, 79–82, 85–87, 89–92, 96, 98–102, 112–114, 122–125, 127, 144, 145, 147, 154–156, 178–202, 204–206, 265–267, 276, 278, 283–291].

Изучение отображений с неограниченной характеристикой (а именно, кольцевых Q-отображений и Q-отображений), которым посвящена данная монография, является продолжением исследования квазиконформных отображений, предложенных к рассмотрению М.А. Лаврентьевым, и отображений с ограниченным искажением, предложенных к рассмотрению Ю.Г. Решетняком. Еще в 30-х годах прошлого столетия М.А. Лаврентьев пришел к необходимости исследования квазиконформных отображений. Одной из мотиваций их изучения была для него, как мы полагаем, потребность отбросить из рассматриваемого им класса отображений все несущественные априорные условия, оставляя среди них лишь те, которые реально соответствуют их качественным свойствам. Изучение отображений с ограниченным искажением, как были названы квазиконформные отображения с ветвлением, начал Ю.Г. Решетняк в 60-е годы XX столетия. Несколько позже группа финских математиков (О. Мартио, С. Рикман, Ю. Вяйсяля) начала исследование отображений с ограниченным искажением , которые в иностранной литературе получили название квазирегулярных отображений (quasiregular mappings).

Результаты монографии дополняют существующие теории квазиконформных отображений и отображений с ограниченным искажением. Эти результаты помогут читателю сформировать альтернативный взгляд на теорию уже известных классов, в котором, однако, делается акцент на искажение модуля семейств кривых при отображении.

Общая идея исследований, изложенных в монографии, кратко состоит в следующем.

Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено условие

$$M(f(\Gamma)) \leq K\, M(\Gamma)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ — некоторая постоянная. Иными словами, модуль любого семейства кривых при квазиконформных отображениях искажается не более, чем в K раз. Пусть теперь $Q(x) : D \to \to [0, +\infty]$ — измеримая по Лебегу функция и вместо указанного соотношения имеет место более общее неравенство вида

$$M(f(\Gamma)) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x) \quad dm(x)\,,$$

где m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция такая, что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ (т.е. $\int\limits_{\gamma}\rho(x)\quad|dx|\geq 1$ для всех кривых $\gamma\in\Gamma$).

В случае, когда $Q(x)\leq K$ почти всюду, снова приходим к первому неравенству, из которого (при дополнительном требовании гомеоморфности отображения f) вытекает, что f является квазиконформным отображением. Однако, если функция Q может быть не ограничена, а просто измерима по Лебегу, то f уже не обязано быть квазиконформным. Здесь мы имеем дело со значительно более общим классом отображений, называемых Q*-отображениями.* Основная задача монографии — описать свойства отображения f, если a priori известно, что оно удовлетворяет какому-либо из приведенных выше неравенств.

Исследование отображений *геометрическим методом* заключается в обнаружении и доказательствах свойств отображений, основанных на искажении ими модуля семейств кривых. Известно, что указанный метод является одним из ключевых подходов к изучению квазиконформных отображений и отображений с ограниченным искажением. Однако, на сегодняшний день не только для квазиконформных отображений, но и практически для всех известных классов пространственных отображений установлены определенные оценки искажения модуля семейств кривых. Более того, с помощью модуля может быть определено произвольное отображение с ограниченным искажением как открытое дискретное отображение, модуль семейств кривых при котором искажается не больше, чем в конечное число раз. Такое определение, в основном, использовали финские математики О. Мартио, С. Рикман и Ю. Вяйсяля.

Геометрический метод в теории отображений берет начало с работы Л. Альфорса и А. Берлинга [2], а также с работ Ф. Геринга, который определил K-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, искажающий модуль кольцевой области не более, чем в K раз [31]. В контексте изучения отображений с ограниченным искажением важнейшим фактом является результат Е. Полецкого, который доказал выполнение модульного неравенства для отображений с ограниченным искажением по Ю. Решетняку [149]. Именно на этом факте основано исследование отображений с ограниченным искажением геометрическим методом. Однако, как отмечено ранее, результаты, приведенные в монографии, могут быть приложены к значительно более общим классам. Например, каждый гомеоморфизм класса $W_{loc}^{1,n}$ такой, что обратное к нему отображение также принадлежит $W_{loc}^{1,n}$, будет Q-отображением, где $Q = K_I(x, f)$, $K_I(x, f)$ — внутренняя дилатация f в точке x (определение функции $K_I(x, f)$ дано в основной части).

Первые шаги в исследовании Q-отображений были сделаны в работах О. Мартио, В. Рязанова, У. Сребро и Э. Якубова [122, 123]. Первоначально они исследовали исключительно гомеоморфные Q-отображения, что впоследствии нашло продолжение в работах разных авторов. Однако проведенные исследования в основном относятся к отображениям с ветвлением, которые предполагаются открытыми и дискретными. Отметим, что исследование классов открытых дискретных отображений требует использования несколько иного аппарата, чем в случае гомеоморфизмов. Интерес представляет исследование отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности, поскольку случай ограниченной характеристики равносилен исследованию отображений с ограниченным искажением.

Книга состоит из четырех глав. В первой главе рассмотрены некоторые качественные свойства Q-отображений и кольцевых Q-отображений. Доказаны дифференцируемость почти всюду и абсолютная непрерывность на линиях открытых дискретных Q-отображений при локально интегрируемой функции Q, а также теоремы о принадлежности этих отображений классам $W_{loc}^{1,1}$ и выполнении N^{-1}-свойства Лузина в данных классах. Получены оценки внешних и внутренних дилатаций Q-отображений.

Во второй главе изучено граничное поведение Q-отображений в случае изолированной точки границы, а также более общих границ. Получено необходимое и достаточное условие принадлежности открытого дискретного отображения классу кольцевых Q-отображений в фиксированной точке. Доказаны теоремы об устранении изолированных особенностей открытых дискретных кольцевых Q-отображений при различных условиях на Q, в том числе получены аналоги теорем типа Сохоцкого—Вейерштрасса, Лиувилля и Пикара. Изложены результаты, касающиеся асимптотических пределов отображений, в частности, для кольцевых Q-отображений получен аналог теоремы Иверсена о включении пикаровских значений во множество асимптотических пределов отображения. Рассмотрены вопросы об устранении особенностей отображений с ограничениями интегрального типа.

Третья глава посвящена исследованию локального поведения Q-отображений. Изучено свойство равностепенной непрерывности и нормальности семейств Q-отображений, как в случае гомеоморфизмов, так и при более общих открытых дискретных отображениях. Кроме того, получены теоремы о равностепенной непрерывности Q-гомеоморфизмов и кольцевых Q-гомеоморфизмов в замыкании области, а также некоторые теоремы сходимости для Q-гомеоморфизмов. Рассмотрен вопрос о сходимости обратных отображений. Доказаны теоремы о нормальности семейств кольцевых Q-гомеоморфизмов с ограничениями интегрального типа. Получены необходимые и достаточные условия нормальности семейства открытых дискретных кольцевых Q-отображений при некоторых фиксированных условиях на функцию Q.

В четвертой главе изложены приложения полученных результатов к другим классам отображений. Доказано неравенство типа Вяйсяля для открытых дискретных отображений с конечным искажением длины, являющихся подклассом Q-отображений при $Q = K_I(x, f)$, где $K_I(x, f)$ — внутренняя дилатация отображения f в точке x. В качестве одного из приложений Q-отображений установлена их связь с классами Соболева, а именно: на основе обобщения одной леммы Полецкого доказана теорема о включении открытых дискретных отображений класса $W^{1,n}_{loc}$ с нулевой мерой множества точек ветвления и внешней дилатацией, локально суммируемой в степени $n-1$, в класс Q-отображений при $Q = K_O^{n-1}(x, f)$, где $K_O(x, f)$ — внешняя дилатация отображения f в точке x. На основе неравенства типа Вяйсяля исследован вопрос об изолированных особенностях отображений с конечным искажением длины, имеющих относительно слабый порядок роста. Приведены теоремы о существовании решения квазилинейного уравнения Бельтрами, полученные на основе и как следствие доказанных ранее результатов.

Монография написана на основе докторской диссертации автора. Подробно приведены доказательства, однако отсутствует подробное изложение понятий и фактов, входящих в общий университетский курс действительного и комплексного анализа. В начале каждой главы приведен краткий исторический экскурс, касающийся хорошо известных результатов, связанных с изучаемыми в главе объектами.

Автор выражает благодарность своим учителям: член-корреспонденту НАН Украины В.Я. Гутлянскому и профессору В.И. Рязанову за многочисленные рекомендации и советы, а также рецензенту профессору В.В. Волчкову и коллегам: профессору А. Гольбергу (Академический институт технологий, г. Холон, Израиль) и Р.Р. Салимову (Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк) за полезные замечания и обсуждение полученных результатов.

1. Дифференциальные свойства Q-отображений и кольцевых Q-отображений

В начале главы[1] приведены все необходимые сведения, которые в той или иной мере использованы в дальнейшем тексте. Наиболее часто используемые определения и обозначения указаны в §1.1, а факты, относящиеся к предшествующим результатам, — в §1.2. В §1.3 приведены определения и примеры Q-отображений и кольцевых Q-отображений, указана их связь с квазиконформными отображениями и некоторыми другими известными классами отображений. Параграф 1.4 посвящен доказательству свойства дифференцируемости кольцевых Q-отображений. Некоторые следствия из основной леммы, которая здесь доказана, приведены в §1.5. В §1.6 рассмотрены такие важные вопросы, как абсолютная непрерывность Q-отображений на линиях и их включение в класс Соболева $W_{loc}^{1,1}$. В §1.7 показано, что открытые дискретные Q-отображения имеют почти всюду не равный нулю якобиан и, как следствие, обладают N^{-1}-свойством, обратным свойству Лузина. В §1.8 получены оценки так называемых внутренних дилатаций кольцевых Q-отображений, что для Q-отображений в более точной форме выполнено в §1.9.

1.1. Предварительные сведения из анализа и теории отображений

1.1.1. Приведем определения, которые будут использоваться на протяжении всего текста данной монографии. Определим пространство $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\} .$$

Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (иными словами, D — открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$), m — мера Лебега $\mathbb{R}^n$,

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\} , \quad \mathbb{B}^n := B(0, 1) ,$$

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \quad \mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1) ,$$

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\} , \tag{1.1.1}$$

[1] Основные результаты получены совместно с Р.Р. Салимовым [207–209, 211–213, 215, 216, 245, 254].

(x, y) обозначает (стандартное) скалярное произведение векторов $x, y \in \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{dist}(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \subset \mathbb{R}^n$, ω_{n-1} означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{mes}_1\,(A)$ означает линейную меру Лебега множества $A \subset \subset \mathbb{R}$, $d(A)$ означает евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Далее $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация пространства $\mathbb{R}^n$. *Окрестностью* множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется произвольное множество B, такое, что $A \subset \mathrm{Int}\, B$, где $\mathrm{Int}\, B$ обозначает совокупность всех внутренних точек множества B. Всюду далее граница ∂D области $D \subset \mathbb{R}^n$ (либо $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$) и замыкание $\overline{D}$ области D имеют смысл расширенного пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$.

1.1.2. Рассмотрим следующее важнейшее определение.

Определение 1.1.1. *Отображением* $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется преобразование, которое каждому элементу $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ ставит в соответствие (единственным образом) некоторый элемент $f(x) = = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ (рис. 1). Запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно. Отображение f *сохраняет ориентацию,* если топологический индекс $\mu\,(y,\, f,\, G) > 0$ для произвольной области $G \subset D$, такой, что $\overline{G} \subset D$, и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. (Определение топологического индекса см., например, в [168, гл. II, п. 2.1]).

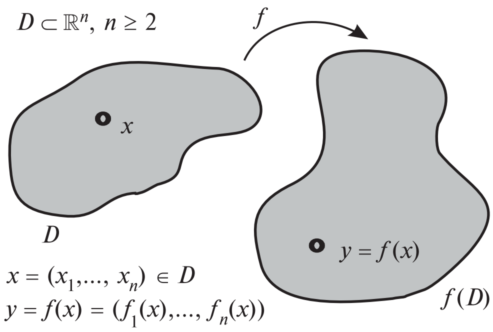

Рис. 1. Отображение, определенное в области $D \subset \mathbb{R}^n$

Область G называется *нормальной областью* отображения $f : D \to \to \mathbb{R}^n$, если $\overline{G} \subset D$ и $\partial f(G) = f(\partial G)$. Окрестность U точки x_0 называется *нормальной окрестностью отображения* f, если U является нормальной областью f. Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, множества $E \subset D$

и $y \in \mathbb{R}^n$, определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т.е.

$$N(y, f, E) \,=\, \mathrm{card}\,\{x \in E : f(x) = y\}\;, \tag{1.1.2}$$

$$N(f, E) \,=\, \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, E)\,. \tag{1.1.3}$$

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение и существует область $G \subset D$, $\overline{G} \subset D$, такая, что $\overline{G} \cap \{f^{-1}(f(x))\} = \{x\}$. Тогда величина $\mu\ (f(x),\ f,\ G)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области G и обозначается символом $i(x, f)$. Очевидно, для сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $i(x, f) = 1$ при всех $x \in D$. Отметим также, что $i(x, f) = \operatorname{sign} J(x, f)$ для открытых дискретных отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$, дифференцируемых в точке $x \in D$ и таких, что $J(x, f) \neq 0$ [153, разд. V.2.2, с. 332, соотношение (68)]; [115, лемма 2.14].

Определение 1.1.2. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ (соответственно $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$) называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ (соответственно каждой точки $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$) состоит только из изолированных точек.

Определение 1.1.3. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ (соответственно $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$) называется *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$ (соответственно в $\overline{\mathbb{R}^n}$).

Определение 1.1.4. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ (соответственно $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$) называется *нульмерным*, если каждая компонента связности $\{f^{-1}(y)\}$ вырождается в точку для любого $y \in \mathbb{R}^n$ (соответственно любого $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$).

Из определения вытекает, что если отображение дискретно, то оно и нульмерно. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Определение 1.1.5. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *гомеоморфизмом*, если f непрерывно и имеет обратное отображение $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}^n$, которое также непрерывно. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если каждая точка x_0 области D имеет окрестность $U \supset \{x_0\}$ такую, что сужение $f|_U$ является гомеоморфизмом.

Определение 1.1.6. Точка $x_0 \in D$ называется *точкой ветвления отображения* f, если ни в какой окрестности U точки x_0 сужение $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Отображение, имеющее хотя бы одну точку ветвления, коротко будем называть *отображением с ветвлением.* Множество точек ветвления отображения f принято обозначать символом B_f.

1.1.3. Приведем основные сведения, касающиеся семейств кривых и модуля семейств кривых в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.7. *Кривой* γ мы, как обычно, называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (либо открытого интервала (a, b), либо полуоткрытого интервала одного из видов $(a, b]$, $[a, b)$) в $\mathbb{R}^n$ (либо в $\overline{\mathbb{R}^n}$): $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ. Следующие определения см. в [281, гл. I, § 1—6].

Определение 1.1.8. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geq 1 \tag{1.1.4}$$

для всех (локально спрямляемых) кривых $\gamma \in \Gamma$ (т.е. произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ). В этом случае $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$.

Здесь и далее символ $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx|$ обозначает криволинейный интеграл первого рода по кривой γ от функции ρ; если функция ρ борелева, а кривая γ спрямляема (локально спрямляема), такой интеграл определен корректно [281, гл. I, § 4]. При этом, если $\operatorname{adm} \Gamma = \varnothing$, то полагаем $M(\Gamma) = \infty$ [281, гл. I, § 6, с. 16]. Отметим, что $\operatorname{adm} \Gamma = \varnothing$ в том и только том случае, если семейство Γ содержит постоянную кривую γ_0; в этом случае для этой кривой соотношение (1.1.4) не выполнено ни для какой борелевской неотрицательной функции ρ, так как $\int\limits_{\gamma_0} \rho(x)|dx| = 0 < 1$. Здесь кривая $\gamma_0 = \gamma_0(t)$, $t \in (0, 1)$, называется постоянной, если $\gamma_0(t) = const$ при всех $t \in (0, 1)$.

Определение 1.1.9. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{D} \rho^n(x) dm(x)\,.$$

При этом, если $\operatorname{adm}\Gamma = \varnothing$, то полагаем $M(\Gamma) = \infty$ [281, § 6, с. 16]. Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега

m в $\mathbb{R}^n$. Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M(\varnothing) = 0$, обладает свойством монотонности относительно семейств кривых,

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)\,, \tag{1.1.5}$$

а также свойством полуаддитивности:

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i) \tag{1.1.6}$$

(см. [281, гл. I, теорема 6.2]). Семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2) \tag{1.1.7}$$

[281, гл. I, теорема 6.4].

Отметим, что если $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ — конформное отображение, то $M(\varphi(\Gamma)) = M(\Gamma)$ для любого семейства кривых Γ в D [281, теорема 8.1].

Пусть $E,\, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. В дальнейшем всюду символом $\Gamma(E, F, D)$ мы обозначаем семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a,\, b)$.

Модуль семейств кривых, к сожалению, не вычисляется в явном виде в большинстве случаев. Однако, в некоторых специальных (наиболее важных для исследования) ситуациях он может быть непосредственно вычислен, как показывают следующие **П Р И М Е Р Ы :** 1) Пусть $S_i = S(x_0, r_i)$, $0 < r_i < \infty$, $i = 1, 2$, $r_1 \neq r_2$ — сферы с центром в фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиусов r_1 и r_2. Тогда $M(\Gamma(S_1, S_2, A(r_1, r_2, x_0))) = \dfrac{\omega_{n-1}}{\left(\log\dfrac{r_2}{r_1}\right)^{n-1}}$ [281, § 7.5]; здесь, как и прежде, $A(r_1, r_2, x_0)$ — сферическое кольцо с центром в точке x_0 и радиусов r_1 и r_2, определенное соотношением (1.1.1), а ω_{n-1} — площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$. 2) Пусть $\prod(a, b)$ — открытый прямоугольник на плоскости $\mathbb{R}^2$, $\Gamma_{a,b}$ обозначает семейство кривых, соединяющих противоположные стороны в прямоугольнике $\prod(a, b)$ длины b. Тогда $M(\Gamma_{a,b}) = \dfrac{b}{a}$ [3, гл. I, § D, пример 1]). 3) Модуль семейства всех кривых, не содержащих кривую, вырождающуюся в точку и проходящих через фиксированную точку пространства, равен нулю [281, § 7.9].

Развитию метода модулей и связанной с ним теории емкостей посвящено значительное количество работ [4,5,22,29,46,60,68,134,219,271, 272,304].

1.1.4. Следующие определения касаются дифференциальных свойств отображений в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.10. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \operatorname{Int} A$, $f : A \to \mathbb{R}^n$. Тогда отображение f *дифференцируемо в точке* x_0, если для любых $\Delta x \in \mathbb{R}^n$, таких, что $(x_0 + \Delta x) \in A$, и некоторого линейного преобразования $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot |\Delta x|\,,$$

где $\alpha(x_0, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. В этом случае оператор L называют *матрицей Якоби* отображения f в точке x_0 и обозначают символом $f'(x_0)$, а элемент матрицы Якоби $f'(x_0)$, находящийся в ее i-й строке и j-м столбце, обозначают символом $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.

В определении 1.1.10 символ $L\Delta x$, как обычно, обозначает действие матрицы L на вектор Δx. В дальнейшем $J(x, f) = \det f'(x)$ — *якобиан отображения* f в точке x. Из определения дифференцируемости следует, что если f дифференцируемо в точке x_0, то каждая координатная функция f_i имеет обычные частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ по каждой из переменных x_j в точке x_0, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, при этом, эта частная производная совпадает с элементом матрицы, находящимся в ее i-й строке и j-м столбце.

1.1.5. В дальнейшем $C_0^k(U)$ обозначает пространство функций $u : U \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в U, имеющих k частных производных по любой переменной, непрерывных в U. Напомним также понятие обобщенной производной по Соболеву [168, гл. I, § 1.3].

Определение 1.1.11. Пусть U — открытое множество, $U \subset \mathbb{R}^n$, $u : U \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, $u \in L^1_{loc}(U)$. Предположим, что найдется функция $v \in L^1_{loc}(U)$ такая, что

$$\int\limits_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) u(x) dm(x) = -\int\limits_U \varphi(x) v(x) dm(x)$$

для любой функции $\varphi \in C_1^0(U)$. Тогда функция v является *обобщенной производной первого порядка функции* u *по переменной* x_i и обозначается символом: $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) := v$.

Функция $u \in W^{1,1}_{loc}(U)$, если u имеет обобщенные производные первого порядка по каждой из переменных в U, которые являются локально интегрируемыми в U.

Определение 1.1.12. Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит *классу Соболева* $W^{1,1}_{loc}(G)$, $f \in W^{1,1}_{loc}(G)$, если все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ обладают обобщенными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в G в первой степени. А $f \in W^{1,k}_{loc}(G)$, $k \in \mathbb{N}$, если все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ обладают обобщенными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в G в степени k.

Весьма полезным является следующее замечание.

Замечание 1.1.1. Частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ отображения f в точке x, $f = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, в отдельных случаях допускают двойное толкование.

С одной стороны, можно понимать $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ как обычные частные производные координатной функции f_i по переменной x_j; в частности, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ есть соответствующий элемент матрицы Якоби $f'(x)$, стоящий в ее i-й строке и j-м столбце, при условии, что отображение f дифференцируемо в точке x.

С другой стороны, элемент $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ можно понимать в смысле обобщенных функций по Соболеву, по крайней мере, если $f \in W^{1,1}_{loc}$.

В связи с этим отметим, что для отображения $f \in W^{1,1}_{loc}$ частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, имеющие смысл обычных частных производных, совпадают с обобщенными производными по Соболеву $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ почти всюду [129, гл. I, § 1.1, п. 1.1.3, теорема 1].

1.1.6. Приведем следующее определение.

Определение 1.1.13. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение, $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ — единичный вектор. *Производной отображения f по направлению e в точке* $x_0 \in D$ называется следующий предел (если он существует):

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}\,.$$

Отметим, что если отображение f дифференцируемо в точке x_0 и $f'(x_0)$ — матрица Якоби отображения f в этой точке, то по определению дифференцируемости

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = f'(x_0)e\,, \tag{1.1.8}$$

где, как и прежде, $f'(x_0)e$ обозначает действие матрицы Якоби $f'(x_0)$ на вектор e.

1.1.7. Полагаем

$$\|f'(x)\| = \max_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}, \quad l\left(f'(x)\right) = \min_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}\,. \tag{1.1.9}$$

Отметим, что

$$\|f'(x)\| = \max_{|h|=1} |f'(x)h|\,, \quad l\left(f'(x)\right) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|\,. \tag{1.1.10}$$

Следующие две величины имеют принципиальное значение в теории отображений. *Внутренняя дилатация* $K_I(x,f)$ отображения f в точке x определяется соотношением

$$K_I(x,f) = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}, & J(x,f)\neq 0,\\ 1, & f'(x)=0,\\ \infty, & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{1.1.11}$$

Внешняя дилатация $K_O(x,f)$ отображения f в точке x определяется соотношением

$$K_O(x,f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}, & J(x,f)\neq 0,\\ 1, & f'(x)=0,\\ \infty, & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{1.1.12}$$

Отметим, что внутренняя и внешняя дилатации корректно определены в точках дифференцируемости, однако, для отображений, имеющих частные производные почти всюду, они также формально могут быть определены соотношениями (1.1.11) и (1.1.12).

Величины $K_O(x,f)$ и $K_I(x,f)$ имеют важное геометрическое толкование, которое рассмотрено ниже. При этом, от того, какими свойствами обладают $K_O(x,f)$ и $K_I(x,f)$, существенным образом зависят свойства самого отображения f (подробнее об этом — в следующих параграфах).

Ниже приведена некоторая техника, позволяющая вычислять $K_O(x,f)$ и $K_I(x,f)$ в случае дифференцируемых отображений.

Предположим, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в точке $x_0 \in D$ и матрица Якоби $f'(x_0)$ ненулевая. Тогда найдутся системы векторов $e_1, \ldots, e_n$ и $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_m}$, $m \le n$, и неотрицательные числа

$$\lambda_1(x_0), \ldots, \lambda_n(x_0), \quad \lambda_1(x_0) \le \ldots \le \lambda_n(x_0)\,,$$

$\lambda_i(x_0) > 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$, $\lambda_i(x_0) = 0$ при $i = m+1, m+2, \ldots, n$, такие, что $f'(x_0)e_i = \lambda_i(x_0)\widetilde{e_i}$ при $i = 1, 2 \ldots, m$ и $f'(x_0)e_i = 0$ при $i > m$, см. [168, гл. I, теорема 2.1], причем

$$\lambda_1^2(x_0), \ldots, \lambda_m^2(x_0)$$

— собственные значения симметрического отображения $(f'(x_0))^* f'(x_0)$, см. [168, гл. I, теорема 2.2]. Если, кроме того, матрица Якоби $f'(x_0)$ невырождена, т.е. $J(x_0,f) = \det f'(x_0) \ne 0$, то $m = n$ и

$$|J(x_0,f)| = \lambda_1(x_0) \ldots \lambda_n(x_0), \qquad \|f'(x_0)\| = \lambda_n(x_0)\,, \tag{1.1.13}$$

$$l\,(f'(x_0)) = \lambda_1(x_0)\,, \tag{1.1.14}$$

$$K_O(x_0,f) = \frac{\lambda_n^n(x_0)}{\lambda_1(x_0) \ldots \lambda_n(x_0)}\,, \quad K_I(x_0,f) = \frac{\lambda_1(x_0) \ldots \lambda_n(x_0)}{\lambda_1^n(x_0)}\,, \tag{1.1.15}$$

см. [168, гл. I, § 2.1, соотношение (2.5) и дополнительные комментарии на с. 21]. Кроме того, из приведенных выше формул следует

$$K_I(x,f) \le K_O^{n-1}(x,f), \qquad K_O(x,f) \le K_I^{n-1}(x,f)\,, \tag{1.1.16}$$

см. [168, гл. I, § 2.1, соотношения (2.7) и (2.8)], $K_I(x,f) \ge 1$ и $K_O(x,f) \ge 1$ всюду, где эти величины определены корректно.

Числа $\lambda_1(x_0), \ldots \lambda_n(x_0)$ называются *главными значениями*, а векторы $e_1, \ldots, e_n$ и $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$ — *главными векторами* отображения $f'(x_0)$ [168, гл. I, § 2.1]. Главные векторы и главные значения зависят как от точки x_0, так и от отображения f, однако, с целью упрощения записи здесь и в дальнейшем мы опускаем "(x_0)", если недоразумение невозможно.

1.1.8. Геометрический смысл $K_O(x,f)$ и $K_I(x,f)$. Рассмотрим линейное отображение $L(h) := f'(x_0)h$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, и сферу $S(x_0, r)$ при настолько малом r, что $S(x_0,r) \subset D$. Пусть $x \in S(0,r)$. Разложим вектор x по системе векторов $e_1, \ldots, e_n$:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\,, \quad x_i \in \mathbb{R}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

тогда

$$L(x) = f'(x_0)x = \lambda_1 x_1 \widetilde{e_1} + \ldots + \lambda_n x_n \widetilde{e_n}\,, \quad x_i \in \mathbb{R}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Поскольку $|x| = r$, то отсюда получаем, что множество $L(S(x_0, r))$ состоит из тех и только тех $y = y_1\widetilde{e_1} + \ldots + y_n\widetilde{e_n} \in \mathbb{R}^n$, при которых

$$\frac{y_1^2}{r^2\lambda_1^2} + \ldots + \frac{y_n^2}{r^2\lambda_n^2} = 1\,.$$

Таким образом, $L(S(x_0, r))$ представляет собой эллипсоид E с полуосями, имеющими длины $r\lambda_1(x_0), \ldots, r\lambda_n(x_0)$, параллельными векторам $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$ (рис. 2). В этом случае на основании соотношений (1.1.15) заключаем, что внутренняя дилатация $K_I(x_0, f)$ равна отношению объема эллипсоида E к объему максимально возможного вписанного в E шара E_2. В свою очередь, внешняя дилатация $K_O(x_0, f)$ равна отношению объема минимально возможного описанного вокруг E шара E_1 к объему эллипсоида E. С учетом того, что f является дифференцируемым в

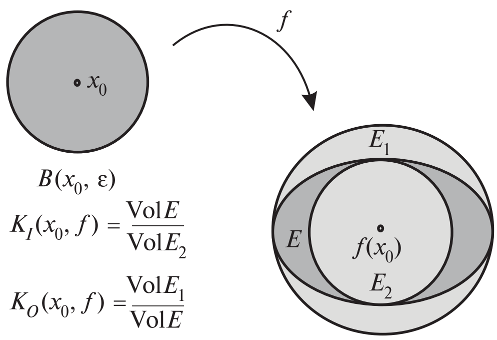

Рис. 2. Геометрический смысл внутренней и внешней дилатаций

точке x_0, все приведенное выше можно отнести также к отображению f (с точностью до $o(r)$, где $o(r)/r \to 0$ при $r \to 0$).

1.1.9. В качестве примера вычислим главные векторы и главные растяжения для имеющих особую важность так называемых *радиальных отображений*. В дальнейшем радиальными будем называть отображения вида

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|)\,. \tag{1.1.17}$$

Предположим, что $x \in B(0,p) \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $p > 0$, а функция $\rho : (0,p) \to \mathbb{R}$ является непрерывной и дифференцируемой почти всюду, тогда само отображение f будет дифференцируемым почти всюду ввиду теоремы Фубини. Предположим, что $x_0 \in B(0,p) \setminus \{0\}$ — точка дифференцируемости отображения f, $|x_0| = r \in (0,p)$.

1. Пусть вектор $e_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$ — какой-либо вектор, ортогональный вектору x_0; если изобразить вектор e_1 с началом в точке x_0, то по определению e_1 лежит в плоскости, касательной к сфере $S(0,r)$ в точке x_0. Такой вектор условимся называть *касательным направлением* по отношению к точке x_0. Вычислим производную $\partial_\tau f(x_0)$ отображения f по направлению вектора e_1 в точке x_0:

$$\partial_\tau f(x_0) = \lim_{t\to+0} \frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{1}{t} \left\{ \frac{x_0+te_1}{|x_0+te_1|}\rho(|x_0+te_1|) - \frac{x_0}{|x_0|}\rho(|x_0|) \right\}. \tag{1.1.18}$$

Поскольку e_1 выбран ортогональным к вектору x_0, по теореме Пифагора определяем $|x_0+te_1| = \sqrt{r^2+t^2}$. Тогда из (1.1.18) следует

$$\partial_\tau f(x_0) = \lim_{t\to+0} \frac{1}{t} \left\{ \frac{x_0+te_1}{\sqrt{r^2+t^2}}\rho(\sqrt{r^2+t^2}) - \frac{x_0}{r}\rho(r) \right\}. \tag{1.1.19}$$

Воспользовавшись в (1.1.19) правилом Лопиталя, получим

$$\partial_\tau f(x_0) = e_1 \frac{\rho(r)}{r}. \tag{1.1.20}$$

2. Пусть теперь вектор e_2 сонаправлен с вектором x_0 (такой вектор e_2 условимся называть *радиальным направлением*). Отметим, что вектор e_2 ортогонален касательной плоскости к сфере $S(0,r)$ в точке x_0.

Вычислим производную $\partial_r f(x_0)$ отображения f по направлению вектора e_2 в точке x_0:

$$\partial_r f(x_0) = \lim_{t\to+0} \frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{1}{t} \left\{ \frac{x_0+te_2}{|x_0+te_2|}\rho(|x_0+te_2|) - \frac{x_0}{|x_0|}\rho(|x_0|) \right\}. \tag{1.1.21}$$

Отметим, что $|x_0 + te_2| = r + t$. Тогда из (1.1.21) следует

$$\partial_r f(x_0) = \lim_{t\to+0} \frac{1}{t}\left\{\frac{x_0 + te_2}{r+t}\rho(r+t) - \frac{x_0}{r}\rho(r)\right\}. \qquad (1.1.22)$$

Воспользовавшись в (1.1.22) дифференцируемостью функции ρ в точке r и тем, что $e_2 r = x_0$, получим

$$\partial_r f(x_0) = \lim_{t\to+0} \frac{e_2\rho(r+t) - e_2\rho(r)}{t} = \rho'(r)e_2\,. \qquad (1.1.23)$$

Таким образом, из соотношений (1.1.20) и (1.1.23) с учетом равенства (1.1.8) приходим к следующему заключению.

Предложение 1.1.1. *Пусть отображение $f : B(0,p)\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$ имеет вид (1.1.17), где функция $\rho(t) : (0,p)\to\mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема почти всюду. Тогда f также дифференцируемо почти всюду, при этом, в каждой точке x_0 дифференцируемости отображения f в качестве главных векторов $e_{i_1},\ldots,e_{i_n}$ и $\widetilde{e_{i_1}},\ldots,\widetilde{e_{i_n}}$ можно взять $(n-1)$ линейно независимых касательных направлений к сфере $S(0,r)$ в точке x_0, где $|x_0| = r$, и одно радиальное направление в указанной точке.*

Главные растяжения (называемые касательными растяжениями и радиальным растяжением) равны $\lambda_\tau(x_0) := \lambda_{i_1}(x_0) = \ldots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \dfrac{\rho(r)}{r}$ и $\lambda_r(x_0) := \lambda_{i_n} = \rho'(r)$ соответственно.

Отметим, что для главных растяжений λ_{i_k}, $k\in 1,2,\ldots,n$, мы намеренно использовали двойную индексацию, поскольку, как условлено выше, конечную последовательность λ_i, $i\in 1,2,\ldots,n$ мы предполагаем возрастающей по $i : \lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n$. Естественно, что в фиксированной точке x_0 радиальные растяжения $\lambda_{i_1}(x_0) = \ldots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \dfrac{\rho(r)}{r}$ могут быть не больше касательного растяжения $\lambda_{i_n} = \rho'(r)$, и наоборот.

1.1.10. Следующее понятие, как показано ниже, тесно связано с исследованием классов Соболева и потому представляет значительный интерес.

Определение 1.1.14. Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $I = \{x\in\mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1,\ldots,n\}$ — открытый n-мерный интервал. Тогда отображение $f : I\to\mathbb{R}^n$ *принадлежит классу ACL* (*абсолютно непрерывно на линиях*), если f абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в I, параллельных координатным осям (рис. 3).

Отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL в G, когда сужение $f|_I$ принадлежит классу ACL для каждого интервала I, $\overline{I} \subset G$.

Пусть $f : G \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — дискретное отображение. Будем считать, что f *принадлежит классу* ACL в G, если f класса ACL в $G \setminus \{f^{-1}(\infty)\}$.

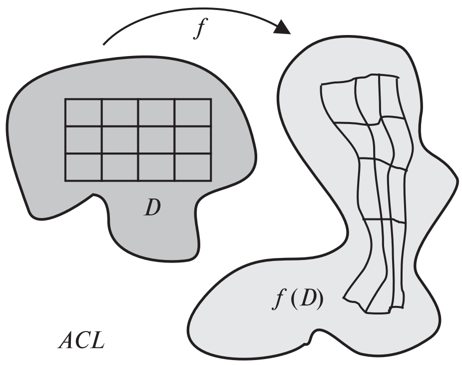

Рис. 3. ACL (абсолютная непрерывность отображения на линиях)

Из определения пространства ACL вытекает, что если $f \in ACL$, то f почти всюду имеет обычные частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ по каждой из переменных x_j в точке x, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$.

Определение 1.1.15. Пусть $p \ge 1$, U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f \in ACL^p(U)$, если $f \in ACL(U)$ и все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ по каждой из переменных x_j в точке x, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, локально интегрируемы в U в степени p.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1.2. *Пусть* $p \ge 1$, U *— открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, *тогда*

$$W^{1,p}_{loc}(U) = ACL^p(U)\,,$$

[129, гл. I, § 1.1, п. 1.1.3, теоремы 1 и 2].

Замечание 1.1.2. Разумеется, в предложении 1.1.2 мы имеем в виду, что класс $W^{1,p}_{loc}$ состоит только из непрерывных отображений (как мы условились, в данной монографии разрывные отображения нами не рассматриваются). Можно, однако, определять пространство $W^{1,p}_{loc}$ более общим образом, когда входящие в него отображения не являются непрерывными. В этом случае, строго говоря, равенство $W^{1,p}_{loc}(U) = ACL^p(U)$ не имеет места [129, гл. I, § 1.1, п. 1.1.3, теорема 1].

1.1.11. Перейдем теперь к весьма важному кругу вопросов. Для дальнейшего изложения нам необходимо дать формальное определение интеграла от произвольной функции ρ по $(n-1)$-мерной поверхности S. Собственно, для изложения нам понадобятся лишь средние значения $q_{x_0}(r)$ от функций Q по сферам $S(x_0, r)$ в $\mathbb{R}^n$, имеющие принципиальное значение в нашей теории. Однако, определение интеграла по поверхности удобнее привести в самом общем случае. При этом мы считаем известными факты из общей теории меры и интеграла, а также понятие хаусдорфовых мер.

Здесь и далее $\mathcal{H}^k$, $k \in [0, \infty)$, обозначает *нормированную k-мерную меру Хаусдорфа* в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ [70]. Точнее, если A — множество в $\mathbb{R}^n$, то полагаем

$$\mathcal{H}^k(A) = \sup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}^k_\varepsilon(A)\,, \quad \mathcal{H}^k_\varepsilon(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k \left(d(A_i)\right)^k \,, \tag{1.1.24}$$

$\lambda_k = \dfrac{\Gamma(1/2)^k}{2^k \Gamma(\frac{1}{2}k+1)}$, где $d(E)$, как и прежде, обозначает евклидов диаметр множества $E \subset \mathbb{R}^n$, а inf в (1.1.24) берется по всем покрытиям A множествами A_i таким, что $d(A_i) < \varepsilon$. Если $\mathcal{H}^{k_1}(A) < \infty$, то $\mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$ для любого $k_2 > k_1$ [70, гл. VII, п. 1B]. Величина

$$\dim_{\mathcal{H}} A = \sup_{\mathcal{H}^k(A)>0} k$$

называется *хаусдорфовой размерностью* множества A.

Определение 1.1.16. Следуя [125, § 9.2], $(n-1)$-*мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ (или просто поверхностью) называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^{n-1}} := \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$.

Функцией кратности поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card} \{x \in \omega : \ S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n\,.$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу и, значит, измерима относительно хаусдорфовой меры $\mathcal{H}^{n-1}$ [125, § 9.2]. Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ ее *интеграл над поверхностью* S определяется равенством

$$\int\limits_S \rho \, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, N(S, y)\, d\mathcal{H}^{n-1} y\,,$$

где $d\mathcal{A}$ — элемент площади поверхности S.

Определение 1.1.17. Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\, d\mathcal{A}\,, \qquad (1.1.25)$$

где $d\mathcal{A}$ — элемент площади поверхности $S(x_0, r)$.

В силу приведенного выше определения интеграла от функции относительно площади поверхности для измеримых (но не обязательно борелевских) функций Q величина $q_{x_0}(r)$ корректно определена для почти всех $r \in \mathbb{R}$ ввиду теоремы Фубини.

1.1.12. Ниже мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ [203, гл. I, § 3, с. 18]. Полагаем

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\,. \qquad (1.1.26)$$

В дальнейшем нам понадобится вспомогательное утверждение [125, гл. 7, лемма 7.4]; [191, лемма 2.2].

Предложение 1.1.3. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $Q(x)$ — измеримая по Лебегу функция, $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $Q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Полагаем*

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\,, \qquad (1.1.27)$$

где I — величина, определенная в (1.1.26). Тогда

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}} = \int\limits_A Q(x) \cdot \eta_0^n(|x - x_0|)\, dm(x) \leq \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \qquad (1.1.28)$$

для любой измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1\,. \qquad (1.1.29)$$

Доказательство. Если $I = \infty$, то левая часть в соотношении (1.1.28) равна нулю и неравенство в (1.1.28) очевидно. Заметим, что $I \neq 0$, поскольку $q_{x_0}(r) < \infty$ для п.в. $r \in (r_1, r_2)$ ввиду условия $Q \in \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $I < \infty$. Тогда из (1.1.27) и (1.1.29) следует, что $q_{x_0}(r) \neq 0$ и $\eta_0(r) \neq \infty$ п.в. в (r_1, r_2). Полагаем

$$\alpha(r) = rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)\eta(r)\,, \quad w(r) = 1/rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)\,.$$

При почти всех $r \in (r_1, r_2)$ имеем

$$\eta(r) = \alpha(r)w(r)$$

и

$$C\colon = \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)dm(x) = \omega_{n-1} \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha^n(r) \cdot w(r)dr\,.$$

Применяя неравенство Иенсена с весом к выпуклой функции $\varphi(t) = = t^n$, заданной в интервале $\Omega = (r_1, r_2)$ с вероятностной мерой $\nu(E) = = \dfrac{1}{I}\int\limits_E w(r)dr$ [157, теорема 2.6.2] и делая замену переменных относительно меры [203, гл. I, теорема 15.1], получаем

$$\left(\frac{1}{I}\int \alpha^n(r)w(r)dr\right)^{1/n} \geq \frac{1}{I}\int \alpha(r)w(r)dr = \frac{1}{I}\,,$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ удовлетворяет соотношению (1.1.29). Отсюда находим

$$C \geq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}\,,$$

что и доказывает (1.1.28). $\Box$

1.1.13. Для доказательства многих основных результатов этой книги нам понадобятся некоторые важные вспомогательные сведения из общей теории интеграла [203]. Следующее определение см. в [203, гл. I, § 4].

Определение 1.1.18. Класс множеств χ в пространстве $\mathbf{X}$ называется *аддитивным*, если:

1) пустое множество принадлежит системе множеств χ;

2) из того, что X принадлежит системе множеств χ, следует, что $\mathbf{X} \setminus X$ также принадлежит системе χ;

3) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ принадлежит системе множеств χ, как только X_i принадлежит системе χ при каждом $i \in \mathbb{N}$.

Следующее определение см. в [203, гл. I, § 5].

Определение 1.1.19. Функция множества $\Phi(X)$ называется *аддитивной функцией множества относительно системы множеств* χ *на множестве* E, если:

1) E является множеством системы χ;

2) $\Phi(X)$ определена и конечна на каждом множестве $X \subset E$, где X принадлежит системе χ;

3) $\Phi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \Phi(X_i)$ для произвольной последовательности множеств $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, каждое из которых принадлежит системе множеств χ и, кроме того, $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Следующие определения см. в [203, гл. IV, § 2].

Определение 1.1.20. *Параметром регулярности* $r(E)$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется точная верхняя грань чисел $m(E)/m(J)$, где J означает произвольный куб, содержащий E, ребра которого параллельны координатным осям. Последовательность множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *регулярной*, если найдется $\alpha > 0$ такое, что $r(E_n) > \alpha$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Последовательность множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *стягивается к точке* a, *если* $d(E_n) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и* $a \in E_n$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1.21. Пусть Φ — произвольная функция множеств, не обязательно аддитивная. Тогда *обобщенным верхним производным числом функции* Φ *в точке* a называется точная верхняя грань чисел l, для каждого из которых найдется регулярная последовательность замкнутых множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, стягивающаяся к a, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(E_n) : : m(E_n) = l$. Это число обозначается символом $\overline{D}\Phi(a)$. Аналогично определяется *обобщенное нижнее производное число функции* Φ *в точке* a *и обозначается как* $\underline{D}\Phi(a)$. Функция Φ называется *обобщенно дифференцируемой в точке* a, если $\overline{D}\Phi(a) = \underline{D}\Phi(a) \neq \infty$. В этом случае число $D\Phi(a) := \overline{D}\Phi(a) = \underline{D}\Phi(a)$ называется *обобщенной производной функции* Φ *в точке* a.

Имеет место следующее утверждение [203, гл. IV, теоремы 5.4 и 6.3].

Предложение 1.1.4. *(Теорема Лебега). Аддитивная функция множества почти всюду обобщенно дифференцируема. Более того, если* Φ *есть неопределенный интеграл от суммируемой функции* f, *то* $D\Phi(x) = f(x)$ *при почти всех* x.

1.2. Общие сведения о квазиконформных отображениях и отображениях с ограниченным искажением

1.2.1. В настоящем параграфе мы приводим (с целью ознакомления) некоторые известные факты из теории отображений, изучение которых предшествовало изучению кольцевых Q-отображений и Q-отображений, прежде всего, отображений с ограниченным искажением.

Определение 1.2.1. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия:

1) $f \in W^{1,n}_{loc}$,

2) якобиан $J(x, f)$ отображения f в точке $x \in D$ сохраняет знак почти всюду в D,

3) $\|f'(x)\|^n \le K \cdot |J(x, f)|$ при почти всех $x \in D$ и некоторой постоянной $K < \infty$, где, как обычно,

$$\|f'(x)\| := \sup_{h\in\mathbb{R}^n:\,|h|=1} |f'(x)h| \,,$$

[168, гл. I, § 3]; [175, гл. I, определение 2.1].

Отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ с ограниченным искажением, допускающие бесконечное значение, называются *квазимероморфными* [116]. Соответствующие свойства 1)—3) в окрестности точки x, где $f(x) = \infty$, могут быть определены при помощи инверсии $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}$, $\varphi : \infty \mapsto 0$ [116].

Начало интенсивных исследований пространственных отображений с ограниченным искажением положено Ю. Решетняком. В его работах, в частности, доказаны открытость и дискретность отображений f с ограниченным искажением [168, гл. II, теоремы 6.3 и 6.4], а также непрерывность f, которая прямо следует из условий 1)—3) без соответствующего изначального предположения о ней [160, теорема 1]. Отметим также, что теории отображений с ограниченным искажением посвящено большое количество работ разных авторов [1, 7, 15, 51–53, 88, 115–119, 126, 127, 133, 135, 139, 149, 150, 152, 159–177, 263, 276, 278, 282, 288, 292–295, 299–303].

1.2.2. Рассмотрим следующее определение.

Определение 1.2.2. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *квазиконформным*, если f является отображением с ограниченным искажением и, кроме того, гомеоморфизмом [168, гл. I, § 3]. Аналогично, при помощи инверсии $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}$, $\varphi : \infty \mapsto 0$, может быть определено квазиконформное отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$. В частности, гомеоморфизм $f \in C^1(D)$ называется *конформным отображением*, если $\|f'(x)\|^n = |J(x,f)|$ при всех $x \in D$ [281, гл. I, определение 5.5].

Квазиконформным отображениям и их приложениям, связанным, главным образом, с решениями дифференциальных уравнений типа Бельтрами, также посвящено множество работ [3–5, 7–9, 12–14, 17, 18, 21, 30–33, 36, 46, 48–50, 55–58, 63, 65, 74, 84, 99, 105–108, 120, 130–133, 136–138, 140–142, 146, 158, 178–182, 217, 218, 269, 270, 279–281, 291]. Отдельно следует отметить так называемые *отображения, квазиконформные в среднем* [11, 94–102, 147, 179–181, 265–267], исследование которых проходило как продолжение теорий квазиконформных отображений и отображений с ограниченным искажением.

1.2.3. Другое приведенное ниже эквивалентное определение квазиконформных отображений, на котором базируются практически все исследования настоящей монографии, основано на свойстве искажения семейств кривых [281, гл. II, определение 13.1]. Напомним, что под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ (см. п. 1.1.3), а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$ (рис. 4).

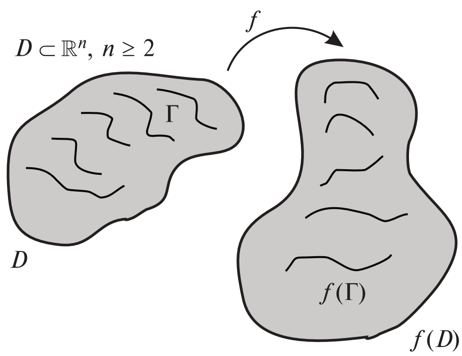

Рис. 4. Семейства кривых в $\mathbb{R}^n$ и отображения

Отметим, что если Γ — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$ и f — непрерывно, то $f(\Gamma)$ также является семейством кривых в $\mathbb{R}^n$. Обычно кривая лежит в D, если ее *носитель*

$$|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in [a,b] : \gamma(t) = x\}$$

принадлежит области D как подмножество.

Определение 1.2.3. Пусть $K'' < \infty$ — некоторая фиксированная постоянная. Напомним, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в области $D \subset$

$\subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется K''-*квазиконформным отображением*, если

$$(1/K'') \cdot M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq K'' \cdot M(\Gamma) \qquad (1.2.1)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — конформный модуль семейства кривых [281, гл. II, определение 13.1].

Иными словами, неравенства (1.2.1) означают, что модуль любого семейства кривых при отображении f искажается не более, чем в K'' раз. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, заданный в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *квазиконформным отображением*, если f является K''-квазиконформным хотя бы для одного $K'' < \infty$.

Замечание 1.2.1. Отметим, что для квазиконформности f достаточно выполнения только одного неравенства в правой части соотношения (1.2.1), а именно, гомеоморфизм f есть квазиконформное отображение, как только

$$M(f(\Gamma)) \leq K' \, M(\Gamma) \qquad (1.2.2)$$

для некоторого числа $K' \geq 1$, $K' < \infty$, и произвольного семейства Γ кривых γ в области D [281, гл. IV, теорема 34.3]. Конечно, постоянная K в пункте определения 3) отображений с ограниченным искажением, постоянная K'' в (1.2.1) и постоянная K' в (1.2.2) не обязаны совпадать между собой.

Замечание 1.2.2. Отметим еще раз, что оба приведенных выше определения квазиконформных отображений — определение 1.2.1 на основе соотношений 1)—3) и определение на основе соотношения (1.2.1) — эквивалентны [281, гл. IV, теорема 34.6], [168, гл. I, § 3].

Замечание 1.2.3. Соотношение (1.2.2) принято называть неравенством Е.А. Полецкого, доказавшего, что произвольное отображение с ограниченным искажением удовлетворяет неравенству (1.2.2) при некоторой постоянной K' [149, § 4, теорема 1].

1.3. Определение и примеры Q-отображений и кольцевых Q-отображений

1.3.1. Классы отображений с ограниченным искажением и квазиконформных отображений не охватывают многие другие известные классы. Например, гладкие отображения вовсе не обязаны быть квазиконформными. В связи с этим возникает необходимость ввести в рассмотрение более широкие объекты исследования.

В этом параграфе определены Q-отображения и кольцевые Q-отображения, являющиеся основными объектами нашего изучения. Для общего понимания отметим следующее: указанные классы можно обозначить как классы отображений, более общих, чем квазиконформные отображения и отображения с ограниченным искажением в смысле искажения модуля семейств кривых.

Предположим, что вместо соотношения (1.2.2) в основе определения рассматриваемого класса отображений лежит следующее неравенство:

$$M(f(\Gamma)) \leq \int\limits_{D} Q(x) \cdot \rho^n(x) dm(x) \tag{1.3.1}$$

$\forall\ \rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, где $Q : D \to [0, \infty]$ — некоторая фиксированная вещественнозначная функция [125, гл. 4]. Напомним, что $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если соотношение (1.1.4) выполнено для всех (локально спрямляемых) кривых $\gamma \in \Gamma$.

Определение 1.3.1. Отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *Q-отображением*, если f удовлетворяет соотношению (1.3.1) для произвольного семейства кривых Γ в области D и каждой допустимой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. В частности, если f — гомеоморфизм, то такое отображение называется *Q-гомеоморфизмом*.

Изучение неравенств типа (1.3.1) при $n = 2$ восходит к Л. Альфорсу [3, гл. I, § D, теорема 3], а также О. Лехто и К. Вертанену [108, гл. V, § 6.3, неравенство (6.6)]. Также Ю. Струговым в работе [265] было анонсировано подобное неравенство для отображений, квазиконформных в среднем, но подробное его доказательство, насколько известно, не было опубликовано. В работе В. Гутлянского (совместно с К. Бишопом, О. Мартио и М. Вуориненом) неравенство (1.3.1) доказано для пространственных квазиконформных отображений при $Q = K_I(x, f)$ [12]. В связи с изложенным выше отметим также работы А. Казаку-Каберии [4, 5], М. Кристи [23, 26] и В. Миклюкова [138].

1.3.2. Если $Q(x) \equiv K' \in [1, \infty)$, то в правой части соотношения (1.3.1) при переходе к inf по всем допустимым функциям ρ появляется модуль исходного семейства Γ, помноженный на постоянную K'. Другими словами, из соотношения (1.3.1) немедленно вытекает неравенство Полецкого (1.2.2) при всякой ограниченной функции Q; значит, каждое отображение с ограниченным искажением является Q-отображением при некотором $Q \equiv K'$ (см. замечание 1.2.1). Обратно, если отображение f предполагается гомеоморфизмом, то из неравенства (1.3.1) при ограниченной функции Q вытекает, что отображение f в этом случае является квазиконформным (см. замечание 1.2.1). Наконец, если отображение f является дискретным и открытым, то f является отображением с ограниченным искажением, как только оно удовлетворяет неравенству (1.3.1) при некоторой ограниченной функции Q [115, теорема 7.1]. Отметим, что упомянутый результат работы [115] можно получить как частный случай одного из важнейших результатов данной монографии.

Практически для всех известных ныне классов отображений (конформных, квазиконформных, квазиконформных в среднем, отображений с конечным искажением, аналитических функций на плоскости и т.п.) установлены неравенства вида (1.3.1) [23–26, 42, 72, 73, 89, 122–125, 148, 154–156, 178–202, 204–206, 265–267, 287–291].

1.3.3. Если коротко охарактеризовать неравенство (1.3.1), то можно указать, что при отображении f, удовлетворяющем этому неравенству, искажение семейств кривых осуществляется контролируемым образом, где контроль задает функция Q. Однако, подобный "контроль" во многих случаях является трудным для проверки и довольно жестким условием. В действительности, для установления свойств отображения f во многих случаях достаточно ограничиться только кривыми специального вида. Мы ограничимся рассмотрением только тех семейств кривых Γ, которые соединяют концентрические сферы с центром в фиксированной точке заданной области; как показано далее, для получения ряда свойств отображений, удовлетворяющих неравенствам типа (1.3.1), таких семейств Γ вполне достаточно.

В связи с изложенным выше приведем определение, мотивированное кольцевым определением квазиконформности по Ф. Герингу [31]. Пусть $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$.

Определение 1.3.2. Отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$*, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right) \;\leq \int\limits_{A} Q(x)\cdot \eta^n(|x-x_0|)\; dm(x) \tag{1.3.2}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\; dr \;\geq\; 1\,. \tag{1.3.3}$$

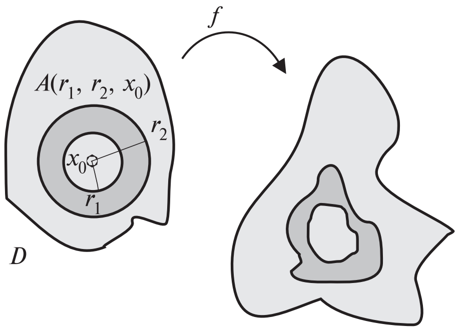

Рис. 5. Иллюстрация кольцевого Q-отображения

Слово "кольцевое" в данном определении (рис. 5) указывает на происхождение семейства кривых $\Gamma(S_1, S_2, A)$, входящих в левую часть неравенства (1.3.2), а "Q-отображение" — на заданную вещественнозначную функцию Q в правой части (1.3.2).

Определение 1.3.3. Отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *кольцевым Q-отображением в области D* (или короче — кольцевым Q-отображением), если f является кольцевым Q-отображением в каждой точке $x_0 \in D$.

1.3.4. Как мы полагаем, Q-гомеоморфизмы впервые фигурировали как объект отдельного исследования в работах [122, 123], а кольцевые Q-отображения с ветвлением впервые рассмотрены в работах [222–228]. О зарождении и развитии теории Q-отображений см. в работах [16, 42, 122–125, 183–202, 204–214, 220–258, 261].

Первые шаги изучения Q-отображений были связаны, главным образом, с изучением уравнений типа Бельтрами и случаем, когда функция Q принадлежит известному пространству BMO — классу функций с *ограниченным средним колебанием по Джону-Ниренбергу* [78, 122–125, 184–188, 198–201] и др.

Автором был доказан ряд теорем о гомеоморфных Q-отображениях [221], частично совместно с В.И. Рязановым. В частности, получены теоремы о нормальности семейств Q-гомеоморфизмов [191, 192] и [125, гл. 7], теоремы сходимости кольцевых Q-гомеоморфизмов [231] и [125, гл. 8], а также теоремы существования решений квазилинейных уравнений Бельтрами [220, 247]. Некоторые из указанных результатов приведены в данной монографии.

Замечание 1.3.1. Термин "Q-отображения" введен в рассмотрение О. Мартио, В.И. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым [123]. Определение Q-отображения в работе [123] немного отличается от введенного нами. Именно, Q-отображения согласно [123] предполагают выполнение не одного, а в точности двух неравенств, одно из которых совпадает с (1.3.1). Указанные выше авторы, насколько нам известно, исследовали исключительно гомеоморфные Q-отображения.

1.3.5. Отметим, что всякое Q-отображение является кольцевым Q-отображением в произвольной точке x_0 области D. Значительно более сложным является вопрос о справедливости обратного включения класса кольцевых Q-отображений в класс Q-отображений (см. п. 1.9.7).

Определение 1.3.4. Пусть $x_0 \in D$. Отображение $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in D$, если выполнено соотношение (1.3.2). При этом само отображение определено лишь в проколотой окрестности точки x_0.

Как показано далее, подобное определение является удобным инструментом для исследования граничного поведения различных пространственных отображений.

1.3.6. П р и м е р ы Q-отображений и кольцевых Q-отображений.

1. Произвольное конформное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является Q-отображением при $Q \equiv 1$. Действительно, если f — конформно, то $M(f(\Gamma)) = M(\Gamma)$ для любого семейства кривых Γ в области D [281, гл. I, теорема 8.1]. В частности, тождественное отображение и отображение $f(x) = \alpha \cdot x$ являются 1-отображением при любом $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Произвольное квазиконформное отображение, а также отображение с ограниченным искажением являются Q-отображением с Q, равным некоторой постоянной K (это следует из неравенства (1.2.2), см. также п. 1.3.2).

3. Произвольное невырожденное афинное преобразование квазиконформно и, следовательно, является Q-отображением с некоторым постоянным Q.

4. Каждый гомеоморфизм $f \in W^{1,n}_{loc}(D)$ такой, что $f^{-1} \in W^{1,n}_{loc}(D)$, является Q-отображением при $Q = K_I(x, f)$, где $K_I(x, f)$ — внутренняя дилатация f в точке x (см. предложение 1.1.2 и [125, теоремы 8.1 и 8.6]).

4^*. В частности, каждый гомеоморфизм $f \in W^{1,n}_{loc}$, внутренняя дилатация которого удовлетворяет условию $K_I(x, f) \in L^1_{loc}$, является Q-гомеоморфизмом при $Q = K_I(x, f)$ [125, теоремы 8.1 и 8.6], а также [123, теоремы 4.6 и 6.10] и [89, следствие 2.3].

5. Произвольное открытое дискретное отображение $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$ такое, что мера множества точек ветвления B_f отображения f равна нулю и $K_O^{n-1}(x,f) \in L_{loc}^1(D)$ ($K_O(x,f)$ — внешняя дилатация отображения f в точке x), является Q-отображением при $Q = K_O(x,f)$. Это утверждение доказано в §4.5; см. также [233, теорема 1 и следствие 3].

6. По определению каждое Q-отображение является кольцевым Q-отображением, поэтому каждое отображение из примеров 1—5 является кольцевым Q-отображением как во внутренней точке области D, так и в изолированной точке границы.

Приведем другие примеры.

7. Пусть $n \geq 3$. Покажем, что отображение $f : \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$, определенное соотношением

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \exp\left\{\frac{n-1}{n-2} \log^{\frac{n-2}{n-1}}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\},$$

является Q-отображением при $Q(x) = \log\dfrac{1}{|x|}$. Установим этот факт, используя утверждение примера 4*.

Поскольку модуль семейства кривых, проходящих через фиксированную точку, равен нулю [281, § 7.9], то достаточно установить справедливость соотношения (1.3.1) для семейств кривых Γ, лежащих в области $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Отметим, что f является гомеоморфизмом класса C^1 в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, откуда следует, что, в частности, $f \in W_{loc}^{1,n}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$. Определим касательные и радиальные растяжения в каждой точке $x_0 \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, воспользовавшись правилами вычисления (1.1.20) и (1.1.23) (см. предложение 1.1.1). Полагаем

$$\delta_\tau(x_0) := \lambda_{i_1}(x_0) = \ldots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \frac{|f(x_0)|}{|x_0|}, \tag{1.3.4}$$

$$\delta_r(x_0) := \lambda_{i_n}(x_0) = \left|\frac{\partial |f(x_0)|}{\partial |x_0|}\right|, \tag{1.3.5}$$

где, как и выше, $|x_0| = r$. Согласно соотношениям (1.3.4) и (1.3.5) получаем

$$\delta_\tau(x) = \frac{\exp\left\{\frac{n-1}{n-2}\log^{\frac{n-2}{n-1}}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}}{|x|}, \tag{1.3.6}$$

$$\delta_r(x) = \frac{\exp\left\{\frac{n-1}{n-2}\log^{\frac{n-2}{n-1}}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}\cdot\log^{\frac{1}{n-1}}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{|x|}\,, \tag{1.3.7}$$

откуда следует, что $\delta_r > \delta_\tau$. Таким образом, $\lambda_1(x) = \ldots = \lambda_{n-1}(x) = \delta_\tau(x)$ и $\lambda_n(x) = \delta_r(x)$, где δ_τ и δ_r определены соотношениями (1.3.6) и (1.3.7) соответственно. По формулам (1.1.13) и (1.1.15) получаем

$$|J(x,f)| = (\delta_\tau)^{n-1}\cdot\delta_r = \frac{\left(\exp\left\{\frac{n-1}{n-2}\log^{\frac{n-2}{n-1}}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}\right)^n\cdot\log\left(\frac{1}{|x|}\right)}{|x|^n}$$

и

$$K_I(x,f) = \frac{(\delta_\tau)^{n-1}\cdot\delta_r}{(\delta_\tau)^n} = \log\frac{1}{|x|}\,.$$

В частности, из приведенных выше соотношений вытекает, что $K_I(x,f)$ локально ограничена в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$. Следовательно, f локально квазиконформно в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ (см. определения 1.2.1 и 1.2.2, а также соотношения (1.1.16)). По утверждению примера 4^* отображение f является Q-отображением при $Q(x) = \log\frac{1}{|x|}$, что и требовалось установить.

8. Отображение $g:\mathbb{B}^n\to\overline{\mathbb{R}^n}$,

$$g(x) = \frac{x}{|x|}\log\frac{1}{|x|},$$

является Q-отображением при $Q(x) = \log^{n-1}\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

Действительно, согласно логике, приведенной выше, для отображения g получаем

$$\delta_\tau = \frac{\log\dfrac{1}{|x|}}{|x|}\,,\qquad \delta_r = \frac{1}{|x|}\,,$$

откуда вытекает, что $\delta_\tau > \delta_r$ и, следовательно,

$$K_I(x,\,g) = \frac{\delta_\tau^{n-1}\delta_r}{\delta_r^n} = \log^{n-1}\left(\frac{1}{|x|}\right)\,.$$

Снова отметим, что согласно утверждению примера 4^* g является $K_I(x,g)$-отображением, где величина $K_I(x,g)$ определена соотношением (1.1.11).

9. Справедливо следующее утверждение (см., например, [125, гл. 7, лемма 7.3] либо [191, теорема 2.1], а также [192, теорема 3.15]).

Предложение 1.3.1. *Пусть функция $Q : D \to [0, \infty]$ локально интегрируема. Гомеоморфизм $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для произвольных чисел $0 < r_1 < r_2 < \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$ выполнено соотношение*

$$M\left(f(\Gamma(S_1, S_2, A))\right) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}\,, \tag{1.3.8}$$

где, как и выше, $S_i := S(0, r_i)$, $i = 1, 2$, кольцо $A = A(r_1, r_2, x_0)$ определяется в (1.1.1), $q_{x_0}(r)$ — соотношением (1.1.25), а $I := I(x_0, r_1, r_2)$ — соотношением

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\,.$$

Используемая выше запись $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ означает, что x_0 разрешается быть как внутренней точкой, где задано отображение, так и изолированной точкой границы области определения f. Подобный факт (правда, только для внутренних точек x_0) установлен в настоящей монографии для более общих классов открытых дискретных отображений, а не только для гомеоморфизмов (см. §4.5).

Доказательство предложения 1.3.1. *Необходимость.* Пусть f — кольцевой Q-гомеоморфизм в точке x_0. Покажем, что в таком случае справедливо соотношение (1.3.8).

Не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $I \neq 0$, так как в противном случае соотношение (1.3.8) выполнено. Можно также считать, что $I \neq \infty$, так как в противном случае в соотношении (1.3.8) можно рассмотреть $Q(x) + \delta$ вместо $Q(x)$ (со сколь угодно малым δ) вместо $Q(x)$, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$.

Пусть $I \neq \infty$. Тогда $q_{x_0}(r) \neq 0$ п.в. на (r_1, r_2). Полагаем

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)]\,, & t \in (r_1, r_2)\,, \\ 0\,, & t \notin (r_1, r_2)\,. \end{cases}$$

Тогда ввиду теоремы Фубини

$$\int\limits_{A} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) =$$

$$= \int\limits_{r_1}^{r_2} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x) \cdot \psi^n(|x-x_0|)\, d\mathcal{A}\, dr = \omega_{n-1} I\,. \qquad (1.3.9)$$

Отметим, что функция $\eta(t) = \psi(t)/I$ удовлетворяет соотношению (1.3.3), так что по определению кольцевого Q-гомеоморфизма в точке x_0 согласно соотношению (1.3.9) получаем неравенство (1.3.8).

Достаточность немедленно следует из предложения 1.1.3. □

Воспользовавшись утверждением предложения 1.3.1, рассмотрим следующий пример кольцевого Q-отображения.

Пусть $Q : \mathbb{B}^n \to [0, \infty)$, $Q \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$, $\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty$ при каждом $r \in (0,1)$ и $\int\limits_0^1 \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty$. Тогда отображение $h : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$,

$$h(x) = \frac{x}{|x|} \exp\left\{-\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\},$$

$h(0) := 0$, является кольцевым Q-отображением в точке $x_0 = 0$.

Действительно, обозначим $\varphi_n(s) = \exp\left\{-\int\limits_s^1 \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}$, $t \in (0,1)$. Отметим, что функция $\varphi_n(t)$ возрастает по t и отображение h является гомеоморфизмом. Кроме того, поскольку по условию $\int\limits_0^1 \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty$, отображение h может быть продолжено в точку $x_0 = 0$ по непрерывности, при этом $h(0) = 0$. Рассмотрим при $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ и $0 < r_1 < r_2 < 1$ множества вида $E_i = S(0, r_i)$, $i = 1, 2$. Пусть далее $S_i := S(0, r_i)$, $i = 1, 2$. Отметим, что

$$h(E_i) = S(0, \varphi_n(r_i))\,, \qquad i = 1, 2\,,$$

и модуль семейства кривых, соединяющих $S(0, \varphi_n(r_2))$ и $S(0, \varphi_n(r_2))$ внутри образа кольца $h(A)$, где $A = A(r_1, r_2, 0)$, может быть вычислен в явном виде [281, § 7.5], а именно,

$$M\left(h(\Gamma(S_1, S_2, A)\right) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\log \frac{\varphi_n(r_2)}{\varphi_n(r_1)}\right)^{n-1}}\,. \qquad (1.3.10)$$

Из (1.3.10) получаем: $M\left(h(\Gamma(S_1, S_2, A)\right) = \omega_{n-1}/I^{n-1}$, где $I := \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}$.
По предложению 1.3.1 отображение h является кольцевым Q-отображением в точке $x_0 = 0$.

В следующих параграфах более подробно рассмотрены свойства Q-отображений и кольцевых Q-отображений.

1.4. Дифференцируемость кольцевых Q-отображений почти всюду

1.4.1. Понятие дифференцируемости отображения в точке приведено в п. 1.1.4 (см. определение 1.1.10). Как известно, далеко не все вещественнозначные (а тем более — пространственные) отображения обладают таким замечательным свойством, как дифференцируемость. Разумеется, конформные отображения дифференцируемы, поскольку по определению они принадлежат к классу C^1.

Иначе обстоит дело с квазиконформными отображениями. Как показывает пример квазиконформного отображения $f(0) = 0$, $f(x) = x|x|^{\alpha-1}$ при $x \neq 0$, $\alpha \in (0,1)$, не дифференцируемого в точке $x_0 = 0$, квазиконформные отображения могут быть не дифференцируемыми в отдельных точках. (То, что f квазиконформно, можно доказать, например, используя вычисление его внешней дилатации, показав, что эта дилатация ограничена, см. предложение 1.1.1 и определение 1.2.2). Однако, отображения с ограниченным искажением дифференцируемы почти всюду [168, гл. II, § 1.3, теорема 1.2]. В частности, это относится и к квазиконформным отображениям. Более того, согласно известным результатам Ю. Решетняка открытые отображения класса $W_{loc}^{1,n}$ дифференцируемы почти всюду [165, с. 331, теорема 4], а согласно Ю. Вяйсяля открытые отображения $f \in W_{loc}^{1,p}$ при $p > n-1$ также дифференцируемы почти всюду [279, лемма 3].

В этом параграфе доказано, что открытые дискретные кольцевые Q-отображения почти всюду дифференцируемы, как только функция Q есть просто локально интегрируема.

1.4.2. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.4.1. *(О дифференцируемости почти всюду). Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение с $Q \in L_{loc}^1$. Тогда f дифференцируемо почти всюду в D.*

1.4.3. Для доказательства теоремы 1.4.1 нам понадобится довольно большое количество вспомогательных сведений, которые приведены ниже. В первую очередь, приведем определения конденсатора и емкости конденсатора [115, § 5]; [175, гл. II, § 10].

Определение 1.4.1. *Конденсатором* называется пара $E = (A,\, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A.

Определение 1.4.2. *емкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}\,(A,\, C) = \inf_{u\in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u(x)|^n\; dm(x)\,, \tag{1.4.1}$$

где $W_0(E) = W_0\,(A,\, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A, таких что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$.

В формуле (1.4.1), как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\,(\partial_i u)^2\right)^{1/2}$.

Весьма полезным для исследования является следующее замечание [115, лемма 5.5, замечание 2.2].

Замечание 1.4.1. Точную нижнюю грань в (1.4.1) можно брать только лишь по функциям $u \in W_0^{\infty}(E) := W_0(E) \cap C^{\infty}(A)$. Более того, условие $u(x) \geq 1$ на множестве C можно заменить на требование: $u(x) = 1$ в некоторой окрестности множества C.

1.4.4. Известно, что для произвольного конденсатора $E = (A, C)$ выполнено условие

$$(\operatorname{cap}\, E)^{n-1} \;\geq\; b_n\, \frac{(d(C))^n}{m(A)}\;, \tag{1.4.2}$$

где b_n — положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства n [115, лемма 5.9].

1.4.5. Следующее утверждение имеет важное значение для доказательства многих результатов, приведенных в данной монографии [175, гл. II, предложение 10.2].

Предложение 1.4.1. *Пусть $E = (A,\, C)$ — произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma : [a,\, b) \to A$ таких, что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда*

$$\operatorname{cap} E = M(\Gamma_E)\,. \tag{1.4.3}$$

Отметим, что заключение предложения 1.4.1 остается справедливым для конденсаторов из $\overline{\mathbb{R}^n}$, [175, гл. II, замечание 10.8]. Иначе, для конденсатора $E=(A,C)$ семейство Γ_E состоит из тех и только тех кривых, которые имеют начало в C, лежат в A и в то же время целиком не лежат ни в одном фиксированном компакте внутри A. В случае ограниченного множества A такие кривые обязаны "подходить" к границе A, однако не обязаны быть спрямляемыми и, вообще говоря, к чему-то стремиться (рис. 6).

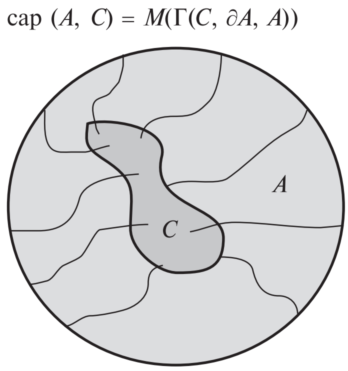

Рис. 6. Связь между модулем семейства кривых и емкостью конденсатора

1.4.6. Аналогично можно изложить определение конденсатора в $\overline{\mathbb{R}^n}$, а именно, $E=(A,C)$ — конденсатор в $\overline{\mathbb{R}^n}$, если C — компактное собственное подмножество открытого множества $A\subset\overline{\mathbb{R}^n}$. Емкость конденсатора E в этом случае определяется по соотношению (1.4.3).

1.4.7. При исследовании открытых дискретных отображений с ветвлением (отображений, не являющихся гомеоморфизмами) ключевую роль играют так называемые поднятия кривых. Следующие определение см. в [175, гл. II, п. 3].

Определение 1.4.3. Пусть $f:D\rightarrow\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, — отображение, $\beta:[a,\,b)\rightarrow\mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x\in\ f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Кривая $\alpha:[a,\,c)\rightarrow D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если (1) $\alpha(a)=x$; (2) $f\circ\alpha=\beta|_{[a,\,c)}$; (3) если $c<c'\leq b$, то не существует кривой $\alpha':[a,\,c')\rightarrow D$ такой, что $\alpha=\alpha'|_{[a,\,c)}$ и $f\circ\alpha=\beta|_{[a,\,c')}$.

Аналогично может быть определено максимальное поднятие с концом в данной точке.

Имеет место следующее утверждение, [175, гл. II, теорема 3.2 либо следствие 3.3].

Предложение 1.4.2. *Пусть f — открытое дискретное отображение и точка $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая $\beta : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x.*

Аналогично, если f — открытое дискретное отображение и точка $x \in f^{-1}(\beta(b))$, то кривая $\beta : (a, b] \to \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с концом в точке x.

1.4.8. Нам также необходимо определение квазиаддитивной функции множеств.

Определение 1.4.4. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\operatorname{Bor} U$ класс всех борелевских подмножеств U. Функция $\varphi : \operatorname{Bor} U \to \mathbb{R}$ называется *q-квазиаддитивной*, $q \geq 1$, если выполняются следующе условия:

1) $\varphi(A) \geq 0$ для произвольного борелевского множества $A \subset U$;

2) из условия $A \subset B$ вытекает неравенство $\varphi(A) \leq \varphi(B)$, какие бы ни были борелевские множества $A, B \subset \operatorname{Bor} U$;

3) $\varphi(A) < \infty$ для произвольного компактного множества $A \subset U$;

4) если множества $A_1, \ldots, A_m \subset U$ не пересекаются и $A_i \subset A \subset U$, $i = 1, \ldots, m$, то

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(A_i) \leq q \cdot \varphi(A)\,. \tag{1.4.4}$$

Определение 1.4.5. Верхнюю и нижнюю производные q-квазиаддитивной функции φ в точке $x \in U$ определяют следующим образом:

$$\overline{\varphi'}(x) = \lim_{h \to 0} \sup_{d(Q) < h} \frac{\varphi(Q)}{m(Q)}\,, \quad \underline{\varphi'}(x) = \lim_{h \to 0} \inf_{d(Q) < h} \frac{\varphi(Q)}{m(Q)}\,,$$

где Q пробегает все открытые кубы и шары такие, что $x \in Q \subset U$.

Следующее утверждение см. в [115, лемма 2.3].

Предложение 1.4.3. *Предположим, что функция $\varphi : \operatorname{Bor} U \to \mathbb{R}$ является q-квазиаддитивной функцией множеств. Тогда: 1) функции $\overline{\varphi'}$ и $\underline{\varphi'}$ являются борелевскими, 2) для почти всех $x \in U$ имеет место неравенство $\overline{\varphi'}(x) \leq q \cdot \underline{\varphi'}(x) < \infty$, 3) для каждого открытого множества $V \subset U$, $\int\limits_V \underline{\varphi'}(x) dm(x) \leq q \cdot \varphi(V)$.*

1.4.9. Введем в рассмотрение следующую вспомогательную конструкцию. Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств B в D по следующему правилу:

$$\Phi(B) = m\left(f(B)\right)\,.$$

Поскольку f — непрерывное и дискретное отображение, множество $f(B)$ является борелевским для каждого борелевского множества $B \subset D$, [103, гл. 3, § 39, п. VII, следствие 5]; следовательно, приведенное выше определение величины $\Phi(B)$ корректно. Отметим, что функция $\Phi(B)$ является q-квазиаддитивной функцией множеств B в V при $q := N(f, V)$, где V — фиксированное открытое подмножество D, а N — функция кратности, см. соотношения (1.1.2), (1.1.3). В частности, покажем, что выполнено условие 4) (соотношение (1.4.4) определения 1.4.4. Отметим, для борелевских множеств $A_i \subset \operatorname{Bor} V$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $A_i \subset A \subset V$, $i = 1, \ldots, k$, полагая $\psi(A) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} N(y, f, A)\, dm(y)$, где функция кратности $N(y, f, A)$ определена соотношением (1.1.2), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(A_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \psi(A_i) = \psi(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \leq$$

$$\leq \psi(A) \leq N(f, A) \cdot \Phi(A) \leq N(f, V) \cdot \Phi(A)\,.$$

Тогда согласно п. 2) предложения 1.4.3 для почти всех $x \in D$ имеем

$$\varphi(x) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi(B(x, \varepsilon))}{\Omega_n \varepsilon^n} < \infty\,, \tag{1.4.5}$$

где $B(x, \varepsilon)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x \in D$ радиуса $\varepsilon > 0$. При x и $y \in D$ полагаем

$$L(x, f) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}\ .$$

Если x — точка дифференцируемости отображения f, то очевидно, что

$$L(x, f) = \|f'(x)\|\,, \tag{1.4.6}$$

где норма производной $\|f'(x)\|$ определена в (1.1.9).

Таким образом, по теореме Радемахера—Степанова [28, гл. 3, п. 3.1.9] доказательство теоремы 1.4.1 сводится к доказательству следующей леммы.

Лемма 1.4.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда п.в.*

$$L(x, f)\ \leq\ \gamma_n\ \varphi^{\frac{1}{n}}(x)\ Q^{\frac{n-1}{n}}(x)\,, \tag{1.4.7}$$

где функция φ определена соотношением (1.4.5), а γ_n — некоторая константа, зависящая только от n.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. Рассмотрим сферическое кольцо $R_\varepsilon(x) = \{y : \varepsilon < |x - y| < 2\varepsilon\}$, $x \in D$, с произвольным $\varepsilon > 0$ таким, что $B(x, 2\varepsilon) \subset D$. Тогда $E = \left(B\left(x, 2\varepsilon\right), \overline{B\left(x, \varepsilon\right)}\right)$ — конденсатор в D, а

$$f(E) = \left(f\left(B\left(x, 2\varepsilon\right)\right), f\left(\overline{B\left(x, \varepsilon\right)}\right)\right)$$

— конденсатор в D'. Пусть Γ_E и $\Gamma_{f(E)}$ — семейства кривых в смысле обозначений предложения 1.4.1. По этому предложению

$$\mathrm{cap}\,\left(f\left(B(x, 2\varepsilon)\right), f\left(\overline{B(x, \varepsilon)}\right)\right) = M\left(\Gamma_{f(E)}\right). \qquad (1.4.8)$$

Пусть $x_0 \in \overline{B\left(x, \varepsilon\right)}$ — фиксированная точка, тогда по предложению 1.4.2 каждая кривая $\gamma' \in \Gamma_{f(E)}$ имеет максимальное поднятие с началом в точке x_0. Пусть Γ^* — семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E)}$ с началом в $\overline{B\left(x, \varepsilon\right)}$. Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Предположим противное, т.е. что существует кривая $\beta : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ семейства $\Gamma_{f(E)}$, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha : [a, c) \to B(x, 2\varepsilon)$ лежит в некотором компакте K внутри $B(x, 2\varepsilon)$. Следовательно, его замыкание $\overline{\alpha}$ — компакт в $B(x, 2\varepsilon)$. Отметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ — компакт в $f\left(B(x, 2\varepsilon)\right)$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{f(E)}$. Рассмотрим предельное множество G кривой α при $t_k \to c$:

$$G = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k \to \infty} \alpha(t_k)\right\}, \quad t_k \in [a, c), \quad \lim_{k \to \infty} t_k = c.$$

Переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in G$ в силу непрерывности f имеем $f\left(\alpha(t_k)\right) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $t_k \in [a, c)$, $t_k \to c$ при $k \to \infty$. Однако, $f\left(\alpha(t_k)\right) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $B(x, 2\varepsilon)$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$, [296, гл. I, § 3.6]

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha\left([t_k, c)\right)} = \limsup_{k\to\infty} \alpha\left([t_k, c)\right) = \liminf_{k\to\infty} \alpha\left([t_k, c)\right) \neq \varnothing$$

в виду монотонности последовательности связных множеств $\alpha\left([t_k, c)\right)$ и, таким образом, G является связным согласно [296, гл. I, § 9.12]. Следовательно, в силу дискретности f, G не может состоять более чем из одной точки, и кривая $\alpha : [a,\, c) \to B(x, 2\varepsilon)$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha : [a,\, c] \to K \subset B(x, 2\varepsilon)$, причем $f\left(\alpha(c)\right) = \beta(c)$. Снова по предложению 1.4.2 можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c,\,b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, $c' \in (c,\, b)$, что противоречит максимальности поднятия α. Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Отметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$, и, следовательно, ввиду свойств (1.1.5) и (1.1.7)

$$M\left(\Gamma_{f(E)}\right) \le M\left(f(\Gamma^*)\right) \le M\left(f(\Gamma_E)\right)\,.$$

Рассмотрим произвольную последовательность чисел $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varepsilon < r_i < 2\varepsilon$, такую, что $r_i \to 2\varepsilon - 0$. Обозначим через Γ_i семейство кривых, соединяющих сферы $|x-y| = \varepsilon$ и $|x-y| = r_i$ в кольце $\varepsilon < |x-y| < r_i$. В таком случае для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Gamma_E > \Gamma_i\,. \tag{1.4.9}$$

Рассмотрим параметрическое семейство вещественнозначных функций

$$\eta_{i,\varepsilon}(t) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{r_i - \varepsilon}, & t \in (\varepsilon, r_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, r_i)\,. \end{cases}$$

По определению кольцевого Q-отображения и в силу (1.4.9)

$$M(f(\Gamma_E)) \le M(f(\Gamma_i)) \le$$

$$\le \frac{1}{(r_i-\varepsilon)^n} \int\limits_{\varepsilon<|x-y|<r_i} Q(y)\, dm(y) \le \frac{1}{(r_i-\varepsilon)^n} \int\limits_{B(x,2\varepsilon)} Q(y)\, dm(y)\,. \tag{1.4.10}$$

Переходим в правой части (1.4.10) к пределу при $i \to \infty$. Получаем

$$M(f(\Gamma_E)) \le \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{B(x,2\varepsilon)} Q(y)\, dm(y)\,. \tag{1.4.11}$$

Из (1.4.8) и (1.4.11) находим

$$\mathrm{cap}\ \left(f\left(B(x,2\varepsilon)\right), f\left(\overline{B(x,\varepsilon)}\right)\right) \le \frac{2^n \Omega_n}{m(B(x,2\varepsilon))} \int\limits_{B(x,2\varepsilon)} Q(y)\, dm(y)\,. \tag{1.4.12}$$

С другой стороны, по соотношению (1.4.2) получаем

$$\text{cap}\ \left(f\left(B(x,2\varepsilon)\right), f\left(\overline{B(x,\varepsilon)}\right)\right) \geq \left(C_n \frac{d^n\left(f\left(B(x,\varepsilon)\right)\right)}{m(f\left(B(x,2\varepsilon)\right))}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (1.4.13)$$

где C_n — константа, зависящая только от размерности пространства n.

Комбинируя (1.4.12) и (1.4.13), имеем

$$\frac{d\left(f\left(B(x,\varepsilon)\right)\right)}{\varepsilon} \leq$$

$$\leq \gamma_n \left(\frac{m(f\left(B(x,2\varepsilon)\right))}{m(B(x,2\varepsilon))}\right)^{1/n} \left(\frac{1}{m(B(x,2\varepsilon))} \int\limits_{B(x,2\varepsilon)} Q(y)\, dm(y)\right)^{(n-1)/n},$$

где γ_n — некоторая постоянная, и, следовательно, при п.в. $x \in D$,

$$L(x,f) \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{d\left(f\left(B(x,\varepsilon)\right)\right)}{\varepsilon} \leq \gamma_n\, \varphi^{1/n}(x)\ Q^{(n-1)/n}(x)\,.\Box$$

1.5. Основные следствия из оценки сверху для $L(x,f)$

1.5.1. В этом параграфе приведены важные результаты, имеющие отношение к свойству дифференцируемости кольцевых Q-отображений, в основном из леммы 1.4.1, где сформулирована и доказана оценка сверху величины $L(x,f)$ (см. неравенство (1.4.7)).

Прежде всего, докажем, что для открытых дискретных кольцевых Q-отображений f с локально интегрируемой функцией Q частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ отображения f в точке x, $f = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, являются локально интегрируемыми. Имеет место следующее утверждение.

Следствие 1.5.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение, где $Q \in L^1_{loc}$. Тогда f имеет локально суммируемые частные производные в области D.*

Доказательство. Прежде всего, укажем, что в каждой точке $x \in$ $\in D$ дифференцируемости отображения f имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right|^n \leq \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)^2\right]^{n/2} \leq n^{n/2} \cdot \|f'(x)\|^n, \qquad (1.5.1)$$

что можно установить прямыми вычислениями, используя определение величины $\|f'(x)\|$ в (1.1.9). С учетом (1.5.1) достаточно показать, что $\|f'(x)\| \in L^1_{loc}(D)$. В свою очередь, с учетом равенства (1.4.6) для установления справедливости утверждения следствия 1.5.1 достаточно показать, что $L(x,f) \in L^1_{loc}(D)$.

Для области $V \subset D$ такой, что $\overline{V} \subset D$, из (1.4.7) получаем

$$\int\limits_V L(x,f)\ dm(x) \le \gamma_n \int\limits_V \varphi^{1/n}(x)\, Q^{(n-1)/n}(x)\ dm(x) \tag{1.5.2}$$

и, применяя по отношению к правой части (1.5.2) неравенство Гельдера при $p=n$ и $q=n/(n-1)$ [28, п. 2.4.14], находим

$$\int\limits_V \varphi^{1/n}(x)\, Q^{(n-1)/n}(x)\ dm(x) \le$$

$$\le \left(\int\limits_V \varphi(x)\ dm(x)\right)^{1/n} \left(\int\limits_V Q(x)\ dm(x)\right)^{(n-1)/n} . \tag{1.5.3}$$

Как отмечено выше, функция $\Phi(B) = m(f(B))$, $\Phi : \operatorname{Bor} V \to \mathbb{R}$, является q-квазиаддитивной функцией множеств B в V при $q := N(f,V)$, где N — функция кратности (см. п. 1.4.9 и соотношения (1.1.2), (1.1.3), где определена функция кратности N). Тогда согласно п. 2) и 3) предложения 1.4.3 и определению функции $\varphi(x)$ при почти всех $x \in V$ получаем

$$\varphi(x) \le \overline{\Phi'}(x) \le N(f,V) \cdot \underline{\Phi'}(x)$$

и

$$\int\limits_V \varphi(x) dm(x) \le N(f,V) \int\limits_V \underline{\Phi'}(x) dm(x) \le \tag{1.5.4}$$

$$\le (N(f,V))^2 \cdot \Phi(V) = (N(f,V))^2 \cdot m\left(f(V)\right) .$$

Учитывая, что $Q \in L^1_{loc}$, из соотношений (1.5.2)—(1.5.4) вытекает

$$\int\limits_V L(x,f)\ dm(x) \le$$

$$\le \gamma_n\ N(f,V)^{2/n} \left(\int\limits_V Q(x)\ dm(x)\right)^{(n-1)/n} \cdot \left(m\left(f(V)\right)\right)^{1/n} < \infty ,$$

где функция кратности $N(f,V)$ определена в (1.1.2), (1.1.3). Следствие 1.5.1 доказано. $\Box$

1.5.2. Как отмечено ранее, свойства отображений в значительной мере зависят, прежде всего, от свойств внутренних и внешних дилатаций K_I и K_O (см. соотношения (1.1.11) и (1.1.12)). Например, если хотя бы одна из величин K_I или K_O ограничена, а отображение f принадлежит классу $W_{loc}^{1,n}$, при этом якобиан $J(x,f)$ сохраняет знак почти всюду, то f (по определению) является отображением с ограниченным искажением. Далее, если гомеоморфизм $f \in W_{loc}^{1,n}$ и его внутренняя дилатация удовлетворяют условию $K_I(x,f) \in L_{loc}^1$, то $f^{-1} \in W_{loc}^{1,n}$ [89, следствие 2.3]. Исходя из приведенного выше, целесообразно иметь те оценки или равенства, из которых можно получить свойства дилатаций K_I или K_O.

Далее рассмотрены только внешние дилатации отображения. При помощи утверждения, которое приведено ниже, можно указать связь между внешней дилатацией отображения и определяющей его функцией Q. Более того, отсюда (при условии $J(x,f) \neq 0$ почти всюду) вытекает оценка сверху внешней дилатации отображения.

1.5.3. Перед тем, как сформулировать основной результат, касающийся указанной выше оценки, приведем еще одно вспомогательное утверждение.

Предложение 1.5.1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное отображение, являющееся почти всюду дифференцируемым в D. Пусть*

$$\varphi(x) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi(B(x,\varepsilon))}{\Omega_n \varepsilon^n}\,. \tag{1.5.5}$$

Тогда при почти всех $x_0 \in D$ имеет место равенство

$$\varphi(x_0) = |J(x_0,f)|\,, \tag{1.5.6}$$

где $\varphi(x)$ определяется соотношением (1.5.5). Более того, функция Φ является обобщенно дифференцируемой, т.е. для почти всех $x \in D$ существует конечный предел в левой части соотношения (1.5.5) с равенством в (1.5.6) при почти всех $x_0 \in D$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\infty \notin f(D)$. По условию предложения 1.5.1 достаточно доказать равенство (1.5.6) в точках x_0 множества $E \subset D$ дифференцируемости отображения f. Поскольку якобиан отрытого дискретного отображения почти всюду сохраняет знак (см. комментарии после теоремы 4.6 в [175, гл. I,

§ 4] и [153, § V.2, с. 332, равенство (68)]), без ограничения общности можно считать, что $J(x,f) \geq 0$ почти всюду [115, лемма 2.14]. Отметим, что $E = E_1 \cup E_2$, где E_1 — множество точек $x_0 \in E$ таких, что $J(x_0,f) > 0$, и E_2 — точек $x_0 \in E$ таких, что $J(x_0,f) = 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда $x_0 \in E_1$. В каждой такой точке $x_0 \in E_1$ отображение f является локальным гомеоморфизмом [115, лемма 2.14]. Следовательно, найдется окрестность U точки x_0 такая, что $f|_U$ является гомеоморфизмом. Согласно предложению 1.1.4 при почти всех $x \in E_1$ существует предел

$$\varphi(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi(B(x,\varepsilon))}{\Omega_n \varepsilon^n}\,. \tag{1.5.7}$$

Пусть $E_3 \subset E_1$ — множество всех точек E_1, для которых имеет место соотношение (1.5.7). Покажем теперь, что для всех $x_0 \in E_3$

$$J(x_0,f) \leq \varphi(x_0)\,. \tag{1.5.8}$$

Согласно [203, гл. IV, §5, теорема 5.4] для всех $x_0 \in E_3$

$$\varphi(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{m\left(f(C(x_0,h))\right)}{m(C(x_0,h))}\,, \tag{1.5.9}$$

где $C(x_0,h)$ означает открытый куб с центром в точке $x_0 \in E_3 \subset D$ и длиной ребра h. В дальнейшем без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ и что замкнутый куб $\overline{C(0,h)}$ при всех (достаточно малых) h лежит в U.

Поскольку по условию $x_0 = 0$ — точка дифференцируемости отображения f, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что при всех $x \in \overline{C(0,h)}$ и $h \in (0,\delta)$

$$|f(x) - f'(0)x| < \delta\varepsilon\,. \tag{1.5.10}$$

Пусть $e_1,\ldots,e_n$, $\widetilde{e_1},\ldots,\widetilde{e_n}$ и $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — соответственно главные векторы и главные значения отображения $f'(0)$, $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \ldots \geq \lambda_1 > 0$, т.е. $f'(0)e_i = \lambda_i \widetilde{e_i}$ (см. п. 1.1.7), причем $\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2$ являются собственными числами симметрического отображения $(f'(0))^* f'(0)$ и

$$J(0,f) = \lambda_1 \ldots \lambda_n \tag{1.5.11}$$

(см. соотношения в (1.1.13)). Множество $f'\left(C(0,h)\right)$ представляет собой прямоугольный параллелепипед $\prod_1$ с центром в точке $0 = f(0)$ и осями, параллельными векторам $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$, и длиной ребер $\lambda_i h$, $i = 1, \ldots, n$. Отметим, что в силу (1.5.11) имеет место равенство $m\left(f'(0)\left(C(0,h)\right)\right) = = h^n \cdot \lambda_1 \ldots \lambda_n = h^n \cdot J(0,f)$. Пусть $\varepsilon < \dfrac{1}{2} \min\left\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right\}$.

Учитывая приведенное выше, из неравенства (1.5.10) следует, что множество $f(C(0,h))$ содержит открытый n-мерный прямоугольный параллелепипед $\prod_2$ с центром в точке $y_0 = 0$, осями, параллельными векторам $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$, и длиной ребер $(\lambda_i - 2\varepsilon)h$, $i = 1, \ldots, n$. Докажем это. Пусть $\prod_2 \not\subset f(C(0,h))$. Поскольку $0 \in \prod_2 \cap f(C(0,h))$, то согласно [104, гл. 5, § 46, п. 1, теорема 1] найдется элемент $y_0 \in \prod_2 \cap \partial f(C(0,h))$, т.е.

$$\operatorname{dist}\left(y_0, \partial f(C(0,h))\right) = 0\,. \tag{1.5.12}$$

С другой стороны, в силу неравенства треугольника для произвольных $z \in \partial \prod_1$ и $y \in \partial f(C(0,h))$ имеем

$$|y_0 - z| \le |y_0 - y| + |y - z|\,.$$

Ввиду открытости отображения f и условия $y \in \partial f(C(0,h))$ вытекает, что найдется $x \in \partial C(0,h)$ такой, что $f(x) = y$. Полагаем $z := f'(0)x \in \in \partial \prod_1$. Тогда на основании (1.5.10) с учетом $y_0 \in \prod_2$ получаем

$$|y_0 - y| \ge |y_0 - z| - h\varepsilon \ge c > 0$$

и, следовательно, переходя к inf по всем $y \in \partial f(C(0,h))$, имеем

$$\operatorname{dist}\left(y_0, \partial f(C(0,h))\right) > 0\,. \tag{1.5.13}$$

Соотношения (1.5.12) и (1.5.13) противоречат друг другу, так что $\prod_2 \subset \subset f(C(0,h))$. Следовательно,

$$m\left(f\left(C(0,h)\right)\right) \ge h^n \cdot (\lambda_1 - 2\varepsilon) \ldots (\lambda_n - 2\varepsilon)\,. \tag{1.5.14}$$

Разделив левую и правую части неравенства (1.5.14) на h^n, устремляя h к нулю, а затем ε к нулю и учитывая соотношения (1.5.9) и (1.5.11), получаем неравенство (1.5.8) при $x_0 = 0$.

Теперь покажем, что в (1.5.8) имеет место равенство. D силу все тех же соображений множество $f(C(0,h))$ содержится в открытом n-мерном прямоугольном параллелепипеде $\prod_3$ с центром в точке $y_0 = 0$, осями, параллельными векторам $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$, и длиной ребер $(\lambda_i + 2\varepsilon)h$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда получаем

$$m\left(f\left(C(0,h)\right)\right) \le h^n \cdot (\lambda_1 + 2\varepsilon) \ldots (\lambda_n + 2\varepsilon)\,. \tag{1.5.15}$$

Разделив левую и правую части неравенства (1.5.15) на h^n, устремляя h к нулю, а затем ε к нулю и учитывая соотношения (1.5.9) и (1.5.11), получаем равенство в (1.5.8) при $x_0 = 0$, а следовательно, и соотношение (1.5.6) при всех $x_0 \in E_3$. Соотношение (1.5.6) при почти всех $x_0 \in E_1$ доказано.

Осталось доказать это же соотношение при почти всех $x_0 \in E_2$. Рассуждая точно так, как и выше, получаем, что в произвольной точке $x_0 \in E_2$ множество $f(C(x_0, h))$ содержится в открытом n-мерном прямоугольном параллелепипеде $\prod_4$ с центром в точке $y_0 = f(x_0)$ и осями, параллельными векторам $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$, и длиной ребер $(\lambda_i + 2\varepsilon)h$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь, по крайней мере, одно из λ_{i_0} равно нулю ввиду соотношения $J(x_0, f) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$, $1 \le i_0 \le n$. Имеем

$$m\left(f\left(C(x_0, h)\right)\right) \le h^n \cdot (\lambda_1 + 2\varepsilon) \ldots (\lambda_n + 2\varepsilon)\,. \qquad (1.5.16)$$

Снова разделив левую и правую части неравенства (1.5.16) на h^n, устремляя h к нулю, а затем ε к нулю и учитывая соотношение (1.5.11), получаем неравенство $\widetilde{\varphi}(x_0) \le J(x_0, f) = 0$, где

$$\widetilde{\varphi}(x_0) := \limsup_{h \to 0} \frac{m\left(f(C(x_0, h))\right)}{m(C(x_0, h))}\,. \qquad (1.5.17)$$

Пусть $B(x_0, r_k)$ — произвольная последовательность шаров, тогда $B(x_0, r_k) \subset C(x_0, 2r_k)$. В таком случае

$$\frac{m(f(B(x_0, r_k)))}{m(B(x_0, r_k))} \le 2^n \frac{m(f(C(x_0, R_k)))}{\Omega_n m(C(x_0, R_k))}\,,$$

где $R_k := 2r_k$, откуда из (1.5.17) вытекает, что $\dfrac{m(f(B(x_0, r_k)))}{m(B(x_0, r_k))} \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда получаем, что $\varphi(x_0) = 0$. Следовательно, равенство (1.5.6) доказано во всех точках $x_0 \in E_2$. Кроме того, $\varphi(x_0) = 0$ во всех точках, где $J(x_0, f) = 0$, откуда вытекает, что $\limsup$ можно заменить на $\lim$ в (1.5.5), по крайней мере, в точках x_0 множества E_2.

Наконец, при почти всех $x_0 \in E = E_1 \cup E_2$ имеет место соотношение (1.5.6), и, кроме того, $\limsup$ можно заменить на $\lim$ в (1.5.5) для почти всех точек $x_0 \in E$. Приведенное выше справедливо также при почти всех $x_0 \in D$ ввиду условия предложения 1.5.1 и по определению множества E, что и требовалось доказать. $\Box$

1.5.4. Справедливо следующее утверждение.

Следствие 1.5.2. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда п.в.*

$$\|f'(x)\|^n \ \leq \ C_n \cdot |J(x,f)| \ Q^{n-1}(x)\,, \tag{1.5.18}$$

где постоянная C_n зависит только от n.

Доказательство. Согласно теореме 1.4.1 отображение f дифференцируемо почти всюду. Тогда необходимое заключение вытекает из леммы 1.4.1 (неравенство (1.4.7)) и предложения 1.5.1 (соотношение (1.5.6)). $\Box$

1.5.5. Разделив обе части (1.5.18) на $J(x,f) \neq 0$ (при дополнительном условии, что $J(x,f) \neq 0$ почти всюду), получим следующее заключение.

Следствие 1.5.3. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение, $Q \in L^1_{loc}$ такое, что $J(x,f) \neq 0$ почти всюду. Тогда*

$$K_O(x,f) \leq C_n Q^{n-1}(x)\,, \tag{1.5.19}$$

где C_n — абсолютна постоянная, зависящая только от размерности пространства n.

1.5.6. Приведем еще одно интересное, на наш взгляд, утверждение.

Следствие 1.5.4. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение такое, что $f \in W^{1,1}_{loc}$, $J(x,f) \neq 0$ почти всюду и $Q \leq C = const$. Тогда f является отображением с ограниченным искажением.*

Доказательство. Проверим то, что f удовлетворяет условиям 1)—3) определения 1.2.1. Действительно, поскольку f — дискретное отображение, его якобиан локально интегрируем [28, теорема 3.2.5], так что из соотношения (1.5.18) и условия $Q \leq C$ вытекает, что $\|f'(x)\|^n \in \in L^1_{loc}$. В таком случае из соотношения (1.5.1) вытекает также, что $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right|^n \in L^1_{loc}$. Следовательно, $f \in W^{1,n}_{loc}$.

Далее, как известно, якобиан открытого дискретного отображения почти всюду сохраняет знак (см. комментарии после теоремы 4.6 в [175, гл. I, § 4] и [153, § V.2, с. 332, равенство (68)]).

Наконец, свойство 3) определения 1.2.1 также выполнено ввиду соотношения (1.5.18) и условия $Q \leq C$. $\Box$

1.6. Абсолютная непрерывность Q-отображений на линиях. Связь с классами Соболева

1.6.1. До сих пор мы рассматривали дифференциальные свойства кольцевых Q-отображений, не затрагивая вопросы, связанные с существованием обобщенных производных. В настоящем параграфе показано, что открытые дискретные Q-отображения (т.е. удовлетворяющие более сильному, чем (1.3.2), условию (1.3.1)) принадлежат классу ACL, как только функция Q есть локально интегрируема. Утверждение подобного рода позволит указать на связь Q-отображений с классами Соболева на основании предложения 1.1.2, а также доказать другие свойства Q-отображений. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.6.1. *(Абсолютная непрерывность Q-отображений на линиях). Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение, т.е. f удовлетворяет (1.3.1) для произвольной функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, причем $Q \in L^1_{loc}$. Тогда $f \in ACL$.*

Доказательство. Без ограничения общности, можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. Пусть I — n-мерный интервал в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными осям координат, и $\overline{I} \subset D$. Тогда $I = I_0 \times J$, где I_0 — $(n-1)$-мерный интервал в $\mathbb{R}^{n-1}$, J — одномерный интервал, $J = (a, b)$. Далее отождествляем $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ с $\mathbb{R}^n$. Покажем, что для почти всех сегментов $J_z = \{z\} \times J\,, z \in I_0$, отображение $f|_{J_z}$ абсолютно непрерывно.

Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств B в I_0, $\Phi(B) = m\left(f\left(B \times J\right)\right)$. Отметим, что Φ — q-квазиаддитивная функция при $q = N(f, I)$. Действительно, полагая $\Psi(B) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} N(y, f, B \times J)dm(y)$, получаем $\sum\limits_{i=1}^{k} \Phi(A_i) \le \sum\limits_{i=1}^{k} \Psi(A_i) \le$ $\le N(f, I)\Phi(A)$, где $A_i \subset I_0$ — борелевские множества, $A_i \cap A_l = \varnothing$ при $l \ne i$. По предложению 1.4.3

$$\varphi(z) = \limsup_{r \to 0} \frac{\Phi(B(z, r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} < \infty \tag{1.6.1}$$

для почти всех $z \in I_0$, где через $B(z, r)$ обозначается шар в $I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке $z \in I_0$ радиуса r, Ω_{n-1} — объем единичного шара в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Пусть Δ_i, $i = 1, 2, ...,$ — некоторая перенумерация совокупности S всех интервалов в J с $\overline{\Delta_i} \subset J$ и рациональными концами. Тогда по теореме Фубини [203, гл. III, § 8.1] при почти всех z

$$\varphi_i(z) := \int\limits_{\Delta_i} Q(z, x_n)\, dx_n \qquad (1.6.2)$$

функции $\varphi_i(z)$ п.в. конечны и интегрируемы по $z \in I_0$. Кроме того, по теореме Лебега (см. предложение 1.1.4) п.в. существует конечный предел

$$\lim_{r\to 0} \frac{\Phi_i(B(z,r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} = \varphi_i(z)\,, \qquad (1.6.3)$$

где

$$\Phi_i(B(z,r)) = \int\limits_{B(z,r)} \varphi_i(\zeta)\, d\zeta\,, \quad z \in I_0\,.$$

Докажем, что отображение f абсолютно непрерывно на каждом сегменте $J_z, z \in I_0$, где пределы (1.6.1) и (1.6.3) существуют и конечны. Обозначим соответствующее множество z через Z_0 и покажем, что сумма диаметров образов любого конечного набора непересекающихся сегментов в $J_z = \{z\} \times J$, $z \in Z_0$, стремится к нулю вместе с суммарной длиной интервалов. Ввиду непрерывности f вдоль J_z достаточно проверить этот факт для сегментов с рациональными концами в J_z. Итак, пусть $\Delta_i^* = \{z\} \times \overline{\Delta_i} \subset J_z,\ z \in Z_0$, $i = 1, 2, ..., k$, где $\Delta_i \in S$, $i = 1, ..., k$, взаимно не пересекаются. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{\Delta_i}\,, i = 1, ..., k$, также попарно не пересекаются.

Пусть $\delta > 0$ — произвольное рациональное число, которое меньше половины минимального расстояния между $\overline{\Delta_i}\,, i = 1, ..., k$, а также меньше их расстояния до концевых точек интервала J. Пусть $\Delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $\delta_i = (\alpha_i - \delta, \beta_i + \delta)$, $i = 1, ..., k$, и $A_i = B(z, r) \times \delta_i$, где $B(z, r)$ — открытый шар в $I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке z и радиуса $r > 0$. При малых $r > 0$, $r < \delta$, $E_i = (A_i, \Delta_i^*), i = 1, ..., k$, — конденсаторы в I и, следовательно, $f(E_i) = (f\,(A_i)\,, f\,(\Delta_i^*))\,, i = 1, ..., k$, — также конденсаторы в $D' = f(D)$. По предложению 1.4.1

$$\text{cap}\ (f\,(A_i)\,, f\,(\Delta_i^*)) = M(\Gamma_{f(E_i)})\,. \qquad (1.6.4)$$

Обозначим $\Gamma_{E_i^*}$ — семейство всех максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E_i)}$ с началом в Δ_i^*. Имеем $\Gamma_{E_i^*} \subset \Gamma_{E_i}$ и из (1.6.4)

$$\text{cap}\ (f\,(A_i)\,, f\,(\Delta_i^*)) \leq M\,(f\,(\Gamma_{E_i}))\ . \qquad (1.6.5)$$

Функция

$$\rho_i(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{r}, & x \in A_i, \\ 0, & x \notin A_i \end{cases}$$

является допустимой для семейства Γ_{E_i}, поэтому из (1.6.5) по определению Q-отображения

$$\mathrm{cap}\;(f(A_i), f(\Delta_i^*)) \le \frac{1}{r^n} \int\limits_{A_i} Q(x)\, dm(x)\,. \tag{1.6.6}$$

С другой стороны, по неравенству (1.4.2)

$$\mathrm{cap}\;(f(A_i), f(\Delta_i^*)) \ge \left(C_n \frac{d_i^n}{m_i} \right)^{\frac{1}{n-1}}\,, \tag{1.6.7}$$

где d_i — диаметр множества $f\left(\Delta_i^*\right)$, m_i — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ множества $f(A_i)$, C_n — константа, зависящая только от размерности пространства.

Комбинируя (1.6.6) и (1.6.7), имеем неравенство

$$\left(\frac{d_i^n}{m_i} \right)^{\frac{1}{n-1}} \le \frac{c_n}{r^n} \int\limits_{A_i} Q(x) dm(x) \tag{1.6.8}$$

с новой константой c_n, зависящей только от n, при всех $i = 1, ..., k$.

Далее, по дискретному неравенству Гельдера с $p = n/(n-1)$ и $q = n$, $x_k = d_k/m_k^{1/n}$ и $y_k = m_k^{1/n}$ [10, (17.3)] получаем

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \le \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{d_i^n}{m_i} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\sum_{i=1}^{k} m_i \right)^{\frac{1}{n}}\,.$$

Ввиду свойства 4) определения 1.4.4, $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \le N(f, I) \cdot \Phi(B(z, r))$, так что

$$\left(\sum_{i=1}^{k} d_i \right)^n \le \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{d_i^n}{m_i} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right)^{n-1} N(f, I) \Phi(B(z, r))\,,$$

и ввиду (1.6.8)

$$\left(\sum_{i=1}^{k} d_i \right)^n \le \gamma_n \frac{\Phi(B(z, r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\int\limits_{A_i} Q(x)\, dm(x)}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} \right)^{n-1}\,,$$

где γ_n зависит только от n, I и отображения f. Переходя к верхнему пределу при $r \to 0$, а затем к пределу при $\delta \to 0$, из (1.6.1) и (1.6.3) получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{k} d_i\right)^n \le \gamma_n\, \varphi(z) \left(\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(z)\right)^{n-1}. \tag{1.6.9}$$

Наконец, в силу (1.6.9) абсолютная непрерывность неопределенного интеграла Q над сегментами J_z, $z \in Z_0$, которая следует из (1.6.2), влечет абсолютную непрерывность на том же сегменте отображения f. $\square$

1.6.2. Из теоремы 1.6.1 и следствия 1.5.1 на основании предложения 1.1.2 получаем следующее заключение.

Следствие 1.6.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное Q-отображение с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда $f \in W^{1,1}_{loc}$.*

1.7. N^{-1}-свойство Лузина Q-отображений. Аналог теоремы Боярского—Иванца о невырожденности якобиана

1.7.1. Рассмотрим следующее определение.

Определение 1.7.1. Отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ обладает *N-свойством* (Лузина), если из условия $m(E) = 0$ следует, что $m(f(E)) = 0$. Отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ обладает *N^{-1}-свойством* (Лузина), если из условия $m(E) = 0$ следует, что $m\left(f^{-1}(E)\right) = 0$.

В настоящем параграфе рассмотрено N^{-1}-свойство отображений, более общих, чем отображения с ограниченным искажением (Q-отображений). Известно, что произвольное непостоянное отображение с ограниченным искажением обладает как N-свойством, что доказано Ю. Решетняком [168, гл. II, теорема 6.2,], так и N^{-1}-свойством, что доказано в совместной работе Б. Боярского и Т. Иванца [15, теорема 8.1]. Ниже показано, что N^{-1}-свойством обладают также открытые дискретные Q-отображения при $Q \in L^1_{loc}$.

1.7.2. Перед доказательством этого факта приведем следующее определение.

Определение 1.7.2. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W^{1,1}_{loc}(D)$ и для некоторой функции $K(x) : D \to [1, \infty)$ выполнено условие

$$\|f'(x)\|^n \le K(x) \cdot |J(x, f)|$$

при почти всех $x \in D$ [75, гл. VI, п. 6.3]. В некоторых случаях условие $f \in W_{loc}^{1,1}(D)$ заменяют более сильным требованием $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$, и наоборот. В дальнейшем, если рассматривается отображение f с конечным искажением, то считаем, что $f \in W_{loc}^{1,1}$.

Имеет место следующее утверждение [87, теорема 1.2].

Предложение 1.7.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — отображение с конечным искажением такое, что $K \in L_{loc}^{n'-1}$, где $n'-1 = \frac{1}{n-1}$. Если функция кратности $N(y, fD)$ существенно ограничена постоянной N в $\mathbb{R}^n$, то f обладает N^{-1}-свойством.*

1.7.3. Следующее следствие означает сохранение меры нуль относительно взятия полного прообраза множества при открытых дискретных Q-отображениях.

Следствие 1.7.1. *(Аналог теоремы Боярского—Иванца об N^{-1}-свойстве). Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение, причем $Q \in L_{loc}^1$. Тогда f обладает N^{-1}-свойством.*

Доказательство. Поскольку f — дискретно, можно считать, что $\infty \notin f(D)$. Тогда согласно следствиям 1.5.2 и 1.6.1 отображение f является отображением с конечным искажением. Отметим, что достаточно установить N^{-1}-свойство для сужения отображения $f|_G$ на произвольную область G такую, что $\overline{G} \subset D$.

В таких областях $N(y, f, G) \le N \quad \forall\, y \in f(G)$ [115, лемма 2.12, п. (3)]. Тогда по предложению 1.7.1 достаточно показать, что $Q^{n-1} \in$ $\in L_{loc}^{n'-1}$, где $1/n' + 1/n = 1$. Имеем $n' = n/(n-1)$ и $n' - 1 = \dfrac{1}{n-1}$. Так как по условию $Q \in L_{loc}^1$, то $Q^{n-1} \in L_{loc}^{\frac{1}{n-1}}$ и тем самым следствие 1.7.1 доказано. $\Box$

Известно, что N^{-1}-свойство эквивалентно невырожденности якобиана для почти всех точек области, [151, теорема 1]. Поэтому из следствия 1.7.1 получаем еще один важный результат.

Следствие 1.7.2. *(Аналог теоремы Боярского—Иванца о невырожденности якобиана). Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и пусть $f : D \to$ $\to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение с $Q \in L_{loc}^1$. Тогда $J(x, f) \ne$ $\ne 0$ п.в. в D.*

Из следствий 1.5.4, 1.6.1 и 1.7.2 вытекает следующее

Следствие 1.7.3. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное Q-отображение такое, что $Q(x) \le C = const$ при почти всех $x \in D$. Тогда f является отображением с ограниченным искажением.*

1.7.4. Следующее утверждение содержит оценку внешней дилатации произвольного открытого дискретного Q-отображения.

Следствие 1.7.4. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение такое, что $Q \in L^1_{loc}$. Тогда для почти всех $x \in D$*

$$K_O(x, f) \leq C_n Q^{n-1}(x)\,,$$

где C_n — абсолютная постоянная, зависящая только от n. $\Box$

Доказательство. Согласно следствию 1.7.2 $J(x, f) \neq 0$ почти всюду. В таком случае необходимое заключение вытекает из следствия 1.5.3. $\Box$

1.7.5. В этом пункте рассмотрены точки ветвления Q-отображений (см. определение 1.1.6). Прежде всего, имеет место следующее утверждение [115, лемма 2.14].

Предложение 1.7.2. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение и $x_0 \in D$ — его точка дифференцируемости. Тогда если $x_0 \in B_f$, то $J(x_0, f) = 0$.*

Из теоремы 1.4.1, следствия 1.7.2 и предложения 1.7.2 вытекает следующее

Следствие 1.7.5. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение, $Q \in L^1_{loc}$. Тогда $m(B_f) = 0$.*

1.8. Оценки внутренних дилатаций кольцевых Q-отображений

1.8.1. В предыдущих параграфах мы рассматривали оценки внешней дилатации $K_O(x, f)$ для Q-отображений f (либо кольцевых Q-отображений f) через функцию Q, посредством которой определяется отображение f. Не менее важным вопросом является связь внутренней дилатации $K_I(x, f)$ с функцией Q. Конечно, наиболее простую подобную взаимосвязь можно было бы указать и без дополнительных исследований, поскольку, как известно, $K_O(x, f) \leq K_I^{n-1}(x, f)$ и $K_I(x, f) \leq K_O^{n-1}(x, f)$ (см. соотношения (1.1.16) и (1.5.19)). Исходя из этих соотношений, можно утверждать, что для открытых дискретных Q-отображений f имеет место неравенство: $K_I(x, f) \leq C_n \cdot K_O^{(n-1)^2}(x, f)$, где C_n — некоторая постоянная, зависящая только от размерности пространства n. Однако, ниже мы докажем значительно более точные результаты по этому поводу.

Перед формулировкой основных результатов сделаем следующее замечание. Известно, что для произвольного конденсатора $E = (A, C)$ выполнено соотношение

$$\operatorname{cap} E \quad \geq \quad \frac{(\inf m_{n-1}\, S)^n}{[m(A \setminus C)]^{n-1}}, \tag{1.8.1}$$

где $m_{n-1}\, S$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия S, которое является границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A; в (1.8.1) точная нижняя грань берется по всем таким S [94, предложение 5].

1.8.2. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.8.1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение. Предположим, что $Q \in L^1_{loc}(D)$ и $J(x, f) \neq 0$ п.в. Тогда при п.в. $x \in D$ выполнено соотношение*

$$K_I(x, f) \leq c_n \cdot Q(x)\,, \tag{1.8.2}$$

где c_n — некоторая постоянная, зависящая только от n.

Доказательство. Согласно теореме 1.4.1 отображение f дифференцируемо п.в. в D. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. В каждой точке $x \in D$ дифференцируемости отображения f, где $J(x, f) \neq 0$, рассмотрим конденсатор $E_r = (A_r, G_r)$, где

$$A_r = \{y : |x - y| < 2r\}$$

и

$$G_r = \{y : |x - y| \leq r\}\ .$$

Так как f — открытое и непрерывное отображение, то $f(E_r)$ также является конденсатором в $\mathbb{R}^n$. Пусть Γ_{E_r} и $\Gamma_{f(E_r)}$ — семейства кривых в смысле обозначений, данных в предложении 1.4.1, и Γ_r^* — семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E_r)}$ при отображении f с началом в G_r. По аналогии с доказательством леммы 1.4.1 можно показать, что $\Gamma_r^* \subset \subset \Gamma_{E_r}$.

Поскольку $\Gamma_{f(E_r)} > f(\Gamma_r^*)$, следовательно, по предложению 1.4.1 и свойству минорирования (1.1.7)

$$\operatorname{cap} f(E_r) = M\left(\Gamma_{f(E_r)}\right) \leq M\left(f(\Gamma_r^*)\right) \leq M\left(f(\Gamma_{E_r})\right)\ . \tag{1.8.3}$$

Отметим, что при малых $\varepsilon > 0$, $\Gamma_{E_r} > \Gamma(S(x,r), S(x,2r-\varepsilon), A(r,2r-\varepsilon,x))$, так что поскольку f по условию является кольцевым Q-отображением в D, из (1.8.3) следует, что

$$\operatorname{cap} f(E_r) \leq \int\limits_{r<|x-y|<2r} Q(y)\,\eta^n(|x-y|)\;dm(y)$$

для любой неотрицательной измеримой функции $\eta : (r, 2r-\varepsilon) \to [0,\infty]$ такой, что $\int\limits_r^{2r-\varepsilon} \eta(t)dt \geq 1$. В частности, рассмотрим однопараметрическое семейство вещественнозначных функций:

$$\eta_r(t) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{r-\varepsilon}, & t \in (r, 2r-\varepsilon), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r, 2r-\varepsilon)\,. \end{cases}$$

Тогда

$$\operatorname{cap}\; f(E_r) \leq \frac{2^n\Omega_n}{2^n\Omega_n(r-\varepsilon)^n} \int\limits_{A_r} Q(y)\,dm(y)\,,$$

откуда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\operatorname{cap}\; f(E_r) \leq \frac{2^n\Omega_n}{m(A_r)} \int\limits_{A_r} Q(y)\,dm(y)\,. \tag{1.8.4}$$

С другой стороны, в соответствии с неравенством (1.8.1) имеем

$$\operatorname{cap} f(E_r) \geq \frac{(\inf m_{n-1}\,S)^n}{\left[m\left(f(A_r) \setminus f(G_r)\right)\right]^{n-1}}\,, \tag{1.8.5}$$

где inf берется по всевозможным C^∞-многообразиям S, которые являются границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего $f(G_r)$ и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $f(A_r)$. Комбинируя (1.8.4) и (1.8.5), получаем

$$(\inf m_{n-1}\,S)^n \leq \frac{2^n\Omega_n\left[m(f(A_r) \setminus f(G_r))\right]^{n-1}}{m(A_r)} \int\limits_{A_r} Q(y)\,dm(y)\,. \tag{1.8.6}$$

Отметим, что множество $f'(x)(B(0,r))$ представляет собой эллипсоид с центром в нуле, полуоси которого $0 < a_1 r \leq ... \leq a_n r$, где $f'(x)$ —

соответствующее линейное отображение (см. вычисления, приведенные в п. 1.1.7). Кроме того, $m\left(f'(x)(B(0,r))\right)=\Omega_n a_1\ldots a_n r^n=\Omega_n|J(x,f)|r^n$ (см. соотношение (1.1.13)). Поскольку $x\in D$ — точка дифференцируемости отображения f, для любого $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\min\{a_1,\ldots,a_n\}$, найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при всех $r\in(0,\delta)$ и всех $h\in\overline{B(0,r)}$

$$|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|<r\varepsilon\,.$$

Отсюда вытекает, что множество $f(G_r)$ содержит другой эллипсоид B с центром в точке $f(x)$, ориентированный также, как $f'(x)(B(0,r))$, и с длиной полуосей $r(a_1-\varepsilon),\ldots,r(a_n-\varepsilon)$. Разместим имеющиеся эллипсоиды $f'(x)(B(0,r))$ и B таким образом, чтоб их центр совпал с началом координат, а главные направлення — с координатными осями $e_1,...,e_n$. Тогда площадь поверхности $f(G_r)$ допускает следующую оценку снизу:

$$m_{n-1}\partial f(G_r)\geq 2m_{n-1}\mathrm{Pr}_1(B)\,,$$

где $\mathrm{Pr}_1(\cdot)$ означает проекцию на гиперплоскость, ортогональную вектору e_1. Из изложенного выше вытекает

$$m_{n-1}\partial f(G_r)\geq 2\Omega_{n-1}\cdot(a_2-\varepsilon)\ldots(a_n-\varepsilon)r^{\,n-1}=$$

$$=2\Omega_{n-1}\cdot\frac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)}r^{\,n-1}+\alpha(r,\varepsilon)\,, \tag{1.8.7}$$

где $\alpha(r,\varepsilon)=2\Omega_{n-1}\cdot(a_2-\varepsilon)\ldots(a_n-\varepsilon)r^{\,n-1}-2\Omega_{n-1}\cdot a_2\ldots a_n r^{\,n-1}$. Следовательно, из (1.8.6) и (1.8.7) имеем

$$\left[2\Omega_{n-1}\cdot\frac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)}r^{n-1}\right]^n\leq\left[m_{n-1}\partial f(G_r)-\alpha(r,\varepsilon)\right]^n\leq \tag{1.8.8}$$

$$\leq\left(\left(\frac{2^{\,n}\Omega_n\left[m\left(f(A_r)\setminus f(G_r)\right)\right]^{n-1}}{m(A_r)}\int\limits_{A_r}Q(y)\,dm(y)\right)^{1/n}-\alpha(r,\varepsilon)\right)^n,$$

где $\alpha(r,\varepsilon)$ указано выше. Разделив неравенство (1.8.8) на $r^{\,n(n-1)}$, учитывая произвольность $\varepsilon>0$, устремляя r к 0, применяя теорему Лебега о дифференцируемости неопределенного интеграла [203, гл. IV, теорема 6.3] и предложение 1.5.1, находим

$$\left[\frac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)}\right]^n\leq\left[|J(x,f)|\right]^{n-1}c_n\cdot Q(x)$$

для почти всех $x \in D$. Поскольку по условию $J(x,f) \neq 0$ почти всюду, отсюда вытекает

$$K_I(x,f) \quad = \quad \frac{|J(x,f)|}{\left(l\left(f'(x)\right)\right)^n} \leq c_n \cdot Q(x)$$

для почти всех $x \in D$. Теорема 1.8.1 доказана. □

В дальнейшем *линейная дилатация* отображения f в точке x определяется как $H(x,f) = \sqrt[n]{K_I(x,f)K_O(x,f)}$. Отметим

$$H(x,f) \leq K_I(x,f) \tag{1.8.9}$$

во всех точках, где участвующие здесь величины определены (это следует из (1.1.15)). Учитывая обозначения, из теоремы 1.8.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1.8.1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение. Предположим, что $Q \in L^1_{loc}(D)$ и $J(x,f) \neq 0$ п.в. Тогда при почти всех $x \in D$*

$$H(x,f) \quad \leq \quad c_n \cdot Q(x)\,,$$

где постоянная c_n зависит только от размерности пространства n.

Из теоремы 1.8.1 и следствия 1.8.1 имеем также следующее

Следствие 1.8.2. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение. Предположим, что $Q \in L^1_{loc}(D)$ и $J(x,f) \neq 0$ п.в. Тогда $H(x,f) \in L^1_{loc}(D)$ и $K_I(x,f) \in L^1_{loc}(D)$.*

1.9. Оценки внутренних дилатаций Q-отображений

1.9.1. В настоящем параграфе исследованы отображения, удовлетворяющие более сильной, чем (1.3.2), оценке вида (1.3.1). Ниже показано, что для указанных отображений в неравенстве (1.8.2), также имеющем место для отображений вида (1.3.1), можно взять $c_n \equiv 1$. Такая оценка будет являться точной, ибо внутренняя дилатация $K_I(x,f)$ всегда не меньше единицы (см. соотношение (1.1.15) и ниже).

1.9.2. Сформулируем и докажем основное утверждение данного параграфа.

Теорема 1.9.1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение. Предположим, что $Q \in L^1_{loc}(D)$. Тогда при почти всех $x \in D$ выполнено соотношение*

$$K_I(x,f) \leq Q(x)\,. \tag{1.9.1}$$

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. Согласно теореме 1.4.1 отображение f дифференцируемо почти всюду, а согласно следствию 1.7.2 выполнено условие $J(x, f) \neq 0$ при почти всех $x \in D$. Обозначим через $\Phi(A)$ функцию множества $A \subset D$, определенную следующим образом:

$$\Phi(A) = \int\limits_A Q(x) dm(x)\,.$$

Так как по условию функция $Q \in L^1_{loc}(D)$, то по предложению 1.1.4 функция Φ обобщенно дифференцируема в почти каждой точке $x_0 \in D$, причем производная $D\Phi(x) = Q(x)$ для почти всех $x \in D$. Обозначим через E_1 множество всех $x \in D$, где Φ обобщенно дифференцируема и $D\Phi(x) = Q(x)$, а через E_2 — множество всех $x \in D$, где само отображение f дифференцируемо и невырождено. Для справедливости заключения теоремы достаточно показать, что (1.9.1) имеет место для всех $x \in E_0 = E_1 \cap E_2$.

Фиксируем произвольную точку $x_0 \in E_0$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$, $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответственно главные векторы и главные значения отображения $f'(0)$, $\lambda_n \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_1 > 0$. Посредством преобразования поворота в образе и прообразе можно добиться, чтобы $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0) = \widetilde{e_i}$. Мы должны убедиться в том, что

$$\frac{\lambda_2 \ldots \lambda_n}{\lambda_1^{n-1}} \leq Q(0)\,,$$

так как $|J(0, f)| = \lambda_1 \ldots \lambda_n$ и $l\,(f'(0)) = \lambda_1$ (см. соотношения (1.1.13), (1.1.14)). Фиксируем произвольно параметр $t > 0$ и выбираем число $r > 0$ так, чтобы конденсатор $E := (A, C)$, где $C = \{x : x_1 = 0, |x_i| \leq \leq r, i = 2, \ldots, n\}$ и $A = \{x : |x_1| < rt\lambda_1, |x_i| < r + rt\lambda_i, i = 2, \ldots, n\}$, лежал в области D. Отметим, что

$$m(A) = 2^n \lambda_1 rt \prod_{i=2}^{n} (r + rt\lambda_i) \tag{1.9.2}$$

и

$$\text{dist}\,(C, \partial A) = rt\lambda_1\,. \tag{1.9.3}$$

Так как $E = (A, C)$ — конденсатор в D, то $f(E) = (f(A), f(C))$ — конденсатор в $D' = f(D)$ ввиду открытости и непрерывности f. Пусть

Γ_E и $\Gamma_{f(E)}$ — семейства кривых в смысле предложения 1.4.1 и Γ^* — семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E)}$ при отображении f с началом в C. Как и при доказательстве леммы 1.4.1, имеем $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Отметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$, и поскольку по условию теоремы отображение f удовлетворяет соотношению (1.3.1), то из соотношения

$$\operatorname{cap} f(E) \quad = \quad M\left(\Gamma_{f(E)}\right) \quad \leq \quad M\left(f(\Gamma^*)\right) \quad \leq \quad M\left(f(\Gamma_E)\right)$$

следует

$$\operatorname{cap}\,(f(A), f(C)) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x)\; dm(x) \tag{1.9.4}$$

для любой допустимой функции $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma_E$. Укажем, что функция

$$\rho(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{dist}(C, \partial A)}, & x \in A \setminus C, \\ \quad 0, & x \notin A \setminus C \end{cases}$$

является допустимой для семейства Γ_E и, таким образом, в силу (1.9.4)

$$\operatorname{cap}\,(f(A), f(C)) \leq \frac{1}{(\operatorname{dist}(C, \partial A))^n} \int\limits_A Q(x)\, dm(x)\,. \tag{1.9.5}$$

С другой стороны, применяя неравенство (1.8.1), из (1.9.5) имеем

$$\frac{(\inf\, m_{n-1} S)^n}{[m(f(A))]^{n-1}} \leq \frac{1}{(\operatorname{dist}\,(C, \partial A))^n} \int\limits_A Q(x)\, dm(x)\,, \tag{1.9.6}$$

где $m_{n-1}\, S$ означает $(n-1)$-мерную площадь C^∞-многообразия S, которое является границей открытого множества U, содержащего $f(C)$ и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $f(A)$, а точная нижняя грань в (1.9.6) берется по всем таким S. Проводим оценку дроби в левой части неравенства (1.9.6), опираясь на свойство дифференцируемости отображения f в нуле. Фиксируя произвольно $0 < \varepsilon < \lambda_1$, выбираем $r > 0$ столь малым, чтобы $|f(x) - f'(0)x| < \varepsilon r$ при $x \in A$. Тогда множество $f(A)$ содержится в параллелепипеде:

$$V = \left\{ y :\, |y_1| \leq r t \lambda_1^2 + \varepsilon r,\, |y_i| \leq r\lambda_i + r t \lambda_i^2 + \varepsilon r,\; i = 2, \ldots, n \right\},$$

а проекция множества $f(C)$ на подпространство $y_1 = 0$ содержит в себе $(n-1)$-мерный параллелепипед:

$$V_0 = \{ y : y_1 = 0,\; |y_i| \leq r\lambda_i - \varepsilon r,\; i = 2, \ldots, n \}\,.$$

Поэтому

$$m\left(f(A)\right) \leq m(V) = 2^n r^n \left(t\lambda_1^2 + \varepsilon\right) \prod_{i=2}^{n} \left(\lambda_i + t\lambda_i^2 + \varepsilon\right)$$

и

$$m_{n-1}\, S \geq 2m_{n-1}\, V_0 = 2^n r^{n-1} \prod_{i=2}^{n} \left(\lambda_i - \varepsilon\right)\,.$$

Следовательно, подставляя найденные оценки величин $m(f(A))$ и $m_{n-1}\, S$ в неравенство (1.9.6), учитывая (1.9.2) и (1.9.3), получаем

$$\frac{\left(2^n r^{n-1} \prod\limits_{i=2}^{n} (\lambda_i - \varepsilon)\right)^n}{\left(2^n r^n (t\lambda_1^2 + \varepsilon) \prod\limits_{i=2}^{n} (\lambda_i + t\lambda_i^2 + \varepsilon)\right)^{n-1}} \leq$$

$$\leq \frac{2^n \lambda_1 r t \prod\limits_{i=2}^{n} (r + rt\lambda_i)}{r^n t^n \lambda_1^n} \frac{1}{m(A)} \int\limits_{A} Q(x)\, dm(x)\,,$$

откуда

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=2}^{n} (\lambda_i - \varepsilon)\right)^n}{\left((t\lambda_1^2 + \varepsilon) \prod\limits_{i=2}^{n} (\lambda_i + t\lambda_i^2 + \varepsilon)\right)^{n-1}} \leq \frac{\prod\limits_{i=2}^{n} (1 + t\lambda_i)}{t^{n-1} \lambda_1^{n-1}} \frac{1}{m(A)} \int\limits_{A} Q(x)\, dm(x)$$

и, устремляя $r \to 0$, имеем

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=2}^{n} (\lambda_i - \varepsilon)\right)^n}{\left((t\lambda_1^2 + \varepsilon) \prod\limits_{i=2}^{n} (\lambda_i + t\lambda_i^2 + \varepsilon)\right)^{n-1}} \leq \frac{\prod\limits_{i=2}^{n} (1 + t\lambda_i)}{t^{n-1} \lambda_1^{n-1}}\, Q(0)\,.$$

При $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=2}^{n}\lambda_i\right)^n}{\left(t\lambda_1^2\prod\limits_{i=2}^{n}(\lambda_i+t\lambda_i^2)\right)^{n-1}}\le\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(1+t\lambda_i)}{t^{n-1}\lambda_1^{n-1}}\,Q(0)\,,$$

а затем, умножая обе части неравенства на t^{n-1} и переходя к пределу при $t\to 0$, выводим

$$\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}\lambda_i}{\lambda_1^{n-1}}\le Q(0)\,,$$

следовательно, теорема 1.9.1 полностью доказана.$\Box$

1.9.3. Ранее отмечено, что $K_I(x,f)\ge 1$ при всех x, где $K_I(x,f)$ является заданным (см. соотношения (1.1.15) и ниже). Таким образом, на основании приведенного выше из теоремы 1.9.1 вытекает следующее

Следствие 1.9.1. *Пусть $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение. Предположим, что $Q\in L^1_{loc}(D)$. Тогда $Q(x)\ge 1$ для почти всех $x\in D$.*

1.9.4. После доказательства теоремы 1.9.1 и следствия 1.9.1 можно ответить на вопрос, в чем разница между Q-отображениями и кольцевыми Q-отображениями. (Здесь для удобства ограничимся случаем $n=2$). Для более-менее полного ответа на этот вопрос приведем следующие сведения.

Определение 1.9.1. Пусть $z,z_0\in D\subset\mathbb{C}$. Для комплекснозначной функции $f:D\to\mathbb{C}$, заданной в области $D\subset\mathbb{C}$, имеющей частные производные по x и y при почти всех $z=x+iy$, полагаем $\overline{\partial}f=f_{\overline{z}}=(f_x+if_y)/2$ и $\partial f=f_z=(f_x-if_y)/2$. Полагаем $\mu(z)=\mu_f(z)=f_{\overline{z}}/f_z$, при $f_z\ne 0$ и $\mu(z)=0$ в противном случае. Комплекснозначная функция μ, приведенная выше, называется *комплексной дилатацией* отображения f в точке z. *Максимальной дилатацией* отображения f в точке z называется следующая функция:

$$K_\mu(z)\quad=\quad\frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu\,(z)|}\,. \tag{1.9.7}$$

1.9.5. Отметим

$$J(f,z)=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2\,,$$

что можно проверить прямым расчетом [3, гл. I, п. C]. Покажем, что

$$K_\mu(z)=K_I(z,f)=K_O(z,f)$$

при $n=2$ (см., например, соотношение (1.1.15)).

Если $f_z(z_0) \neq 0 \neq f_{\overline{z}}(z_0)$ и $J(z_0, f) = 0$, то $\mu(z_0) = \mu_f(z_0) = 1$, откуда получаем, что $K_\mu(z_0) = \infty$, однако это соответствует равенству $K_I(z_0, f) = K_O(z_0, f) = \infty$. Пусть $f'(z_0) = 0$, тогда также $K_\mu(z_0) = K_I(z_0, f) = K_O(z_0, f) = 1$. Пусть теперь $J(z, f) \neq 0$.

Покажем вначале, что

$$\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}| \,. \tag{1.9.8}$$

Действительно, если $f(z) = u(z) + iv(z)$, то по одному из определений $f'(z)$, приведенному в (1.1.10), получим

$$\|f'(z)\| = \sup_{h=(h_1,h_2):|h|=1} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}h_2\right)^2}\,. \tag{1.9.9}$$

Прямым расчетом можно убедиться, что в сделанных выше обозначениях

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}h_2\right)^2} = |f_z\Delta z + f_{\overline{z}}\overline{\Delta z}| \,, \tag{1.9.10}$$

где $\Delta z = h_1 + ih_2$. Поскольку в (1.9.9) рассматриваются такие h_1 и h_2, что $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 1$, то $\Delta z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Имеем

$$|f_z\Delta z + f_{\overline{z}}\overline{\Delta z}| \leq |f_z| + |f_{\overline{z}}| \tag{1.9.11}$$

и

$$|f_z\Delta z + f_{\overline{z}}\overline{\Delta z}| = |f_z| \cdot \left|1 + e^{-2i\theta}\mu_f(z)\right| \,, \tag{1.9.12}$$

где, как и прежде, $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$, при $f_z \neq 0$ и $\mu(z) = 0$ в противном случае. Выбирая в последнем выражении $\theta = \frac{1}{2}\arg\mu_f(z)$, находим, что при выбранном $\Delta z = e^{i\frac{1}{2}\arg\mu_f(z)}$ из (1.9.12) следует соотношение

$$|f_z\Delta z + f_{\overline{z}}\overline{\Delta z}| = |f_z| + |f_{\overline{z}}| \,. \tag{1.9.13}$$

Тогда из (1.9.9)—(1.9.11) и (1.9.13) получаем соотношение (1.9.8). Учитывая, что $J(f, z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$, равенства

$$K_\mu(z) = K_I(z, f) = K_O(z, f)$$

получаем из (1.9.8) и (1.1.15) прямым вычислением.

1.9.6. Следующее определение обобщает понятие максимальной дилатации.

Определение 1.9.2. *Касательная дилатация* отображения f в точке z по отношению к точке z_0 определяется следующим образом:

$$K_\mu^T(z,z_0) = \frac{\left|1 - \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\mu(z)\right|^2}{1-|\mu(z)|^2}$$

см. [4, 5, 54, 107, 158, 186].

Понятно, что при каждых z и $z_0 \in D$ выполнено условие: $K_\mu^T(z,z_0) \leq \leq K_\mu(z)$. Согласно [206, теорема 3.1 и следствие 3.1] имеет место следующее

Предложение 1.9.1. *Каждый гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса $W_{loc}^{1,1}$ такой, что $J(f,z) \neq 0$ почти всюду в D, $K_\mu^T(z,z_0) \in L_{loc}^1(D)$, является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in D$ при $Q(z) = K_\mu^T(z,z_0)$. В частности, f в этом случае является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in D$ при $Q(z) = K_\mu(z)$.*

Замечание 1.9.1. Из [9, гл. 20, лемма 20.9.1] и предложения 1.3.1 следует, что каждый гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса $W_{loc}^{1,1}$ такой, что $J(f,z) \neq 0$ почти всюду в D, $K_\mu(z) \in L_{loc}^1(D)$, является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in D$ при $Q(z) = K_\mu(z)$. Однако, как мы отметили выше, этот результат является лишь частным случаем утверждения Р. Салимова, приведенного в предложении 1.9.1.

Также имеет место следующее утверждение [57, гл. 6, предложение 6.5].

Предложение 1.9.2. *Обозначим через $\mathfrak{F}_Q$ класс всех Q-квазиконформных автоморфизмов f расширенной комплексной плоскости, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$. Пусть $h \in \mathfrak{F}_Q$ имеет комплексную характеристику вида $\mu(z) = k(|z|)\frac{z}{\bar{z}}$, где $k(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}^2$ — измеримая функция. Тогда*

$$h(z) = \frac{z}{\bar{z}} \exp\left\{\int\limits_1^{|z|} \frac{1+k(\tau)}{1-k(\tau)}\frac{d\tau}{\tau}\right\}. \qquad (1.9.14)$$

1.9.7. Из определения касательной дилатации $K_\mu^T(z,z_0)$ видно, что указанная величина может быть меньше единицы на некотором множестве положительной меры. В таком случае на основании предложения

1.9.1 и следствия 1.9.1 (по крайней мере, при $n = 2$) существует сколь угодно много примеров кольцевых Q-гомеоморфизмов, не являющихся Q-гомеоморфизмами. Рассмотрим, например, функцию $k(\tau) = \tau$ при $|\tau| < 1$ и $k(\tau) = 0$ при $|\tau| \geq 1$ и комплексную характеристику μ, определенную по правилу $\mu(z) = k(|z|)\frac{z}{\bar{z}}$. По предложению 1.9.2 отображение $h(z)$, заданное соотношением (1.9.14) при выбранной функции k, является квазиконформным. Рассмотрим точку $z_0 = 0$. С помощью непосредственного вычисления убеждаемся, что $K_\mu^T(z, 0) = \frac{1-|z|}{1+|z|}$ при $z \in \mathbb{B}^2$ и $K_\mu^T(z, 0) = 1$ при $z \notin \mathbb{B}^2$. Таким образом, отображение $\widetilde{h} := h|_{\mathbb{B}^2}$ имеет касательную дилатацию $K_\mu^T(z, 0)$, всюду меньшую единицы в единичном круге. Однако, по предложению 1.9.1 отображение $\widetilde{h}$ является кольцевым $K_\mu^T(z, 0)$-отображением в нуле. В то же время согласно следствию 1.9.1 отображение $\widetilde{h}$ не может быть $K_\mu^T(z, 0)$-отображением в $\mathbb{B}^2$ (удовлетворять более сильному, чем (1.3.2), условию (1.3.1) в области $D = \mathbb{B}^2$ при $Q := K_\mu^T(z, 0)$).

Приведенный пример демонстрирует наличие кольцевых Q-отображений, не являющихся Q-отображениями, лишь в конкретной точке z_0 (в данном случае $z_0 = 0$; легко понять, что выбор точки z_0 тут не существенен). Вопрос о том, можно ли построить подобный пример, обеспечивающий выполнение соотношения (1.3.2) *во всех* точках z_0, пока остается открытым.

1.9.8. Благодаря утверждению теоремы 1.9.1 результат следствия 1.7.4 можно несколько уточнить.

Следствие 1.9.2. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение. Если $Q \in L^1_{loc}(D)$, то $K_O(x, f) \leq Q^{n-1}(x)$ для почти всех $x \in D$.*

Доказательство вытекает из теоремы 1.9.1 и неравенств (1.1.16). □

1.9.9. Поскольку для линейной дилатации $H(x, f)$ имеет место соотношение $H(x, f) \leq K_I(x, f)$ при почти всех x (см. неравенство (1.8.9)), то из теоремы 1.9.1 вытекает также следующее

Следствие 1.9.3. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение. Если $Q \in L^1_{loc}(D)$, то при почти всех $x \in D$ выполняется неравенство: $H(x, f) \leq Q(x)$.*

2. Устранение особенностей кольцевых Q-отображений

В данной главе[1] рассмотрена проблема наличия предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ у отображения $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$. (Здесь f предполагается либо Q-отображением, либо кольцевым Q-отображением). Вначале изложены общие сведения, касающиеся проблемы устранения особенностей хорошо известных классов (см. §2.1). Затем приведена основная лемма об устранении особенностей, позволяющая изучать проблемы подобного характера для Q-отображений и кольцевых Q-отображений (см. §2.2). Основные результаты об устранении особенностей таких классов отображений сформулированы и доказаны в §2.3. В качестве следствий из основной леммы об устранении особенностей приведены также аналоги известных теорем комплексного и многомерного анализа, такие как теорема Сохоцкого—Вейерштрасса и Лиувилля (см. §2.4). В § 2.5 приведены полезные материалы относительно включения одного подкласса гомеоморфизмов класса Соболева в класс кольцевых Q-отображений. При помощи указанной связи может быть доказан один аналог теоремы Пикара для Q-отображений (последний, к сожалению, доказан лишь при $n = 2$) (см. §2.6) В §2.7 рассмотрено основное интегральное условие, характеризующее открытые дискретные кольцевые Q-отображения. С помощью этого условия показано, что для внутренних точек кольцевых Q-отображений условие вида (2.3.4) из §2.3 выполняется автоматически, что значительно упрощает многие дальнейшие исследования. Затем приведена уточненная теорема Лиувилля (см. §2.8), с помощью которой можно показать, что открытое дискретное кольцевое Q-отображение при некоторых условиях на Q в бесконечности обязано расти некоторым образом (т.е. такое отображение не может быть отображением слабого роста в некотором смысле). В §2.9 доказан аналог леммы Шварца для открытых дискретных кольцевых Q-отображений, ранее установленный К. Икома при $n = 3$ и ограниченных Q. Далее рассмотрен вопрос об устранении более общих типов особенностей, а именно, множеств весового модуля нуль и некоторых других типов границ (§2.10, 2.11). В §2.12 изложены сведения, касающиеся точности приведенных выше условий на отображения. Затем

[1] Результаты, изложенные в §2.5, получены совместно с Т.В. Ломако и Р.Р. Салимовым, в §2.8., 2.9. — совместно с Р.Р. Салимовым, в § 2.14 — совместно с В.И. Рязановым [111, 193, 194, 211, 214, 224, 226, 227, 229, 230, 232, 235, 237, 239–244, 246, 248, 249, 253, 255, 258].

рассмотрены вопросы, связанные с асимптотическими пределами отображений. В частности, доказан аналог теоремы Иверсена для аналитических функций о том, что каждое пикаровское значение функции является его асимптотическим пределом в данной изолированной существенно особой точке (см. §2.13). В §2.14 рассмотрены вопросы, связанные с устранением изолированной особенности открытых дискретных кольцевых Q-отображений, функция Q для которых удовлетворяет некоторым ограничениям интегрального типа. Уделено внимание условиям модульного типа, обеспечивающим открытость и дискретность отображения (§2.15).

2.1. Некоторые общие сведения об устранении особенностей известных классов отображений

2.1.1. Проблема устранения особенностей отображений заключается в поиске ответа на следующий вопрос: существует ли (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ у отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, где $x_0 \in \partial D$?

В основном нас интересуют изолированные точки границы области D. Понятно, что в этом случае можно считать, что отображение задано в области $D \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in D$. Здесь и ниже наличие предела понимается в смысле *сферического (хордального)* расстояния h в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$, определенного по правилу: $h(x,y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. В явном виде метрика h может быть определена следующим образом:

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\,,$$

$$h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}\,, x \neq \infty \neq y\,. \tag{2.1.1}$$

Из определения следует, что метрика h эквивалентна евклидовой метрике на произвольном компактном множестве $C \subset \mathbb{R}^n$. (Так что наличие конечного предела у отображения f относительно хордальной метрики h в точке x_0 эквивалентно наличию предела у того же отображения в смысле евклидовой метрики в той же точке). В частности, имеем

$$h(x,y) \leq |x-y|$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ и
$$h(x,y) \geq \frac{1}{2}\,|x-y|$$
при всех x и $y \in \mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, при этом, равенство в приведенном соотношении имеет место на множестве $\mathbb{S}^{n-1}$.

2.1.2. Перед тем, как перейти к изложению результатов, касающихся устранения особенностей открытых дискретных кольцевых Q-отображений, приведем некоторые сведения об устранении особенностей уже изученных классов отображений.

Устранению особенностей квазиконформных отображений и отображений с ограниченным искажением посвящено большое количество работ [1,30,65,88,108,116,125,130,131,133,141,167,168,171–173,175,176, 217,280,281,301]. Также отметим публикации, касающиеся отображений с конечным искажением [6, 25, 26, 75, 91, 154–156].

Исследования, связанные с устранением особенностей отображений с ограниченным искажением, восходят к Паулю Пейнлеве и Абраму Безиковичу, которые доказали возможность продолжения ограниченной аналитической функции $f : D \setminus F \to \mathbb{C}$ на область $D \subset \mathbb{C}$ при условии, что замкнутое подмножество F области D удовлетворяет условию: $\mathcal{H}^1(F) = 0$, где $\mathcal{H}^1$ означает линейную меру Хаусдорфа [83, гл. I, п. 5, теорема 1.3].

Отметим работы Ю.Ю. Трохимчука о продолжении аналитических функций на границу [274], [275, гл. XIV], а также работу Ю.Б. Зелинского [298]. Отдельного внимания, с нашей точки зрения, заслуживают работы [116, 175, 281]. В частности, об устранении особенностей квазиконформных отображений известно следующее [281, теорема 17.3].

Предложение 2.1.1. *Каждое квазиконформное отображение $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ допускает непрерывное продолжение до квазиконформного отображения $\overline{f} : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ с той же самой характеристикой квазиконформности K'' в (1.2.1).*

Естественно, возможность подобного продолжения в точку x_0 в предложении 2.1.1 следует понимать в расширенном смысле, т.е. когда допустима ситуация: $\overline{f}(x_0) = \infty$.

2.1.3. Утверждение предложения 2.1.1 впервые было доказано К. Левнером [109]. В дальнейшем Ю. Вяйсяля доказал следующее обобщение этого результата [281, с. 62, замечание 17.24, п. (1)]; [280].

Предложение 2.1.2. *Пусть $E \subset D$ — некоторое множество, замкнутое относительно области D и такое, что $\mathcal{H}^{n-1}(E) = 0$, где $\mathcal{H}^{n-1}$ означает $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа множества E. Тогда каждое* *квазиконформное отображение $f : D \setminus E \to \overline{\mathbb{R}^n}$ допускает продолжение до квазиконформного отображения всей области D с сохранением постоянной квазиконформности K'' в (1.2.1).*

2.1.4. Итак, произвольное квазиконформное отображение (в частности — конформное отображение) имеет конечный или бесконечный предел в изолированной точке границы области. Совершенно иначе обстоит дело с отображениями с ограниченным искажением. Даже отображения с постоянной квазиконформности, равной тождественно единице, не обязаны иметь конечный или бесконечный предел в изолированной особой точке. Например, аналитическая функция $f = \exp\{1/z\}$, $f : \mathbb{B}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ (которая является отображением с ограниченным искажением при $n = 2$ и постоянной квазиконформности $K \equiv 1$), имеет существенно особую точку $z_0 = 0$.

Однако при дополнительных требованиях на отображение f (часто имеющих модульно-емкостный характер) отображение с ограниченным искажением также имеет устранимую изолированную особенность. Как, например, известно, аналитическая функция $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus \{a \cup b\}$ имеет конечный или бесконечный предел в точке z_0, как только $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{C}$ (последнее утверждение есть не что иное, как известная из общего курса комплексного анализа теорема Пикара). В этом случае отображение f *выпускает* пару значений a и b. Для приведения аналогичных результатов, касающихся более общих классов отображений (отображений с ограниченным искажением, когда постоянная $K \geq 1$ и размерность пространства $n \in \mathbb{N}$ могут быть произвольными), нам понадобится следующее определение.

Определение 2.1.1. Компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеет *нулевую емкость,* $\operatorname{cap} C = 0$, если существует ограниченное открытое множество A такое, что $C \subset A$ и емкость конденсатора $E = (A, C)$ удовлетворяет условию: $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. Известно, что в последнем случае и для любого другого ограниченного открытого множества A в $\mathbb{R}^n$, содержащего C, также будет выполнено условие: $\operatorname{cap}(A, C) = 0$ [168, гл. II, лемма 3.4]. Определение конденсатора и емкости конденсатора см. в п. 1.4.3.

Если хотя бы для одного ограниченного открытого множества A такого, что $C \subset A$, имеет место неравенство $\operatorname{cap}(A, C) > 0$, то полагаем $\operatorname{cap} C > 0$ и в этом случае множество C имеет *положительную емкость.*

Произвольное множество $F \subset \mathbb{R}^n$ имеет емкость нуль, если любое его компактное подмножество C имеет емкость нуль. Аналогично можно определить понятие множества емкости нуль в $\overline{\mathbb{R}^n}$ [116, § 2.12].

2.1.5. Для понимания природы множеств емкости нуль целесообразно привести следующее утверждение [163, § 3, следствия 1-2], а также [116, лемма 2.13] и [70, теорема IV.4].

Предложение 2.1.3. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество нулевой емкости, тогда:

1) при каждом $\alpha > 0$ его α-мерная мера Хаусдорфа $\mathcal{H}_\alpha(F)$ равна нулю;

2) имеют место условия: $m(F) = 0$ и $\operatorname{Int} F = \varnothing$;

3) множество $D \backslash F$ является областью (теорема Менгера—Урысона).

Таким образом, множества емкости нуль всюду разрывны; они, например, не могут содержать в себе кривую или отрезок. Отметим, что, в частности, произвольное одноточечное множество $C = \{a\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, имеет емкость нуль. Действительно, пусть $r > 0$ — фиксированное положительное число, тогда $B(a, r) \supset \{a\}$ и $E = (B(a, r), \{a\})$ — конденсатор. В таком случае, по предложению 1.4.1 имеем: $\operatorname{cap} E = M(\Gamma_E)$; но тогда $\operatorname{cap} E = 0$, поскольку (как известно) модуль семейств кривых, проходящих через фиксированную точку, равен нулю [281, § 7.9].

2.1.6. Вернемся теперь к основным результатам, касающимся устранения особенностей различных классов отображений. Одним из наиболее известных достаточных условий продолжения отображения $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ с ограниченным искажением в точку 0 является выполнение условия: $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)\right) > 0$. Подобные условия, по-видимому, впервые указаны в работах О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вяйсяля [116, теорема 4.1]. Справедливо следующее утверждение [116, теорема 4.1], [175, гл. III,теорема 2.9 и гл. VII, теорема 1.1].

Предложение 2.1.4. *Пусть множество $E \subset D$ замкнуто относительно D и имеет емкость нуль,* $\operatorname{cap} E = 0$. *Тогда каждое отображение $f : D \setminus E \to \overline{\mathbb{R}^n}$ с ограниченным искажением такое, что* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus E\right)\right) > 0$, *имеет непрерывное продолжение $\overline{f} : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которое также является отображением с ограниченным искажением, при этом продолженное отображение имеет ту же постоянную квазиконформности K (см. п. 3) определения 1.2.1).*

Из предложения 2.1.4, в частности, следует ряд интересных следствий: теоремы типа Сохоцкого—Вейерштрасса, Лиувилля, Пикара [116, п. 4], [175, гл. III, п. 2]. По этому поводу см. также работы В.М. Миклюкова [131], [133]. В последней работе доказано, что если отображение с ограниченным искажением $f : \Omega \setminus A \to \mathbb{R}^n$ имеет в каждой точке $x_0 \in A$ компактного множества A емкости нуль существенную особенность, то предельным множеством $C(x_0, f)$ является все пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. теорему 2 там же). Здесь и далее *предельным множеством отображения f относительно множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$* называется множество

$$C(E,\, f) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n :\, \exists\, x_0 \in E : y = \lim_{m\to\infty} f(x_m), x_m \to x_0 \right\} . \qquad (2.1.2)$$

Следующий результат принадлежит Т. Иванцу и Г. Мартину [175, гл. VII, теорема 1.19], также [75, теорема 17.3.1].

Предложение 2.1.5. *Найдется положительное число $\alpha = \alpha(n, K)$, $0 < \alpha < n$, где K — постоянная из п. 3) определения 1.2.1, а n — размерность пространства, такие, что каждое ограниченное отображение $f : D \backslash F \to \mathbb{R}^n$ с ограниченным искажением имеет непрерывное продолжение $\overline{f} : D \to \mathbb{R}^n$, также являющееся отображением с ограниченным искажением с той же постоянной квазиконформности K, как только хаусдорфова размерность $\dim_{\mathcal{H}} F$ замкнутого множества $F \subset D$ станет меньше α.*

2.1.7. В заключение упомянем о результатах, связанных с устранением особенностей Q-гомеоморфизмов (см. работы А.А. Игнатьева и В.И. Рязанова [72, 73], посвященные исследованию в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а также работу В.И. Рязанова и Р.Р. Салимова [189], где изучен вопрос об устранении особенностей Q-гомеоморфизмов на метрических пространствах). Также указанные результаты приведены в [125, главы 6 и 13].

Отметим, что в упомянутых выше исследованиях речь идет об устранении особенностей гомеоморфизмов, но никак не отображений, допускающих точки ветвления. Автором данной монографии аналогичные результаты получены для отображений, которые предполагаются просто открытыми и дискретными, но могут быть не инъективными. Основную роль при их доказательстве играет техника поднятий, которая задействована в главе 1.

Устранение особенностей Q-отображений, как в случае гомоморфизмов, так и в более общем случае открытых дискретных отображений, тесно связано с весьма специфическими условиями на функцию Q. Как показано в дальнейшем, для устранения изолированной особенности кольцевых Q-отображений условия локальной интегрируемости функции Q может оказаться недостаточно. В связи с этим приходится вводить в рассмотрение некоторые требования на функцию Q, отличные от требования $Q \in L^p_{loc}$ (локальной интегрируемости функции Q в некоторой степени p, большей единицы, также не хватает для доказательства требуемых утверждений). Одним из подобных специфических условий есть свойство функции Q конечного среднего колебания в некоторой фиксированной точке, которое является обобщением понятия ограниченного среднего колебания по Ф. Джону и Л. Ниренбергу [78] и играющего значительную роль в теоремах об устранении особенностей Q-гомеоморфизмов [123, гл. 7], [124, гл. 4, 5], [125, гл. 5, § 5.4].

2.2. Основная лемма об устранении особенностей кольцевых Q-отображений

2.2.1. Как известно, модуль семейства кривых Γ, проходящих через любую фиксированную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, равен нулю [281, § 7.9]. Однако, к сожалению, если отображение $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ не обладает в некотором смысле достаточно хорошими свойствами, то условие $M(f(\Gamma)) = 0$ может нарушаться. (Подробнее об этом см. далее). Условие сохранения модуля нуль при отображении довольно часто является ключом к ответу на вопрос, когда отображение $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ имеет в точке x_0 конечный или бесконечный предел. Именно поэтому необходимо изучить вопрос, при каких условиях на функцию Q открытое дискретное кольцевое Q-отображение $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $x_0 \in D$ обладает подобным свойством. В следующей лемме (формулировка которой в общем случае несколько громоздкая) изложены некоторые представления о достаточных условиях, когда импликация $M(f(\Gamma)) = 0$ для указанных семейств кривых Γ имеет место.

Лемма 2.2.1. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, является кольцевым Q-отображением (не обязательно дискретным или открытым). Предположим, что найдется $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t) : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ со следующим свойством. Для любого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2]$ такое, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_2) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_2} \psi(t)dt < \infty \tag{2.2.1}$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и, кроме того, при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) \;=\; o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right)\,. \tag{2.2.2}$$

Если Γ — *семейство всех открытых кривых* $\gamma(t) : (0,1) \to D \setminus \{x_0\}$ *таких, что* $\gamma(t_k) \to x_0$ *при некоторой последовательности* $t_k \to 0$, $\gamma(t) \not\equiv x_0$, *то* $M(f(\Gamma)) = 0$.

В частности, условие (2.2.1) автоматически выполняется, как только функция $\psi \in L^1_{loc}(0, \varepsilon_0)$ удовлетворяет условию: $\psi(t) > 0$ при почти всех $t \in (0, \varepsilon_0)$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $x_0 = 0$. Отметим, что

$$\Gamma > \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\,, \tag{2.2.3}$$

где Γ_i — семейство кривых $\alpha_i(t) : (0,1) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\alpha_i(1) \in \{0 < |x| = r_i < \varepsilon_0\}$, где r_i — некоторая последовательность такая, что $r_i \to 0$ при $i \to \infty$ и $\alpha_i(t_k) \to 0$ при $k \to \infty$ для той же последовательности $t_k \to 0$ при $k \to \infty$. Зафиксируем $i \geq 1$. По соотношению (2.2.1) леммы найдется $\varepsilon_1 \in (0, r_i]$ такое, что $I(\varepsilon, r_i) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Отметим, что при указанных $\varepsilon > 0$ функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon, r_i), & t \in (\varepsilon, r_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, r_i) \end{cases}$$

удовлетворяет условию нормировки вида (1.3.3) в кольце $A(\varepsilon, r_i, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < r_i\}$ и, следовательно, ввиду соотношения (1.3.2) (поскольку f является кольцевым Q-отображением в нуле)

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S(0,\varepsilon),\, S(0,r_i),\, A(\varepsilon, r_i, 0)\right)\right)\right) \leq$$

$$\leq \int\limits_{A(\varepsilon, r_i, 0)} Q(x) \cdot \eta^n(|x|)\; dm(x)\; \leq \mathfrak{F}_i(\varepsilon), \tag{2.2.4}$$

где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = \dfrac{1}{(I(\varepsilon, r_i))^n} \int\limits_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x)\, \psi^n(|x|)\, dm(x)$. Принимая во внимание (2.2.2), получаем, что $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Отметим, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\Gamma_i > \Gamma\left(S(0,\varepsilon),\, S(0,r_i),\, A(\varepsilon, r_i, 0)\right)\,. \tag{2.2.5}$$

Таким образом, при каждом фиксированном $i = 1, 2, \ldots$ из (2.2.4) и (2.2.5) получаем

$$M(f(\Gamma_i)) \leq \mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0 \tag{2.2.6}$$

при $\varepsilon \to 0$ и каждом фиксированном $i \in \mathbb{N}$. Однако левая часть неравенства (2.2.6) не зависит от ε и, следовательно, $M(f(\Gamma_i)) = 0$. Наконец, из (2.2.3) и свойства полуаддитивности модуля (1.1.6) вытекает, что $M(f(\Gamma)) = 0$. $\Box$

2.2.2. Напомним следующее определение.

Определение 2.2.1. Связный компакт $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ будем называть *континуумом.*

Имеет место следующее утверждение [116, лемма 3.11]; [175, гл. III, лемма 2.6].

Предложение 2.2.1. *Предположим, что E — компактное собственное подмножество $\overline{\mathbb{R}^n}$ такое, что* cap $E > 0$. *Тогда для каждого $a > 0$ существует положительное число $\delta > 0$ такое, что* cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E,\, C\right) \geq \delta$, *где C — произвольный континуум в $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ такой, что $h(C) \geq a$.*

2.2.3. Основным техническим утверждением, позволяющим получать результаты об устранимых особенностях открытых дискретных кольцевых Q-отображений в наиболее общей ситуации, является следующая лемма.

Лемма 2.2.2. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$, удовлетворяющее условию* cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)\right) > 0$. *Предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < 1$ и измеримая по Лебегу функция $\psi : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2]$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено соотношение (2.2.1) и, кроме того, при $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|)\; dm(x) \;=\; o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right)\,, \tag{2.2.7}$$

т.е. соотношение (2.2.2) выполнено при $x_0 = 0$. Тогда f имеет непрерывное продолжение $\underline{f} : \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в $\mathbb{B}^n$. Непрерывность понимается в смысле пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно хордальной метрики h.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $\infty \notin f\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)$. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0 = 0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, $x_j \to 0$, $\quad x_j' \to 0$, такие, что $h\left(f(x_j),\, f(x_j')\right) \geq a > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что x_j и x_j' лежат внутри шара $B(0, \varepsilon_0)$. Полагаем $r_j = \max\left\{|x_j|,\, |x_j'|\right\}$. Соединим точки x_j и x_j' замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(0, r_j)} \setminus \{0\}$. Обозначим эту кривую символом C_j и рассмотрим конденсатор $E_j = (\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\ , C_j)$. В силу открытости и непрерывности отображения f пара $f(E_j)$ также является конденсатором. Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и $\Gamma_{f(E_j)}$ (см. обозначения предложения 1.4.1). Пусть Γ_j^* — семейство всех максимальных поднятий семейства кривых $\Gamma_{f(E_j)}$ при отображении f с началом в C_j, лежащих в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Рассуждая так же, как в лемме 1.4.1, имеем $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$. Поскольку $\Gamma_{f(E_j)} > f(\Gamma_j^*)$, получаем

$$M\left(\Gamma_{f(E_j)}\right) \le M\left(f(\Gamma_j^*)\right) \le M\left(f(\Gamma_{E_j})\right)\ . \tag{2.2.8}$$

Семейство Γ_{E_j} может быть разбито на два подсемейства:

$$\Gamma_{E_j}\ =\ \Gamma_{E_{j_1}} \cup \Gamma_{E_{j_2}}\ , \tag{2.2.9}$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ — семейство всех кривых $\alpha(t) : [a,\, c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k \in [a,\, c) : \alpha(t_k) \to 0$ при $t_k \to c-0$; $\Gamma_{E_{j_2}}$ — семейство всех кривых $\alpha(t) : [a,\, c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k \in [a,\, c) : \mathrm{dist}\,(\alpha(t_k), \partial\mathbb{B}^n) \to 0$ при $t_k \to c-0$.

В силу соотношений (2.2.8) и (2.2.9)

$$M\left(\Gamma_{f(E_j)}\right) \le M(f(\Gamma_{E_{j_1}}))\ +\ M(f(\Gamma_{E_{j_2}}))\,. \tag{2.2.10}$$

Отметим, что $M(f(\Gamma_{E_{j_1}})) = 0$ ввиду леммы 2.2.1. Кроме того, при достаточно больших $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{E_{j_2}} > \Gamma(S(0,r_j), S(0,\varepsilon_0 - \dfrac{1}{m}), A(r_j,\varepsilon_0 - \dfrac{1}{m}, 0))$. Рассмотрим теперь кольцо $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : r_j < |x| < \varepsilon_0 - \dfrac{1}{m}\}$ и семейство функций

$$\eta_j(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_j, \varepsilon_0 - \dfrac{1}{m}), & t \in (r_j,\, \varepsilon_0 - \frac{1}{m}), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_j,\, \varepsilon_0 - \frac{1}{m}) \end{cases}.$$

Имеем: $\displaystyle\int\limits_{r_j}^{\varepsilon_0 - \frac{1}{m}} \eta_j(t)dt\ =\ \frac{1}{I\left(r_j, \varepsilon_0 - \dfrac{1}{m}\right)} \int\limits_{r_j}^{\varepsilon_0 - \frac{1}{m}} \psi(t)dt\ =\ 1.$ Таким образом, по определению кольцевого Q-отображения в нуле и условию (2.2.10) получаем

$$M(f(\Gamma_{E_j})) \le\ \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_0 - \dfrac{1}{m})^n} \int\limits_{r_j < |x| < \varepsilon_0} Q(x)\, \psi^n(|x|)\, dm(x)\,,$$

откуда, переходя к пределу при $m \to \infty$, имеем соотношение

$$M(f(\Gamma_{E_j})) \leq \mathcal{S}(r_j) := \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_0)^n} \int\limits_{r_j<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^n(|x|)\, dm(x).$$

В силу условия (2.2.7), $\mathcal{S}(r_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Окончательно, по предложению 1.4.1 cap $f(E_j) \to 0$ при $j \to \infty$. С другой стороны, по предложению 2.2.1 cap $f(E_j) \geq \delta > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие опровергает предположение, что f не имеет предела при $x \to 0$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$. $\Box$

2.3. Функции ограниченного и конечного среднего колебания. Основные результаты об устранении особенностей

2.3.1. Как видно, соотношения (2.2.1) и (2.2.2) не имеют никакого непосредственного отношения к отображениям f, а фактически относятся только к функции Q, определяющей Q-отображение. При одних функциях Q можно указать функцию ψ, для которой эти соотношения будут выполнены, при других — нет. В связи с этим попытаемся более подробно изучить конкретные классы функций Q, которые будут удовлетворять условиям такого типа. Отметим также, что приведенные леммы 2.2.1 и 2.2.2 являются в большей или меньшей степени формальными утверждениями, поскольку на практике "вручную" подобрать функцию ψ, удовлетворяющую условиям вида (2.2.1) и (2.2.2) для конкретной заданной функции Q может оказаться непросто по вполне понятным причинам. Однако достаточно широкие классы функций Q (принадлежность к которым устанавливается сравнительно легко) удовлетворяют указанным соотношениям. Примеры таких классов функций рассмотрены далее.

2.3.2. Приведем следующие определения.

Определение 2.3.1. Напомним, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $\varphi \in L^1_{loc}(D)$, имеет *ограниченное среднее колебание* в области D, $\varphi \in BMO$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B\subset D} \frac{1}{m(B)} \int\limits_B |\varphi(x) - \varphi_B|\, dm(x) < \infty\,, \tag{2.3.1}$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B \subset D$ и

$$\varphi_B = \frac{1}{m(B)} \int\limits_B \varphi(x)\, dm(x)$$

— среднее значение функции φ на шаре B [78].

Отметим, что, например, все постоянные функции принадлежат классу BMO. Кроме того,

$$L^{\infty}(D) \subset BMO(D) \subset L^p_{loc}(D) \tag{2.3.2}$$

[125, § B, следствие B.1].

2.3.3. В определении класса BMO точная верхняя грань берется по всем шарам B из области D, что делает оценку (2.3.1) равномерной по всей области. Следующий класс функций, введенный А. Игнатьевым и В. Рязановым, является более общим, чем класс BMO и позволяет локализовать это понятие [72], [125, гл. 6, § 6.1].

Определение 2.3.2. Функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_{\varepsilon}|\; dm(x) < \infty\,, \tag{2.3.3}$$

где

$$\overline{\varphi}_{\varepsilon} = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)\,.$$

Как известно, $\Omega_n \varepsilon^n = m(B(x_0, \varepsilon))$ и при выполнении условия (2.3.3) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi_{\varepsilon}} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Также $\varphi : D \to \mathbb{R}$ — функция конечного среднего колебания в области D, обозначаем $\varphi \in$ $\in FMO(D)$, или просто $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$. В частности, если в точке $x_0 \in D$ выполнено соотношение $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{m(B(x_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\, \varepsilon)} |\varphi(x)|\, dm(x) < \infty$, то функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0. Очевидно, $BMO \subset FMO$. Отметим, что $FMO \neq BMO_{loc}$ [125, гл. 11, § 11.2, с. 210, 211].

2.3.4. Для дальнейшего изложения крайне важным является следующее утверждение [72, следствие 2.3], [125, гл. 6, лемма 6.1].

Предложение 2.3.1. *Пусть $\varphi : D \to \mathbb{R}, n \geq 2,$ — неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $0 \in D$. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\,dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

при $\varepsilon \to 0$ и для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \leq \operatorname{dist}\,(0, \partial D)$. При этом при $n \geq 3$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\,dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} < \infty\,,$$

см. там же.

2.3.5. Теперь можно сформулировать утверждение, из которого видно, какие именно функции Q удовлетворяют условиям (2.2.1) и (2.2.2) леммы 2.2.1. Здесь и далее $q_{x_0}(r)$ определено соотношением (1.1.25).

Лемма 2.3.1. *Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$, удовлетворяющая, по крайней мере, одному из следующих условий:*

1) $Q \in FMO(x_0)$;

2) при некотором $C > 0$ и $r \to 0$

$$q_{x_0}(r) \leq C\left(\log\frac{1}{r}\right)^{n-1};$$

3) при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}\,(x_0, \partial D)$, и произвольных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty \tag{2.3.4}$$

и

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty\,. \tag{2.3.5}$$

Тогда найдутся $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и функция $\psi(t) \geq 0$ такие, что в точке x_0 будут выполнены условия (2.2.1) и (2.2.2) леммы 2.2.1.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0=0$. Заключение леммы 2.3.1 в случае $Q\in FMO$ следует из предложения 2.3.1, поскольку в этом случае при некотором $\varepsilon_0>0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\ dm(x)=O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\,, \tag{2.3.6}$$

где $\psi(t):=\frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$. Отметим также, что в обозначениях леммы 2.2.1

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt=\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}. \tag{2.3.7}$$

Соотношение (2.2.1) выполняется, поскольку указанная функция ψ всюду положительна при достаточно малом $\varepsilon_0>0$ и непрерывна на $(\varepsilon,\varepsilon_0)$, какие бы ни были $0<\varepsilon<\varepsilon_0<1$. Таким образом, из соотношения (2.3.6) вытекает

$$\frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)}\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\ dm(x)\le C\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-n}\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$, что завершает рассмотрение случая 1).

Рассмотрим случай 2). Пусть теперь $q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r\to 0$. Зафиксируем $\varepsilon_0<\min\{\ \mathrm{dist}\ (0,\partial D)\,,\ 1\}$ и полагаем $\psi(t)=$ $=\dfrac{1}{t\ \log\frac{1}{t}}$. Используя теорему Фубини и переходя от интеграла по области к повторному интегралу по сфере и отрезку, отметим

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\ dm(x)=\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0}\frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}=$$

$$=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\int\limits_{|x|=r}\frac{Q(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}\,d\mathcal{A}\right)dr\le$$

$$\le C\omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{r\log\frac{1}{r}}=C\omega_{n-1}\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}\ \le\ C\omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0)\,, \tag{2.3.8}$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда снова вытекает, что $\frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\,dm(x) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Как приведено выше, соотношение (2.2.1) также выполняется, поскольку указанная функция ψ всюду положительна при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ и непрерывна на $(\varepsilon,\varepsilon_0)$, какие бы ни были $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < 1$. Таким образом, утверждение леммы в случае 2) также доказано.

Осталось рассмотреть случай 3). При каждом фиксированном $\varepsilon < < \varepsilon_0$, $\varepsilon > 0$, рассмотрим функцию $I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt$, где

$$\psi(t) \quad = \quad \begin{cases} 1/(tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t))\ , & t \in (\varepsilon,\varepsilon_0)\ , \\ 0\ , & t \notin (\varepsilon,\varepsilon_0)\ , \end{cases}$$

$q_0(r) = q_{x_0}(r)$, $x_0 := 0$. (Здесь, как обычно, полагаем $a/\infty = 0$ при $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ при $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ [203, гл. I, § 3, с. 18]). Отметим, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0) < \infty$ при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ ввиду условия (2.3.4). Кроме того, из (2.3.5), вытекает, что какое бы ни было достаточно малое число ε_2, всегда $I(\varepsilon,\varepsilon_2) > 0$ при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ и некотором $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_2)$. Кроме того, ψ удовлетворяет соотношению (2.2.2), поскольку прямое вычисление (при помощи теоремы Фубини) показывает

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\ dm(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\,dSdr =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \omega_{n-1} r^{n-1} q_0(r)\psi^n(r)dr = \omega_{n-1}\cdot \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\,, \qquad (2.3.9)$$

причем $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} = o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)$ ввиду (2.3.5). Лемма 2.3.1 полностью доказана. □

2.3.6. Напомним некоторые определения.

Определение 2.3.3. Точка $x_0 \in D$ называется *устранимой* для отображения $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то точка x_0 называется *полюсом.*

Точка $x_0 \in D$ называется *существенно особой точкой* отображения $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, если при $x \to x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела.

Основные результаты настоящего параграфа заключаются в следующем.

Теорема 2.3.1. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, удовлетворяющее условию* cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)\right) > 0$. *Предположим, что измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [0, \infty]$ удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:*

1) $Q \in FMO(x_0)$;

2) при некотором $C > 0$ и $r \to 0$

$$q_{x_0}(r) \leq C \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1} ; \tag{2.3.10}$$

3) при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, и произвольных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнены условия (2.3.4), (2.3.5). В таком случае f имеет непрерывное продолжение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, иными словами, точка x_0 является либо устранимой особой точкой, либо полюсом отображения f.

Доказательство теоремы 2.3.1 непосредственно вытекает из лемм 2.2.2 и 2.3.1. □

Из теоремы 2.3.1 непосредственно вытекают следующие следствия.

Следствие 2.3.1. *В частности, если*

$$\int\limits_{|x-x_0|<\varepsilon} Q(x)\, dm(x) \quad = \quad O(\varepsilon^n) \tag{2.3.11}$$

при $\varepsilon \to 0$, то f также имеет непрерывное продолжение в D.

Следствие 2.3.2. *Утверждение теоремы 2.3.1 имеет место, как только $Q \in BMO(D)$.*

2.3.7. Отметим, что все постоянные функции $Q(x) \equiv const$ удовлетворяют каждому из условий 1)—3) леммы 2.3.1, так что из приведенных выше утверждений вытекают соответствующие известные результаты для отображений с ограниченным искажением [116], [175, гл. III, § 2].

2.4. Аналоги теорем Сохоцкого—Вейерштрасса и Лиувилля

2.4.1. Из теоремы 2.3.1 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 2.4.1. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий: (2.3.4), (2.3.5) или (2.3.10). Если x_0 — существенная особая точка отображения f, то*

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(U \setminus \{x_0\}\right)\right) = 0$$

для любой окрестности U точки x_0.

Теорема 2.4.2. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий: (2.3.4), (2.3.5) или (2.3.10). Тогда точка x_0 является устранимой для отображения f в том и только том случае, когда отображение f ограничено в некоторой окрестности U точки x_0.*

Доказательство. Предположим, что точка x_0 устранима, т.е. существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A < \infty$. Тогда $|f(x)| \le |A|+1$ в достаточно малой окрестности U точки x_0. Обратно, пусть существует окрестность U точки x_0 такая, что $|f(x)| \le M$ для некоторого $M \in (0, \infty)$ и всех $x \in U \setminus \{x_0\}$. Тогда $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(U \setminus \{x_0\}\right)\right) > 0$ и необходимое заключение следует из теоремы 2.3.1. $\Box$

Теорема 2.4.3. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий: (2.3.4), (2.3.5) или (2.3.10). Если $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(U \setminus \{x_0\}\right)\right) > 0$ для некоторой окрестности U точки x_0, то f может быть непрерывным образом продолжено до открытого дискретного кольцевого Q-отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$.*

Доказательство. Действительно, f продолжается до непрерывного отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в силу теоремы 2.3.1. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(x_0) \ne \infty$ и что $f(x) \ne \infty$ для всех $x \in D$. Покажем вначале, что отображение f сохраняет ориентацию в области D и что f является нульмерным, т.е. что любая компонента связности множества $f^{-1}(y)$ вырождается в точку для всякого $y \in \mathbb{R}^n$ (см. определение 1.1.4).

Известно, что дискретные открытые отображения в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, либо сохраняют ориентацию, либо антисохраняют [175, гл. I, § 4]. Пусть f для определенности сохраняет ориентацию. Обозначим, как обычно, через $B_f\,(D \setminus \{x_0\})$ множество точек ветвления отображения f в области $D \setminus \{x_0\}$, а через $B_f(D)$ — множество точек ветвления отображения f в области D. Если x_0 — точка локальной гомеоморфности отображения f, то доказывать нечего. Пусть точка $x_0 \in B_f(D)$. По теореме Чернавского $\dim B_f\,(D \setminus \{x_0\}) = \dim f\,(B_f\,(D \setminus \{x_0\})) \leq n-2$ [175, гл. I, теорема 4.6], где dim обозначает топологическую размерность множества [70]. Тогда получим

$$\dim f\,(B_f(D)) \leq n-2\,, \tag{2.4.1}$$

так как $f\,(B_f(D)) = f\,(B_f\,(D \setminus \{x_0\}))\bigcup\{f(x_0)\}$, множество $\{f(x_0)\}$ замкнуто и топологическая размерность каждого из множеств $f\,(B_f\,(D \setminus \{x_0\}))$ и $\{f(x_0)\}$ не превышает $n-2$ [70, гл. III, § 3, следствие 1]. Пусть G — область в D такая, что $\overline{G} \subset D$ и пусть $y \in$ $\in f(G) \setminus f(\partial G)$. Тогда в силу (2.4.1) найдется точка $y_0 \notin f\,(B_f\,(D))$, принадлежащая той же компоненте связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$, что и y. В силу того, что топологический индекс есть величина постоянная на каждой связной компоненте множества $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial G)$ [168, гл. I, § 2], имеем

$$\mu(y, f, G) = \mu(y_0, f, G) = \sum_{x\,\in\, G\cap\{f^{\,-1}(y_0)\}} i(x, f) > 0\,.$$

Таким образом, отображение f сохраняет ориентацию в D. Наконец, для любого $y \in f(D)$ в силу дискретности отображения f в области D множество $\{f^{\,-1}(y)\}$ не более чем счетно и поэтому $\dim\,\{f^{\,-1}(y)\} = 0$. Следовательно, согласно [273, с. 333] отображение f открыто и дискретно, что и требовалось доказать. $\Box$

2.4.2. Следующая теорема хорошо известна из общего курса комплексного анализа для аналитических функций. Удивителен тот факт, что аналогичное утверждение имеет место и для произвольных открытых дискретных кольцевых Q-отображений.

Теорема 2.4.4. *(Аналог теоремы Сохоцкого—Вейерштрасса). Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий: (2.3.4), (2.3.5) или (2.3.10). Если x_0 — существенно особая точка отображения f, то* *для любого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ найдется последовательность $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$ такая, что $f(x_k) \to a$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Допустим, что заключение теоремы неверно для некоторого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда существуют окрестность U точки x_0 и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$h\,(f(x),\,a)\,\geq \varepsilon_0 \qquad \forall\; x \in U \setminus \{x_0\}$$

и по неравенству треугольника $d_0 = h\,(B^*\,(a,\,\varepsilon_0/2)\,,\,f\,(U \setminus \{x_0\}))\geq\varepsilon_0/2$, где $B^*(a,\,\varepsilon_0/2) = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x,a) < \varepsilon_0/2\}$ — сферический шар с центром в точке a и радиуса $\varepsilon_0/2$. Следовательно, $\mathrm{cap}\big(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(U\setminus\{x_0\})\big) >$ > 0. Отсюда согласно теореме 2.3.1 следует существование предела (конечного или бесконечного) отображения f в точке x_0, что противоречит первоначальному предположению. □

2.4.3. Таким образом, показано, что открытые дискретные кольцевые Q-отображения, имеющие существенно особую точку, достигают в пределе любое значение в $\overline{\mathbb{R}^n}$, как только функция Q удовлетворяет некоторым специальным условиям. Ниже мы значительно усилим полученный результат, т.е. покажем, что указанные отображения не только достигают в пределе, но и принимают в произвольной окрестности существенно особой точки любое значение в $\overline{\mathbb{R}^n}$, кроме, может быть, значения некоторого множества типа F_σ, имеющего емкость нуль. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4.5. *(Усиленный вариант аналога теоремы Сохоцкого—Вейерштрасса). Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий: (2.3.4)—(2.3.5) или (2.3.10). Если x_0 — существенно особая точка отображения f, то существует множество $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ типа F_σ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ емкости нуль такое, что*

$$N\,(y,f,U \setminus \{x_0\}) = \infty$$

для любой окрестности U точки x_0 и для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$.

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность точки x_0. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $U = \mathbb{B}^n$. Рассмотрим множества $V_k = B(0,1/k) \setminus \{0\}\,,\ k = 1,2,\ldots.$ Полагаем

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty}\ \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k)\,. \tag{2.4.2}$$

Согласно теореме 2.3.1 каждое из множеств $B_k := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k)$ в объединении правой части соотношения (2.4.2) имеет емкость нуль. Тогда C также имеет емкость нуль [46, гл. III, § 1.3, следствие в п. 3]. Фиксируем $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$. Тогда

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(V_k)\,. \tag{2.4.3}$$

Из (2.4.3) вытекает существование последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $x_i \to 0$ при $i \to \infty$ и $f(x_i) = y$, $i = 1, 2, \ldots$. Теорема 2.4.5 доказана. $\Box$

2.4.4. Следующие рассматриваемые вопросы связаны с поведением Q-отображений на бесконечности. Для этой цели сделаем необходимые замечания.

Пусть теперь D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, содержащая внешность некоторого шара $B(0, r_0)$, $r_0 > 0$. Функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, если функция $\varphi^*(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ имеет конечное среднее колебание в точке 0. Отметим, что

$$|J(x, \psi)| = (1/|x|)^{2n}$$

(это может быть доказано, например, на основании предложения 1.1.1 и соотношений в (1.1.13)). Согласно приведенному выше, используя замену переменной в интеграле, переформулируем определение конечного среднего колебания в точке ∞. Функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, $\varphi \in FMO(\infty)$, если при $R \to \infty$

$$\int\limits_{|x|>R} |\varphi(x) - \varphi_R| \quad \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} \quad = \quad O\left(\frac{1}{R^n}\right),$$

где $\varphi_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \cdot \int\limits_{|x|>R} \varphi(x) \quad \frac{dm(x)}{|x|^{2n}}$. Аналогично, для бесконечности можно переформулировать условия вида (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.10) соответственно:

$$\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty\,, \tag{2.4.4}$$

$$\int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty \tag{2.4.5}$$

и

$$q_0(R) \quad = \quad O\left([\log R]^{n-1}\right)\ . \tag{2.4.6}$$

Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q-отображение в точке* $x_0 = \infty$, если отображение $\widetilde{f} = f\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right)$ является кольцевым Q'-отображением в точке $x_0 = 0$, где $Q' = Q\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right)$. Иначе, отображение $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ будем называть кольцевым Q-отображением в точке $x_0 = \infty$, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S(0,R_1), S(0,R_2), A\right)\right)\right) \le \int\limits_A Q(y)\cdot\eta^n\left(|y|\right) dm(y)$$

выполнено в кольце $A = A(R_1, R_2, 0) = \{R_1 < |y| < R_2\}$ для произвольных $0 < R_1 < R_2 < \infty$ и произвольной неотрицательной измеримой функции $\eta : (R_1, R_2) \to [0,\infty]$ такой, что $\int\limits_{R_1}^{R_2} \eta(r)dr \ge 1$.

2.4.5. Теперь на основании теоремы 2.3.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2.4.6. *(Аналог теоремы Лиувилля). Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = \infty$, функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий: (2.4.4), (2.4.5) либо (2.4.6). Тогда* cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{R}^n\right)\right) = 0$. *В частности, f не может отображать все $\mathbb{R}^n$ на ограниченную область (рис. 7).*

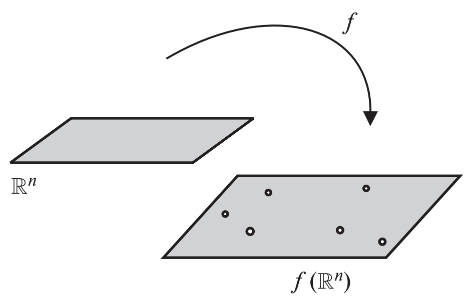

Рис. 7. Аналог теоремы Лиувилля для кольцевых Q-отображений

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\mathrm{cap}\,\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{R}^n\right)\right) > > 0$. Тогда в силу теоремы 2.4.3 отображение f продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения $f : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$. В таком случае множество $f\left(\overline{\mathbb{R}^n}\right)$ одновременно открыто и замкнуто в $\overline{\mathbb{R}^n}$, откуда следует, что $f(\overline{\mathbb{R}^n}) = \overline{\mathbb{R}^n}$. Однако, последнее противоречит сделанному предположению, что $\mathrm{cap}\,\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{R}^n\right)\right) > 0$. □

2.5. Включение плоских $W_{loc}^{1,1}$-гомеоморфизмов с конечным искажением в класс кольцевых Q-отображений

2.5.1. В настоящем параграфе рассмотрена важнейшая для дальнейшего изложения, а также приложений, связь. Показано, что гомеоморфизмы класса $W_{loc}^{1,1}$ с конечным искажением вложены в класс кольцевых Q-отображений при Q, равной максимальной дилатации $K_\mu(z)$ (см. (1.9.7)). Данное утверждение справедливо даже без дополнительного предположения о регулярности указанных гомеоморфизмов, т.е. без дополнительного требования, что $J(f,z) \neq 0$ почти всюду. Однако условие принадлежности отображения f классу отображений с конечным искажением, по-видимому, является существенным (см. определение 1.7.2).

2.5.2. Чтобы сформулировать и доказать основные результаты параграфа, нам понадобится вспомогательная техника и определения.

Прежде всего, по аналогии с семействами кривых введем в рассмотрение понятие допустимой функции и модуля семейств поверхностей.

Определение 2.5.1. Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелевская функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, $\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathcal{A} \geq 1 \qquad (2.5.1)$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. *Модулем* Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, dm(x)\,.$$

Как и в случае семейств кривых, модуль M, определенный соотношением (2.5.1), является внешней мерой, заданной на пространстве k-мерных поверхностей (см. п. 1.1.3).

Определение 2.5.2. Некоторое свойство выполнено для *почти всех поверхностей* области D, если оно имеет место для всех поверхностей, лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их подсемейства, модуль которого равен нулю. В частности, некоторое свойство выполнено для *почти всех кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их подсемейства, модуль которого равен нулю.

Определение 2.5.3. Измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to \to [0, \infty]$ является *обобщенно допустимой* для семейства поверхностей Γ, $\rho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$, если соотношение (1.1.4) выполнено для почти всех кривых $\gamma \in \Gamma$.

Определение 2.5.4. *Обобщенным модулем* $\overline{M}(\Gamma)$ семейства Γ называется величина

$$\overline{M}(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, dm(x)\,.$$

Очевидно, что

$$\overline{M}(\Gamma) = M(\Gamma)\,.$$

Некоторые понятия, такие, как выполнение некого свойства для "почти всех кривых" и "почти всех поверхностей", в различных источниках могут иметь разный смысл. Например, при рассмотрении понятия ACL мы имели ввиду это свойство относительно меры проекции некоторого семейства отрезков на соответствующую гиперплоскость (см. определение 1.1.14). В то же время, при изучении многих вопросов удобно использовать выражение "почти всех" именно в смысле определения 2.5.2. Следующее утверждение вносит некоторую ясность относительно связи между различными интерпретациями указанного словосочетания. Это утверждение можно доказать полностью по аналогии с [125, лемма 9.1].

Лемма 2.5.1. *Пусть $x_0 \in D$. Если некоторое свойство P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$, где "почти всех" понимается в смысле модуля семейств поверхностей (см. определение 2.5.2), то P также имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r)$ по отношению к параметру $r \in \mathbb{R}$. Обратно, пусть P имеет место для почти всех r и всех соответствующих этим r множеств $D(x_0, r)$, $r \in \mathbb{R}$, тогда P также выполняется для почти всех поверхностей $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ в смысле определения 2.5.2.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть некоторое свойство P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$, где "почти всех" понимается в смысле модуля семейств поверхностей (см. определение 2.5.2). Покажем, что P также имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r)$ по отношению к параметру $r \in \mathbb{R}$.

Достаточно рассмотреть случай, когда область D ограничена. Предположим, что заключение леммы не является верным. Тогда найдется семейство Γ сфер $D(x_0, r)$, для которого свойство P выполнено в смысле почти всех поверхностей относительно модуля, однако нарушается для некоторого множества индексов $r \in \mathbb{R}$ положительной меры.

Ввиду регулярности меры Лебега m_1 найдется борелевское множество $B \subset \mathbb{R}$ такое, что $m_1(B) > 0$ и свойство P нарушается для почти всех $r \in B$. Пусть $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — допустимая функция для семейства Γ. Учитывая, что B — борелево, можно считать, что $\rho \equiv 0$ вне $E = \{x \in D : \exists\, r \in B : |x - x_0| = r\}$. По неравенству Гельдера

$$\int\limits_E \rho^{n-1}(x)\ dm(x)\ \le\ \left(\int\limits_E \rho^n(x)\ dm(x)\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int\limits_E\ dm(x)\right)^{\frac{1}{n}}$$

и, следовательно, ввиду теоремы Фубини [203, гл. III, теорема 8.1]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\ dm(x)\ \ge\ \frac{\left(\int\limits_E \rho^{n-1}(x)\ dm(x)\right)^{\frac{n}{n-1}}}{\left(\int\limits_E\ dm(x)\right)^{\frac{1}{n-1}}}\ \ge\ \frac{(m_1(B))^{\frac{n}{n-1}}}{c}$$

для некоторого $c > 0$, т.е. $M(\Gamma) > 0$, что противоречит предположению леммы. Первая часть леммы 2.5.1 доказана.

Достаточность. Пусть P имеет место для почти всех r и всех соответствующих этим r сфер $D(x_0, r)$, $r \in \mathbb{R}$. Покажем, что P также выполняется для почти всех поверхностей $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ в смысле определения 2.5.2.

Обозначим через Γ_0 семейство всех пересечений $D_r := D(x_0, r)$ сфер $S(x_0, r)$ с областью D, для которых P не имеет места. Пусть R обозначает множество всех $r \in \mathbb{R}$ таких, что $D_r \in \Gamma_0$. Если $m_1(R) = 0$, то по теореме Фубини мы получаем, что $m(E) = 0$, где $E = \{x \in D : |x - x_0| = r \in R\}$. Отметим, что функция $\rho_1 : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, определенная символом ∞ при $x \in E$ и доопределенная нулем в остальных точках, является обобщенно допустимой для Γ_0. Таким образом, $M(\Gamma_0) \leq \int\limits_{E} \rho_1^n dm(x) = 0$, следовательно, $M(\Gamma_0) = 0$. Лемма 2.5.1 полностью доказана.

2.5.3. Для того, чтобы получить интересующее нас утверждение о связи некоторого подкласса $W_{loc}^{1,1}$-гомеоморфизмов с кольцевыми Q-отображениями, укажем вначале на его отношение к так называемым нижним Q-гомеоморфизмам. (Возможно, что это не единственный способ рассмотрения вопроса о данной связи, а лишь выбранная нами тактика рассуждений).

Вкратце, отображение является нижним Q-отображением, если модуль отображенных семейств кривых при нем имеет некоторую оценку снизу (иначе, несколько похожее на (1.3.2) неравенство выполнено в обратную сторону).

Следующее определение мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу в [31], [125, глава 9]. Пусть D и D' — заданные области в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $n \geq 2$, $z_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Будем считать, что $f : D \to D'$ — *нижнее Q-отображение в точке* z_0, как только

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \inf_{\rho \in \operatorname{ext\,adm} \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap R_\varepsilon} \frac{\rho^2(z)}{Q(z)}\, dm(z)$$

для каждого кольца $A(\varepsilon, \varepsilon, z_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$, где Σ_ε обозначает семейство всех пересечений окружностей

$$S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}, \qquad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0),$$

с областью D.

Имеет место следующее утверждение [125, теорема 9.2].

Предложение 2.5.1. *Пусть D, $D' \subset \overline{\mathbb{C}}$, $z_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ является нижним Q-гомеоморфизмом в точке z_0 тогда и только тогда, когда*

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||\, Q||_1(r)} \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0, d_0),$$

где

$$\|Q\|_1(r) = \int\limits_{D(z_0, r)} Q(z)\, d\mathcal{A}$$

— *L_1-норма функции Q над окружностью $D(z_0,r) = \{z \in D : |z-z_0| = r\} = D \cap S(z_0,r)$.*

Напомним еще одно определение.

Определение 2.5.5. Отображение $\varphi : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым,* если $\mathrm{dist}\,(\varphi(x_1),\, \varphi(x_2)) \leq M \cdot \mathrm{dist}\,(x_1,\, x_2)$ при некоторой постоянной $M < \infty$ и всех $x_1, x_2 \in X$. Отображение $\varphi : X \to Y$ называется *билипшицевым,* если, во-первых, оно является липшицевым, во-вторых, $M^*{\cdot}\mathrm{dist}\,(x_1,\, x_2) \leq \mathrm{dist}\,(\varphi(x_1),\, \varphi(x_2))$ при некоторой постоянной $M^* > 0$ и всех $x_1, x_2 \in X$. Далее $X := D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $Y := \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{dist}\,(x_1, x_2) := |x_1 - x_2|$.

Укажем теперь на связь гомеоморфизмов конечного искажения класса Соболева с нижними Q-гомеоморфизмами.

Теорема 2.5.1. *Каждый гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ конечного искажения класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ является нижним Q-отображением в произвольной точке $z_0 \in \overline{D}$ при $Q(z) = K_\mu(z)$, где $K_\mu(z)$ определено соотношением (1.9.7).*

Доказательство. Отметим, что f дифференцируемо почти всюду [108, гл. III, § 3, теорема 3.1]. Пусть B — борелево множество всех точек $z \in D$, где f имеет полный дифференциал $f'(z)$ и $J(z,f) \neq 0$. Множество B может быть представлено в виде не более, чем счетного объединения борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, что $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами [28, п. 3.2.2, 3.1.4 и 3.1.8]. Без ограничения общности можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также символом B_* множество всех точек $z \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако, $f'(z) = 0$.

Поскольку f — конечного искажения (см. определение 1.7.2), $f'(z) = 0$ для почти всех точек z, где $J(z,f) = 0$. Таким образом, согласно построению и учитывая приведенное, множество $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ имеет нулевую меру Лебега. Следовательно, по [122, теорема 9.1] $\mathcal{H}^1(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех окружностей $S_r := S(z_0, r)$ с центром в точке $z_0 \in \overline{D}$, где $\mathcal{H}^1$ — как обычно, линейная мера Хаусдорфа, а "почти всех" следует понимать в смысле модуля семейств кривых. По лемме 2.5.1 также $\mathcal{H}^1(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим разбиение множества $D_* := B(z_0, \varepsilon_0) \cap D \setminus \{z_0\}$, $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$, на счетное число сферических сегментов A_k, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть φ_k — вспомогательная квазиизометрия, отображающая A_k на прямоугольник $\widetilde{A_k}$ такой, что дуги окружностей отображаются на отрезки прямых. (Например, можно взять в качестве $\varphi_k(\omega) = \log(\omega - z_0)$, $\omega \in A_k$). Рассмотрим семейство отображений $g_k = f \circ \varphi_k^{-1}$, $g_k : \widetilde{A_k} \to \mathbb{C}$. Отметим, что $g_k \in W^{1,1}_{\rm loc}$ [129, § 1.1.7], откуда, в частности, $g_k \in ACL$ (см. предложение 1.1.2). Поскольку абсолютная непрерывность на фиксированном отрезке влечет N-свойство относительно линейной меры Лебега [28, п. 2.10.13], то имеем $\mathcal{H}^1(f(B_0 \cap A_k \cap S_r)) = 0$ и, значит, ввиду полуаддитивности меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^1(f(B_0 \cap S_r)) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$.

Далее, покажем, что $\mathcal{H}^1(f(B_* \cap S_r)) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$. Действительно, пусть φ_k, g_k и A_k такие, как определено выше, $A_k = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, r \in (r_{k-1}, r_k), \varphi \in (\psi_{k-1}, \psi_k)\}$, и пусть $S_k(r)$ — часть сферы $S(z_0, r)$, принадлежащая сферическому сегменту A_k, т.е. $S_k(r) = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, \varphi \in (\psi_{k-1}, \psi_k)\}$. По построению φ_k отображает $S_k(r)$ на сегмент $I(k, r) = \{z \in \mathbb{C} : z = \log r + it, t \in (\psi_{k-1}, \psi_k)$. Применяя [28, теорема 3.2.5], получаем

$$\mathcal{H}^1(g_k(\varphi_k(B_* \cap S_k(r)))) = \int\limits_{\varphi_k(B_* \cap S_k(r))} |g_k'(r + te)|dt = 0$$

для почти всех $r \in (r_{k-1}, r_k)$. Следовательно, $\mathcal{H}^1(g_k(\varphi_k(B_* \cap S_k(r)))) = 0$ для почти всех $r \in (r_{k-1}, r_k)$. Из приведенного выше следует, что $\mathcal{H}^1(f(B_* \cap S_k(r))) = 0$ для почти всех $r \in (r_{k-1}, r_k)$. Ввиду полуаддитивности хаусдорфовой меры $\mathcal{H}^1(f(B_* \cap S_r)) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$, что и требовалось установить.

Пусть Γ — семейство всех пересечений окружностей S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$, с областью D. Для заданной допустимой функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0, и

$$\rho(z) \colon = \rho_*(f(z))\|f'(z)\| \qquad \text{for } z \in D \setminus B_0\,.$$

Для фиксированного множества $S_r^* \in f(\Gamma)$, $D_r^* = f(S_r \cap D)$, отметим

$$D_r^* = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} f(S_r \cap B_i) \bigcup f(S_r \cap B_*)\,,$$

и, следовательно, для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$

$$1 \le \int\limits_{S_r^*} \rho_*(y) d\mathcal{A}_* = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \int\limits_{f(S_r \cap B_i)} \rho_*(y) d\mathcal{H}^1 y + \qquad (2.5.2)$$

$$+\int\limits_{f(S_r\cap B_*)}\rho_*(y)d\mathcal{H}^1y\,.$$

Учитывая доказанное выше, из (2.5.2) получаем

$$1\le\int\limits_{S_r^*}\rho_*(y)d\mathcal{A}_*=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int\limits_{f(S_r\cap B_i)}\rho_*(y)d\mathcal{H}^1y \tag{2.5.3}$$

для $r\in(0,\varepsilon_0)$. Покусочно на B_i, $i=1,2,\ldots$, согласно [28, п. 1.7.6 и теорема 3.2.5] получаем

$$\int\limits_{B_i\cap S_r}\rho\,d\mathcal{A}=\int\limits_{B_i\cap S_r}\rho_*(f(z))\|f'(z)\|\,d\mathcal{A}=$$

$$=\int\limits_{B_i\cap S_r}\rho_*(f(z))\cdot\frac{\|f'(z)\|}{\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}}\cdot\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}\,d\mathcal{A}\ge$$

$$\ge\int\limits_{B_i\cap S_r}\rho_*(f(z))\cdot\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}\,d\mathcal{A}=\int\limits_{f(B_i\cap S_r)}\rho_*\,d\mathcal{A}_* \tag{2.5.4}$$

для почти всех $r\in(0,\varepsilon_0)$. Из (2.5.3) и (2.5.4) следует, что $\rho\in\operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$.

Используя замену переменных на каждом B_l, $l=1,2,\ldots$ [28, теорема 3.2.5], а также свойство счетной аддитивности интеграла Лебега, получаем оценку

$$\int\limits_{D}\frac{\rho(z)}{K_{\mu}(z)}\,dm(z)\le\int\limits_{f(D)}\rho_*(y)\,dm(y)\,,$$

что и завершает доказательство. □

Дальнейшее изложение основано на взаимосвязи между кольцевыми Q-отображениями и нижними Q-отображениями. Рассмотрим следующее определение.

Определение 2.5.6. Пусть G — открытое, ограниченное и связное множество в $\mathbb{R}^n$ и C_0,C_1 — непересекающиеся компактные множества в замыкании G. Полагаем $R=G\setminus(C_0\cup C_1)$ и $R^*=R\cup C_0\cup C_1$.

Множество $\sigma\subset\mathbb{R}^n$ *разделяет множества C_0 и C_1 в R^**, если $\sigma\cap R$ замкнуто в R и найдутся непересекающиеся множества A и B, являющиеся открытыми в $R^*\setminus\sigma$, такие, что $R^*\setminus\sigma=A\cup B$, $C_0\subset A$ и $C_1\subset B$.

Справедлив следующий результат.

Теорема 2.5.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D \setminus \{\infty\}$, и $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Предположим, что $f : D \setminus \{z_0\} \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке z_0, $Q \in L^1_{loc}(D)$, тогда f также является кольцевым Q-гомеоморфизмом в этой же точке.*

Доказательство. Пусть Σ_ε — семейство всех окружностей $S(z_0,\, r)$, где $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$ и $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$. По [297, теорема 3.13] и предложению 2.5.1 получаем

$$M\left(\Gamma\left(f(S_\varepsilon),\, f(S_{\varepsilon_0}),\, f(D)\right)\right) \le \frac{1}{M\left(f(\Sigma_\varepsilon)\right)} \le \frac{2\pi}{\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq_{z_0}(r)}}, \qquad (2.5.5)$$

поскольку $f(\Sigma_\varepsilon) \subset \Sigma\left(f(S_\varepsilon),\, f(S_{\varepsilon_0})\right)$, где $\Sigma\left(f(S_\varepsilon),\, f(S_{\varepsilon_0})\right)$ обозначает семейство всех замкнутых кривых в $f(D)$, разделяющих $f(S_\varepsilon)$ и $f(S_{\varepsilon_0})$. Однако из (2.5.5) и предложения 1.3.1 немедленно следует необходимое заключение. $\Box$

Из теорем 2.5.1 и 2.5.2 вытекает следующее важнейшее

Следствие 2.5.1. *Каждый гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ конечного искажения класса $W^{1,1}_{\rm loc}$, для которого $K_\mu(z) \in L^1_{loc}$, является кольцевым Q-гомеоморфизмом в произвольной внутренней точке области D, а также в изолированной точке границы D при $Q := K_\mu(z)$.*

2.6. Аналог теоремы Пикара для Q-отображений

2.6.1. К сожалению, в пространстве произвольной размерности $n \ge 2$ доказать более сильную, чем теоремы 2.4.4, 2.4.5, и общеизвестную из курса комплексного анализа теорему Пикара не удается. Однако на плоскости справедливость указанной теоремы все же установлена. Это удалось сделать благодаря так называемой факторизации Стоилова: произвольное открытое дискретное отображение f может быть представлено в виде композиции $f = \varphi \circ g$, где g — некоторый гомеоморфизм, а φ — некоторая аналитическая функция. При $n > 2$ подобный результат отсутствует, поэтому установить справедливость теоремы Пикара в пространствах больших размерностей мы не можем.

Пусть $n = 2$ и $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.6.1. *(Аналог теоремы Пикара для Q-отображений). Пусть $f : \Delta \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{C}}$ — открытое дискретное Q-отображение, $Q \in \in L^1_{loc}(\Delta \setminus \{0\})$, которое не принимает, по крайней мере, три значения в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Если $Q(z)$ имеет конечное среднее колебание в нуле, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий: (2.3.4), (2.3.5) либо (2.3.10) в точке $z_0 = 0$, то отображение f может быть непрерывным образом продолжено в Δ до открытого дискретного Q-отображения $\overline{f} : \Delta \to \overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство основано на теореме Стоилова о факторизации [264, гл. V, п. 5 (III)]. Без ограничения общности можно считать, что $f(z) \neq \infty$ при всех $z \in \Delta \setminus \{0\}$. Согласно указанной теореме $f = \varphi \circ g$, где g — некоторый гомеоморфизм, а φ — некоторая аналитическая функция. Поскольку $Q \in L^1_{loc}(\Delta \setminus \{0\})$, то согласно следствию 1.6.1 имеем: $f \in W^{1,1}_{loc}(\Delta \setminus \{0\})$. Отметим, что множество точек ветвления $B_\varphi \subset g(\Delta \setminus \{0\})$ функции φ состоит только из изолированных точек [264, гл. V, п. 5 и 6 (II)]. Следовательно, $g(z) = \varphi^{-1} \circ f$ локально вне множества $g^{-1}(B_\varphi)$. Понятно, что множество $g^{-1}(B_\varphi)$ также состоит из изолированных точек, следовательно, $g \in ACL(\Delta \setminus \{0\})$ как композиция аналитической функции φ^{-1} и отображения $f \in W^{1,1}_{loc}(\Delta \setminus \{0\})$.

Покажем, что $g \in W^{1,1}_{loc}(\Delta \setminus \{0\})$. Пусть далее $\mu_f(z)$ означает комплексную дилатацию функции $f(z)$, а $\mu_g(z)$ — комплексную дилатацию g (см. §1.9.4). Согласно [3, гл. I, п. C (1)] для почти всех $z \in \Delta \setminus \{0\}$ получаем

$$f_z = \varphi_z(g(z))g_z, \qquad f_{\overline{z}} = \varphi_z(g(z))g_{\overline{z}},$$

$$\mu_f(z) = \mu_g(z) =: \mu(z), \quad K_{\mu_f}(z) = K_{\mu_g}(z) := K_\mu(z) = \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}\,.$$

По теореме 1.9.1 $K_\mu(z) \in L^1_{loc}(\Delta \setminus \{0\})$. Далее, по следствию 1.7.2 $J(f,z) \neq$ $\neq 0$ почти всюду, при этом

$$|\partial g| \leq |\partial g| + |\overline{\partial} g| = K_\mu^{1/2}(z) J^{1/2}(f,z)\,,$$

откуда по неравенству Гельдера $|\partial g| \in L^1_{loc}(\Delta \setminus \{0\})$ и $|\overline{\partial} g| \in L^1_{loc}(\Delta \setminus \{0\})$. Следовательно, $g \in W^{1,1}_{loc}(\Delta \setminus \{0\})$.

Наконец, отображение $g : \Delta \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ является кольцевым $Q(z)$-гомеоморфизмом в нуле ввиду следствия 2.5.1.

Тогда согласно [72, лемма 4.1, теорема 4.1 и следствие 4.2], [110, лемма 4 и теорема 4] отображение g допускает гомеоморфное продолжение $\overline{g}$ в Δ. В таком случае $\overline{g}(0)$ является изолированной точкой границы области $g(\Delta \setminus \{0\})$. Из условий теоремы вытекает, что φ также не принимает более трех значений в $\overline{\mathbb{C}}$. Возможность продолжения исходного отображения в точку 0 вытекает теперь из классической теоремы Пикара для аналитических функций. $\Box$

2.6.2. В заключение, в качестве следствия из доказанной выше теоремы приведем еще одно важное утверждение.

Теорема 2.6.2. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ — открытое дискретное Q-отображение, а функция $Q(z)$ локально суммируема в $\mathbb{C}$ и имеет конечное среднее колебание в ∞, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий: (2.4.4), (2.4.5) или (2.4.6). Тогда f принимает все значения в $\overline{\mathbb{C}}$ кроме, может быть, двух.*

2.7. Интегральное условие, характеризующее открытые дискретные кольцевые Q-отображения

2.7.1. Прежде, чем переходить к дальнейшему изложению материала, обратим внимание на следующую проблему. В определении кольцевых Q-отображений (см. соотношения (1.3.2), (1.3.3)) участвует не одно неравенство, а бесконечная серия неравенств, каждое из которых определяется измеримой по Лебегу функцией η. В связи с этим зададим следующий вопрос: можно ли найти какое-либо достаточное условие, позволяющее определить, является ли фиксированное отображение f Q-отображением и можно ли избежать бесконечной проверки серии неравенств в (1.3.2), (1.3.3) ?

Положительный ответ на этот вопрос и в случае гомеоморфизмов получен совместно с В.И. Рязановым в [191, теорема 2.1], [192, теорема 3.15], также [125, гл. 7, лемма 7.3] и предложении 1.3.1 данной монографии. Позже, однако, автором данной монографии было доказано более общее утверждение, позволяющее решить указанную проблему не только для гомеоморфизмов, но и для произвольных открытых дискретных отображений [235].

2.7.2. Имеет место следующая основная лемма.

Лемма 2.7.1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 \in D$ и E — конденсатор вида $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)}\right)$, и $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Полагаем*

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\,. \qquad (2.7.1)$$

Тогда для конденсатора $f(E) = \left(f(B(x_0, r_2)), f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)\right)$ выполнено условие:

$$\operatorname{cap} f(E) \le \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}\,. \qquad (2.7.2)$$

Доказательство. Отметим, что пара множеств

$$f(E) = \left(f(B(x_0, r_2)), f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)\right)$$

действительно является конденсатором, поскольку f открыто и непрерывно в D, следовательно, $f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)$ является компактным подмножеством $f(B(x_0, r_2))$. Не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $I \neq 0$, так как в противном случае соотношение (2.7.2) выполнено. Также можно считать, что $I \neq \infty$, так как в противном случае в соотношении (2.7.2) можно рассмотреть $Q(x) + \delta$ (со сколь угодно малым δ) вместо $Q(x)$, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$. Пусть $I \neq \infty$. Тогда $q_{x_0}(r) \neq 0$ п.в. на (r_1, r_2). Полагаем

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/(tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)) \ , & t \in (r_1, r_2) \ , \\ 0 \ , & t \notin (r_1, r_2) \ . \end{cases}$$

Тогда ввиду теоремы Фубини

$$\int\limits_A Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|) dm(x) = \omega_{n-1} I \ , \tag{2.7.3}$$

где $A = A(r_1, r_2, x_0)$. Функция $\eta_1(t) = \psi(t)/I$, $t \in (r_1, r_2)$, удовлетворяет соотношению вида (1.3.3), поскольку $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta_1(t) dt = 1$, поэтому согласно соотношению (2.7.3) и определению кольцевого Q-отображения (см. (1.3.2)) получаем

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right) \leq \int\limits_A Q(x) \cdot {\eta_1}^n(|x - x_0|) dm(x) = \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}} \ , \tag{2.7.4}$$

где $S_i = S(x_0, r_i)$. Пусть Γ_E и $\Gamma_{f(E)}$ — семейства кривых в смысле обозначений предложения 1.4.1. По этому предложению

$$\operatorname{cap} f(E) = \operatorname{cap} \ \left(f(B\left(x_0, r_2\right)), f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)\right) = M\left(\Gamma_{f(E)}\right) . \tag{2.7.5}$$

Пусть Γ^* — семейство максимальных поднятий семейства кривых $\Gamma_{f(E)}$ с началом в $\overline{B\left(x_0, r_1\right)}$. Так же, как и при доказательстве леммы 1.4.1, получаем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Отметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$, и что для достаточно малых $\delta > 0$, $\Gamma_E > \Gamma\left(S(x_0, r_2 - \delta), S(x_0, r_1), A(r_1, r_2 - \delta, x_0)\right)$. Следовательно, в виду соотношения (2.7.4) получаем

$$M\left(\Gamma_{f(E)}\right) \le M\left(f(\Gamma^*)\right) \le M\left(f(\Gamma_E)\right) \le \tag{2.7.6}$$
$$\le M\left(f\left(\Gamma\left(S(x_0, r_1), S(x_0, r_2 - \delta), A(r_1, r_2 - \delta, x_0)\right)\right)\right) \le$$
$$\le \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2-\delta} \frac{dt}{t \cdot q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right)^{n-1}}.$$

Вследствие нашего предположения, что $I \ne \infty$, функция $\dfrac{1}{t \cdot q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}$ суммируема на (r_1, r_2) и ввиду абсолютной непрерывности интеграла [203, гл. I, теоремы 12.7 и 13.2] $\int\limits_{r_1}^{r_2-\delta} \dfrac{dt}{t \cdot q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \to \int\limits_{r_1}^{r_2} \dfrac{dt}{t \cdot q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}$ при $\delta \to 0$. Тогда в соответствии с (2.7.6)

$$M(\Gamma_{f(E)}) \le \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t \cdot q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right)^{n-1}}. \tag{2.7.7}$$

Объединяя (2.7.5) и (2.7.7), получаем соотношение (2.7.2). $\Box$

2.7.3. В связи с приведенными формулировкой и доказательством леммы 2.7.1 делаем важнейшее замечание, которое имеет ключевое значение для дальнейшего изложения.

Замечание 2.7.1. Для открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ интеграл в (2.7.1) *всегда конечен* для сколь угодно малых r_1 и произвольного $r_2 > 0$, $r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. В противном случае из (2.7.2) вытекает, что для некоторого $\varepsilon_1 > 0$, $\operatorname{cap} f\left(\overline{B(x_0, \varepsilon_1)}\right) = 0$, откуда следует, что множество $A := f\left(\overline{B(x_0, \varepsilon_1)}\right)$ является всюду разрывным по предложению 2.1.3. Однако, ввиду открытости отображения f

$$\operatorname{Int} f\left(\overline{B(x_0, \varepsilon_1)}\right) \ne \varnothing,$$

что противоречит сделанному выше выводу о нульмерности множества A.

2.7.4. Из леммы 2.7.1 и предложения 1.1.3 получаем следующий критерий принадлежности отображения f классу открытых дискретных кольцевых Q-отображений.

Теорема 2.7.1. *Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $Q \in L^1_{loc}(D)$. Открытое дискретное отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для произвольных $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и произвольного конденсатора $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)}\right)$ емкость конденсатора $f(E) = \left(f(B(x_0, r_2)), f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)\right)$ удовлетворяет условию*

$$\operatorname{cap} f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}\,,$$

где $I = I(x_0, r_1, r_2)$ задается соотношением (2.7.1).

2.8. Уточненный аналог теоремы Лиувилля

2.8.1. Отметим, что в теореме 2.4.6, являющейся аналогом теоремы Лиувилля для аналитических функций на плоскости, речь не шла о конкретных оценках роста отображения при $x \to \infty$, хотя показано, что отображение не может быть ограничено во всем $\mathbb{R}^n$. Ниже доказан более сильный результат, а именно, установлено, что f не только не является ограниченным, но и всегда растет вполне определенным образом.

2.8.2. Справедливо следующее замечание.

Замечание 2.8.1. Применяя изопериметрическое неравенство в (1.8.1), получаем, что

$$\operatorname{cap} E \geq n^n \Omega_n \left[\frac{m(C)}{m\,(A \setminus C)}\right]^{n-1}. \tag{2.8.8}$$

Лемма 2.8.1. *Предположим, что $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $0 < r < < R < \infty$. Тогда*

$$m\,(f\,(B(x_0, r))) \leq m\,(f(B\,(x_0, R))) \cdot \exp\left\{-n\int\limits_r^R \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}. \tag{2.8.9}$$

Доказательство. Полагая $C_t = \overline{B(x_0, t)}$, $A_{t+\Delta t} = B\left(x_0, t+\Delta t\right)$, рассмотрим конденсатор $E_{t,\Delta t} = \left(A_{t+\Delta t}, C_t\right)$. Тогда отображенная пара $f(E_{t,\Delta t})$ также является конденсатором в $\mathbb{R}^n$ ввиду открытости и непрерывности f. В таком случае по неравенству (2.8.8) получаем

$$\mathrm{cap}\,\left(f(A_{t+\Delta t}), f(C_t)\right) \geq n^n \Omega_n \left[\frac{m\left(f(C_t)\right)}{m\left(f(A_{t+\Delta t}) \setminus f(C_t)\right)}\right]^{n-1}. \tag{2.8.10}$$

С другой стороны, по лемме 2.7.1

$$\mathrm{cap}\,\left(f(A_{t+\Delta t}), f(C_t)\right) \leq \frac{w_{n-1}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(s)}\right)^{n-1}}. \tag{2.8.11}$$

Из (2.8.10) и (2.8.11) вытекает

$$n^n \Omega_n \left[\frac{m(f(C_t))}{m\left(f(A_{t+\Delta t}) \setminus f(C_t)\right)}\right]^{n-1} \leq \frac{w_{n-1}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(s)}\right)^{n-1}}. \tag{2.8.12}$$

Определим функцию $\Phi(t)$ для данного отображения f следующим образом:

$$\Phi(t) := m\left(f(B(x_0, t))\right).$$

Поскольку $\omega_{n-1} = n\Omega_n$ [168, гл. I, § 1, п. 1.1], [67, гл. 2, п. 2.1], то из (2.8.12) следует

$$n\frac{\Phi(t)}{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)} \leq \frac{1}{\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(s)}}. \tag{2.8.13}$$

При этом согласно замечанию 2.7.1 знаменатель дроби в правой части (2.8.13) не обращается в бесконечность. Разделив обе части соотношения (2.8.13) на Δt, неравенство (2.8.13) может быть записано в виде

$$n\frac{1}{\Delta t} \cdot \int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(s)} \leq \frac{1}{\Phi(t)} \cdot \frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}. \tag{2.8.14}$$

При этом соотношение (2.8.14) остается справедливым, если знаменатель в правой части (2.8.13) обращается в нуль. Отметим, что функция $\varphi(s) := \dfrac{1}{sq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(s)}$ интегрируема на $[t, t+\Delta t]$ при малых Δt в силу теоремы 2.7.1 и замечания 2.7.1. Устремляя в (2.8.14) Δt к нулю, применяя теорему Лебега о дифференцируемости неопределенного интеграла [203, гл. IV, теорема 6.3], учитывая, что монотонное возрастание функции Φ при t обеспечивает существование $\Phi'(t)$ почти всюду, при почти всех t получаем

$$n\frac{1}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \le \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\,. \tag{2.8.15}$$

Интегрируя обе части неравенства в (2.8.15) при $t \in [r, R]$, учитывая, что $\int\limits_r^R \dfrac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\,dt \le \log\dfrac{\Phi(R)}{\Phi(r)}$ [203, гл. IV, теорема 7.4], находим

$$n\int\limits_r^R \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \le \log\frac{\Phi(R)}{\Phi(r)}\,,$$

откуда

$$\exp\left\{n\int\limits_r^R \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \le \frac{\Phi(R)}{\Phi(r)}\,. \tag{2.8.16}$$

Поскольку $\Phi(t) := m\left(f(B(x_0, t))\right)$, то из (2.8.16) имеем

$$m\left(f(B(x_0, r))\right) \le m\left(f(B(x_0, R))\right)\cdot\exp\left\{-n\int\limits_r^R \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}\,,$$

что и требовалось установить. $\Box$

2.8.3. Обозначим

$$L(x_0, f, R) = \sup\limits_{|x-x_0|\le R} |f(x) - f(x_0)|\,.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.8.1. *Предположим, что $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, где x_0 — некоторая точка в $\mathbb{R}^n$ и r_0 — произвольное фиксированное действительное число, $r_0>0$. Тогда*

$$\liminf_{R\to\infty}\ L(x_0,f,R)\cdot\exp\left\{-\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}=M>0\,. \tag{2.8.17}$$

Доказательство. Проведем оценку сверху в неравенстве (2.8.9). Поскольку

$$m\left(f(B(x_0,R))\right)\le\Omega_n L^n(x_0,f,R)\,,$$

то из (2.8.9) получаем

$$m\left(f(B(x_0,r_0))\right)\le\Omega_n\cdot L^n(x_0,f,R)\cdot\exp\left\{-n\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}\,. \tag{2.8.18}$$

Очевидно, $m\left(f(B(x_0,r_0))\right)=M_1>0$ и от R никак не зависит. Переходя к нижнему пределу в (2.8.18) при $R\to\infty$ и обозначая $M:=\left(\dfrac{M_1}{\Omega_n}\right)^{1/n}$, получаем соотношение (2.8.17). $\Box$

Следствие 2.8.1. *Предположим, что $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, где x_0 — некоторая точка в $\mathbb{R}^n$ и r_0 — произвольное фиксированное действительное число, $r_0>0$. Тогда*

$$\limsup_{x\to\infty}\ |f(x)|\cdot\exp\left\{-\int\limits_{r_0}^{|x-x_0|}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}=M>0\,. \tag{2.8.19}$$

В частности, f не может быть ограниченным в $\mathbb{R}^n$ при условии, что расходится интеграл:

$$\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}=\infty\,.$$

Доказательство. Поскольку $L(x_0, f, R) \le 2 \sup\limits_{|x-x_0|\le R} |f(x)|$, то из (2.8.17) следует

$$N := \limsup_{R\to\infty} \sup_{|x-x_0|=R} |f(x)| \cdot \exp\left\{-\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} > 0\,. \qquad (2.8.20)$$

Обозначим

$$g(x) := |f(x)| \cdot \exp\left\{-\int\limits_{r_0}^{|x-x_0|} \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} > 0\,.$$

Отметим

$$\limsup_{x\to\infty} |g(x)| = \limsup_{R\to\infty} \sup_{|x-x_0|=R} |g(x)|\,. \qquad (2.8.21)$$

Из соотношений (2.8.20) и (2.8.21) следует соотношение (2.8.19). □

Замечание 2.8.2. В частности, если $Q(x) \le K = const$, то из (2.8.19) получаем известный результат О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вяйсяля [116, теорема 3.7]:

$$\limsup_{x\to\infty} |f(x)| \cdot \quad |x|^{\left(-\frac{1}{K^{\frac{1}{(n-1)}}}\right)} > 0\,. \qquad (2.8.22)$$

Учитывая, что отображения с ограниченным искажением удовлетворяют соотношениям типа (1.3.2) в произвольной точке своей области определения при $Q(x) = K_I(x, f)$, где $K_I(x, f)$ определено в (1.1.11) [125, гл. 8, теоремы 8.2 и 8.6], можно показать, что в формуле выше K может быть равно $K = K_I(f) = \text{ess sup}\, K_I(x, f)$ (точный показатель роста в (2.8.22)).

2.9. Аналог леммы Икома—Шварца для кольцевых Q-отображений

2.9.1. В 1965 г. известный математик К. Икома получил следующий аналог леммы Шварца для аналитических функций, доказанный им для квазиконформных отображений трехмерного пространства [74, теорема 2].

Предположим, что $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}^3$ — квазиконформное отображение, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$, преобразующее каждый радиус единичного шара в кривую, ортогональную к образу сферы $|x| = r$ при всех $r > 0$, $r < 1$. Тогда

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\left(\frac{1}{K''}\right)^{1/2}}} \le 1\,, \tag{2.9.1}$$

где K'' — постоянная квазиконформности, определяемая из неравенства (1.2.1).

Ниже показано, что открытые дискретные кольцевые отображения также удовлетворяют некоторому неравенству, аналогичному (2.9.1).

2.9.2. Имеет место следующая

Лемма 2.9.1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \ge 2$, — открытое отображение, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$. Предположим, что существует функция $R : [0, 1] \to [0, \infty)$ такая, что при всех $r \in (0, 1)$*

$$m\left(f(B(0, r))\right) \le \Omega_n\, R^n(r)\,. \tag{2.9.2}$$

Тогда

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} \le 1\,.$$

Доказательство. Полагаем $\min\limits_{|x|=r} |f(x)| = l_f(r)$. Покажем, что

$$B\left(0, l_f(r)\right) \subset f\left(B(0, r)\right) \tag{2.9.3}$$

при каждом $r \in (0, 1)$. Предположим противное. Тогда найдутся $r_0 \in$ $\in (0, 1)$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такие, что $y_0 \in B\left(0, l_f(r_0)\right)$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f\left(B\left(0, r_0\right)\right)$, т.е. $y_0 \in B\left(0, l_f(r_0)\right) \setminus f\left(B\left(0, r_0\right)\right)$. Отметим, что $B\left(0, l_f(r_0)\right) \cap f\left(B(0, r_0)\right) \ne$ $\ne \varnothing$, поскольку соотношение $B\left(0, l_f(r_0)\right) \not\subset f\left(B(0, r_0)\right)$, в частности, влечет, что $l_f(r_0) > 0$ и, кроме того, условие $f(0) = 0$ влечет, что $0 \in B\left(0, l_f(r_0)\right) \cap f\left(B(0, r_0)\right)$. Шар $B\left(0, l_f(r_0)\right)$ является связным множеством, при этом, согласно приведенному выше, а также сделанному предположению, $B\left(0, l_f(r_0)\right) \cap f\left(B(0, r_0)\right) \ne \varnothing \ne B\left(0, l_f(r_0)\right) \setminus f\left(B(0, r_0)\right)$. По [104, ч. I, гл. 5, § 46, теорема 1] существует элемент $z_0 \in B\left(0, l_f(r_0)\right) \cap$ $\cap \partial f\left(B(0, r_0)\right)$. С другой стороны, согласно свойству открытых отображений $\partial f\left(B(0, r_0)\right) \subset f\left(\partial\left(B(0, r_0)\right)\right)$, поэтому найдется элемент $x_0 \in$ $\in S(0, r_0)$ такой, что $f(x_0) = z_0$. Однако последнее невозможно, поскольку в этом случае $f(x_0) = z_0 \in B\left(0, l_f(r_0)\right)$, и, значит, $|f(x_0)| <$

$< \min\limits_{|x|=r_0} |f(x)|$ при $x_0 \in S(0, r_0)$. Полученное противоречие указывает на то, что предположение о выполнении соотношения $B\left(0, l_f(r_0)\right) \not\subset$ $\not\subset f\left(B(0, r_0)\right)$ было неверным и, следовательно, при всех $r \in (0,1)$ справедливо включение (2.9.3).

Из соотношения (2.9.3), учитывая условие $f(0) = 0$, имеем $\Omega_n\, l_f^n(r) \leq$ $\leq m\left(f\left(B(0,r)\right)\right)$ и, следовательно,

$$l_f(r) \leq \left(\frac{m(f(B(0,r)))}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}\,. \tag{2.9.4}$$

Таким образом, учитывая неравенства (2.9.2) и (2.9.4), получаем

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{R(|x|)} = \liminf_{r\to 0}\frac{l_f(r)}{R(r)} \leq \liminf_{r\to 0}\left(\frac{m\left(f\left(B(0,r)\right)\right)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{R(r)} \leq 1\,.$$

Лемма 2.9.1 доказана. □

2.9.3. Имеет место следующий основной результат.

Теорема 2.9.1. *Пусть* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geq 2$, $p \in (1, n]$ *— открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение в точке* $x_0 = 0$, *удовлетворяющее условию* $f(0) = 0$. *Тогда имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\cdot\exp\left\{\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \leq 1\,. \tag{2.9.5}$$

Доказательство теоремы 2.9.1 немедленно вытекает из лемм 2.8.1 и 2.9.1. Выбирая в лемме 2.8.1 в качестве $D := \mathbb{B}^n$, $R := 1$ и $x_0 = 0$, получаем

$$m\left(f\left(B(0,r)\right)\right) \leq \Omega_n\cdot\exp\left\{-n\int\limits_{r}^{1}\frac{ds}{sq_0^{\frac{1}{n-1}}(s)}\right\}\,. \tag{2.9.6}$$

Тогда в лемме 2.9.1 следует выбирать $R(r) = \exp\left\{-\int\limits_{r}^{1}\frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}$, откуда вытекает требуемое утверждение. □

2.9.4. Следующая теорема показывает, что при некоторых дополнительных условиях на функцию Q оценки искажения, сформулированные в теореме 2.9.1, являются точными.

Теорема 2.9.2. *Предположим, что* $Q:\mathbb{B}^n\to[0,\infty)$ *— заданная измеримая по Лебегу функция такая, что* $I=\int\limits_0^1\frac{dt}{t\,q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}=\infty$ *и* $\int\limits_r^1\frac{dt}{t\,q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}<\infty$ *для всякого* $r\in(0,1)$. *Тогда неравенства (2.9.5) и (2.9.6) преобразуются в равенства для кольцевого* Q*-гомеоморфизма:*

$$f_n(x)=\frac{x}{|x|}\exp\left\{-\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}. \tag{2.9.7}$$

Доказательство. Мы уже показывали, что отображение $f_n(x)$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в нуле (см. п. 1.3.6, пример 9). Отметим, что

$$m\left(f_n\left(B(0,R)\right)\right)=\Omega_n\cdot\varphi_n^n(R)\,, \tag{2.9.8}$$

где $\varphi_n(s)=\exp\left\{-\int\limits_s^1\frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}$, $t\in(0,1)$. Из (2.9.7) и (2.9.8) знак равенства в соответствующих неравенствах (2.9.5) и (2.9.6) следует немедленно. $\Box$

2.10. Устранение особенностей весового модуля нуль

2.10.1. Рассмотрим специальные множества, отличные от одноточечных, в точки которых Q-отображения продолжаются по непрерывности. Рассмотрим все ту же задачу: предположим, что F — замкнутое множество в D такое, что $D\setminus F$ все еще является областью. Существует ли непрерывное продолжение отображения $f:D\setminus F\to\overline{\mathbb{R}^n}$ в точки множества D?

В предыдущих параграфах приведен ответ на этот вопрос в случае, когда множество F состоит всего из одной точки; конечно, при этом требовались некоторые дополнительные условия на функцию Q, а также топологические условия на отображение f (открытость и дискретность) и выпускание отображением f множества положительной емкости. Далее рассмотрены так называемые множества весового модуля нуль, имеющие большое значение в теории устранения особенностей. Показано, что открытые дискретные Q-отображения f продолжаются по непрерывности на множества такого типа при тех же предположениях на Q, что и в случае изолированных граничных точек. Отметим, что здесь речь идет об отображениях, удовлетворяющих более сильному, чем (1.3.2), условию (1.3.1). Рассмотрим следующее определение.

Определение 2.10.1. Пусть $Q(x) : D \to [1, +\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Множество $A \subset D$ является множеством *нулевого модуля с весом* Q, $M_Q(A) = 0$, если для семейства Γ_A всех кривых в $\overline{\mathbb{R}^n}$ с началом на множестве A модуль с весом $M_Q(\Gamma_A) = 0$ [91,156]. Величина $M_Q(\Gamma)$ для произвольного семейства кривых Γ может быть определена как

$$M_Q(\Gamma) := \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q(x) \cdot \rho^n(x) dm(x).$$

Поскольку здесь мы предполагаем выполнение условия $Q(x) \geq 1$, то такие множества также являются множествами нулевой емкости и, в частности, нулевой хаусдорфовой размерности. Эти множества всюду разрывны, т.е. любая их связная компонента вырождается в точку (см. предложение 2.1.3).

2.10.2. В этом параграфе и в дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.10.1. *Пусть* $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ *— некоторое семейство измеримых по Лебегу функций,* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *определенных на отрезке* $(0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$. *Тогда найдется семейство борелевых функций* $\{\psi^*_\varepsilon(t)\}$ *таких, что* $\psi^*_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)$ *при почти всех* $t \in (0, \varepsilon_0)$.

Доказательство. Обозначим $E := (0, \varepsilon_0)$. По теореме Лузина [203, гл. III, § 7, теорема 7.1] для последовательности $t_n = \dfrac{1}{2^n}$, $n = 0, 1, \ldots$, найдется последовательность компактных множеств $E_n \subset E$, $E_n \subset E_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$, таких, что функция $\psi_\varepsilon|_{E_n}$ является непрерывной и $\operatorname{mes}_1(E \setminus E_n) < \dfrac{1}{2^n}$. Полагаем

$$E_0 := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n, \qquad \widetilde{E} := E \setminus E_0$$

и

$$\psi^*_\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi_\varepsilon(t), & t \in E_0, \\ 0, & t \in E \setminus E_0 \,. \end{cases}$$

Отметим, что функция $\psi_\varepsilon^*(t)$ — борелева. Действительно, пусть A — борелевское множество в $\mathbb{R}$. Тогда

$$\psi_\varepsilon^{*\,-1}(A)=\psi_\varepsilon^{*\,-1}|_{E_0}(A)\bigcup\psi_\varepsilon^{*\,-1}|_{E\setminus E_0}(A)=$$

$$=\bigcup_{n=0}^{\infty}\psi_\varepsilon^{*\,-1}|_{E_n}(A)\bigcup\psi_\varepsilon^{*\,-1}|_{E\setminus E_0}(A)\,, \tag{2.10.1}$$

где $\psi_\varepsilon^{*\,-1}|_C(A)$ обозначает прообраз множества $A\subset\mathbb{R}$ относительно сужения функции ψ_ε^* на $C\subset E$.

Очевидно, оба множества в правой части объединения (2.10.1) являются борелевскими. Кроме того, $\psi_\varepsilon(t)=\psi_\varepsilon^*(t)$ при почти всех $t\in E$, поскольку $\operatorname{mes}_1(E_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{mes}_1(E_n)$ [203, гл. II, § 4, п. (ii), теорема 4.6] и, следовательно,

$$\operatorname{mes}_1(E\setminus E_0)=\operatorname{mes}_1(E)-\operatorname{mes}_1(E_0)=$$

$$=\operatorname{mes}_1(E)-\lim_{n\to\infty}\operatorname{mes}_1(E_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{mes}_1(E)-\operatorname{mes}_1(E_n)\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\,,$$

что и требовалось установить. □

2.10.3. Имеет место следующая основная лемма.

Лемма 2.10.2. *Пусть $C\subset D$ — замкнутое подмножество области D, $M_Q(C)=0$, $f:D\setminus C\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное Q-отображение такое, что*

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f\,(D\setminus C)\right)>0\,. \tag{2.10.2}$$

Предположим, что для некоторой точки $x_0\in C$ существует $\varepsilon_0=\varepsilon(x_0)$, $0<\varepsilon_0<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, такое, что для некоторого семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, определенных на $(0,\varepsilon_0)$, таких, что

$$0\,<\,I(\varepsilon,\varepsilon_0)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_\varepsilon(t)dt<\infty\qquad\forall\quad\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$$

и при $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0}Q(x)\cdot\psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)\,dm(x)=o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)\,. \tag{2.10.3}$$

Тогда f имеет непрерывное продолжение в точку x_0.

Здесь, как и выше, непрерывность понимается в смысле пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно хордальной метрики h.

Доказательство. В целом, используем ту же схему, что реализуется при доказательстве леммы 2.2.2. В силу предложения 2.1.3 множество $D\setminus C$ является областью. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0=0$. Предположим, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0=0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $B(0,\varepsilon_0)\setminus C$, такие, что $x_j\to 0$ и $x_j'\to 0$, при этом, $h\left(f(x_j),f(x_j')\right)\geq a>0$ для всех $j\in\mathbb{N}$. Положим $r_j=\max\left\{|x_j|,|x_j'|\right\}<\varepsilon_0$. По предложению 2.1.3 точки x_j и x_j' можно соединить кривой, лежащей в $\overline{B(0,r_j)}\setminus C$. Обозначим эту кривую через C_j и пусть $E_j=\left(B(0,\varepsilon_0)\setminus C, C_j\right)$, а Γ_{E_j} и $\Gamma_{f(E_j)}$ — семейства кривых в смысле обозначений предложения 1.4.1. Пусть Γ_j^* — семейство всех максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E_j)}$ с началом в C_j при отображении f. По аналогии с доказательством леммы 1.4.1 можно показать, что $\Gamma_j^*\subset\Gamma_{E_j}$.

Отметим, что $\Gamma_{f(E_j)}>f(\Gamma_j^*)$ и, следовательно,

$$M\left(\Gamma_{f(E_j)}\right)\leq M\left(f(\Gamma_j^*)\right)\leq M\left(f(\Gamma_{E_j})\right)\,.$$

Ввиду предложения 1.4.1 получаем

$$\operatorname{cap} f(E_j)\leq\int\limits_D Q(x)\cdot\rho^n(x)dm(x) \tag{2.10.4}$$

для каждой допустимой функции $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma_{E_j}$. При этом семейство Γ_{E_j} разбивается на два подсемейства:

$$\Gamma_{E_j}=\Gamma_{E_j^1}\cup\Gamma_{E_j^2}\,, \tag{2.10.5}$$

где $\Gamma_{E_j^1}$ — семейство всех кривых $\alpha(t):[a,\,c)\to B(0,\varepsilon_0)\setminus C$ с началом в C_j таких, что $\operatorname{dist}\,(\alpha(t_k),C)\to 0$ при некоторой последовательности $t_k\to\ c-0$ $(k\to\infty)$, а $\Gamma_{E_j^2}$ — семейство всех кривых $\alpha(t):[a,\,c)\to$ $\to B(0,\varepsilon_0)\setminus C$ с началом в C_j таких, что $\operatorname{dist}\,(\alpha(r_k),\partial B(0,\varepsilon_0))\to 0$ при $r_k\to c-0$ $(k\to\infty)$.

По определению Q-отображения в силу условия $M_Q(C)=0$

$$M\left(f(\Gamma_{E_j^1})\right)=0. \tag{2.10.6}$$

Рассмотрим кольцо $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : r_j < |x| < \varepsilon_0\}$.

Согласно лемме 2.10.1 найдется семейство борелевых функций $\{\psi_\varepsilon^*(t)\}$ таких, что $\psi_\varepsilon^*(t) = \psi_\varepsilon(t)$ при почти всех $t \in (0, \varepsilon_0)$. Отметим, что семейство

$$\rho_j(x) = \begin{cases} \psi_{r_j}^*(|x|)/I(r_j, \varepsilon_0), & x \in A_j, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A_j \end{cases}$$

состоит из борелевских функций и, кроме того, для любой (локально спрямляемой) кривой γ семейства $\Gamma_{E_j^2}$ имеем

$$\int\limits_\gamma \rho_j |dx| \geq \frac{1}{I\left(r_j, \varepsilon_0\right)} \int\limits_{r_j}^{\varepsilon_0} \psi_{r_j}^*(t) dt = 1 \tag{2.10.7}$$

[281, теорема 5.7]. Отсюда следует, что $\rho_j \in \operatorname{adm} \Gamma_{E_j^2}$. Таким образом, в силу (2.10.3)—(2.10.7) получаем

$$\operatorname{cap} f(E_j) \leq \int\limits_{r_j<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \rho_j^n(x)\, dm(x) =$$

$$= \frac{1}{I^n(r_j, \varepsilon_0)} \int\limits_{r_j<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_{r_j}^n(|x|)\, dm(x) \to 0 \qquad \text{при} \qquad j \to \infty\,.$$

С другой стороны, $h\left(f(C_j)\right) \geq a$ и в силу условия (2.10.2), а также по предложению 2.2.1 имеем, что $\operatorname{cap} f(E_j) \geq \delta > 0$, где δ может быть выбрано не зависящим от j. Полученное противоречие доказывает лемму. $\Box$

2.10.4. На основании лемм 2.3.1 и 2.10.2 сформулируем основные результаты данного параграфа.

Теорема 2.10.1. *Пусть $C \subset D$ — замкнутое подмножество области D, $M_Q(C) = 0$, $f : D \setminus C \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное Q-отображение такое, что выполнено условие (2.10.2). Предположим, что измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1, \infty]$ удовлетворяет, по крайней мере, одному из следующих условий в некоторой точке $x_0 \in C$: $Q \in FMO(x_0)$, — (2.3.5) либо (2.3.10). Тогда f имеет непрерывное продолжение в точку x_0.*

Из теоремы 2.10.1 непосредственно вытекают следующие следствия.

Следствие 2.10.1. *В частности, если (2.3.11) имеет место, то справедливо заключение теоремы 2.10.1.*

Следствие 2.10.2. *Утверждение теоремы 2.10.1 имеет место, как только $Q \in BMO(D)$.*

2.11. Устранение особенностей отображений для областей с другими типами границ. Аналог теоремы Сребро—Вуоринена

2.11.1. В теории отображений значительное место имеет так называемое граничное поведение, к исследованию которого мы переходим. До сих пор мы рассматривали Q-отображения и кольцевых Q-отображениях, преимущественно определенные во внутренних точках области (случай изолированной точки границы существенно не изменял определение указанных классов). Для изучения граничного поведения Q-отображений необходимо определить эти объекты также в произвольной точке $x_0 \in \partial D$, какой бы "плохой" не была граница области D. Исследование подобного рода даст возможность применить развитую ниже теорию ко всем классам отображений, для которых могут иметь место оценки (1.3.1) и (1.3.2) .

Как и прежде, решаем проблему о существовании предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, где $x_0 \in \partial D$. Сделаем важную оговорку: исследование на сколь угодно плохих границах, конечно же, не входит в наши планы, поскольку даже для конформных отображений непрерывное продолжение заданного отображения на границу может не иметь место. В связи с этим, мы ограничимся лишь определенными типами границ, когда вопрос о граничном поведении может быть решен положительно.

2.11.2. Рассмотрим следующие определения.

Определение 2.11.1. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $Q(x) \equiv 0$ при всех $x \notin D$. Отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in \partial D$, $x_0 \neq \infty$, если для некоторого $r_0 = r(x_0)$ и произвольных сферического кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, центрированного в точке x_0, радиусов: r_1, r_2, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = r(x_0)$ и любых континуумов $E_1 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$, $E_2 \subset \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_0, r_2)\right) \cap D$ отображение f удовлетворяет соотношению

$$M\left(f\left(\Gamma\left(E_1,\, E_2,\, D\right)\right)\right) \leq \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \qquad (2.11.1)$$

для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geq \ 1\,. \qquad (2.11.2)$$

Указанное выше определение может быть дано также для точки $x_0 = \infty$ при помощи инверсии $\widetilde{f} := f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$.

Определение 2.11.2. Область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно [104, гл. 6, § 49, п. I, с. 232].

Происхождение следующего термина играет важную роль при исследовании граничного поведения пространственных отображений [125, § 3.8].

Определение 2.11.3. Граница ∂D области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geq \delta \qquad (2.11.3)$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Соотношение (2.11.3), в частности, выполнено, если в качестве F взять произвольную кривую, имеющую одним из своих концов точку x_0 и лежащую полностью в D, кроме этой концевой точки. Граница области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *сильно достижимой*, если указанное выше свойство выполнено в каждой точке $x_0 \in \partial D$.

Отметим, что изолированные точки границы, очевидно, сильно достижимы.

2.11.3. Следующая лемма доказана В.И. Рязановым и Р.Р. Салимовым [189] для случая гомеоморфизмов и представляет собой основной результат §2.11 в наиболее общей формулировке.

Лемма 2.11.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $b \in \partial D$, $b \neq \infty$, $f(D) = D'$, область D локально связна в точке b, предельное множество $C(\partial D, f)$ удовлетворяет условию*

$$C(\partial D, f) \subset \partial D' \qquad (2.11.4)$$

и, кроме того, область D' сильно достижима хотя бы в одной точке $y \in C(f, b)$. Предположим, что найдется $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и измеримая *по Лебегу функция $\psi(t) : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ со следующим свойством. Для любого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1]$ такое, что условие (2.2.1) выполнено при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и, кроме того, при $\varepsilon \to 0$ выполнено условие (2.2.2). Тогда $C(b, f) = \{y\}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся, по крайней мере, две последовательности $x_i, x_i' \in D$, $i = 1, 2, \ldots$, такие, что $x_i \to b$, $x_i' \to b$ при $i \to \infty$, $f(x_i) \to y$, $f(x_i') \to y'$ при $i \to \infty$ и $y' \neq y$. По определению сильно достижимой границы в точке $y \in \partial D'$ для любой окрестности U этой точки найдутся компакт $C_0' \subset D'$, окрестность V точки y, $V \subset U$, и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Gamma(C_0', F, D')) \geq \delta > 0 \qquad (2.11.5)$$

для произвольного континуума F, пересекающего ∂U и ∂V. В силу предположения (2.11.4) имеем, что для $C_0 := f^{-1}(C_0')$ выполнено условие $C_0 \cap \partial D = \varnothing$. Тогда, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $C_0 \cap \overline{B(b, \varepsilon_0)} = \varnothing$. Поскольку область D локально связна в точке b, можно соединить точки x_i и x_i' кривой γ_i, лежащей в $V \cap D$. Также можно считать, что $\gamma_i \in \overline{B(b, 2^{-i})} \cap D$. Поскольку $f(x_i) \in V$ и $f(x_i') \in D \setminus \overline{U}$ при всех достаточно больших $i \in \mathbb{N}$, то найдется номер $i_0 \in \mathbb{N}$ такой, что согласно (2.11.5)

$$M(\Gamma(C_0', f(\gamma_i), D')) \geq \delta > 0 \qquad (2.11.6)$$

при всех $i \geq i_0 \in \mathbb{N}$. Обозначим через Γ_i семейство всех полуоткрытых кривых $\beta_i : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\beta_i(a) \in f(\gamma_i)$, $\beta_i(t) \in D'$ при всех $t \in [a, b)$ и, кроме того, $\lim\limits_{t \to b-0} \beta_i(t) := B_i \in C_0'$. Очевидно,

$$M(\Gamma_i) = M\left(\Gamma\left(C_0', f(\gamma_i), D'\right)\right). \qquad (2.11.7)$$

При каждом фиксированном $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_0$, рассмотрим семейство Γ_i', состоящее из всех максимальных поднятий $\alpha_i(t) : [a, c) \to D$ семейства Γ_i с началом во множестве γ_i (см. предложение 1.4.2). Отметим, прежде всего, что никакая кривая $\alpha_i(t) \in \Gamma_i'$, $\gamma_i : [a, c) \to D$, не может стремиться к границе области D при $t \to c - 0$ ввиду условия $C(\partial D, f) \subset \partial D'$. Тогда $C(c, \alpha_i(t)) \subset D$. Предположим теперь, что кривая $\alpha_i(t)$ не имеет предела при $t \to c - 0$. Тогда предельное множество $C(c, \alpha_i(t))$ есть континуум в D. В силу непрерывности отображения f получаем $f \equiv const$ на $C(c, \alpha_i(t))$, что противоречит предположению о дискретности f.

Следовательно, $\exists \lim\limits_{t \to c-0} \alpha_i(t) = A$. Отметим, что в этом случае согласно определению максимального поднятия $c = b$. Тогда, с одной стороны, $\lim\limits_{t\to b-0}\alpha_i(t) := A_i$, а с другой стороны, в силу непрерывности отображения f в D

$$f(A_i)=\lim_{t\to b-0}f(\alpha_i(t))=\lim_{t\to b-0}\beta_i(t)=B_i\in C_0'\,.$$

Отсюда по определению C_0 следует, что $A_i\in C_0$. Погрузим компакт C_0 в некоторый континуум C_1, все еще полностью лежащий в области D [261, лемма 1]. За счет уменьшения $\varepsilon_0>0$ можно снова считать, что $C_1\cap\overline{B(b,\varepsilon_0)}=\varnothing$. Функция

$$\eta(t)=\begin{cases}\psi(t)/I(2^{-i},\varepsilon_0), & t\in(2^{-i},\varepsilon_0),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(2^{-i},\varepsilon_0)\,,\end{cases}$$

где, как и прежде, $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt$ удовлетворяет условию нормировки вида (2.11.2) при $r_1 := 2^{-i}$, $r_2 := \varepsilon_0$, поэтому в силу определения кольцевого Q-отображения в граничной точке

$$M\left(f\left(\Gamma_i'\right)\right)\le\Delta(i)\,,\qquad(2.11.8)$$

где $\Delta(i)\to0$ при $i\to\infty$. Однако $\Gamma_i>f(\Gamma_i')$, поэтому из (2.11.8) получаем, что при $i\to\infty$

$$M(\Gamma_i)\le M\left(f(\Gamma_i')\right)\le\Delta(i)\to0\,.\qquad(2.11.9)$$

Соотношение (2.11.9) вместе с равенством (2.11.7) противоречат неравенству (2.11.6), что и доказывает лемму. □

2.11.4. Перейдем к основным результатам параграфа. На основании лемм 2.3.1 и 2.11.1 мы заключаем, что имеет место следующее утверждение, доказанное У. Сребро (в несколько иной модификации — М. Вуориненом) для отображений с ограниченным искажением [263, теорема 4.2], [292, гл. II, § 4, теорема 4.10].

Теорема 2.11.1. *(Аналог теоремы Сребро—Вуоринена). Пусть $f: D\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $b\in\in\partial D$, $b\ne\infty$, $f(D)=D'$, область D локально связна в точке b, предельное множество $C(\partial D,f)$ удовлетворяет (2.11.4) и, кроме того, область D' сильно достижима хотя бы в одной точке $y\in C(f,b)$. Предположим, что измеримая по Лебегу функция $Q: D\to[0,\infty]$ удовлетворяет, по крайней мере, одному из следующих условий в некоторой точке $b\in\partial D$: $Q\in FMO(b)$ — (2.3.4), (2.3.5) (при некотором $\varepsilon_0>0$) либо (2.3.10) (где вместо x_0 берем $x_0:=b$). Тогда $C(b,f)=\{y\}$.*

Замечание 2.11.1. Отметим, что от условия (2.11.4) нельзя отказаться даже в случае, когда ∂D состоит всего из одной точки, как показывает пример отображения $f(z) = \exp(1/z)$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. При этом, область $D := f(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеет границу, состоящую всего из двух точек: 0 и ∞, и, значит, сильно достижима. Для этого отображения $Q \equiv 1$, но оно имеет существенно особую точку $z_0 = 0$. Причина этого заключается в том, что включение (2.11.4) нарушается.

2.12. О существенном значении некоторых условий, связанных с устранением особенностей

2.12.1. Ранее мы рассматривали функции конечного среднего колебания, а также условия вида (2.3.4), (2.3.5) либо (2.3.10), не затрагивая вопрос о необходимости введения подобных ограничений на функцию Q. Указанные условия приводились как достаточные для выполнения каких-либо свойств отображения f, однако вопрос о целесообразности их рассмотрения не затрагивался.

Попытаемся указать некоторые нюансы, касающиеся введенных ограничений условий типа FMO, (2.3.5) и прочих, а также невозможности замены этих условий более простыми.

2.12.2. Прежде всего отметим, что из включений (2.3.2) вытекает принадлежность классу $FMO(x_0)$ в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ произвольной ограниченной функции Q. Аналогичное заключение верно также относительно выполнения условий вида (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.10).

Следующие примеры показывают, что указанные условия нельзя заменить более простым условием $Q(x) \in L^p$ ни для какого (сколь угодно большого) $p > 1$. Имеет место следующий результат, принадлежащий А. Игнатьеву и В. Рязанову [71, предложение 3.1]. (Этот результат был опубликован в виде препринта (ушел из жизни один из его авторов — А. Игнатьев). Впоследствии он был опубликован в книге О. Мартио, В. Рязанова, У. Сребро и Э. Якубова [125, гл. 6, предложение 6.3].

Теорема 2.12.1. *Для каждого $p > 1$ найдется функция $Q \in L^p(\mathbb{B}^n)$, $n \geq 2$, и ограниченный Q-гомеоморфизм $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, для которого точка $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой точкой.*

Доказательство. Зададим гомеоморфизм $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{1 + |x|^{\alpha}}{|x|} \cdot x\,,$$

где $\alpha \in (0, n/p(n-1))$. Не ограничивая общности, за счет увеличения p можно считать, что $\alpha < 1$. Отметим, что f отображает $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на сферическое кольцо $\{1 < |y| < 2\}$ в $\mathbb{R}^n$ и предельное множество $C(0, f) = \mathbb{S}^{n-1}$. Таким образом, точка $x_0 = 0$ является существенно особой точкой отображения f и f ограничено в области $D := \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ (рис. 8).

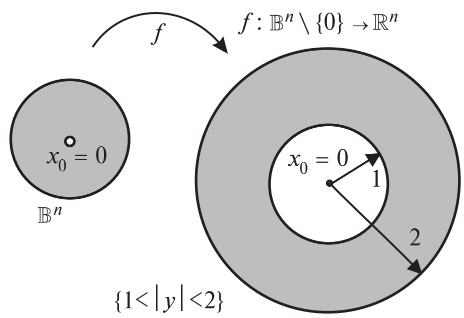

Рис. 8. Пример Q-гомеоморфизма, имеющего изолированную существенно особую точку

Покажем, что f является Q-гомеоморфизмом в D при некотором $Q \in L^p(\mathbb{B}^n)$, где p было выбрано. Для этого воспользуемся примером 4^* п. 1.3.6. Отметим, что f является гомеоморфизмом в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, при этом имеет место включение $f \in C^1\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)$, так что $f \in W^{1,n}_{loc}\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)$. Вычислим $K_I(x, f)$ на основании предложения 1.1.1 и соотношений (1.1.15). Обозначая, как обычно, через $\lambda_\tau(x_0)$ растяжение, соответствующее касательному направлению в точке $x_0 \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, а через $\lambda_r(x_0)$ — растяжение, соответствующее радиальному направлению в той же точке (см. предложение 1.1.1), имеем

$$\lambda_\tau(x_0) = (1 + |x_0|^\alpha)/|x_0|\,, \qquad \lambda_r(x_0) = \alpha |x_0|^{\alpha - 1}\,.$$

Поскольку при сделанном выборе α выполнено неравенство $\lambda_\tau(x_0) \geq$ $\geq \lambda_r(x_0)$, то $l(f'(x_0)) = \lambda_r(x_0)$, так что согласно соотношениям (1.1.13) и (1.1.15) получаем

$$Q(x) := K_I(x_0, f) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} \cdot \frac{(1 + |x_0|^\alpha)^{n-1}}{|x_0|^{\alpha(n-1)}}\,. \tag{2.12.1}$$

При $r < 1$ имеем оценку

$$Q(x) \leq \frac{C}{|x|^{\alpha(n-1)}}\,, \quad C := \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n-1}\,.$$

Таким образом, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} (Q(x))^p\, dm(x) \leq C^p \int\limits_{\mathbb{B}^n} \frac{dm(x)}{|x|^{p\alpha(n-1)}} =$$

$$= C^p \int\limits_0^1 \int\limits_{S(0,r)} \frac{d\mathcal{A}}{|x|^{p\alpha(n-1)}} dr = \omega_{n-1} C^p \int\limits_0^1 \frac{dr}{r^{(n-1)(p\alpha-1)}}\,. \tag{2.12.2}$$

Известно, что интеграл $I := \int\limits_0^1 \frac{dr}{r^\beta}$ сходится при $\beta < 1$. Таким образом, интеграл в правой части соотношения (2.12.2) сходится, поскольку показатель степени $\beta := (n-1)(p\alpha - 1)$ удовлетворяет условию $\beta < 1$ при $\alpha \in (0, n/p(n-1))$.

Отсюда вытекает, что $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$; в частности, из (2.12.1) вытекает, что $K_I(x, f) \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$. Ввиду утверждения примера 4^* п. 1.3.6 отображение f является Q-гомеоморфизмом при Q, указанном в (2.12.1). Таким образом, необходимый пример отображения построен. $\Box$

2.12.3. Отметим также, что отображение f, построенное в доказательстве теоремы 2.12.1, не удовлетворяет ни одному из заключений теорем 2.4.1, 2.4.2, 2.4.4 и 2.4.5. Хотя $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой точкой отображения f, предельным множеством $C(0, f)$ есть сфера $\{|y| = 1\} \neq \overline{\mathbb{R}^n}$ и, при этом, очевидно, cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)\right) > 0$.

2.12.4. Построенный выше пример снимает, таким образом, некий оттенок "искусственности" с условия FMO, (2.3.5) и подобных им. Введение таких условий преследует следующую мотивацию: выделить из общего числа неограниченных функций Q функции относительно медленного роста, когда Q-отображения f сохраняют некоторые свойства, характерные для аналитических функций на плоскости. В частности, мы убедились, что таким ограничением не может быть интегрируемость функции Q в некоторой степени p, каким большим бы не было такое число p.

Рассмотрим более подробно условие (2.3.5). Мы уже отметили, что это условие не может быть заменено локальной интегрируемостью Q в некоторой степени. Ниже показано, что условие (2.3.5) является не только достаточным, но (в некотором смысле) и необходимым условием наличия предела у отображения f в фиксированной точке x_0. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.12.2. *Для каждой измеримой по Лебегу функции* $Q : \mathbb{B}^n \to [0, \infty)$, $Q \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$, *такой, что*

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty\,, \tag{2.12.3}$$

найдется кольцевой Q-гомеоморфизм $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ в нуле, имеющий существенно особую точку $x_0 = 0$.

Доказательство. Воспользуемся примером 9 п. 1.3.6, где построено следующее отображение:

$$h(x) = \frac{x}{|x|}\exp\left\{-\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}.$$

При рассмотрении этого примера доказано, что h является кольцевым Q-отображением в нуле (то, что h в нуле не задано, не является препятствием, так как как легко видеть, что все приведенные в п. 1.3.6 рассуждения полностью аналогичны нашему случаю). Отметим, что h не имеет предела в нуле, что следует из условия (2.12.3). $\Box$

2.12.5. В следующей теореме доказано, что условие открытости отображения f, присутствующее в результатах предыдущих параграфов, также является существенным.

Теорема 2.12.3. *При каждом $n \geq 2$ найдется дискретное 1-отображение (Q-отображение при $Q(x) \equiv 1$) $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой точкой.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ кубами:

$$C_{k_1,\ldots,k_n} = \prod_{i=1}^n [2k_i - 1, 2k_i + 1]\,, \quad k_i \in \mathbb{Z}\,.$$

Рассмотрим произвольный куб $C_{k_1,\ldots,k_n}$ с $k_1, \ldots, k_n \geq 0$; случай с k_i разных знаков может быть рассмотрен аналогично. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in$

$\in C_{k_1,\ldots,k_n}$. Если $k_1 = 0$, $g_{m_1}(x) := x$. Пусть $k_1 > 0$. Положим $f_{1,\ldots,1,1}(x) = y_{1,\ldots,1}$, где $y_{1,\ldots,1,1}$ — симметрическое отражение точки x относительно гиперплоскости $x_1 = 2k_1 - 1$. Если $2k_1 - 3 = -1$, то процесс завершен. Пусть $2k_1-3 > -1$, тогда $f_{1,\ldots,1,2}(y_{1,\ldots,1}) = y_{1,\ldots,1,2}$, где $y_{1,\ldots,1,2}$ — симметрическое отражение точки $y_{1,\ldots,1}$ относительно гиперплоскости $x_1 = 2k_1-3$. Если $2k_1 - 5 = -1$, то процесс завершен. Если нет, то продолжаем процесс, $f_{1,\ldots,1,3}(y_{1,\ldots,1,2}) = y_{1,\ldots,1,3}$. И так далее. За конечное число шагов m_1 находим функцию $g_{m_1} = f_{1,\ldots,1,m_1} \circ \cdots \circ f_{1,\ldots,1,1}$ такую, что образ $g_{m_1}(x)$ точки x лежит в кубе $C_{0,k_2,k_3\ldots,k_n}$. Полагаем $x_{m_1} := g_{m_1}(x)$.

Далее, если $k_2 = 0$, то $g_{m_2}(x_{m_1}) = g_{m_1}(x_{m_1})$. При $k_2 > 0$ относительно точки x_{m_1} выполняем ту же операцию, но относительно координаты x_2. Полагаем $f_{1,\ldots,1,2,m_1}(x_{m_1}) = y_{1,\ldots,1,2,m_1}$, где $y_{1,\ldots,1,2,m_1}$ — симметрическое отражение точки x_{m_1} относительно гиперплоскости $x_2 = 2k_2 - 1$. Если $2k_2-3 = -1$, то процесс завершен. Если нет, то продолжаем до тех пор, пока не получим отображение $g_{m_2} = f_{1,\ldots,m_2,m_1} \circ \cdots \circ f_{1,\ldots,2,m_1}$ такое, что $g_{m_2}(x_{m_1}) \in C_{0,0,k_3\ldots,k_n}$. Полагаем $g_{m_1+m_2} := g_{m_2} \circ g_{m_1}$, $x_{m_2} := = g_{m_1+m_2}(x)$. И так далее.

Через некоторое число шагов $m_0 = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ приходим к отображению $G_0 = g_{m_n} \circ g_{m_{n-1}} \circ \cdots g_{m_2} \circ g_{m_1}$ такому, что образ x_{m_n} точки x при отображении G_0 лежит в кубе $C_{0,0,0\ldots,0}$. Сжатие $G_1(x) = \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot x$ переводит $C_{0,0,0\ldots,0}$ в некоторый куб A_0, полностью лежащий в $\overline{\mathbb{B}^n}$. Полагаем $G_2 := G_1 \circ G_0$.

Отметим, что точка $z_0 = \infty$ является изолированной существенно особой точкой отображения G_2, причем $C(G_2, \infty) = A_0 \subset \overline{\mathbb{B}^n}$. Тогда отображение

$$g := G_2 \circ G_3 \,, \tag{2.12.4}$$

где $G_3(x) = \frac{x}{|x|^2}$, имеет изолированную существенно особую точку $x_0 = 0$, причем

$$C(g, 0) \subset \overline{\mathbb{B}^n} \,. \tag{2.12.5}$$

Отображение g, заданное соотношением (2.12.4), является Q-отображением при $Q \equiv 1$. Действительно, по построению g сохраняет длины кривых, дифференцируемо почти всюду, обладает N и N^{-1}-свойствами Лузина, кроме того, $K_I(x, g) = 1$ почти всюду, так что g является 1-отображением ввиду [125, следствие 8.3 и теорема 8.6]. Понятно также, что g — дискретное отображение. Отметим, что заключения теорем 2.4.1, 2.4.4, 2.4.5 не выполнены; в частности, в силу (2.12.5) нарушена теорема типа Сохоцкого—Вейерштрасса, ибо cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{\mathbb{B}^n}\right) > 0$. При-

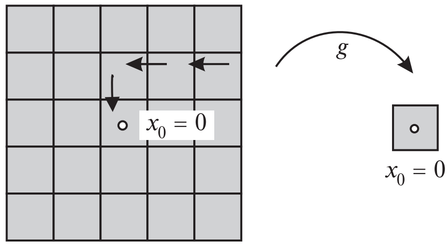

Рис. 9. Не открытое Q-отображение, $Q \equiv 1$, имеющее существенную сингулярность

чина заключается в том, что g не является открытым отображением в $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{0\}$ (рис. 9). $\Box$

2.12.6. Итак, мы выяснили, что некоторые условия на функцию Q, при которых вопрос об устранении изолированных особенностей кольцевых Q-отображений решается положительно, нельзя ослабить. Наиболее выгодным с этой точки зрения является условие (2.3.5), поскольку, по крайней мере, при $Q \in L^1_{loc}$ и $Q \geq 1$ оно есть необходимым и достаточным условием, при котором ограниченное открытое дискретное кольцевое Q-отображение продолжается в изолированную точку x_0 границы области $D \setminus \{x_0\}$.

Также рассмотрено наличие условия открытости отображения при решении данной проблемы. Что касается условия дискретности, присутствующего практически в каждой теореме данной главы, то, к сожалению, остается не выясненным, является ли это условие чисто техническим, или его наличие необходимо для положительного решения данного круга задач.

2.13. Аналог теоремы Иверсена для кольцевых Q-отображений. Устранение изолированных особенностей локальных кольцевых Q-гомеоморфизмов

2.13.1. Проблема устранения особенностей отображений тесно связана с таким явлением, как асимптотический предел отображения. Рассмотрим следующее определение.

Определение 2.13.1. Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является *асимптотическим пределом* отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $b \in \partial D$, если найдется кривая $\alpha : [0,1) \to D$, $\alpha(t) \to b$ при $t \to 1$, такая, что $f(\alpha(t)) \to z_0$ при $t \to 1$ [117, § 3.13], [175, гл. VII, п. 2].

Грубо говоря, отображение f, заданное в области D, имеет своим асимптотическим пределом величину $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ в некоторой точке b границы D, если существует кривая, лежащая в D и стремящаяся к b, вдоль которой отображение f стремится к z_0 (рис. 10).

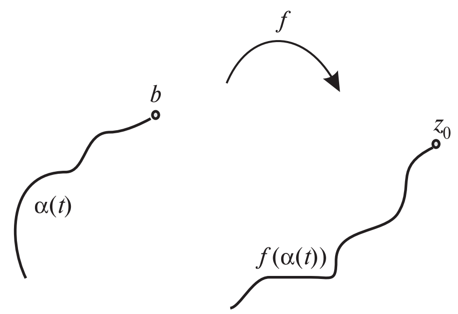

Рис. 10. Асимптотические пределы отображений

2.13.2. Перед тем, как перейти к изложению основных результатов, касающихся асимптотических пределов кольцевых Q-отображений, приведем небольшой исторический очерк по этой теме.

2.13.3. Легко понять, что исследования отображений на предмет наличия у них асимптотических пределов в точках границы тесно связаны с теоремами типа Сохоцкого—Вейерштрасса и Пикара. (Конечно, если f стремится к данному значению z_0 вдоль некоторой кривой, стремящейся к изолированной точке границы b, то найдется последовательность $x_k \to b$ при $k \to \infty$ такая, что $f(x_k) \to z_0$ при $k \to \infty$). Однако в отличие от задачи об устранении особенностей и проблем, связанных с теоремой о выпускании значений, исследования, связанные с наличием асимптотических пределов, требуют более изящного подхода. Наличие асимптотического предела у данного отображения является (в известной степени) достаточно редким явлением: даже если f стремится к z_0 по некоторой последовательности x_k, $x_k \to b$ при $k \to \infty$, то вполне возможно, что никакое z_0 не является его асимптотическим пределом в точке b. Приведенное подтверждает простой пример аналитической функции $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, имеющей существенно особую точку $b = \infty$. Известно, что указанное отображение имеет всего два асимптотических значения в бесконечности: $z_1 = \infty$ (которое достигается вдоль луча

$\gamma(t) = t$, $t \in [0, \infty)$) и $z_2 = 0$ (которое достигается вдоль луча $\gamma(t) = -t$, $t \in [0, \infty)$). В случае аналитических функций на плоскости ясность в исследование проблемы о существовании асимптотических пределов вносит следующая теорема Ф. Иверсена [77], [83, гл. I, теорема 1.6].

Предложение 2.13.1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$, $b \in D$, и $f : D \setminus \{b\} \to \overline{\mathbb{C}}$ — аналитическая (мероморфная) функция такая, что b является ее существенно особой точкой. Предположим, что f не принимает в области $D \setminus \{b\}$ два значения $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда z_1 и z_2 являются асимптотическими пределами функции f в точке b.*

Числа $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ условимся называть *пикаровскими значениями* отображения f.

В связи с решением вопроса о количестве асимптотических значений фиксированной функции рассмотрим следующее определение.

Определение 2.13.2. Целая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется функцией *конечного порядка* ν, если

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = \nu < \infty\,,$$

где $M(r) = \max\limits_{|z|=r} f(z)$. В этом случае ν называется *порядком* целой функции f.

Как следует из следующего утверждения, более известного как теорема Данжуа—Карлемана—Альфорса, для достаточно широкого подкласса аналитических функций, а именно, целых функций конечного порядка, количество асимптотических пределов является конечным.

Предложение 2.13.2. *Количество асимптотических пределов целой функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ конечного порядка ν в точке $b = \infty$, отличных от ∞, не превышает 2ν [27, гл. X, § 5, теорема 5.4].*

Важные аналоги теоремы Ф. Иверсена, приведенной выше в виде предложения 2.13.1, также имеют место для более широких классов отображений. В частности, для отображений с ограниченным искажением справедливо следующее утверждение [175, гл. VII, теорема 2.6], см. также [117, замечание 3.18].

Предложение 2.13.3. *Пусть $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — отображение с ограниченным искажением (квазимероморфное отображение) и точка x_0 является существенно особой точкой отображения f. Тогда каждая точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(D \setminus \{x_0\})$ является асимптотическим пределом отображения f в точке x_0.*

2.13.4. Здесь приведены сведения, необходимые для дальнейших исследований, касающиеся асимптотических пределов Q-отображений и т.п.

Определение 2.13.3. Множество $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *относительно локально связно*, если каждая точка множества $\overline{E}$ имеет сколь угодно малые окрестности U такие, что множества $U \cap E$ связны.

Следующие утверждения см. в [175, гл. III, леммы 3.1, 3.2].

Предложение 2.13.4. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — локальный гомеоморфизм, Q — односвязное и локально линейно связное множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и P — компонента связности множества $f^{-1}(Q)$, $\overline{P} \subset D$. Тогда f отображает P на Q гомеоморфно. Если Q — относительно локально связно, то f гомеоморфно отображает $\overline{P}$ на $\overline{Q}$.*

Предложение 2.13.5. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — локальный гомеоморфизм, F — компактное множество в D и $f|_F$ инъективно. Тогда f также инъективно в некоторой окрестности множества F* (оригинальный вариант утверждения предложения 2.13.5 доказан в работе [299, с. 422, замечание 1]).

Всюду далее запись $g = \mathrm{id}$ для отображения $g : D \to \mathbb{R}^n$ означает, что g — тождественное отображение.

Определение 2.13.4. Относительно отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ непрерывное отображение $s : f(D) \to \mathbb{R}^n$ называется его *сечением,* если $f \circ s = \mathrm{id}$.

Как обычно, $C(y, s)$ обозначает предельное множество отображения s в точке y (см. соотношение (2.1.2)). Справедливо следующее утверждение [1, §3.A], [117, лемма 3.10].

Предложение 2.13.6. *Пусть отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — нульмерное, $A \subset f(D)$ и существует сечение $s : A \to D$ отображения f, т.е. $f \circ s = \mathrm{id}$. Если A — относительно локально связно в точке $y \in \overline{A}$, то множество $C(y, s)$ есть либо континуум в ∂D, либо единственная точка в D.*

2.13.5. Прототип следующей леммы доказан для отображений с ограниченным искажением в работе [117].

Лемма 2.13.1. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 3$, — дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 \in D$, где x_0 — существенно особая точка отображения f. Предположим, что найдется $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t) : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ со следующим свойством. Для любого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1]$ такое, что выполнено условие (2.2.1) при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и, кроме того, при $\varepsilon \to 0$*

выполнено условие (2.2.2). Тогда $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ для любой окрестности U точки x_0, как только $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является асимптотическим пределом f в точке x_0.

Доказательство. Проведем доказательство от противного, именно, предположим, что найдется окрестность U точки x_0, для которой $z_0 \notin \overline{f(B_f \cap U)}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = z_0 = 0$. Выберем $r_0 > 0$ так, чтобы $\overline{B(0, r_0)} \subset U \cap D$. Так как f — дискретное отображение, то множество $\{f^{-1}(0)\}$ не более чем счетно, следовательно, можно считать, что $S(0, r_0) \cap f^{-1}(0) = \varnothing$. Положим $U_0 = B(0, r_0) \setminus \{0\}$, $g = f|_{U_0}$. Поскольку dist $(f(S(0, r_0)), 0) > 0$ и по предположению $0 \notin \overline{f(B_f \cap U)}$, то найдется $r' > 0$ такое, что

$$\overline{B(0, r')} \cap (f(S(0, r_0)) \cup g(B_g)) = \varnothing\,. \qquad (2.13.1)$$

Так как $z_0 = 0$ является асимптотическим пределом отображения f в точке $x_0 = 0$, то найдется кривая $\alpha(t) : [0, 1) \to U_0$ с $\alpha(t) \to 0$ при $t \to 1$ такая, что $\beta(t) = f(\alpha(t)) \to 0$ при $t \to 1$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < |\beta(t)| < r'$ при всех $t \in (0, 1)$. Тогда в силу (2.13.1)

$$|\alpha| \subset U_0 \setminus B_g\,. \qquad (2.13.2)$$

Определим при $0 \leq t \leq 1$ и $0 < \varphi \leq \pi$ так называемые *сферические шапочки* по следующему правилу:

$$G(t, \varphi) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = |\beta(t)|, \quad (y, \beta(t)) > |y|^2 \cos\varphi\}\,. \qquad (2.13.3)$$

Множества $G(t, \varphi)$ в (2.13.3) представляют собой некоторую часть сферы $S(0, |\beta(t)|)$, симметричную относительно отрезка $\{r \in \mathbb{R}^n : r = \beta(t)s, s \in (0, 1)\}$. Пусть $G^*(t, \varphi) - \alpha(t)$ — компонента связности множества $g^{-1}(G(t, \varphi))$ и φ_t — точная верхняя грань чисел $\varphi \in (0, \pi]$ таких, что g отображает $G^*(t, \varphi)$ гомеоморфно на $G(t, \varphi)$; такое $\varphi_t > 0$ существует в виду соотношения (2.13.1) и того, что $\beta(t) \in f(U_0)$. Положим $G(t) = G(t, \varphi_t)$, $G^*(t) = G^*(t, \varphi_t)$, тогда отображение g определяет при каждом фиксированном t гомеоморфизм $g_t : G^*(t) \to G(t)$.

Покажем, что для п.в. $r \in (0, r')$, из равенства $|\beta(t)| = r$ следует, что $0 \notin \overline{G^*(t)}$. Предположим, что $0 \in \overline{G^*(t)}$ при некотором t, тогда найдется последовательность $x_k \in G^*(t)$ такая, что $x_k \to 0$ при $k \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $f(x_k) \to y_t \in \overline{G(t)}$ при $k \to \infty$. Отображение g_t^{-1} является сечением отображения f на множестве $G(t) \subset f(U_0)$ и по предложению

2.13.6 множество $C(y_t, g_t^{-1})$ есть континуум, лежащий на границе области U_0. Ввиду соотношения (2.13.1) $C(y_t, g_t^{-1}) = \{0\}$, т.е. $g_t^{-1}(y) \to 0$ при $y \to y_t$. Пусть $\Gamma(t)$ — семейство открытых кривых $\gamma_t(s) : (0,1) \to \overline{\mathbb{R}^n}$, соединяющих $\beta(t)$ и y_t в $G(t)$, т.е. $\gamma_t(0) = y_t$, $\gamma_t(1) = \beta(t)$ и $\gamma_t(s) \in G(t)$ при $s \in (0,1)$. Обозначим $\Gamma^*(t) = g_t^{-1}(\Gamma(t))$. Тогда каждая кривая $\gamma_t^*(s) : (0,1) \to U_0$ семейства $\Gamma^*(t)$ такова, что $\gamma_t^*(s) \to 0$ при $s \to 0$. Обозначим $\Gamma^* = \bigcup\limits_{t:\, 0 \in \overline{G^*(t)}} \Gamma^*(t)$. По лемме 2.2.1 получаем, что $M(g(\Gamma^*)) = 0$. С другой стороны [281, § 10.2],

$$M(g(\Gamma^*)) \geq b_n \cdot \int\limits_E \frac{dr}{r}\,,$$

где постоянная b_n зависит только от размерности n и $E = \{|\beta(t)| : 0 \in \overline{G^*(t)}\}$ при некотором t. Следовательно, линейная мера Лебега $\mathrm{mes}_1\,(E) = 0$, что и требовалось доказать.

Пусть $T = \{t : 0 \leq t < 1, |\beta(t)| \notin E\}$. Ввиду (2.13.1) $\overline{G^*(t)} \subset U_0 \setminus B_g$ при $t \in T$. По предложению 2.13.4 отображение f отображает $\overline{G^*(t)}$ гомеоморфно на $\overline{G(t)}$. Кроме того, по предложению 2.13.5 f инъективно в некоторой окрестности $\overline{G^*(t)}$. По определению угла φ_t это возможно только в случае $\varphi_t = \pi$. Следовательно, при каждом $t \in T$ множество $\overline{G^*(t)} = \overline{G^*(t,\pi)}$ есть поверхность в $U_0 \setminus B_g$, топологически эквивалентная сфере $G(t)$ и f гомеоморфно отображает $\overline{G^*(t)}$ на $S(0, |\beta(t)|)$. Пусть $D(t)$ означает ограниченную компоненту множества $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G^*(t)}$. Положим $T_0 = \{t \in T : 0 \in D(t)\}$. Возможны 2 случая: $1 \in \overline{T_0}$ и $1 \notin \overline{T_0}$.

1 случай. Предположим, что $1 \in \overline{T_0}$, тогда найдется возрастающая последовательность $t_j \in T_0$ такая, что $t_j \to 1$. Положим $r_j = |\beta(t_j)|$ и $D_j = D(t_j)$; не ограничивая общности, можно считать, что $r_{j+1} < r_j$ и, в виду того, что $\alpha(t_j) \to 0$ при $j \to \infty$, что $D_{j+1} \subset D_j$. Пусть A_j означает сферическое кольцо $B(0, r_1) \setminus \overline{B(0, r_j)}$. Поскольку отображение g инъективно в окрестности границы ∂D_1 по предложению 2.13.5, то найдется компонента A_j^* множества $g^{-1}A_j$ такая, что $\partial A_j^* \supset \partial D_1$. Отметим, что $\partial D_j \cap A_j^* = \varnothing$, значит, $\overline{A_j^*} \subset U_0$. Кроме того, в виду того, что $\overline{A_j} \cap g(B_g) = \varnothing$, $\overline{A_j^*} \subset U_0 \setminus B_g$. По предложению 2.13.4 f отображает A_j^* гомеоморфно на A_j. В виду приведенного выше построено сечение $s_j : A_j \to A_j^*$ отображения f, такое что $s_j = s_k|_{A_j}$ при всех $k > j$. Более того, построено сечение $s : B(0, r_1) \setminus \{0\} \to U_0 \setminus B_g$ отображения f в $B(0, r_1) \setminus \{0\}$. По предложению 2.13.6 сечение s может быть продолжено до непрерывного отображения $\overline{s}$ всего шара $B(0,r_1)$, что возможно лишь при $\overline{s}(0)=0$, откуда вытекает устранимость особенности отображения f в нуле, что противоречит условию леммы.

2 случай. Предположим теперь, что $1\notin\overline{T_0}$. Кривую α мы можем продолжить до $\overline{\alpha}:[-1,1)\to\mathbb{R}^n$ так, что $\overline{\alpha}(-1)\in\partial U_0\setminus\{0\}$, $\overline{\alpha}(-1,1)\subset\subset U_0$, $\overline{\alpha}|_{[0,1)}=\alpha$ и $\overline{\beta}=f(\overline{\alpha}(t))\neq 0$ при всех $t\in[-1,1)$. По предположению найдется δ, $0\le\delta<1$ такое, что $[\delta,1)\cap T_0=\varnothing$. Выберем возрастающую последовательность точек $t_j\in T\cap[\delta,1)$ такую, что

$$t_j\to 1\quad\text{при}\quad j\to\infty\,,\quad |\beta(t)|<r_j=|\beta(t_j)|\quad\text{при всех}\quad t\in(t_j,1)\,,$$

$$|\overline{\beta}(t)|>r_{j+1}\quad\text{при всех}\quad t\in[-1,t_j]\,.$$

Положим $D_j=D(t_j)$. Поскольку $\alpha(t_j)\to 0$ при $j\to\infty$, то последовательность $\alpha(t_j)$ можно выбрать монотонно убывающей и случай 2 можно условно разбить на 2 подслучая:

$$(a)\qquad D_j\subset D_{j+1}\quad\text{при всех}\quad j\in\mathbb{N}\,,$$

$$(b)\qquad \overline{D_j}\cap\overline{D_{j+1}}=\varnothing\quad\text{для некоторого}\quad j\in\mathbb{N}\,.$$

Предположим, что (a) верно. Рассуждаем так, как и в первом случае. Пусть A_j означает сферическое кольцо $B(0,r_1)\setminus\overline{B(0,r_j)}$. Поскольку отображение g инъективно в окрестности границы ∂D_1, то найдется компонента A_j^* множества $g^{-1}A_j$ такая, что $\partial A_j^*\supset\partial D_1$. Так как $\alpha(t_1,1)\subset\mathbb{R}^n\setminus\overline{D_1}$, то $A_j^*\subset D_j\setminus\overline{D_1}$. Рассуждая, как выше, получаем непрерывное сечение $s:B(0,r_1)\setminus\{0\}\to U_0\setminus B_g$ отображения f в $B(0,r_1)\setminus\{0\}$. В этом случае множество $C(0,s)$ представляет собой невырожденный континуум в $\overline{U_0}$, что противоречит предложению 2.13.6.

Предположим, что верно (b). В этом случае $\alpha(t_j,1)\subset\mathbb{R}^n\setminus\overline{D_j}$. Положим $u_{j+1}=\sup\{t:\alpha(t_j,t)\subset\mathbb{R}^n\setminus\overline{D_{j+1}}\}$. Выберем окрестность U_{j+1} границы ∂D_{j+1} такую, что сужение $f|_{U_{j+1}}$ инъективно (см. предложение 2.13.5). Поскольку $\beta(t_{j+1},1)\subset B(0,r_{j+1})$, то $g\left(U_{j+1}\cap\left(\mathbb{R}^n\setminus\overline{D_{j+1}}\right)\right)\subset\subset B(0,r_{j+1})$ ввиду инъективности g в U_{j+1}. Тогда найдется $v_1=\max\{t:t_j<t<u_{j+1},|\beta(t)|=r_{j+1}\}$, причем $v_1\in T$. Отметим, что $\overline{D(v_1)}\subset\subset\mathbb{R}^n\setminus(\overline{D_j}\cup\overline{D_{j+1}})$. В таком случае, $v_1'=\sup\{t:\alpha(t_j,t)\subset\mathbb{R}^n\setminus\overline{D(v_1)}\}>t_j$. Тогда найдется $v_2=\max\{t:t_j<t<v_1',|\beta(t)|=r_{j+1}\}$ такое, что $\overline{D(v_2)}\subset\mathbb{R}^n\setminus\overline{D_j}\cup\overline{D_{j+1}}\cup\overline{D(v_1)}$. И так далее. Продолжая этот процесс, получаем бесконечную последовательность $\left\{\overline{G^*(v_k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ компонент связности множества $g^{-1}\left(S(0,r_{j+1})\right)$. Отметим, что существует $v=\lim\limits_{k\to\infty}v_k$,

$v \in (t_j, u_{j+1})$, причем каждая окрестность точки $\alpha(v)$ пересекает бесконечное число компонент связности множества $g^{-1}(S(0, r_{j+1}))$. Последнее невозможно, так как ввиду (2.13.2) отображение f есть локальный гомеоморфизм в точке $\alpha(v)$. Лемма доказана.$\Box$

2.13.6. Пример отображения $f(z) = e^{1/z}$ и его изолированной существенно особой точки $z_0 = 0$ показывает, что лемма 2.13.1 не является верной при $n = 2$ даже при $Q \equiv 1$. Следующая лемма в отличие от предыдущей справедлива в пространстве любой размерности $n \geq 2$, в том числе при $n = 2$. Указанная лемма представляет собой аналог известной из комплексного анализа теоремы Иверсена для аналитических функций (о включении пикаровских значений функции во множество его асимптотических пределов) в наиболее общей формулировке.

Лемма 2.13.2. *(Аналог теоремы Иверсена). Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 \in D$, где x_0 — существенно особая точка отображения f. Предположим, что найдется $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t) : (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ со следующим свойством. Для любого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1]$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено условие (2.2.1) и, кроме того, при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнено условие (2.2.2). Тогда каждая точка множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)$ является асимптотическим пределом f в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $z \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $z = 0$. Выбираем $r_0 > 0$ таким, чтобы $\overline{B(x_0, r_0)} \subset D$, полагаем $U_0 = B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}$. Так как $0 \notin f(D \setminus \{x_0\})$, то существует $r' > 0$, $r' < 1$ такое, что

$$\overline{B(0, r')} \cap f(S(x_0, r_0)) = \varnothing. \tag{2.13.4}$$

По лемме 2.2.1 ввиду (2.13.4) найдется множество G вида (2.13.3), лежащее на сфере $S\left(0, r'\right)$, такое, что некоторая связная компонента G^* множества $f^{-1}(G)$ целиком содержится в U_0. Для фиксированного $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ обозначим через $\gamma_y : (0, r'] \rightarrow \overline{B(0, r')}$ кривую $\gamma_y(t) = ty$. При каждом $r'y \in G$ пусть γ_y^* означает максимальное поднятие кривой γ_y с концом в G^*, $\gamma_y^* : (r_y, r'] \rightarrow U_0$. Покажем, что $\gamma_y^*(t) \rightarrow x_0$ при $t \rightarrow r_y$.

Введем в рассмотрение множество $K = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim\limits_{k \rightarrow \infty} \gamma_y^*(t_k)\right\}$, где $t_k \in (r_y, r']$ такие, что $\lim\limits_{k \rightarrow \infty} t_k = r_y$; без ограничения общности можно считать все такие последовательности t_k монотонными. Для $x \in K \cap U_0$ по непрерывности f имеем $f\left(\gamma_y^*(t_k)\right) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$, где $t_k \in$

$\in (r_y, r')$, $t_k \to r_y$ при $k \to \infty$. Однако, $f\left(\gamma_y^*(t_k)\right) = \gamma_y(t_k) \to \gamma_y(r_y)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что $f \equiv \gamma_y(r_y)$ на множестве $K \cap U_0$ в U_0. С другой стороны, ввиду монотонности последовательности связных множеств $\gamma_y^*\left((r_y, t_k]\right)$ множество K связно [296, гл. I, § 9.12]. Таким образом, в силу дискретности f, ввиду соотношения (2.13.4) и приведенного выше K не может состоять более чем из одной точки. Пусть $K \neq \{x_0\}$, тогда кривая $\gamma_y^* : (r_y, r'] \to U_0$ продолжается до замкнутой кривой $\gamma_y^* : [r_y, r'] \to U_0$, причем $f\left(\gamma_y^*(r_y)\right) = \gamma_y(r_y)$. В таком случае можно построить максимальное поднятие $\gamma_y^{*\prime}$ кривой $\gamma_y|_{(0,\, r_y]}$ с концом в точке $\gamma_y^*(r_y)$, в [175, гл. II, следствие 3.3]. Объединяя поднятия γ_y^* и $\gamma_y^{*\prime}$, получаем новое поднятие $\gamma_y^{*\prime\prime}$ кривой γ_y, которое определено на $(r_y', r']$, что противоречит свойству максимальности исходного поднятия γ_y^*. Следовательно, $K = \{x_0\}$ и $\gamma_y^*(t) \to x_0$ при $t \to r_y$.

Ввиду последнего соотношения нам дополнительно требуется показать, что $r_y = 0$ хотя бы для одного y. Ниже показано, что $r_y = 0$ для п.в. $r'y \in G$, где "п.в." понимается относительно меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$. Пусть $E_i = \{y \in \mathbb{S}^n : r'y \in G, r_y > 1/i\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Мы утверждаем, что $\mathcal{H}^{n-1}(E_i) = 0$ для каждого i, где $\mathcal{H}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа. Для фиксированного $i \in \mathbb{N}$ обозначим $\Gamma_i = \{\gamma_y^* : y \in \in E_i\}$. Учитывая приведенное выше, все кривые семейства Γ_i стремятся к точке x_0, поэтому $M(\Gamma_i) = 0$. По лемме 2.2.1 также $M(f(\Gamma_i)) = 0$. Отметим, что семейство $f(\Gamma_i)$ минорирует семейство Δ всех отрезков $\alpha_y : [1/i, r'] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha_y(t) = ty$, $y \in E_i$. Пусть $\rho \in \operatorname{adm} f(\Gamma_i)$. При каждом фиксированном $y \in E_i$ по неравенству Гельдера имеем оценку

$$1 \leq \int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)dt \leq \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt\right)^{1/n},$$

откуда следует

$$\int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)dt \leq \int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt\,.$$

В таком случае, используя теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)dm(x) \geq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho^n(ty)\,dt\right) d\mathcal{A} \geq$$

$$\geq \frac{1}{i^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\, dt d\mathcal{A} \geq \frac{1}{i^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)\, dt d\mathcal{A} \geq$$

$$\geq \frac{1}{i^{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(F_\rho)\,, \qquad (2.13.5)$$

где $F_\rho = \{y \in \mathbb{S}^n : \int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)\, dt \geq 1\}$. По выбору ρ имеет место включение $E_i \subset F_\rho$. Поскольку $M(f(\Gamma_i)) = 0$, переходя к inf по всем $\rho \in$ $\in \operatorname{adm} f(\Gamma_i)$ в левой части (2.13.5), получаем $\mathcal{H}^{n-1}(F_\rho) = 0$ и, следовательно, $\mathcal{H}^{n-1}(E_i) = 0$. Лемма доказана.□

2.13.7. Из доказанных выше лемм 2.13.1 и 2.13.2 вытекают следующие утверждения.

Лемма 2.13.3. *В условиях леммы 2.13.1 имеет место включение:*

$$\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(D \setminus \{x_0\})\right) \subset \overline{f(B_f)}\,.$$

Доказательство следует из лемм 2.13.1 и 2.13.2. Предположим противное, тогда найдется $y_0 \in \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(D \setminus \{x_0\})\right) \setminus \overline{f(B_f)}$. Поэтому по лемме 2.13.2 точка y_0 является асимптотическим пределом отображения f в точке x_0. Однако по лемме 2.13.1 имеем $y_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ для любой окрестности U точки x_0, что противоречит приведенному выше предположению. □

Лемма 2.13.4. *В условиях леммы 2.13.1 множество $f(B_f)$ не может быть ограниченным, как только $y_0 = \infty \notin f(D \setminus \{x_0\})$ (рис. 11).*

Доказательство. Отметим, что точка $y_0 = \infty \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(D \setminus \{x_0\})$ и по лемме 2.13.3 существует последовательность $y_k \in f(B_f)$, $k =$

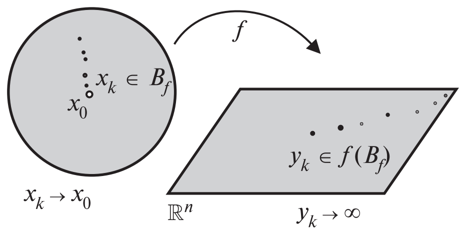

Рис. 11. Свойства множеств точек ветвления кольцевых Q-отображений

$= 1, 2, \dots$, такая, что $y_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Тем самым, $f(B_f)$ неограничено, что и требовалось доказать. $\Box$

Лемма 2.13.5. *В условиях леммы 2.13.1 имеет место включение: $x_0 \in \overline{B_f}$, как только $y_0 = \infty \notin f(D \setminus \{x_0\})$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существует окрестность U точки x_0 такая, что

$$(U \setminus \{x_0\}) \cap B_f = \varnothing\,. \tag{2.13.6}$$

Отметим, что точка $y_0 = \infty \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})$. Применим к отображению $g := f|_{U \setminus \{x_0\}}$ лемму 2.13.3. Получим, что найдется последовательность $y_k \in f\left(B_f \cap (U \setminus \{x_0\})\right)$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что $y_k \to \infty$ при $k \to \to \infty$. Однако, последнее противоречит соотношению (2.13.6), ибо тогда $f\left(B_f \cap (U \setminus \{x_0\})\right) \neq \varnothing$ и, тем более, $B_f \cap (U \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$. $\Box$

2.13.8. Из лемм 2.13.1—2.13.5 на основании доказанной ранее леммы 2.3.1 вытекает следующий основной результат данного параграфа.

Теорема 2.13.1. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 \in D$, где x_0 — существенно особая точка f. Предположим, что измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [0, \infty]$ удовлетворяет, по крайней мере, одному из следующих условий:*

1) $Q \in FMO(x_0)$;

2) при некотором $C > 0$ и $r \to 0$ выполнено условие (2.3.10);

3) при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, и произвольных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнены условия (2.3.4), (2.3.5). Тогда:

I. Если $n \geq 3$ и точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является асимптотическим пределом f в точке x_0, то для любой окрестности $U \subset D$, содержащей точку x_0, выполнено $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$;

II. (Аналог теоремы Иверсена). Каждая точка множества

$$\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)$$

является асимптотическим пределом f в точке x_0;

III. Если $n \geq 3$, то имеет место включение $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)\right) \subset \subset \overline{f(B_f)}$;

IV. Если $n \geq 3$ и $\infty \notin f\left(D \setminus \{x_0\}\right)$, то

a) множество $f(B_f)$ неограничено в $\mathbb{R}^n$,   b) $x_0 \in \overline{B_f}$.

Замечание 2.13.1. Известно, что даже для отображений с ограниченным искажением заключения лемм 2.13.3—2.13.5, а также утверждения п. I, III, IV теоремы 2.13.1 нарушаются при $n = 2$, как показывает пример отображения $f(z) = e^{1/z}$ в точке $z_0 = 0$ (для этого отображения $Q \equiv 1$).

2.13.9. Следующий результат для отображений с ограниченным искажением установлен В. Зоричем [301, теорема 1]. Отметим, что метод, при помощи которого указанный результат был получен, несколько отличается от того, посредством которого аналогичное утверждение доказано в книге.

Следствие 2.13.1. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — локальный кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in D$. Предположим, что измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [0, \infty]$ удовлетворяет, по крайней мере, одному из следующих условий:*

1) $Q \in FMO(x_0)$;

2) при некотором $C > 0$ и $r \to 0$ выполнено условие (2.3.10);

3) при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, и произвольных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнены условия (2.3.4), (2.3.5). Тогда f продолжается до локального гомеоморфизма $\overline{f} : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$.

Доказательство следствия 1.8.1 легко вытекает из заключения IV. b) теоремы 2.13.1. Возможность непрерывного продолжения f в точку x_0 следует из условия $B_f = \varnothing$. Остается показать, что продолженное отображение $\overline{f} : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является гомеоморфизмом в некотором шаре $B(x_0, \varepsilon_0)$. Предположим противное, тогда $x_0 \in B_{\overline{f}}$. С другой стороны, для произвольного открытого дискретного отображения $g : G \to \overline{\mathbb{R}^n}$ области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, хаусдорфова размерность $\dim_{\mathcal{H}} g(B_g) \geq n - 2$, как только $B_g \neq \varnothing$ [117, теорема 3.4]. В нашем случае это означало бы, что в области D, по крайней мере, были бы еще какие-то точки множества $B_{\overline{f}}$, кроме точки x_0, что противоречит сделанному предположению о локальной гомеоморфности f в $D \setminus \{x_0\}$. $\Box$

Замечание 2.13.2. Пример отображения, построенный в п. 2.12 (см. теорему 2.12.1), показывает, что условия вида (2.2.1), (2.2.2) в леммах 2.13.1—2.13.5, а также условия 1)—3) в теореме 2.13.1 и следствии 2.13.1 нельзя заменить более простым условием $Q \in L^p$ ни для какого сколь угодно большого $p \geq 1$. Более того, условие (2.3.5) в теореме 2.13.1 является точным (см. пример отображения, построенный в теореме 2.12.2). В теореме 2.12.3 построен пример 1-отображения, не являющегося открытым, который показывает, что в леммах 2.13.2—2.13.5, а также утверждениях II—IV.a) теоремы 2.13.1 требование открытости отображения является существенным требованием.

Тем не менее, заключения I и IV.b) теоремы 2.13.1 в примере, построенном выше, выполнены, так как для указанного выше отображения G_2 множество B_{G_2} представляет собой совокупность гиперплоскостей:

$$B_{G_2} = \bigcup_{i,k=1}^{\infty} A_{k,i}, \quad A_{k,i} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 2k+1\}$$

и $\infty \in \overline{B_{G_2}}$. Более того, если бы некоторое отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ не удовлетворяло бы условию IV.b) теоремы 2.13.1, то f автоматически было бы открытым отображением в $U \setminus \{x_0\}$, где U — некоторая окрестность точки x_0.

Как прежде, нам неизвестно, можно ли избавиться от требования дискретности в перечисленных выше результатах, что требует дополнительных исследований.

2.14. Устранение особенностей кольцевых Q-отображений с ограничениями интегрального типа

2.14.1. Рассмотрим еще один важный случай, когда изолированная особенность открытого дискретного кольцевого Q-отображения является устранимой. Речь идет о так называемых условиях интегрального типа, т.е. когда заданная функция Q удовлетворяет соотношениям вида

$$\int\limits_{D} \Phi(Q(x))dm(x) < \infty\,, \tag{2.14.1}$$

где $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — некоторая измеримая функция. Отметим, что соотношения типа (2.14.1) могут возникать в связи с рассмотрением самых различных задач [3, 11, 39, 94, 96, 98, 100–102, 144, 147, 181, 265, 300]. Мы же рассматриваем пространственные отображения, которые изучаются в контексте их взаимосвязи с соотношениями вида (2.14.1).

При определенном дополнительном условии на функцию Φ (которое рассмотрено ниже) из (2.14.1) вытекает расходимость интеграла вида (2.3.5). В этом и заключается основная идея, на которой базируются главные результаты настоящего параграфа: вопрос об устранении особенностей отображений, характеристика Q которых удовлетворяет условию (2.14.1), как показано ниже, сводится к вопросу о расходимости интеграла в (2.3.5).

2.14.2. Напомним определение выпуклой функции, которое понадобится нам в дальнейшем.

Определение 2.14.1. Функция $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ называется *выпуклой,* если

$$\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \le \lambda\, \Phi(t_1) + (1-\lambda)\Phi(t_2)$$

при всех $t_1,\, t_2 \in [0,\infty]$ и $\lambda \in [0,1]$.

Обратная функция Φ^{-1} может быть корректно определена для любой неубывающей функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$:

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t)\ge\tau} t\,. \tag{2.14.2}$$

Как обычно, inf в (2.14.2) равен ∞, если множество $t \in [0,\infty]$ таких, что $\Phi(t) \ge \tau$, пусто. Отметим, что функция $\Phi^{\,-1}$ также является неубывающей.

Замечание 2.14.1. Из определения очевидно, что

$$\Phi^{\,-1}(\Phi(t)) \le\ t \qquad \forall\ t \in [0,\infty]\,, \tag{2.14.3}$$

с равенством в (2.14.3), исключая интервалы постоянства функции $\Phi(t)$.

Следующее утверждение см. в [202, теорема 2.1]. Здесь, в (2.14.5) и (2.14.6), мы дополняем определения интегралов ∞ при $\Phi_p(t) = \infty$, соответственно, $H_p(t) = \infty$ для всех $t \ge T \in [0,\infty)$. Интеграл в (2.14.6) понимается в смысле Лебега—Стильтьеса, а интегралы в (2.14.5) и (2.14.7)—(2.14.10) — как обычные интегралы Лебега.

Предложение 2.14.1. *Пусть* $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — *неубывающая функция. Полагаем*

$$H_p(t)\ =\ \log\Phi_p(t)\ , \qquad \Phi_p(t) = \Phi\left(t^p\right)\ , \quad p \in (0,\infty)\,. \tag{2.14.4}$$

Тогда равенство

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} H_p'(t)\ \frac{dt}{t}\ =\ \infty \tag{2.14.5}$$

влечет

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{dH_p(t)}{t}\ =\ \infty \tag{2.14.6}$$

и (2.14.6) эквивалентно соотношению

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} H_p(t)\ \frac{dt}{t^2}\ =\ \infty \tag{2.14.7}$$

для некоторого $\delta > 0$, (2.14.7) эквивалентно каждому из равенств

$$\int\limits_{0}^{\Delta} H_p\left(\frac{1}{t}\right)\ dt\ =\ \infty \tag{2.14.8}$$

при некотором $\Delta > 0$,

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}\ =\ \infty \tag{2.14.9}$$

при некотором $\delta_* > H(+0)$,

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)}\ =\ \infty \tag{2.14.10}$$

при некотором $\delta_* > \Phi(+0)$.

Более того, (2.14.5) эквивалентно соотношению (2.14.6) и, следовательно, (2.14.5)—(2.14.10) эквивалентны друг другу при дополнительном условии, что Φ абсолютно непрерывна. В частности, все условия (2.14.5)—(2.14.10) эквивалентны друг другу при условии, что функция Φ является выпуклой и неубывающей.

Легко видеть, что условия (2.14.5)—(2.14.10) являются более слабыми при больших p (например (2.14.7)). Поясним, что в правых частях условий (2.14.5)—(2.14.10) подразумевается символ $+\infty$. При $\Phi_p(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$, $H_p(t) = -\infty$ для $t \in [0, t_*]$, и мы полагаем $H_p'(t) := 0$ для $t \in [0, t_*]$. Отметим, что условия (2.14.6) и (2.14.7) исключают случай, когда t_* принадлежит интервалу интегрирования в указанных выше соотношениях. В противном случае левые части в (2.14.6) и (2.14.7) либо одновременно равны $-\infty$, либо не определены. Следовательно, можно предполагать в (2.14.5)—(2.14.7), что $\delta > t_0$ и, соответственно, $\Delta < 1/t_0$, где $t_0 \colon = \sup\limits_{\Phi_p(t)=0} t$, $t_0 = 0$, если $\Phi_p(0) > 0$.

2.14.3. Следующее утверждение является обобщением и усилением [202, лемма 3.1].

Лемма 2.14.1. *Пусть $Q:\mathbb{B}^n\to[0,\infty]$ — измеримая функция и $\Phi:[0,\infty]\to(0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{rq_0^{\frac{1}{p}}(r)}\geq\frac{1}{n}\int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p}}}\quad\forall\quad p\in(0,\infty),\quad\varepsilon\in(0,1)\,,\tag{2.14.11}$$

где $q_0(r)$ определено соотношением (1.1.25) при $x_0=0$, а

$$M(\varepsilon)=\frac{1}{\Omega_n\left(1-\varepsilon^n\right)}\int\limits_{A(\varepsilon,1,0)}\Phi(Q(x))\;dm(x)$$

— среднее интегральное значение функции $\Phi\circ Q$ в кольце $A(\varepsilon,1,0)$, определенном в соотношении (1.1.1) при $x_0=0$, $r_1=\varepsilon$ и $r_2=1$.

Доказательство. Обозначим

$$t_*=\sup\limits_{\Phi_p(t)=\tau_0}t,\qquad\tau_0=\Phi(0)>0\;.\tag{2.14.12}$$

Полагая

$$H_p(t):\;=\log\Phi_p(t)\,,$$

имеем

$$H_p^{-1}(\eta)=\Phi_p^{-1}(e^{\eta})\,,\Phi_p^{-1}(\tau)=H_p^{-1}(\log\tau)\,.\tag{2.14.13}$$

Следовательно, получаем

$$q_0^{\frac{1}{p}}(r)=H_p^{-1}\left(\log\frac{h(r)}{r^n}\right)=H_p^{-1}\left(n\log\frac{1}{r}+\log\;h(r)\right)\;\forall\,r\in R_*\,,\tag{2.14.14}$$

где $h(r):\;=\;r^n\Phi\left(q_0(r)\right)=r^n\Phi_p\left(q_0^{\frac{1}{p}}(r)\right)$ и $R_*=\{\;r\in(\varepsilon,1):\;q_0^{\frac{1}{p}}(r)\;>\;>\;t_*\}$. Тогда также

$$q_0^{\frac{1}{p}}(e^{-s})=H_p^{-1}\left(ns+\log h(e^{-s})\right)\qquad\forall\;s\in S_*,\tag{2.14.15}$$

где $S_*=\{s\in(0,\log\frac{1}{\varepsilon}):\;q_0^{\frac{1}{p}}\,(e^{-s})\;>\;t_*\}$.

Теперь в силу неравенства Иенсена и выпуклости функции Φ имеем

$$\int\limits_{0}^{\log\frac{1}{\varepsilon}}h(e^{-s})\;ds\;=\;\int\limits_{\varepsilon}^{1}h(r)\;\frac{dr}{r}\;=\;\int\limits_{\varepsilon}^{1}\Phi(q_0(r))\;r^{n-1}dr\leq$$

$$\leq \int\limits_{\varepsilon}^{1} \left(\frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S(0,r)} \Phi(Q(x)) d\mathcal{A} \right) r^{n-1} dr \ \leq \frac{\Omega_n}{\omega_{n-1}} \cdot M(\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot M(\varepsilon)\,, \tag{2.14.16}$$

где мы используем среднее значение функции $\Phi \circ Q$ на сфере $S(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ относительно меры площади $d\mathcal{A}$. Как обычно, здесь Ω_n и ω_{n-1} — объем единичного шара и площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, соответственно. Тогда, рассуждая от противного, легко видеть, что

$$\mathrm{mes}_1 T = \int\limits_{T} ds \leq \frac{1}{n}\,, \tag{2.14.17}$$

где $T = \{s \in (0, \log \frac{1}{\varepsilon}) : h(e^{-s}) \ > M(\varepsilon)\}$. Следующим шагом покажем, что

$$q_0^{\frac{1}{p}} \left(e^{-s}\right) \leq \ H_p^{-1} \left(ns \ + \ \log \ M(\varepsilon)\right) \qquad \forall\, s \in \left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T_*\,, \tag{2.14.18}$$

где $T_* \ := \ T \cap S_*$. Отметим, что $\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T_* \ = \ \left[\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus S_*\right] \cup \cup \left[\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T\right] = \left[\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus S_*\right] \cup \left[S_* \setminus T\right]$. Неравенство (2.14.18) имеет место для $s \in S_* \setminus T$ ввиду (2.14.15), поскольку функция H_p^{-1} — неубывающая. Отметим также, см. (2.14.12), что

$$e^{ns} M(\varepsilon) > \Phi(0) = \tau_0 \qquad \forall \quad s \in \left(0, \ \log \frac{1}{\varepsilon}\right)\,,$$

тогда по (2.14.13)

$$t_* < \Phi_p^{-1} \left(e^{ns} M(\varepsilon)\right) =$$

$$= H_p^{-1} \left(ns \ + \ \log \ M(\varepsilon)\right) \quad \forall\, s \in \left(0, \ \log \frac{1}{\varepsilon}\right)\,.$$

Следовательно, (2.14.18) имеет место также для $s \in (0, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus S_*$. Таким образом, имеем (2.14.18).

Поскольку функция H_p^{-1} не убывает, ввиду (2.14.17) и (2.14.18) получаем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} = \int\limits_{0}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{q_0^{\frac{1}{p}}(e^{-s})} \geq \int\limits_{\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T_*} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns + \Delta)} \ \geq$$

$$\geq \int\limits_{\mathrm{mes}_1 T_*}^{\log\frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\Delta)} \geq \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\log\frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\Delta)} = \frac{1}{n} \int\limits_{1+\Delta}^{n\log\frac{1}{\varepsilon}+\Delta} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)},$$

где $\Delta = \log M(\varepsilon)$.

Отметим, что $1+\Delta = \log eM(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{rq_0^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{\log eM(\varepsilon)}^{\log\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)},$$

и после замены переменной $\eta = \log\ \tau$ с учетом (2.14.13) получаем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{rq_0^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)}, \qquad \Phi_p(t) := \Phi(t^p), \tag{2.14.19}$$

откуда вытекает (2.14.11). $\square$

2.14.4. Обозначим для измеримой по Лебегу функции $Q(x)$ через $Q_*(x)$ так называемую срезку, определенную следующим образом:

$$Q_*(x) = \begin{cases} Q(x), & Q(x) \geq 1, \\ 1, & Q(x) < 1. \end{cases} \tag{2.14.20}$$

Из леммы 2.14.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.14.1. *Пусть $\Phi : [0,\infty] \to (0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция, $Q : \mathbb{B}^n \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, а функция $Q_*(x)$, построенная по функции Q, указана выше. Предположим, что среднее значение $M_*(\varepsilon)$ функции $\Phi\circ Q_*$ над кольцом $A(\varepsilon,1,0)$, $\varepsilon\in(0,1)$, конечно. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{rq_0^{\frac{\lambda}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{eM_*(\varepsilon)}^{\frac{M_*(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p}}} \quad \forall\,\lambda\in(0,1), \quad p\in(0,\infty), \tag{2.14.21}$$

где $q_0(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q(x)$ на сфере $|x|=r$.

Доказательство. Действительно, пусть $q_*(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q_*(x)$ на сфере $|x| = r$. Тогда $q_0(r) \le q_*(r)$ и, кроме того, $q_*(r) \ge 1$ для всех $r \in (0,1)$. Таким образом, $q_0^{\frac{\lambda}{p}}(r) \le q_*^{\frac{\lambda}{p}}(r) \le$ $\le q_*^{\frac{1}{p}}(r)$ для всех $\lambda \in (0,1)$ и по лемме 2.14.1, примененной к функции $Q_*(x)$, получаем (2.14.21). □

Замечание 2.14.2. Отметим, что при каждом $p \in (0,\infty)$ соотношение (2.14.11) эквивалентно неравенству (2.14.19).

2.14.5. Одним из основных результатов настоящего параграфа является следующее утверждение.

Теорема 2.14.1. *Пусть $Q : \mathbb{B}^n \to [0,\infty]$ — измеримая функция такая, что*

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi(Q(x))dm(x) < \infty\,, \tag{2.14.22}$$

где $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — некоторая неубывающая выпуклая функция такая, что при некотором $\delta_0 > \tau_0 \colon = \Phi(0)$

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p}}} = \infty\,, \qquad p \in (0,\infty)\,. \tag{2.14.23}$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dr}{rq_0^{\frac{1}{p}}(r)} \;=\; \infty\,, \tag{2.14.24}$$

где, как обычно, $q_0(r)$ означает среднее интегральное значение функции $Q(x)$ на сфере $|x| = r$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\Phi(0) > 0$. Действительно, пусть $\Phi(0) = 0$, тогда рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\Phi_*(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \Phi(t) > \delta_0, \\ \delta_0, & \Phi(t) \le \delta_0\,. \end{cases}$$

Отметим, что функция $\Phi_*(t)$ по-прежнему удовлетворяет соотношениям (2.14.22) и (2.14.23).

В таком случае доказательство теоремы 2.14.1 сводится к лемме 2.14.1. □

Замечание 2.14.3. Поскольку $[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}} = \Phi_p^{-1}(\tau)$, где $\Phi_p(t) = \Phi(t^p)$, то соотношение (2.14.23) влечет

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \qquad \forall\ \delta\ \in\ [0,\infty)\,. \tag{2.14.25}$$

С другой стороны, соотношение вида (2.14.25), выполненное при некотором $\delta \in [0,\infty)$, вообще говоря, не влечет (2.14.23), которое было бы выполнено при $\delta_0 > \Phi(0)$. Действительно, (2.14.23) влечет (2.14.25) для $\delta \in [0,\delta_0)$, а для $\delta \in (\delta_0,\infty)$ имеем

$$0\ \le\ \int\limits_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)}\ \le\ \frac{1}{\Phi_p^{-1}(\delta_0)}\ \log\ \frac{\delta}{\delta_0}\ <\ \infty,$$

поскольку функция Φ_p^{-1} не убывает и $\Phi_p^{-1}(\delta_0) > 0$. Кроме того, по определению обратной функции $\Phi_p^{-1}(\tau) \equiv 0$ для всех $\tau \in [0,\tau_0]$, $\tau_0 = \Phi_p(0)$, следовательно, (2.14.25) при $\delta \in [0,\tau_0)$ не влечет (2.14.23). Если $\tau_0 > 0$, то

$$\int\limits_{\delta}^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)}\ =\ \infty \qquad \forall\ \delta\ \in\ [0,\tau_0). \tag{2.14.26}$$

Однако соотношение (2.14.26) не несет никакой информации собственно о функции $Q(x)$ и, следовательно, (2.14.25) при $\delta < \Phi(0)$ не может влечь (2.14.24).

Следствие 2.14.2. *Если $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция, а Q удовлетворяет условию (2.14.22), то каждое из условий (2.14.5)—(2.14.10) при $p \in (0,\infty)$ влечет (2.14.24).*

Если, кроме того, $\Phi(1) < \infty$ либо $q_0(r) \ge 1$ на подмножестве интервала $(0,1)$, имеющем положительную меру, то каждое из условий (2.14.5)—(2.14.10) при $p \in (0,\infty)$ влечет

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dr}{rq^{\frac{\lambda}{p}}(r)} = \infty \qquad \forall\lambda \in\ (0,1)\,, \tag{2.14.27}$$

а также

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dr}{r^{\alpha}q_0^{\frac{\beta}{p}}(r)} = \infty \qquad \forall\ \alpha \ge 1, \quad \beta \in (0,\alpha]\,. \tag{2.14.28}$$

Доказательство. Отметим, что каждое из условий (2.14.5)—(2.14.10) при $p \in (0, \infty)$ влечет выполнение соотношения (2.14.24) ввиду предложения 2.14.1, теоремы 2.14.1 и замечания 2.14.3.

Предположим, что на некотором множестве положительной меры интервала $(0, 1)$ выполнено неравенство $q_0(r) \geq 1$. Тогда по теореме Фубини также $Q(x) \geq 1$ при $x \in A \subset \mathbb{B}^n$, где $m(A) > 0$. В таком случае ввиду (2.14.22) получаем

$$m(A) \cdot \Phi(1) \leq \int\limits_A \Phi(Q(x))dm(x) \leq \int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi(Q(x))dm(x) < \infty\,. \qquad (2.14.29)$$

Из неравенства (2.14.29) следует, что $\Phi(1) < \infty$, и для функции срезки $Q_*(x)$ из следствия 2.14.1 имеем

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi(Q_*(x))dm(x) \leq \Phi(1) \cdot m\left\{x \in \mathbb{B}^n : Q(x) < 1\right\} + \qquad (2.14.30)$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi(Q(x))dm(x) < \infty\,.$$

Соотношение (2.14.30) остается справедливым также при условии $\Phi(1) < \infty$ независимо от выполнения требования $q_0(r) \geq 1$ на множестве положительной меры. Следовательно, соотношение (2.14.27) вытекает из следствия 2.14.1 с учетом замечания 2.14.3. Наконец, применим в (2.14.27) неравенство Иенсена при произвольном $\lambda \in (0, 1)$ и $\alpha \geq 1$. Получаем

$$\infty = \int\limits_0^1 \frac{dr}{r q_0^{\frac{\lambda}{p}}(r)} \leq \left(\int\limits_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha} q_0^{\frac{\alpha\lambda}{p}}(r)} \right)^{1/\alpha},$$

откуда следует, что $\int\limits_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha} q_0^{\frac{\alpha\lambda}{p}}(r)} = \infty$. Полагая $\beta := \alpha\lambda$ и учитывая, что λ — произвольное число интервала $(0, 1)$, получаем соотношение (2.14.28) при произвольном $\alpha \geq 1$ и $\beta \in (0, \alpha]$. Следствие 2.14.2 доказано. $\Box$

2.14.6. Следующая теорема связывает соотношения между некоторыми функциональными условиями вида (2.14.22), (2.14.23) и интегральное условие (2.3.5). Установим, что указанные условия вида (2.14.23) при $p = n - 1$ влекут выполнение условия расходимости интеграла (2.3.5). Подобная связь открывает широкие возможности в плане приложений к результатам, полученным в предыдущих параграфах. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.14.2. *Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция и $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (2.14.23) при некотором $\delta_0 > \tau_0 \colon = \Phi(0)$ и $p = n - 1$. Если функции Φ и Q связаны между собой условием*

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1 + |x|^2\right)^n} \;\leq\; M < \infty\,, \tag{2.14.31}$$

то для каждой точки $x_0 \in D$ и любого $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, имеет место условие (2.3.5).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\Phi(0) > 0$. Зафиксируем $x_0 \in D$ и некоторое произвольное число $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Делая замену $t = r/\varepsilon_0$, при произвольном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ получаем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \int\limits_{\varepsilon/\varepsilon_0}^{1} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t\varepsilon_0)} = \int\limits_{\varepsilon/\varepsilon_0}^{1} \frac{dt}{t \widetilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\,, \tag{2.14.32}$$

где $\widetilde{q}_0(t)$ — среднее интегральное значение функции $\widetilde{Q}(x) := Q(\varepsilon_0 x + x_0)$ над сферой $|x| = t$, которое определено в соотношении (1.1.25). Применяя лемму 2.14.1, получаем

$$\int\limits_{\varepsilon/\varepsilon_0}^{1} \frac{dt}{t \widetilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{eM_*(\varepsilon/\varepsilon_0)}^{\frac{M_*(\varepsilon/\varepsilon_0)\varepsilon_0^n}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\,, \tag{2.14.33}$$

$$M_*\left(\varepsilon/\varepsilon_0\right) = \frac{1}{\Omega_n\left(1 - \left(\varepsilon/\varepsilon_0\right)^n\right)} \int\limits_{A(1, \varepsilon/\varepsilon_0, 0)} \Phi\left(Q(\varepsilon_0 x + x_0)\right) dm(x) =$$

$$= \frac{1}{\Omega_n\left(\varepsilon_0^n - \varepsilon^n\right)} \int\limits_{A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)} \Phi\left(Q(x)\right) dm(x)\,.$$

Поскольку при всех $x \in A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)$ выполнено неравенство $|x| \le |x-$ $-x_0| + |x_0| \le \varepsilon_0 + |x_0|$, то

$$M_*\left(\varepsilon/\varepsilon_0\right) \le \frac{\beta_n(x_0)}{\Omega_n\left(\varepsilon_0^n - \varepsilon^n\right)} \int\limits_{A(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)} \Phi(Q(x)) \frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n},$$

где $\beta_n(x_0) = \left(1 + (\varepsilon_0 + |x_0|)^2\right)^n$. Следовательно, при $\varepsilon \le / \sqrt[n]{\varepsilon_0^n - \frac{1}{2}}$

$$M_*\left(\varepsilon/\varepsilon_0\right) \le \frac{2\beta_n(x_0)}{\Omega_n} M,$$

где M — постоянная из соотношения (2.14.31). Кроме того,

$$M_*\left(\varepsilon/\varepsilon_0\right) > \Phi(0) > 0.$$

Тогда из соотношений (2.14.32) и (2.14.33) получаем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \ge \frac{1}{n} \int\limits_{\frac{2\beta_n(x_0)Me}{\Omega_n}}^{\frac{\Phi(0)\varepsilon_0^n}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Однако правая часть последнего соотношения стремится к бесконечности в силу соотношения (2.14.23), откуда следует, что $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \infty.$ Теорема доказана. $\Box$

Замечание 2.14.4. Условие (2.14.1) влечет соотношение (2.14.31). Следовательно, (2.14.31) является более общим, чем указанное выше соотношение. С другой стороны, если область D ограничена, то условие (2.14.31) влечет условие $\int\limits_D \Phi\left(Q(x)\right) dm(x) \le M_*$, где $M_* = M \cdot \left(1 + \delta_*^2\right)^n$, $\delta_* = \sup\limits_{x \in D} |x|$.

2.14.7. Ниже сформулированы и доказаны основные результаты настоящего параграфа.

Теорема 2.14.3. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, удовлетворяющее условию* cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)\right) > 0$. *Предположим, что функция срезки $Q_*(x)$, определенная соотношениями (2.14.20), удовлетворяет условию (2.14.31), где $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — некоторая неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (2.14.23) при некотором $\delta_0 > \tau_0 :\, = \Phi(0)$ и $p = n - 1$.*

Тогда f имеет непрерывное продолжение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, иными словами, точка x_0 является либо устранимой особой точкой, либо полюсом отображения f. Более того, продолженное отображение f является открытым и дискретным.

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 2.3.1, 2.4.3 и 2.14.2. $\Box$

Из теоремы 2.14.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.14.4. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$. Предположим, что функция срезки $Q_*(x)$, определенная соотношениями (2.14.20), удовлетворяет условию (2.14.31), где $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — некоторая неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (2.14.23) при некотором $\delta_0 > \tau_0 \colon = \Phi(0)$ и $p = n - 1$. Если x_0 — существенная особая точка отображения f, то*

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(U \setminus \{x_0\}\right)\right) = 0$$

для любой окрестности U точки x_0.

Теорема 2.14.5. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$. Предположим, что функция срезки $Q_*(x)$, определенная соотношениями (2.14.20), удовлетворяет условию (2.14.31), где $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — некоторая неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (2.14.23) при некотором $\delta_0 > \tau_0 \colon = \Phi(0)$ и $p = n - 1$. Тогда точка x_0 является устранимой для отображения f в том и только том случае, когда отображение f ограничено в некоторой окрестности U точки x_0.*

Доказательство вытекает из теорем 2.14.2 и 2.4.2. $\Box$

Теорема 2.14.6. *(Аналог теоремы Сохоцкого—Вейерштрасса). Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0. Предположим, что функция срезки $Q_*(x)$, определенная соотношениями (2.14.20), удовлетворяет условию (2.14.31), где $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — некоторая неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (2.14.23) при некотором $\delta_0 > \tau_0 \colon = \Phi(0)$ и $p = n - 1$. Если x_0 — существенно особая точка отображения f, то для любого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ найдется последовательность $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$ такая, что $f(x_k) \to a$ при $k \to \infty$.*

Более того, в этом случае найдется множество $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ типа F_σ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ емкости нуль такое, что

$$N\left(y, f, U \setminus \{x_0\}\right) = \infty$$

для любой окрестности U точки x_0 и для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$.

Доказательство вытекает из теорем 2.14.2, 2.4.4, 2.4.5 и 2.4.2. □

Теорема 2.14.7. *(Аналог теоремы Лиувилля). Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = \infty$. Предположим, что функция срезки $Q_*(x)$, определенная соотношениями (2.14.20), удовлетворяет условию (2.14.31), где $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — некоторая неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (2.14.23) при некотором $\delta_0 > \tau_0 : = \Phi(0)$ и $p = n - 1$. Тогда*

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus\, f\left(\mathbb{R}^n\right)\right) = 0\,.$$

В частности, f не может отображать все $\mathbb{R}^n$ на ограниченную область.

Доказательство. Предположим противное, а именно:

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus\, f\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \,>\, 0\,.$$

Тогда для вспомогательного отображения $\widetilde{f} = f\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right)$, $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \to \overline{\mathbb{R}^n}$, имеем $\widetilde{f}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = f\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right)$, поэтому $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \widetilde{f}\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right)\right) = = \operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right)\right) \geq \operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{R}^n\right)\right) > 0$. Отметим, что $|J(x, \psi)| = = \left(1/|x|\right)^{2n}$. Полагаем $Q'(x) = Q\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right)$. При этом $\widetilde{f}$ является открытым дискретным кольцевым Q'-отображением в нуле. Согласно приведенному, прибегая к замене переменной в интеграле, из (2.14.31) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Q'(x) \frac{dm(x)}{\left(1 + |x|^2\right)^n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \frac{dm(x)}{\left(1 + |x|^2\right)^n} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q\left(y\right) \cdot \frac{1}{|y|^{2n}} \cdot \frac{dm(y)}{\left(1 + \frac{1}{|y|^2}\right)^n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q\left(y\right) \frac{dm(y)}{\left(1 + |y|^2\right)^n} \leq M\,.$$

Тогда в силу теоремы 2.14.3 отображение $\widetilde{f}$ продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения $\overline{\widetilde{f}} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$. Это равносильно тому, что f также продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения $\overline{f}:\overline{\mathbb{R}^n}\to\overline{\mathbb{R}^n}$. В таком случае множество $\overline{f}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\right)$ одновременно открыто и замкнуто в $\overline{\mathbb{R}^n}$, откуда следует, что $\overline{f}(\overline{\mathbb{R}^n})=\overline{\mathbb{R}^n}$. Однако, последнее противоречит сделанному предположению, что cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\overline{f}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)>0$. $\Box$

Пусть $n=2$ и $\Delta=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.14.8. *(Аналог теоремы Пикара для Q-отображений). Пусть $f:\Delta\setminus\{0\}\to\overline{\mathbb{C}}$ — открытое дискретное Q-отображение, $Q\in\in L^1_{loc}(\Delta)$, которое не принимает, по крайней мере, три значения в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Предположим, что функция срезки $Q_*(z)$, определенная соотношениями (2.14.20), удовлетворяет условию (2.14.31), где $\Phi:[0,\infty]\to\to[0,\infty]$ — некоторая неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (2.14.23) при некотором $\delta_0>\tau_0:=\Phi(0)$ и $p=1$. Тогда отображение f может быть непрерывным образом продолжено в Δ до открытого дискретного Q-отображения $\overline{f}:\Delta\to\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство вытекает из теорем 2.14.2 и 2.6.1. $\Box$

Теорема 2.14.9. *Пусть $f:\mathbb{C}\to\overline{\mathbb{C}}$ — открытое дискретное Q-отображение. Предположим, что функция срезки $Q_*(z)$, определенная соотношениями (2.14.20), удовлетворяет соотношению (2.14.31), где $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ — некоторая неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (2.14.23) при некотором $\delta_0>\tau_0:=\Phi(0)$ и $p=1$. Тогда f принимает все значения в $\overline{\mathbb{C}}$ кроме, может быть, двух.*

Доказательство. Предположим противное, а именно, что f не принимает три и более значений в $\overline{\mathbb{C}}$. Рассмотрим вспомогательное отображение $\widetilde{f}=f\left(\dfrac{z}{|z|^2}\right)$, $\widetilde{f}:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\overline{\mathbb{C}}$. Имеем $\widetilde{f}\left(\mathbb{C}\setminus\{0\}\right)=f\left(\mathbb{C}\setminus\{0\}\right)$, так что $\widetilde{f}$ не принимает три и более значений в некоторой окрестности нуля. Аналогично рассуждениям, приведенным при доказательстве теоремы 2.14.7, видим, что $\widetilde{f}$ является открытым дискретным кольцевым Q'-отображением в нуле при $Q'(z)=Q\left(\dfrac{z}{|z|^2}\right)$, при этом для Q' все также выполнено условие (2.14.31). В таком случае ввиду теоремы 2.14.8 $\widetilde{f}$ продолжается в точку 0 по непрерывности до открытого дискретного отображения в $\overline{\mathbb{C}}$, что также эквивалентно возможности непрерывного продолжения отображения f в $\overline{\mathbb{C}}$. Следовательно, $f(\overline{\mathbb{C}})=\overline{\mathbb{C}}$, что противоречит сделанному выше предположению о выпускании отображением

f не менее трех значений в $\overline{\mathbb{C}}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

2.14.8. Отличительной особенностью интегральных условий, обеспечивающих возможность непрерывного продолжения отображений в точку, есть то, что эти условия являются необходимыми и достаточными в следующем смысле: как только условие (2.14.23) нарушается, становится возможным найти кольцевое Q-отображение с условием (2.14.31) и изолированной существенной сингулярностью. В связи с этим докажем сначала несколько вспомогательных результатов.

Лемма 2.14.2. *Пусть функция $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ не убывает и $\Phi_{n-1}(t) \geq t$ при всех $t \in [0,\infty)$. Если $\Phi(t) < \infty$ при всех $t < \infty$, то найдется строго убывающая непрерывная функция $K(r)$ такая, что $K(r) < \infty$, $r \in (0,1]$, $K(r) \to \infty$ при $r \to 0$ и при этом*

$$K(r) \geq \Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right)\,,$$

где $\gamma = \Phi^{1/2}(1) \geq 1$ и $\Phi_{n-1}(t) := \Phi(t^{n-1})$.

Доказательство. Функция $\Psi(t)\colon\ = t\Phi_{n-1}(t)$ строго возрастает, $\Psi(1) = \Phi(1)$ и $\Psi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Поэтому функциональное уравнение

$$\Psi(K(r)) = \left(\frac{\gamma}{r}\right)^2 \qquad \forall\, r \in\ (0,1]\,, \tag{2.14.34}$$

где $\gamma = \Phi^{1/2}(1) \geq 1$, разрешимо с $K(1) = 1$ и строго убывающей непрерывной функцией $K(r)$ такой, что $K(r) < \infty$, $r \in (0,1]$, и $K(r) \to \infty$ при $r \to 0$. Беря логарифм в (2.14.34), имеем

$$\log K(r) + \log \Phi_{n-1}(K(r)) = 2\log\frac{\gamma}{r}$$

и ввиду (2.14.39) получаем

$$\log K(r) \leq \log\frac{\gamma}{r}\,,$$

т.е.

$$K(r)\ \leq\ \frac{\gamma}{r}\,.$$

Тогда в силу (2.14.34)

$$\Phi_{n-1}(K(r)) \geq \frac{\gamma}{r}$$

и по (2.14.3)

$$K(r) \geq \Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right). \tag{2.14.35}$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.14.3. *Пусть $Q : D \to [1, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $x_0 \in D$, функция $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ не убывает и для некоторых $C > 0$ и $T \in (0, \infty)$ выполнено условие вида*

$$\Phi(t) \geq C \cdot t^{\frac{1}{n-1}} \qquad \forall\, t \in [T, \infty]\,. \tag{2.14.36}$$

Если хотя бы при одном $\delta_0 \in (\tau_0, \infty)$, $\tau_0 : = \Phi(0)$, выполнено условие

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\,[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} < \infty\,, \tag{2.14.37}$$

то найдутся Q-гомеоморфизм $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ и $M > 0$, $M < \infty$, для которых выполнено условие (2.14.1), при этом x_0 — существенно особая точка отображения f.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $D = \mathbb{B}^n$. Можно также предполагать, что $\Phi_{n-1}(t) = t$ при всех $t \in [0, 1)$, поскольку значения функции Φ на полуинтервале $[0, 1)$ не несут информации относительно $Q(x) \geq 1$ в (2.14.1). Предположим, что

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} \; < \; \infty$$

для некоторого $\delta_0 \in (\tau_0, \infty)$, где $\Phi_{n-1}(t) : = \Phi(t^{n-1})$. Тогда также

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} \quad < \quad \infty \qquad \forall \quad \delta \in (\tau_0, \infty), \tag{2.14.38}$$

поскольку $\Phi^{-1}(\tau) > 0$ для всех $\tau > \tau_0$ и функция $\Phi^{-1}(\tau)$ не убывает. Отметим, что по условию (2.14.36)

$$\Phi_{n-1}(t) \;\geq\; C \cdot t \qquad \forall \quad t \;\geq\; T$$

при некоторых $C > 0$ и $T \in (1, \infty)$. Более того, применяя линейное преобразование $\alpha\Phi + \beta$, где $\alpha = 1/C$ и $\beta = T$ (см., например, (2.14.7)), можно считать, что

$$\Phi_{n-1}(t) \geq t \qquad \forall\, t \in [0, \infty)\,. \tag{2.14.39}$$

Понятно, что соотношение (2.14.38) влечет условие $\Phi(t) < \infty$ при всех $t < \infty$ (см. критерий (2.14.7), а также (2.14.10)).

Согласно лемме 2.14.2 найдется строго убывающая непрерывная функция $K(r)$ такая, что $K(r) < \infty$, $r \in (0, 1]$, $K(r) \to \infty$ при $r \to 0$ и для которой выполнено соотношение (2.14.35). Определим следующее отображение в проколотом единичном шаре $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$:

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|)\,,$$

где

$$\rho(t) = \exp\{I(0) - I(t)\}\,, \quad t \in [0, 1]\,,$$

$$I(t) = \int\limits_t^1 \frac{dr}{rK(r)}\,,$$

и $K(r)$ — функция из леммы 2.14.2. Из (2.14.35) получаем

$$I(0) - I(t) = \int\limits_0^t \frac{dr}{rK(r)} \leq \int\limits_0^t \frac{dr}{r\Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right)} = \int\limits_{\frac{\gamma}{t}}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} \qquad \forall \quad t \in (0, 1]\,,$$

где $\gamma/t \geq \gamma \geq 1 > \Phi(0) = 0$. Поэтому ввиду (2.14.38)

$$I(0) - I(t) \leq I(0) = \int\limits_0^1 \frac{dr}{rK(r)} < \infty \qquad \forall \quad t \in (0, 1]\,.$$

Кроме того, $f \in C^1\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)$, поскольку функция $K(r)$ непрерывна.

Вычислим $K_I(x, f)$, используя подход, изложенный в п. 1.1.9 (см. предложение 1.1.1). Зафиксируем произвольно $\rho \in (0, 1)$ и элемент $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ так, что $|x| = \rho$. Используя обозначения предложения 1.1.1, имеем

$$\lambda_\tau(x) = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\exp\left\{\int\limits_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho}\,, \tag{2.14.40}$$

$$\lambda_r(x) = \frac{\partial|f(x)|}{\partial|x|} = \frac{\exp\left\{\int\limits_0^{\rho} \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho K(\rho)}\,. \qquad (2.14.41)$$

Из соотношений (2.14.40) и (2.14.41) вытекает, что $\lambda_r(x) \le \lambda_\tau(x)$, поскольку $K(r) \ge 1$. Следовательно, по соотношению (1.1.15) получаем

$$K_I(x,f) = \frac{\lambda_\tau^{n-1}(x)\cdot\lambda_r(x)}{\lambda_r^n(x)} = K^{n-1}(|x|)\,. \qquad (2.14.42)$$

Поскольку $K^{n-1}(|x|)$ — непрерывная функция, то она локально интегрируема в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$, так что f является Q-отображением при $Q = K^{n-1}(|x|)$ ввиду примера 4^* п. 1.3.6. Ввиду (2.14.34)

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi\left(K_I(x,f_m)\right)dm(x) \le \int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi_{n-1}\left(K(|x|)\right)dm(x) =$$

$$= \omega_{n-1}\int\limits_0^1 \frac{\Psi\left(K(r)\right)}{rK(r)}\cdot r^n dr \le \gamma^2\omega_{n-1}\int\limits_0^1 \frac{dr}{rK(r)} \le M\colon = \gamma^2\omega_{n-1}I(0) < \infty\,.$$

Отметим, что

$$\lim_{x\to 0}|f(x)| = \lim_{t\to 0}\rho(t) = e^0 = 1\,,$$

следовательно, f имеет существенную особенность в нуле. Требуемый пример гомеоморфизма f построен. $\Box$

2.14.9. Имеет место следующий результат.

Теорема 2.14.10. *Пусть $Q : D \to [1,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $x_0 \in D$, функция $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, $\Phi(t) \not\equiv \infty$, выпуклая и не убывает. Если хотя бы для одного $\delta_0 \in (\tau_0,\infty)$, $\tau_0\colon = \Phi(0)$, выполнено условие вида (2.14.37), то найдутся Q-гомеоморфизм $f : D\setminus\{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ и $M > 0$, $M < \infty$, для которых выполнено условие (2.14.1), при этом x_0 — существенно особая точка отображения f.*

Доказательство. Если функция $\Phi(t)$ в теореме 2.14.10 является постоянной, то никаких ограничений на функцию Q не возникает, так что в этом случае утверждение теоремы не содержательно. (Исключение составляет случай $\Phi(t) \equiv \infty$, когда соответствующий класс Q-гомеоморфизмов, характеристика Q которых удовлетворяет соотношению (2.14.31), пуст). Понятно, что соотношение (2.14.37) влечет условие

$\Phi(t) < \infty$ при всех $t < \infty$ (см. критерий (2.14.7), а также (2.14.10)). Согласно известному критерию выпуклости конечных действительнозначных функций [19, гл. I, § 4, п. 3, предложение 5] функция наклона $[\Phi(t) - \Phi(0)]\,/t$ является неубывающей. Следовательно, поскольку функция $\Phi_{n-1}(t) := \Phi(t^{n-1})$ также выпуклая и не убывает, то найдутся некоторые числа $c_1 > 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$, и $t_1 > 0$ такие, что при всех $t \in [t_1, \infty)$ имеет место неравенство: $\Phi_{n-1}(t) \geq c_1 \cdot t$. В таком случае утверждение теоремы 2.14.10 вытекает на основании леммы 2.14.3. $\Box$

2.15. Открытость и дискретность отображений, удовлетворяющих некоторому обратному неравенству

2.15.1. До сих пор мы предполагали рассматриваемые отображения открытыми и дискретными, особенно не задаваясь вопросом, вытекают ли условия открытости и дискретности из определяющего соотношения (1.3.1). Пример отображения g, построенный в теореме 2.12.3, показывает, что ответ на поставленный вопрос отрицательный, по крайней мере, в плане открытости отображения, даже если функция Q просто ограничена. Поставим вопрос иначе, а именно: вытекают ли условия открытости и дискретности отображения f из определяющего соотношения (1.3.1) при дополнительном предположении, что f сохраняет ориентацию?

К сожалению, ответ на указанный вопрос неизвестен даже в случае ограниченных функций Q. (Отметим, что отображения с ограниченным искажением открыты и дискретны [168, гл. II, теоремы 6.3 и 6.4]). Тем не менее, нам удалось установить интересный результат: *если сохраняющее ориентацию отображение удовлетворяет неравенству, "обратному" к (1.3.1), а функция Q удовлетворяет одному из условий типа $Q \in FMO(x_0)$, (2.3.10) либо (2.3.4), (2.3.5), то оно является открытым и дискретным.* Ниже мы уточним смысл слов "обратное неравенство", а также докажем указанное утверждение в наиболее общих предположениях на Q.

2.15.2. Известно, что для произвольного отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ с ограниченным искажением имеет место следующее неравенство:

$$M(\Gamma) \leq N(f, A) K_O(f) M(f(\Gamma)) \qquad (2.15.1)$$

для произвольного борелевского множества A в области D такого, что $N(f, A) < \infty$, и произвольного семейства Γ кривых γ в A [115, теорема 3.2], [175, гл. II, теорема 6.7]. В настоящем параграфе рассмотрены отображения, удовлетворяющие при заданной измеримой по Лебегу функции $Q(x)$, $Q : \widetilde{D} \to [1, \infty]$ более общим, чем (2.15.1), оценкам вида

$$M(\Gamma) \le \int\limits_{\widetilde{D}} Q(y) \cdot \rho_*^n(y) dm(y) \tag{2.15.2}$$

$\forall\, \rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, где область $\widetilde{D} \subset f(D)$. Отметим, что в (2.15.2) заданная функция $Q(y)$ не предполагается ограниченной.

Соотношения вида (2.15.2) установлены для многих классов отображений, например, для так называемых отображений с конечным искажением длины при вполне конкретных значениях $Q(y)$ [125, теорема 8.5]. Отметим, что когда $Q(y) \le K$ п.в., то неравенство (2.15.2) при дополнительном условии гомеоморфности отображения f определяет *квазиконформные* отображения и только их [281, определение 13.1 и теорема 34.3]. Как отмечено выше, даже в случае ограниченной функции $Q(x)$ в соотношении (2.15.2) соответствующее отображение f, не являющееся a priori сохраняющим ориентацию, не обязано быть ни открытым, ни дискретным, тем более гомеоморфным [125, § 8.10].

Попутно отметим, что если в (2.15.1) функция кратности $N(f, A)$ конечна, то отображение f по определению дискретно, следовательно, в силу [273, с. 333, следствие] и открыто; выполнение неравенства (2.15.1) здесь не причем. Поставим теперь обратную задачу: пусть имеем неравенство вида (2.15.2), тогда каким есть отображение f в плане его дискретности и открытости?

2.15.3. Следующая лемма включает в себя основной результат настоящего параграфа в более общей формулировке.

Лемма 2.15.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — сохраняющее ориентацию отображение. Предположим, что для каждой области $G \subset f(D)$ такой, что $\overline{G} \subset f(D)$, существует измеримая по Лебегу функция $Q : G \to [1, \infty]$ такая, что*

$$M(\Gamma) \le \int\limits_{f(D)} Q(y) \cdot \rho_*^n(y) \ \ dm(y) \tag{2.15.3}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в G и произвольной функции $\rho_*(y) \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$. Далее, предположим, что для каждого $y_0 \in G$ найдется $\varepsilon(y_0) > 0$, для которого выполнено соотношение

$$\int\limits_{A(\varepsilon, \varepsilon(y_0), y_0)} Q(y) \cdot \psi^n(|y - y_0|) \ dm(y) \ = \ o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{2.15.4}$$

для некоторой борелевской функции $\psi(t) : (0, \varepsilon(y_0)) \to [0, \infty]$ такой, что

$$I(\varepsilon, \varepsilon(y_0)) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon(y_0)} \psi(t)dt < \infty \tag{2.15.5}$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon(y_0))$, где $A(\varepsilon, \varepsilon(y_0), y_0)$ определено в (1.1.1) при $r_1 = \varepsilon$, $r_2 = \varepsilon(y_0)$, $x_0 = y_0$. Тогда отображение f открыто и дискретно.

Доказательство. Поскольку произвольное сохраняющее ориентацию нульмерное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ является открытым и дискретным в области D [273, с. 333, следствие], то для справедливости леммы достаточно показать, что f — нульмерное отображение.

Предположим противное. Тогда найдется $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такое, что множество $\{f^{-1}(y_0)\}$ не является всюду разрывным. Следовательно, по определению существует континуум $C \subset \{f^{-1}(y_0)\}$. Поскольку отображение f сохраняет ориентацию, то $f \not\equiv y_0$. Отсюда, согласно теореме о сохранении знака найдутся $x_0 \in D$ и $\varepsilon_0 > 0 : \overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset D$ и

$$f(x) \ne y_0 \qquad \forall \quad x \in \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}\,. \tag{2.15.6}$$

Выберем произвольным образом область $G_1 \subset D$ такую, что $\overline{G_1} \subset D$ и так, чтобы $C \cup \overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset G_1$. Тогда в силу [141, лемма 1.15]

$$M\left(\Gamma\left(C, \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}, G_1\right)\right) > 0\,. \tag{2.15.7}$$

Отметим, что в силу неравенства (2.15.6) и ввиду соотношения $f(C) = \{y_0\}$ ни одна из кривых семейства $\Delta = f\left(\Gamma\left(C, \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}, G_1\right)\right)$ не вырождается в точку. В то же время все кривые указанного выше семейства Δ имеют одним из своих концов точку y_0. Пусть Γ_i — семейство кривых $\alpha_i(t) : (0, 1) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\alpha_i(1) \in S(y_0, r_i)$, $r_i < \varepsilon(y_0)$, r_i — некоторая строго положительная вещественная последовательность такая, что $r_i \to 0$ при $i \to \infty$ и $\alpha_i(t) \to 0$ при $t \to 0$. Тогда можно записать

$$\Gamma\left(C, \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}, G_1\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i^*\,, \tag{2.15.8}$$

где Γ_i^* — подсемейство всех кривых γ из $\Gamma\left(C, \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}, G_1\right)$ таких, что $f(\gamma)$ имеет подкривую в Γ_i. Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$ и при каждом $\varepsilon \in (0, r_i)$

рассмотрим семейство всех кривых $\Gamma_{i,\varepsilon}$, соединяющих сферы $S(y_0, r_i)$ и $S(y_0, \varepsilon)$ в $f(G_1)$. Отметим, что для произвольного $\varepsilon \in (0, r_i)$

$$\Gamma_i > \Gamma_{i,\varepsilon}\,. \tag{2.15.9}$$

Из соотношений (2.15.4) и (2.15.5) вытекает, что $\int\limits_{\varepsilon}^{A} \psi(t)dt \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, поскольку $Q \geq 1$, и интеграл слева в (2.15.4) увеличивается при уменьшении ε. Отсюда $I(\varepsilon, r_i) = \int\limits_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и некотором $\varepsilon_1 \in (0, r_i]$. При указанных ε рассмотрим следующую функцию:

$$\rho_{i,\varepsilon}(y) = \begin{cases} \psi\left(|y - y_0|\right)/I(\varepsilon, r_i), & y \in A(\varepsilon, r_i, y_0), \\ 0, & y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus A(\varepsilon, r_i, y_0)\,. \end{cases}$$

Отметим, что $\rho_{i,\varepsilon}(y) \in \operatorname{adm} \Gamma_{i,\varepsilon}$. Действительно, согласно [281, теорема 5.7] интеграл от произвольной радиальной функции $\Psi(|y - y_0|)$ по кривой, соединяющей сферы $S(y_0, r_i)$ и $S(y_0, \varepsilon)$, не меньше, чем соответствующий интеграл по отрезку (ε, r_i) от функции $\Psi(t)$, а именно:

$$\int\limits_{\gamma} \rho_{i,\varepsilon}(y)\,|dx| \geq \frac{1}{I\left(\varepsilon, r_i\right)} \int\limits_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt = 1$$

для произвольной кривой $\gamma \in \Gamma_{i,\varepsilon}$. Следовательно, согласно (2.15.9) также $\rho_{i,\varepsilon}(y) \in \operatorname{adm} \Gamma_i$ и в силу соотношения (2.15.3)

$$M(\Gamma_i^*) \leq \int\limits_{f(D)} Q(y) \cdot \rho^n_{i,\varepsilon}(y) \;\; dm(y) =$$

$$= \int\limits_{A(\varepsilon, \varepsilon(y_0), y_0)} Q(y) \cdot \rho^n_{i,\varepsilon}(y)\; dm(y)\; \leq \mathfrak{F}_i(\varepsilon), \tag{2.15.10}$$

где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = \dfrac{1}{I(\varepsilon, r_i)^n} \int\limits_{A(\varepsilon, \varepsilon(y_0), y_0)} Q(y)\, \psi^n(|y - y_0|)\, dm(y)$ и $I(\varepsilon, r_i) = \int\limits_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt$. Учитывая (2.15.4), имеем следующее соотношение:

$$\int\limits_{A(\varepsilon, \varepsilon(y_0), y_0)} Q(y)\, \psi^n(|y - y_0|)\, dm(y) \;=\; G(\varepsilon) \cdot \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon(y_0)} \psi(t)dt\right)^n ,$$

где $G(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ по условию леммы. Отметим, что

$$\mathfrak{F}_i(\varepsilon) \;=\; G(\varepsilon) \cdot \left(1 + \frac{\int\limits_{r_i}^{\varepsilon(y_0)} \psi(t)dt}{\int\limits_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt}\right)^n,$$

где $\int\limits_{r_i}^{\varepsilon(y_0)} \psi(t)dt < \infty$ — фиксированное число, а $\int\limits_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, поскольку интеграл слева в (2.15.4) увеличивается при уменьшении ε. Таким образом, $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0$. Переходя к пределу в неравенстве (2.15.10) при $\varepsilon \to 0$, левая часть которого не зависит от ε, получаем, что $M(\Gamma_i^*) = 0$ при любом натуральном i. Тогда $M\left(\Gamma\left(C, \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}, G_1\right)\right) = 0$ ввиду (2.15.8) и (1.1.6), что противоречит неравенству (2.15.7). Полученное противоречие доказывает, что отображение f является нульмерным, следовательно, согласно [273, с. 333, следствие] отображение f открыто и дискретно, что и требовалось доказать. $\square$

2.15.4. Основной результат данного параграфа приведен в следующей теореме.

Теорема 2.15.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — сохраняющее ориентацию отображение. Предположим, что для каждой области $D' \subset f(D)$, $\overline{D'} \subset f(D)$, существует функция $Q : D' \to [1, \infty]$ такая, что для произвольного семейства Γ кривых γ в D и произвольной функции $\rho_*(y) \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$ выполнено соотношение вида (2.15.3). Пусть функция $Q(y)$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*

1) $Q \in FMO(y_0)$ в произвольной точке $y_0 \in D'$;

2) $q_{y_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$ и при всех $y_0 \in D'$, где функция $q_{y_0}(r)$ определена равенством (1.1.25);

3) для каждого $y_0 \in D'$ найдется некоторое число $\delta(y_0) > 0$, $\delta(y_0) < \operatorname{dist}(y_0, \partial D')$ такое, что

$$\int\limits_0^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty\,.$$

Тогда отображение f открыто и дискретно.

Доказательство. Необходимое заключение немедленно следует из лемм 2.15.1 и 2.3.1.□

Замечание 2.15.1. Строго говоря, функция Q в формулировке теоремы 2.15.1 зависит от области D' и должна обозначаться как $Q_{D'}$. Мы не прибегаем к подобной записи, дабы в дальнейшем не усложнять обозначения.

Отметим, что если $Q(x) \equiv K = const$, то теорема 2.15.1 устанавливает открытость и дискретность для отображений, удовлетворяющих условию вида $M(\Gamma) \le K \cdot M(f(\Gamma))$, где постоянная $K = K_{D'}$ зависит от области D'. Неравенствам такого вида удовлетворяют, в частности, все отображения с ограниченным искажением, когда $Q(x) = N(f, D') K_O(f)$ (см. соотношение (2.15.1)).

Наконец, теорема 2.15.1 остается справедливой также для отображений вида $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ при условии, что требования 1)—3) в этой теореме будут переформулированы в точке $y_0 = 0$ для отображения $\widetilde{f} = \varphi \circ f$, где $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}$, $\varphi : \infty \mapsto 0$.

Замечание 2.15.2. Условие $Q(x) \ge 1$ обеспечивает, что $q_{x_0}(r) \ge 1$ при почти всех значениях r. Поэтому в этом случае $\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \le \log \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} < \infty$ при всех ε_1, $\varepsilon_2 > 0$.

2.15.5. П Р И М Е Р Ы отображений, удовлетворяющих неравенствам вида (2.15.3).

Пример 1. Наиболее важным примером отображений, для которых выполнены оценки вида (2.15.3), являются так называемые *отображения с конечным искажением длины* [125, гл. 8] (подробнее указанные отображения рассмотрены в п. 4.1). Введение и изучение указанного класса обусловлено необходимостью описать "минимальные" требования, налагаемые на отображения, влекущие выполнение каких-либо оценок искажения модуля семейств кривых при них. Введем некоторые обозначения. Полагаем

$$K_I\left(y, f^{-1}, E\right) := \sum_{x \in E \cap f^{-1}(y)} K_O(x, f)\,,$$

где $K_O(x, f)$ определено соотношением (1.1.12). Имеет место следующее

Следствие 2.15.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — сохраняющее ориентацию отображение с конечным искажением длины. Предположим, что для каждой области $G \subset f(D)$, $\overline{G} \subset f(D)$, функция $K_I(y, f^{-1}, G)$ в произ-*

вольной точке $y_0 \in G$ удовлетворяет хотя бы одному из условий 1)—3) теоремы 2.15.1. Тогда отображение f открыто и дискретно.

Доказательство. Всякое отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением длины удовлетворяет неравенству

$$M(\Gamma) \leq \int\limits_{f(E)} K_I\left(y, f^{-1}, E\right) \cdot \rho_*^n(y) dm(y) \tag{2.15.11}$$

для любого измеримого множества $E \subset D$, произвольного семейства $\Gamma \subset E$ кривых γ в E и каждой функции $\rho_*(y) \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$ [123, гл. 8, теорема 8.5]. Оставшаяся часть доказательства вытекает из теоремы 2.15.1. $\Box$

Пример 2. От условия сохранения ориентации отображением f в формулировках всех приведенных выше результатов нельзя избавиться, как показывает следующий пример.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Определим f в замкнутой области $\{x_n \geq 0\}$ как тождественное, а при $x_n < 0$ полагаем $f(x) = (x_1, \ldots, -x_n)$. Это отображение представляет собой отражение относительно гиперплоскости $x_n = 0$ при $x_n < 0$ (а при неотрицательных значениях x_n просто тождественное отображение). Отметим, что f является отображением с конечным искажением длины, так что ввиду неравенства (2.15.11) f удовлетворяет неравенству (2.15.3), например, при $Q \equiv 2$. Это отображение является дискретным, но не открытым: например, шар $\mathbb{B}^n$ при отображении f переходит в полушар $\{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y| < 1, y_i \geq 0\}$, который не является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. $\Box$

3. О нормальных семействах кольцевых Q-отображений

Как известно, нормальные семейства играют важную роль в теории отображений и находят различные приложения во многих разделах математики. Напомним, что семейство отображений нормально, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся (локально равномерно) подпоследовательность отображений. В этой главе изложены основные факты, касающиеся нормальных семейств кольцевых Q-отображений и Q-отображений.[1]

Глава построена следующим образом. В начале приведены основные сведения о нормальности и равностепенной непрерывности семейств, которые в теории отображений с ограниченным искажением и квазиконформных отображений считаются хорошо известными (§3.1). Затем изложены основные факты, касающиеся нормальности семейств: а) кольцевых Q-гомеоморфизмов (§3.2, 3.3); б) ограниченных открытых дискретных кольцевых Q-отображений (§3.5); в) открытых дискретных кольцевых Q-отображений, не принимающих значения некоторого множества положительной емкости (§3.6). В §3.7, 3.8 рассмотрен вопрос о равностепенной непрерывности и нормальности семейств кольцевых Q-гомеоморфизмов и Q-гомеоморфизмов в замыкании области. В §3.9 описано решение проблемы о равностепенной непрерывности обратных Q-гомеоморфизмов. Затем проанализированы вопросы, связанные с невозможностью ослабления различных условий, которые были задействованы при доказательстве основных результатов (§3.10). В §3.11, 3.12 рассмотрен вопрос о равностепенной непрерывности семейств кольцевых Q-гомеоморфизмов, а также открытых дискретных кольцевых Q-отображений, функция Q для которых удовлетворяет ограничениям интегрального типа. При фиксированном условии на функцию Q рассмотрен также вопрос о необходимом и достаточном условии равностепенной непрерывности семейства открытых дискретных кольцевых Q-отображений (§3.13). Изучен вопрос о нормальности семейства отображений, не принимающих значения множества положительной емкости, когда это множество может зависеть от отображения (§3.14). В §3.15 проанализирована проблема радиуса инъективности отображений,

[1] Результаты, касающиеся равностепенной непрерывности и нормальности семейств Q-гомеоморфизмов (в частности, отображений, характеристика Q которых удовлетворяет условиям интегрального типа), получены совместно с В.И. Рязановым [191–196, 211, 222, 223, 225, 228, 243, 249, 258–260].

а также получен результат о равностепенной непрерывности локальных кольцевых Q-гомеоморфизмов (при $n \geq 3$), не принимающих два фиксированных значения в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Вспомогательные сведения о сходимости отображений изложены в §3.4.

3.1. О равностепенной непрерывности и нормальности семейств некоторых известных классов отображений

3.1.1. Начнем с определений.

Определение 3.1.1. Пусть (X, d) и (X', d') — метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f : X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f : X \to X'$.

Введенное понятие очень тесно связано со следующим определением.

Определение 3.1.2. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех x таких, что $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Семейство $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

Имеет место следующая версия теоремы Арцела—Асколи [281, п. 20.4].

Предложение 3.1.1. *Если (X, d) — сепарабельное метрическое пространство, а (X', d') — компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.*

Таким образом, равностепенная непрерывность и нормальность семейств отображений во многих случаях являются понятиями эквивалентными, что обуславливает проведение параллельных исследований в этих направлениях.

Отметим, что всюду далее, если не оговорено противное, $(X, d) = (D, |\cdot|)$, где D — область в $\mathbb{R}^n$, а $|\cdot|$ — евклидова метрика, $|x - y| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$; $(X', d') = \left(\overline{\mathbb{R}^n}, h\right)$, где h — хордальная метрика (см. (2.1.1)). Некоторое семейство отображений $\mathfrak{R}(D)$ будем называть нормальным, если из любой последовательности $f_m \in \mathfrak{R}(D)$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k} такую, что

$$\sup_{x\in C} h\left(f_{m_k}(x), f(x)\right) \to 0$$

при $k \to \infty$ для некоторого непрерывного отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ и для произвольного компакта $C \subset D$.

3.1.2. Много работ посвящено проблемам равностепенной непрерывности и нормальности плоских и пространственных отображений с конечным искажением [6,26,65], [75, гл. 19], [86,108,116], [124, гл 3], [125, гл. 7, § 7.2 и 7.5], [141,142], [175, гл. III, п. 2], [187,200,281]. Остановимся на нескольких результатах, касающихся отображений с ограниченным искажением и ставших классическими.

Предложение 3.1.2. *Семейство $\mathcal{F}_r$, состоящее из всех квазиконформных отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{a_f, b_f\}$ с общим коэффициентом квазиконформности K'' в соотношении (1.2.1), является равностепенно непрерывным (нормальным) при условии, что $h(a_f, b_f) \geq r > 0$ (h — хордальная метрика), где r не зависит от f [281, теорема 19.2].*

Следующий результат доказан в работе О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вяйсяля [116, теорема 3.17], [175, гл. III, следствие 2.7]).

Предложение 3.1.3. *Семейство $\mathcal{Q}_E$, состоящее из всех отображений с ограниченным искажением $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ с общим коэффициентом квазиконформности K в условии 3) определения 1.2.1, является равностепенно непрерывным (нормальным) при условии, что* $\operatorname{cap} E > 0$.

Как видно из предложений 3.1.2 и 3.1.3, условия, касающиеся нормальности семейств отображений с ограниченным искажением, являются более жесткими, чем аналогичные условия в случае гомеоморфизмов. В настоящей главе показано, что для Q-отображений имеет место та же тенденция: условия на отображения с ветвлением жестче аналогичных ограничений, касающихся гомеоморфизмов. Отметим также, что как и при доказательстве основных результатов, касающихся устранения особенностей, теоремы о нормальности семейств Q-отображений даже в случае гомеоморфизмов не могут быть доказаны при условии локальной интегрируемости функции Q в некоторой степени. Однако условий типа FMO либо условий типа (2.3.5) для этого вполне достаточно.

3.1.3. В данной главе рассмотрен вопрос о равностепенной непрерывности семейств отображений вплоть до границы. Небольшой исторический очерк по этому вопросу предварим следующим определением.

Определение 3.1.3. Граница ∂D области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *квазиконформно связанной*, если каждая точка $x_0 \in \partial D$ имеет сколь угодно малую окрестность V такую, что множество $W = V \cap D$ отображается при помощи некоторого квазиконформного отображения на единичный шар в $\mathbb{R}^n$.

Следующее известное утверждение см. в [142, теорема 4.2].

Предложение 3.1.4. *Пусть D, $D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — фиксированные области, хотя бы одна из которых имеет квазиконформно связанную границу, последовательность K-квазиконформных отображений $f_m : D \to D'$, $f_m(D) = D'$, поточечно сходится при $m \to \infty$ к некоторому гомеоморфизму f в D, причем каждое отображение f_m продолжается до непрерывного отображения $\overline{f_m} : \overline{D} \to \overline{D'}$, $f_m(\overline{D}) = \overline{D'}$. Тогда отображение f также продолжается до непрерывного отображения $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ такого, что $f(\overline{D}) = \overline{D'}$, причем имеет место равномерная сходимость $\overline{f}_m \to \overline{f}$ при $m \to \infty$ в $\overline{D}$.*

В контексте исследования граничного поведения отображений отметим работу А. Сычева [269]. Нами далее будет показано, что в предложении 3.1.4 вместо последовательности квазиконформных отображений можно взять семейство Q-гомеоморфизмов с общим Q, при этом границы областей D и D' также предполагаются более общими, чем в предложении 3.1.4. Условия на Q здесь требуются такими же, как условия типа FMO, (2.3.5) и подобные им.

3.1.4. Здесь также приведены результаты, касающиеся сходимости гомеоморфизмов, которые являются обратными к некоторым Q-гомеоморфизмам. Указанные результаты выгодно отличаются от аналогичных теорем, касающихся нормальности (прямых) Q-отображений, поскольку для их справедливости достаточно лишь интегрируемости Q в области D. Классический результат, касающийся сходимости отображений, обратных к квазиконформным, см. в [281, теорема 21.10].

3.2. Предварительные сведения. Основные леммы об оценках искажения кольцевых Q-гомеоморфизмов

3.2.1. Данный параграф посвящен проблемам нормальности семейств кольцевых Q-отображений в частном случае, когда каждое из отображений предполагается гомеоморфизмом. Рассмотрим следующую задачу: пусть имеется семейство $\mathfrak{F}_Q(D)$, состоящее из кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$. При каких условиях на Q и, возможно, дополнительных требованиях на f семейство $\mathfrak{F}_Q(D)$ обязано быть нормальным?

Отметим, что ответ на этот вопрос, прежде всего, зависит от того, какими свойствами обладает функция Q. Понятно, что найдется некоторое семейство Q-гомеоморфизмов с $Q \equiv \infty$, не являющееся нормальным. Например, семейство отображений $f_k(z) = x + iky$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, является семейством Q-гомеоморфизмов при $Q = k$ (например, ввиду утверждения примера 4^* п. 1.3.6), но не является нормальным, так как предельное отображение $f(x) = \begin{cases} \infty, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ разрывно в нуле.

Даже при $Q \equiv 1$ семейство $\mathfrak{F}_Q(\mathbb{R}^n)$ не нормально, так как, например, последовательность отображений $f_n(x) = nx$ (состоящая из конформных отображений, соответствующих случаю $Q \equiv 1$) сходится к разрывному отображению $f(x) = \begin{cases} \infty, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$ Приведенные замечания свидетельствуют о том, что при изучении данного вопроса необходимо требовать какие-то дополнительные ограничения на семейство $\mathfrak{F}_Q(D)$, кроме ограничений на Q. Последнее обстоятельство обуславливает некоторую схожесть данной проблемы с проблемой устранения особенностей, где также, кроме ограничений на Q, требовались дополнительные ограничения емкостного характера вида cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)\right) > 0$. В этом параграфе показано, в частности, что достаточные условия, обеспечивающие свойство равностепенной непрерывности (нормальности) семейств Q-отображений, практически те же, что и условия, обеспечивающие возможность их непрерывного продолжения в изолированную точку границы.

3.2.2. Прежде всего, приведем вспомогательные сведения, которые будут необходимы в дальнейшем. Хотя они не имеют прямого отношения к теории отображений, однако служат некоторым аппаратом для доказательства многих основных результатов. Начнем со следующего определения.

Определение 3.2.1. *Кольцом* в $\overline{\mathbb{R}^n}$ называется такая область $R \subset \subset \mathbb{R}^n$, дополнение к которой в $\overline{\mathbb{R}^n}$ состоит ровно из двух компонент связности: C_1 и C_2. Коротко этот факт записывают следующим образом:

$$R = R(C_1, C_2)\,.$$

Замечание 3.2.1. Емкость кольца $\operatorname{cap} R = \operatorname{cap} R(C_1, C_2)$ может быть определена по аналогии с емкостью конденсатора (см. определение 1.4.2). А именно, пусть $R = R(C_1, C_2)$ — кольцо, тогда

$$\operatorname{cap}(R) = \inf_{u \in \operatorname{adm}(R)} \int\limits_R |\nabla u(x)|^n dm(x)\,,$$

где $\mathrm{adm}\,(R)$ обозначает класс всех функций $u : \overline{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$, непрерывных в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $u \in ACL\left(\overline{\mathbb{R}^n}\right)$, таких, что $u = 0$ на C_1 и $u = 1$ на C_2 [33, гл. 2]. Известно, что

$$\mathrm{cap}\,(R) = M\,(\Gamma(C_1, C_2, R)) \tag{3.2.1}$$

[33, гл. 2, теорема 1].

Здесь свойство ACL в окрестности бесконечности может быть определено при помощи вспомогательного мебиусова преобразования, а непрерывность на бесконечности понимается в смысле хордального расстояния.

Определение 3.2.2. *Кольцом Тейхмюллера* называется кольцо

$$R_T(t) = R([-1, 0]\,, [t, \infty])\,, \quad t > 1\,.$$

Сформулируем теперь важный результат, принадлежащий Герингу [33, гл. 2], [295, п. 7.37].

Здесь и далее h — хордальная метрика, а $h(E)$ — хордальный диаметр множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$,

$$h(E) := \sup_{x,y\in E} h(x, y)\,, \tag{3.2.2}$$

где метрика h определяется соотношением (2.1.1).

Предложение 3.2.1. *Пусть $R(B, F)$ — произвольное кольцо такое, что континуумы B и F невырождены. Тогда*

$$\mathrm{cap}\ (R(B\,, F))\ \geq\ \mathrm{cap}\left(\ R_T\left(\frac{1}{h\,(B)\ h\,(F)}\right)\right)\,. \tag{3.2.3}$$

Определение 3.2.3. *Кольцом Гретша* называется кольцо

$$R_G(t) = R\left([t, \infty]\,,\ \overline{\mathbb{B}^n}\right)\,, \qquad t > 1\,.$$

Пусть функция $\Phi(t)$ определена следующим соотношением:

$$\mathrm{cap}\,R_G(t) = \frac{\omega_{n-1}}{(\log \Phi(t))^{n-1}}\,,$$

[295, п. 7.18]. Известно [295, лемма 7.20], что функция $\log\Phi(t) - \log t$ возрастает. Полагаем

$$\log \lambda_n = \lim_{t\to\infty} (\log \Phi(t) - \log t)\ . \tag{3.2.4}$$

Известно также, что

$$\lambda_n \in [4, 2e^{n-1}), \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_n^{1/n} \to e$$

при $n \to \infty$ [33, с. 225, 226], [295, соотношение (7.19) и лемма 7.22]. В частности, согласно [295, лемма 7.22 и соотношение (7.19)]

$$\text{cap}\,(R_T(t)) = \frac{\omega_{n-1}}{\{\log \Psi(t)\}^{n-1}}\,, \tag{3.2.5}$$

где Ψ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям:

$$t + 1 \le \Psi(t) \le \lambda_n^2 \cdot (t+1) < 2\lambda_n^2 \cdot t, \qquad t > 1\,.$$

Далее мы используем символ λ_n для обозначения числа из данного выше определения, если только не оговорено противное. Из соотношения (3.2.3) и равенства (3.2.5) получаем следующую оценку емкости.

Предложение 3.2.2. *Для любых невырожденных непересекающихся континуумов B и F в $\overline{\mathbb{R}^n}$ имеет место соотношение:*

$$\text{cap}\,(R(B,F)) \ \ge \ \frac{\omega_{n-1}}{\left[\log \frac{2\lambda_n^2}{h(B)h(F)}\right]^{n-1}}\,,$$

где постоянная λ_n зависит только от размерности пространства n и определена в (3.2.4).

3.2.3. Имеют место следующие леммы.

Лемма 3.2.1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — гомеоморфизм такой, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \ge \Delta > 0$, и пусть $x_0 \in D$, $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < \text{dist}\,(x_0, \partial D)$,*

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \varepsilon_0\}$$

и

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = |y - x_0|\}\,.$$

Тогда

$$h(f(y), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\Delta} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{M\,(\Gamma\,(f(S_0), f(S), f(D)))}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\}, \tag{3.2.6}$$

где $\alpha_n = 2\lambda_n^2$.

Доказательство. Поскольку f — гомеоморфизм, то ввиду теоремы Жордана для заданного кольца A множество $f(A)$ не теряет свойства быть кольцом, т.е. множество $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(A)$, как и множество $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus A$, состоит из двух связных компонент. Пусть E обозначает компоненту множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(A)$, содержащую $f(x_0)$, и F — компоненту, содержащую ∞, где

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| < |x - x_0| < \varepsilon_0\}\,.$$

По предложению 3.2.2 имеем

$$\operatorname{cap} R(E,F) \geq \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\, \log \frac{2\,\lambda_n^2}{h(E)h(F)} \right\}^{n-1}} \tag{3.2.7}$$

и, следовательно,

$$h(E) \leq \frac{2\lambda_n^2}{h(F)} \exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{\operatorname{cap} R(E,F)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\}\,. \tag{3.2.8}$$

Ввиду (3.2.1), равенства $M(\Gamma(E,F,D)) = M(\Gamma(f(S), f(S_0), f(A)))$, соотношений

$$\Gamma\left(f(S_0), f(S), f(A)\right) < \Gamma\left(f(S_0), f(S), f(D)\right)\,,$$

$$\Gamma\left(f(S_0), f(S), f(A)\right) \subset \Gamma\left(f(S_0), f(S), f(D)\right)$$

и свойств модуля семейств кривых (1.1.5) и (1.1.7), из (3.2.8) следует соотношение (3.2.6). Лемма доказана. $\Box$

В следующей лемме получена основная оценка хордального расстояния для Q-гомеоморфизмов, из которой следуют свойства нормальности (равностепенной непрерывности) семейства таких отображений при определенном выборе Q.

Лемма 3.2.2. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, — кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in D$ такой, что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(D)\right) \geq \delta > 0$. Если для некоторых $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ и измеримой по Лебегу функции $\psi(t) : [0, \varepsilon_0] \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \qquad \forall \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1), \tag{3.2.9}$$

выполнено соотношение

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x-x_0|)\, dm(x) \leq c \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)\,, \quad \forall \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \tag{3.2.10}$$

при некоторых постоянных $p \le n$ и $c > 0$, то для всех $x \in B(x_0, \varepsilon_1)$ выполняется неравенство

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta}\,\exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|, \varepsilon_0)\}\,, \tag{3.2.11}$$

где

$$\alpha_n = 2\lambda_n^2, \quad \beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}\,. \tag{3.2.12}$$

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка области D и $\varepsilon \in \in (0, \varepsilon_1)$. Заметим, что поскольку f — гомеоморфизм, то в обозначениях леммы 3.2.1 имеет место равенство

$$M\left(\Gamma\left(f(S_0), f(S), f(D)\right)\right) = M\left(f\left(\Gamma(S_0, S, D)\right)\right)\,.$$

В таком случае, обозначая

$$A_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |y - x_0| < \varepsilon_0\}$$

и применяя лемму 3.2.1, учитывая, что f — кольцевой Q-гомеоморфизм в точке x_0, получаем, что при произвольном $x \in D$ таком, что $|x - x_0| = = \varepsilon$, выполнено неравенство

$$h(f(x), f(x_0)) \le$$

$$\le \frac{\alpha_n}{\delta}\,\exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{\int\limits_{A_\varepsilon} Q(y)\,\eta^n(|y - x_0|)\,dm(y)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\} \tag{3.2.13}$$

для произвольной измеримой функции $\eta : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(r)dr = 1$. Полагая

$$\eta(t) = \frac{\psi(t)}{I(\varepsilon, \varepsilon_0)}\,,$$

убеждаемся, что функция η удовлетворяет соотношению (1.3.3). В таком случае, поскольку f — кольцевой Q-гомеоморфизм в точке x_0, то из (3.2.13) получаем

$$h(f(x), f(x_0)) \le$$

$$\leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{\frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)}\int\limits_{A_\varepsilon} Q(y)\,\psi^n(|y-x_0|)\,dm(y)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\}. \qquad (3.2.14)$$

Из (3.2.10) и (3.2.14) вытекает оценка

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{c^{\frac{1}{n-1}} I^{\frac{p-n}{n-1}}(\varepsilon,\varepsilon_0)}\right\},$$

которая с учетом обозначений в (3.2.12) принимает вид

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(\varepsilon,\varepsilon_0)\}\,. \qquad (3.2.15)$$

Вспоминая о том, что $\varepsilon = |x - x_0|$, приходим к необходимому соотношению (3.2.11). $\square$

3.2.4. Весьма полезным является следующее замечание.

Замечание 3.2.2. В частности, из оценки вида (3.2.15) в силу известной теоремы Арцела—Асколи (см. предложение 3.1.1) следует, что класс всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $\mathfrak{H}_{Q,\delta} = \{f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}\}$ в D таких, что

$$h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \quad \geq \quad \delta \quad > \quad 0 \qquad (3.2.16)$$

и при Q, удовлетворяющих условию (3.2.10) в каждой точке $x_0 \in D$, является нормальным семейством отображений относительно метрики h, как только $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, легко видеть, что для справедливости заключения о равностепенной непрерывности и нормальности соответствующего семейства гомеоморфизмов условие вида (3.2.16) можно заменить требованием: $f(z_1) = y_1, f(z_2) = y_2$ для некоторых фиксированных (не зависящих от f) элементов z_1, y_1, z_2, y_2.

3.2.5. Выбирая в лемме 3.2.2 $p = 1$, получаем следующее заключение.

Следствие 3.2.1. *В условиях леммы 3.2.2*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I(|x - x_0|)\},$$

как только $p = 1$ в (3.2.10).

3.3. Равностепенная непрерывность и нормальность семейств кольцевых Q-гомеоморфизмов. Основные результаты

3.3.1. В предыдущем параграфе мы получили некоторые оценки искажения хордального расстояния при кольцевых Q-гомеоморфизмах такие, как неравенство (3.2.11). Необходимо отметить, что наличие свойства равностепенной непрерывности семейства отображений, удовлетворяющих этой оценке, зависит от того, каким образом ведет себя интеграл $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, определенный в (3.2.9). Разумеется, если $I \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то свойство равностепенной непрерывности имеет место. Если I ведет себя как-то иначе, то в этом случае из оценки (3.2.11) ничего не следует; невыполнение условия (3.2.11) еще не означает отсутствие равностепенной непрерывности.

3.3.2. Прежде, чем переходить к основным результатам, сформулируем и докажем еще одно полезное утверждение. Следующая теорема представляет собой оценку искажения хордального расстояния с использованием интеграла, определенного в (2.7.1).

Теорема 3.3.1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in D$ такой, что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D\right)\right) \geq \delta > 0$. Тогда для каждой точки $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$ и произвольного $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ имеет место неравенство*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\}, \qquad (3.3.1)$$

где постоянная α_n задается соотношением (3.2.12), а среднее значение $q_{x_0}(r)$ функции $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$, как обычно, определено в (1.1.25).

Доказательство. Пусть $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, где $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Рассмотрим функцию $I(\varepsilon, \varepsilon(x_0)) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon(x_0)} \psi(t)dt$, где

$$\psi(t) \quad = \quad \begin{cases} 1/(tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t))\ , & t \in (\varepsilon, \varepsilon(x_0))\ , \\ 0\ , & t \notin (\varepsilon, \varepsilon(x_0))\ . \end{cases}$$

Отметим, что $I(\varepsilon, \varepsilon(x_0)) < \infty$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon(x_0))$ ввиду замечания 2.7.1. Далее, если $I(\varepsilon, \varepsilon(x_0)) = 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon(x_0))$, то неравенство (3.3.1) очевидно. Пусть ε_1 — наибольшее из всех чисел интервала $(0, \varepsilon(x_0))$, при которых $q_{x_0}(t) = 0$ при почти всех $t \in (\varepsilon_1, \varepsilon(x_0))$.

Тогда $I(\varepsilon, \varepsilon(x_0)) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Применим лемму 3.2.2 к выбранной функции ψ. Отметим, что соотношение (3.2.10) выполнено при $c = \omega_{n-1}$ и $p = 1$ ввиду соотношений в (2.3.9). Необходимая оценка (3.3.1) вытекает из леммы 3.2.2 при $x \in B(x_0, \varepsilon_1)$, а при $x \in \in B(x_0, \varepsilon(x_0)) \setminus B(x_0, \varepsilon_1)$ является очевидной, так как при указанных x выражение под exp в правой части неравенства (3.3.1) обращается в нуль. Теорема доказана. $\Box$

3.3.3. Для измеримой по Лебегу функции $Q : D \to [0, \infty]$ обозначим через $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(x_0)$ класс всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : D \to \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в фиксированной точке x_0, таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta > 0$. Аналогично, символом $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ обозначим класс всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в области D, таких что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta > 0$ (как и прежде, f — кольцевой Q-гомеоморфизм в D, если условие (1.3.2) выполнено в каждой точке $x_0 \in D$).

Основные результаты настоящего параграфа заключаются в следующем.

Теорема 3.3.2. *I. Семейство отображений $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(x_0)$ равностепенно непрерывно в точке x_0, как только выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) $Q \in FMO(x_0)$; в частности, в этом случае при некотором $\varepsilon_0 = = \varepsilon_0(x_0) > 0$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ имеет место оценка

$$h(f(x), f(x_0)) \leq C_n(x_0, \Delta) \left\{ \frac{1}{\log \frac{1}{|x - x_0|}} \right\}^p, \tag{3.3.2}$$

где степень $p = p(n, Q) > 0$ зависит только от размерности пространства n и функции Q, а $C_n(x_0, \Delta) > 0$ — от n, Δ и x_0;

2) при некотором $C > 0$ и $r \to 0$ выполнено условие (2.3.10); в этом случае при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ выполнено соотношение

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{M}{\left(\log \frac{1}{|x - x_0|}\right)^{\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{n-1}}}}, \tag{3.3.3}$$

где M — некоторая постоянная, зависящая только от размерности пространства n, Δ и точки x_0;

3) при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, выполнено условие (2.3.5).

II. Семейство отображений $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ нормально, как только хотя бы одно из условий 1)—3) теоремы 3.3.2 выполнено в каждой точке $x_0 \in D$.

Доказательство. Поскольку, как известно, пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$ является компактным, то вторая часть теоремы 3.3.2 есть следствие теоремы Арцела—Асколи (см. предложение 3.1.1). В силу этого достаточно доказать первую часть теоремы 3.3.2.

Рассмотрим случай 1): пусть $Q \in FMO(x_0)$. Отметим, что в этом случае имеют место соотношения (2.3.6) и (2.3.7); иными словами, условия леммы 3.2.2 выполняются при $\psi(t) := \dfrac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$. Справедливость соотношения (3.3.2) также вытекает из леммы 3.2.2 и соотношений (2.3.6), (2.3.7).

Аналогично, заключение первой части теоремы справедливо в случае 2), где также необходимо выбрать функцию ψ вида $\psi(t) := \dfrac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$, а затем воспользоваться соотношениями в (2.3.8). В частности, оценка (3.3.3) в случае 2) справедлива ввиду соотношений (2.3.8) и оценки (3.2.11) леммы 3.2.2.

Заключение 3) вытекает из теоремы 3.3.1. $\Box$

3.3.4. Сформулируем некоторые очевидные следствия из теоремы 3.3.2.

Следствие 3.3.1. *Заключения теоремы 3.3.2 имеют место, как только при $\varepsilon \to 0$ выполнено условие (2.3.11).*

Следствие 3.3.2. *Заключения теоремы 3.3.2 имеют место, как только $Q \in BMO(D)$.*

3.3.5. Как и в случае с устранением особенностей отображений, условие (2.3.5) является не только достаточным, но и необходимым условием равностепенной непрерывности соответствующего семейства отображений в точке. Имеет место следующий результат.

Теорема 3.3.3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$. Для каждой функции $Q : D \to [1, \infty]$, $Q \in L^1_{loc}(D)$ такой, что $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \dfrac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty$, найдется семейство равномерно ограниченных кольцевых Q-гомеоморфизмов в точке x_0, не являющееся равностепенно непрерывным в этой точке.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать $D = \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ и $x_0 = 0$. Определим последовательность отображений $f_m : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$f_m(x) = \frac{x}{|x|}\rho_m(|x|)\,, \qquad f_m(0) := 0\,,$$

где

$$\rho_m(r)=\exp\left\{-\int\limits_r^1\frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}\,,\qquad q_{0,m}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x|=r}Q_m(x)\,d\mathcal{A}\,,$$

$$Q_m(x)\quad=\quad\begin{cases}Q(x), & |x|>1/m\,,\\ \ \ 1\,, & |x|\le 1/m\,.\end{cases}$$

Каждое из отображений f_m, $m=1,2,\ldots$, является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0=0$. Действительно, при произвольном $r\in(0,1)$ имеем: $f(S(0,r))=S(0,R_m)$, где

$$R_m:=\exp\left\{-\int\limits_r^1\frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}\,.$$

Отметим, что

$$f_m(\Gamma(S(0,r_1),S(0,r_2),A(r_1,r_2,0)))=$$

$$=\Gamma(S(0,R_{1,m}),S(0,R_{2,m}),A(R_{1,m},R_{2,m},0))\,,$$

где $R_{i,m}:=\exp\left\{-\int\limits_{r_i}^1\frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}$, $i=1,2$. Согласно [281, п. 7.5]

$$M(f(\Gamma(S(0,r_1),S(0,r_2),A(r_1,r_2,0))))=\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right)^{n-1}}\le$$

$$\le\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{tq_{0}^{1/(n-1)}(t)}\right)^{n-1}}\,.$$

Следовательно, отображение f_m — кольцевой Q-гомеоморфизм в нуле (см., например, предложение 1.3.1 либо теорему 2.7.1). Отметим, что $|f_m(x)|\le 1$ для всех $m\in\mathbb{N}$ и, таким образом, семейство отображений $\{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ равномерно ограничено. Кроме того, для произвольной последовательности x_m такой, что $|x_m|=1/m$, $m=1,2,\ldots$, имеем $|f_m(x_m)|\ge\sigma$, где σ не зависит от m. Окончательно, для некоторого числа σ и произвольного элемента последовательности $1/(m-1)$,

$m = 2, 3, \ldots$, найдутся $x_m \in \mathbb{B}^n$ и элемент семейства отображений $f_m \in \{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ такие, что $|x_m - 0| < 1/(m-1)$ и в то же время $|f_m(x_m) - f_m(0)| \geq \sigma$. Таким образом, семейство отображений $\{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в нуле. $\Box$

3.4. Теоремы сходимости Q-гомеоморфизмов

3.4.1. Изложим некоторые аспекты, касающиеся сходимости Q-гомеоморфизмов. Поскольку сходимость отображений не является целью нашего исследования, приведем лишь тот материал, который будет использован для дальнейших приложений наших результатов к проблеме существования решений квазилинейного уравнения Бельтрами (см. в конце следующей главы). Отметим, что здесь мы требуем выполнения более сильного условия (1.3.1), чем (1.3.2).

3.4.2. Следующее утверждение см. в [124, теорема 3.7].

Предложение 3.4.1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — Q-гомеоморфизм, $Q \in L^1(\mathbb{B}^n)$, такой, что $f(0) = 0$, $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n)\right) \geq \delta > 0$ и $h(f(z_0), 0) \geq \delta$ для некоторого $z_0 \in \mathbb{B}^n$. Тогда найдется строго возрастающая непрерывная функция $\psi : [0, r) \to \mathbb{R}$, $r = \min\{|z_0|/2, 1 - |z_0|\}$, $\psi(0) = 0$, зависящая только от n, δ и L^1-нормы функции Q в $\mathbb{B}^n$, такая, что для всех $x \in B(0, r)$ выполнено неравенство*

$$h(f(x), f(0)) \geq \psi(|x|). \tag{3.4.1}$$

Следствие 3.4.1. *В частности, из (3.4.1) вытекает*

$$|f(x)| \geq \psi(|x|),$$

поскольку $h(x_1, x_2) \leq |x_1 - x_2|$ при всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

3.4.3. В различных вопросах анализа важную роль играют проблемы, связанные с замкнутостью того или иного класса отображений. Известно, например, что локально равномерным пределом отображений с ограниченным искажением (с общим коэффициентом квазиконформности) является отображение с ограниченным искажением или постоянная [168, гл. II, теорема 9.2], а локально равномерным пределом K-квазиконформных отображений — K-квазиконформное отображение или постоянная [281, следствия 21.3 и 37.3]. Ниже будет показано, что нечто подобное имеет место также для Q-гомеоморфизмов. Отметим, что в действительности имеют место более сильные результаты, нежели приведенные в этом параграфе. Именно, можно показать, что класс кольцевых Q-гомеоморфизмов замкнут при определенных условиях на Q. Как мы отметили выше, сходимость гомеоморфизмов не является предметом нашего исследования, поэтому ограничимся приведением более слабых результатов (которых, впрочем, вполне достаточно для наших целей).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.4.1. *Пусть $f_m : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — последовательность кольцевых Q-гомеоморфизмов, $Q \in L^1_{loc}$, сходящаяся локально равномерно в D к некоторому отображению f. Тогда либо f — гомеоморфизм в D, либо $f \equiv const$ в D.*

Доказательство. Как локально равномерный предел непрерывных отображений f_m отображение f непрерывно. Пусть f не является тождественно постоянным в D.

Покажем сначала, что f — дискретное отображение. Предположим противное. Тогда найдутся точка $x_0 \in D$ и последовательность $x_k \in D$, $x_k \neq x_0$, $k = 1, 2\ldots$, такие что $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$ с $f(x_k) = f(x_0)$. Множество $E_0 = \{x \in D : f(x) = f(x_0)\}$ замкнуто в D по непрерывности f и не совпадает с D, так как $f \not\equiv const$. Поэтому x_0 можно заменить не изолированной граничной точкой множества E_0.

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $x_0 = 0$, $f_m(0) = f(0) = 0$, $\overline{\mathbb{B}^n} \subset D$ и, кроме того, найдется хотя бы одна точка $z_0 \in \mathbb{B}^n$, где $f(z_0) \neq 0$. В силу непрерывности хордальной метрики

$$h\left(f_m\left(z_0\right), 0\right) \geq \delta_0/2\,, \qquad m \geq M\,,$$

где $\delta_0 = h(f(z_0), 0) > 0$. Так как $\overline{\mathbb{B}^n}$ – компакт в D, $f_m \to f$ равномерно в $\overline{\mathbb{B}^n}$, то для больших m имеем неравенство

$$h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f_m\left(\overline{\mathbb{B}^n}\right)\right) \geq \delta_*/2\,,$$

где $\delta_* = h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\overline{\mathbb{B}^n}\right)\right)$. Пусть $\delta = \min\left\{\delta_0/2,\, \delta_*/2\right\}$. По предложению 3.4.1 получаем, что для всех $x \in B(0, r)$ и $r = \min\{\frac{|z_0|}{2}, 1 - |z_0|\}$

$$|f_m(x)| \geq \psi(|x|)\,, \qquad m \geq M\,,$$

где ψ — строго возрастающая функция, $\psi(0) = 0$, которая зависит только от L^1–нормы Q в $\mathbb{B}^n$, n и δ. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$|f(x)| \;\geq\; \psi(|x|), \quad x \in B\left(0, r\right)\,. \tag{3.4.2}$$

Но тогда, в частности,

$$0 = |f(x_k)| \geq \psi(|x_k|), \quad \forall\, k \geq k_0,$$

т.е. $\psi(|x_k|) = 0$ при всех $k \geq k_0$, что противоречит строгому возрастанию функции ψ. Полученное противоречие показывает, что f дискретно.

Покажем, что f инъективно в D. Предположим противное, а именно, что существуют $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, такие, что $f(x_1) = f(x_2)$. Полагаем $B_t = B(x_1, t)$. Пусть t_0 — некоторое число такое, что $\overline{B_t} \subset D$ и $x_2 \notin \overline{B_t}$ при каждом $t \in (0, t_0]$. По теореме Жордана—Брауэра [262, гл. 4, § 7, теорема 15] $\gamma_m\colon = f_m(\partial B_t) = \partial f_m(B_t)$ разбивает $\overline{\mathbb{R}^n}$ на две компоненты:

$$C_m := f_m(B_t), \qquad C_m^* = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{C_m}\ ,$$

для которых γ_m является общей границей. Обозначим

$$B^*(x_0, r) = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x_0, x) < r\}$$

— хордальный шар с центром в точке x_0 радиуса $r > 0$. По построению $y_m := f_m(x_1) \in C_m$ и $z_m := f_m(x_2) \in C_m^*$. Отметим, что шар $B^*(y_m, h(y_m, \partial C_m))$ содержится внутри множества C_m и, следовательно, его замыкание лежит в $\overline{C_m}$. Тогда

$$h(y_m, \partial C_m) < h(y_m, z_m), \qquad m = 1, 2, \ldots\ . \tag{3.4.3}$$

В силу компактности множества $\partial C_m = f_m(\partial B_t)$ найдется последовательность $x_{m,t} \in \partial B_t$ такая, что

$$h(y_m, \partial C_m) = h(y_m, f_m(x_{m,t}))\,, \qquad m = 1, 2, \ldots\ . \tag{3.4.4}$$

В силу компактности множества ∂B_t для каждого $t \in (0, t_0]$ найдется элемент $x_t \in \partial B_t$ такой, что $h(x_{m_k,t}, x_t) \to 0$ при $k \to \infty$ для некоторой подпоследовательности m_k. Поскольку локально равномерная сходимость непрерывных функций в метрическом пространстве влечет непрерывную сходимость [103, ч. X, гл. 2, § 21, теорема 3], то получаем

$$h(f_{m_k}(x_{m_k,t}), f(x_t)) \to 0$$

при $k \to \infty$. Следовательно, из (3.4.3) и (3.4.4) имеем

$$h(f(x_1), f(x_t)) \leq h(f(x_1), f(x_2)) \qquad \forall \quad t \in (0, t_0]\,.$$

Однако по предположению $f(x_1) = f(x_2)$ и, следовательно, $f(x_t) = f(x_1)$ для каждого $t \in (0, t_0]$. Последнее соотношение противоречит дискретности отображения f. Следовательно, отображение f инъективно. Непрерывность обратного отображения f^{-1} следует также из (3.4.2). Теорема 3.4.1 доказана. □

3.5. Равностепенная непрерывность ограниченных открытых дискретных кольцевых Q-отображений

3.5.1. Главное отличие исследования открытых дискретных отображений от гомеоморфизмов состоит прежде всего в том, что при этих отображениях свойство кольца оставаться кольцом при отображении не сохраняется. Поэтому "удобно" оценить емкости колец в образе и прообразе, но получить необходимые оценки искажения хордального расстояния (как, например, при доказательстве лемм 3.2.1, 3.2.2) не представляется возможным. Другим не менее важным препятствием на этом пути является отсутствие равенства

$$M(\Gamma(f(E_1), f(E_2), f(D)) = M(f(\Gamma(E_1, E_2, D)))\,,$$

которое, например, используется при доказательстве леммы 3.2.2. Если даже можно оценить величину $M(\Gamma(f(E_1), f(E_2), f(D))$ снизу (например, по типу неравенства (3.2.7)), то непонятно, как подобная оценка будет увязана со свойствами кольцевого Q-отображения.

Для того чтобы избежать подобных трудностей, мы (как и ранее) воспользуемся сохранением свойства пары множеств быть конденсатором при отображении (для непрерывных открытых непрерывных отображений f указанное свойство, естественно, имеет место). Для оценки в нужную сторону величины $M(\Gamma(f(E_1), f(E_2), f(D))$ (которая в силу равенства (3.2.1) эквивалентна оценке емкости соответствующего конденсатора $f(E)$) применим технику поднятия кривых, что вполне достаточно для наших исследований.

3.5.2. Исследуем вопрос о равностепенной непрерывности (нормальности) семейств открытых дискретных кольцевых Q-отображений. Вначале рассмотрим случай, когда все отображения семейства предполагаются ограниченными.

Отметим, что в §3.2, 3.3 оценки искажения хордального расстояния при кольцевых Q-гомеоморфизмах установлены в явном виде, а именно, в виде оценок типа (3.2.11), (3.3.1)—(3.3.3). При этом такие оценки справедливы, как только отображение не принимает два и более значений в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Однако, как будет показано далее, для произвольных открытых дискретных кольцевых Q-отображений оценки хордального расстояния сформулированы в более общем виде, когда свойство равностепенной непрерывности в точке может быть получено на языке ε-δ. Также отметим, что для открытых дискретных кольцевых Q-отображений, не принимающих двух значений в $\overline{\mathbb{R}^n}$, свойство равностепенной непрерывности (нормальности) уже не имеет места, даже если функция Q тождественно равна 1. Рассмотрим, например, следующее семейство аналитических функций на плоскости: $f_m(z) = z^m$, $m \in \mathbb{N}$, определенное в области $D = B(0, 2) \setminus \{0\}$. Все отображения семейства не принимают значения 0 и ∞ в указанной области, однако указанное семейство отображений не является нормальным, так как, например, на отрезке $[1/2, 3/2]$ последовательность $f_m(z)$ сходится к разрывной функции.

3.5.3. Итак, двух значений, не принимаемых семейством отображений, не достаточно для равностепенной непрерывности семейства даже при самых "хороших" Q. Однако имеет место следующий результат Р. Миньйович: для любой фиксированной постоянной $K \geq 1$ найдется натуральное число $l = l(n, K) \in \mathbb{N}$ такое, что какие бы ни были элементы $a_1, \ldots, a_{l+1} \in \mathbb{R}^n$ такие, что $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, $1 \leq i \leq l+1$, $1 \leq j \leq l+1$, семейство отображений с ограниченным искажением $f : D \to \mathbb{R}^n \setminus \{a_1 \cup \ldots \cup a_{l+1}\}$ с общей постоянной квазиконформности K является равностепенно непрерывным (нормальным) семейством отображений [139, теорема 4]. Отметим, что в исследуемом нами случае открытых дискретных Q-отображений и неограниченных Q любого конечного числа не принимаемых семейством значений может оказаться недостаточно.

3.5.4. Случай, когда открытые дискретные кольцевые Q-отображения действуют в ограниченную область, как будет показано ниже, принадлежит к тому разряду, когда оценки искажения хордального расстояния могут быть получены в явном виде, как и в случае гомеоморфизмов. Начнем с нескольких вспомогательных утверждений.

3.5.5. Аналог следующей леммы немного в другом виде доказан в [116, лемма 2.9].

Лемма 3.5.1. *Предположим, что $E = (A, C)$ — конденсатор такой, что $A \subset B(0, r)$, $r > 0$, и множество C является связным. Тогда имеет место следующее соотношение:*

$$\operatorname{cap} E \geq \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\log \frac{2\lambda_n^2}{h(C)h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0,r)\right)}\right\}^{n-1}}.$$

Доказательство. Обозначим через U неограниченную компоненту множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$. Полагаем $C_1 := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus U$. Понятно, что $C \subset C_1$ и $C_1 \setminus C$ — открытое множество, состоящее из всех компонент связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$, кроме U. Кроме того, известно, что множество C_1 является связным [104, гл. 5, § 46, п. III, теорема 5]. Из приведенного вытекает, что область $R := B(0,r) \setminus C_1$ является кольцом: $R = R\left(C_1, \overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0,r)\right)$.

Осталось показать, что $\operatorname{cap} E \geq \operatorname{cap}(R)$, где, как и выше, $E = (A, C)$. Пусть $u \in W_0^\infty(E) := W_0(E) \cap C^\infty(E)$, при этом предположим, что $u(x) = 1$ в некоторой окрестности множества C (см. замечание 1.4.1). Полагаем $v(x) = 1$ при $x \in C_1$ и $v(x) = u(x)$ в противном случае. Покажем, что $v \in \operatorname{adm}(R)$. Отметим, что

$$\overline{\mathbb{R}^n} = U \cup (C_1 \setminus C) \cup C\,.$$

Точки $x_0 \in U \cap B(0,r)$ не могут быть особыми для функции v и ее производных, поскольку U — открытое множество и $u(x) = v(x)$ для всех $x \in U$ по построению. Множество $C_1 \setminus C$ также является открытым, при этом $v(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности произвольной точки $x_0 \in C_1 \setminus C$. Наконец, точки $x_0 \in C$ не могут быть особыми точками для v и ее производных, поскольку $v(x) = u(x)$ в некоторой окрестности множества C. Следовательно, $v \in \operatorname{adm}(R)$, откуда

$$\operatorname{cap}(R) \leq \int\limits_A |\nabla v(x)|^n dm(x) \leq \int\limits_A |\nabla u(x)|^n dm(x)\,. \tag{3.5.1}$$

Из соотношения (3.5.1) и замечания 1.4.1 получаем, что $\operatorname{cap}(R) \leq \operatorname{cap} E$. Необходимое утверждение вытекает теперь из предложения 3.2.2. $\Box$

3.5.6. Следующая лемма может быть полезной при исследовании свойства равностепенной непрерывности открытых дискретных кольцевых Q-отображений в наиболее общей ситуации.

Лемма 3.5.2. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, что для некоторых чисел $\varepsilon_0 \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$, $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, выполнено условие*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^n(|x - x_0|)\, dm(x) \leq F(\varepsilon, \varepsilon_0) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,, \tag{3.5.2}$$

где $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ — некоторая функция и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t) dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,. \tag{3.5.3}$$

Тогда

$$\operatorname{cap} f(E) \le F(\varepsilon, \varepsilon_0)/I^n(\varepsilon, \varepsilon_0) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0')\ , \tag{3.5.4}$$

где $E = (A,\, C)\,,\ A = B\,(x_0, r_0)\,,\ C = \overline{B(x_0, \varepsilon)},\ r_0 = \operatorname{dist}\,(x_0,\, \partial D)\,.$

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $E = (A,\, C)$, где A и C таковы, как указано в условии леммы. В случае $D := \mathbb{R}^n$ полагаем $A := = \mathbb{R}^n$. Пара множеств $f(E) = (f(A), f(C))$ также является конденсатором ввиду открытости и непрерывности отображения f. Если $\operatorname{cap} f(E) = = 0$, то доказывать нечего. Пусть $\operatorname{cap} f(E) \neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\infty \notin f(A)$.

Пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma : [a,\, b) \to A$ таких, что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$, где $|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in [a, b) : \gamma(t) = x\}$ — носитель кривой γ. Напомним, что $\operatorname{cap} E = M(\Gamma_E)$ (см. предложение 1.4.1). Для конденсатора $f(E)$ рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E)}$. Отметим также, что каждая кривая $\gamma \in \Gamma_{f(E)}$ имеет максимальное поднятие при отображении f, лежащее в A с началом в C (см. предложение 1.4.2). Пусть Γ^* — семейство всех максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E)}$ при отображении f с началом в C. Заметим, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$ (см. также детали доказательства леммы 1.4.1). Кроме того, отметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$ и, следовательно,

$$M\left(\Gamma_{f(E)}\right) \le M\left(f(\Gamma^*)\right)\,. \tag{3.5.5}$$

Рассмотрим

$$S_\varepsilon = S(x_0,\, \varepsilon) = \{x\, \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \varepsilon\}\,,$$

$$S_{\varepsilon_0} = S(x_0,\, \varepsilon_0) = \{x\, \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \varepsilon_0\}\,,$$

где ε_0 — из условия леммы и $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0')$. Всюду ниже полагаем

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}.$$

Поскольку $\Gamma^* \subset \Gamma_E$, то $\Gamma\,(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)) < \Gamma^*$ и, следовательно, $f(\Gamma\,(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0))) < f(\Gamma^*)$. Тогда

$$M\left(f(\Gamma^*)\right) \le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)\right)\right)\right)\,. \tag{3.5.6}$$

Из соотношений (3.5.5) и (3.5.6) следует

$$M\left(\Gamma_{f(E)}\right)\ \le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)\right)\right)\right)$$

и, таким образом, по предложению 1.4.1

$$\operatorname{cap} f(E) \le M\left(f\left(\Gamma\left(S_{\varepsilon}, S_{\varepsilon_0}, A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)\right)\right)\right). \tag{3.5.7}$$

Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_{\varepsilon}(t) = \psi_{\varepsilon}(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, $t \in \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Отметим, что для всех таких $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$ выполнено равенство $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_{\varepsilon}(t)\, dt = 1$. Тогда по определению кольцевого Q-отображения в точке x_0 для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_{\varepsilon}, S_{\varepsilon_0}, A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)\right)\right)\right) \le$$
$$\le \frac{1}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_{\varepsilon}^n(|x-x_0|)\ dm(x)\,. \tag{3.5.8}$$

Наконец, из соотношений (3.5.2), (3.5.7) и (3.5.8) следует соотношение (3.5.4). $\Box$

3.5.7. Здесь приведено утверждение о равностепенной непрерывности семейства ограниченных открытых дискретных кольцевых Q-отображений, когда функция Q удовлетворяет ограничениям наиболее общего характера.

Лемма 3.5.3. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0 такое, что $D' = f(D) \subset B(0, r)$. Предположим, что для некоторых чисел $p \le n$, $\varepsilon_0 \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$, $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_{\varepsilon}(t)\}$, $\psi_{\varepsilon} : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, выполнено условие*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_{\varepsilon}^n(|x-x_0|)\, dm(x) \le K \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_0) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,, \tag{3.5.9}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определено в (3.5.3). Тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x-x_0|, \varepsilon_0)\} \tag{3.5.10}$$

для всех $x \in B(x_0, {\varepsilon_0}')$, где $\delta := h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0, r)\right)$, а λ_n, α_n, β_n и $\gamma_{n,p} = = 1 - \dfrac{p-1}{n-1}$ определены в (3.2.4) и (3.2.12).

Доказательство. При $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$ в обозначениях леммы 3.5.2 имеем

$$\operatorname{cap} f(E) \le K \cdot I^{p-n}(\varepsilon, \varepsilon_0)\,. \tag{3.5.11}$$

Действительно, соотношение (3.5.11) вытекает непосредственно из (3.5.4) и (3.5.9) при $F(\varepsilon,\varepsilon_0):=K\cdot I^p(\varepsilon,\varepsilon_0)$.

Далее, так как $f(A)\subset B(0,r)$, то в силу леммы 3.5.1

$$\operatorname{cap} f(E)\geq\frac{\omega_{n-1}}{\left\{\log\frac{2\lambda_n^2}{h(f(C))h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(0,r)\right)}\right\}^{n-1}}\,, \tag{3.5.12}$$

где $\lambda_n\in[4,2e^{n-1})$. Поскольку согласно введенным обозначениям $\delta:=h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(0,r)\right)$, то из (3.5.11) и (3.5.12) получаем

$$h\left(f(C)\right)\leq\frac{2\,\lambda_n^2}{\delta}\,\exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(I(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)^{\frac{n-p}{n-1}}\right\}.$$

Принимая обозначения $\alpha_n=2\lambda_n^2,\beta_n=\left(\dfrac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{\frac{1}{n-1}},\gamma_{n,p}=1-\dfrac{p-1}{n-1}$, получаем

$$h\left(f(C)\right)\leq\frac{\alpha_n}{\delta}\exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(\varepsilon,\varepsilon_0)\right\}. \tag{3.5.13}$$

Пусть теперь $x\in D$ такое, что $|x-x_0|=\varepsilon$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0'$. Тогда $x\in\overline{B\left(x_0,\,\varepsilon\right)}$ и $f(x)\in f\left(\overline{B\left(x_0,\,\varepsilon\right)}\right)=f(C)$ и из (3.5.13) при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')$ имеем оценку

$$h\left(f(x),\,f(x_0)\right)\;\leq\;\frac{\alpha_n}{\delta}\,\exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x-x_0|,\varepsilon_0)\right\}. \tag{3.5.14}$$

В силу произвольности $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')$ соотношение (3.5.14) имеет место во всем шаре $B(x_0,\varepsilon_0')$. $\Box$

3.5.8. Теперь можно получить те же результаты, что и для гомеоморфизмов в п. 3.3.2, 3.3.3, но для более широкого класса открытых дискретных отображений.

Теорема 3.5.1. *Пусть $f:D\to B(0,r)$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0\in D$. Тогда для каждой точки $x\in B(x_0,\varepsilon(x_0))$ и произвольного $\varepsilon(x_0)<\operatorname{dist}(x_0,\,\partial D)$ имеет место неравенство*

$$h(f(x),f(x_0))\leq\frac{\alpha_n}{\delta}\,\exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\}\,, \tag{3.5.15}$$

где $\delta := h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0,r)\right)$, постоянная α_n задается соотношением (3.2.12), а среднее значение $q_{x_0}(r)$ функции $Q(x)$ над сферой $|x-x_0| = r$, как обычно, определено в (1.1.25).

Доказательство. Пусть $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, где $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Рассмотрим функцию $I(\varepsilon, \varepsilon(x_0)) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon(x_0)} \psi(t)dt$, где

$$\psi(t) \quad = \quad \begin{cases} 1/(tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t))\,, & t \in (\varepsilon, \varepsilon(x_0))\,, \\ 0\,, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon(x_0))\,. \end{cases} \tag{3.5.16}$$

Отметим, что $I(\varepsilon, \varepsilon(x_0)) < \infty$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon(x_0))$ ввиду замечания 2.7.1. Далее, если $I(\varepsilon, \varepsilon(x_0)) = 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon(x_0))$, то неравенство (3.5.15) очевидно. Пусть ε_1 — наибольшее из всех чисел интервала $(0, \varepsilon(x_0))$, при которых $q_{x_0}(t) = 0$ при почти всех $t \in (\varepsilon_1, \varepsilon(x_0))$. Тогда $I(\varepsilon, \varepsilon(x_0)) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Применим лемму 3.5..3 к выбранной функции ψ. Отметим, что соотношение (3.5.9) выполнено при $K = \omega_{n-1}$ и $p = 1$ ввиду соотношений в (2.3.9). Необходимая оценка (3.5.15) вытекает из леммы 3.5.3 при $x \in B(x_0, \varepsilon_1)$, а при $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0)) \setminus B(x_0, \varepsilon_1)$ является очевидной, так как при указанных x выражение под exp в правой части неравенства (3.5.15) обращается в нуль. Теорема доказана. $\Box$

3.5.9. Для измеримой по Лебегу функции $Q : D \to [0, \infty]$ обозначим через $\mathfrak{R}_{Q,r}(x_0)$ класс всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to B(0,r)$ в фиксированной точке x_0. Аналогично, символом $\mathfrak{R}_{Q,r}(D)$ обозначим класс всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to B(0,r)$ в области D (как и прежде, f — кольцевое Q-отображение в D, если условие (1.3.2) выполнено в каждой точке $x_0 \in D$).

3.5.10. Основные результаты параграфа заключаются в следующем.

Теорема 3.5.2. *I. Семейство отображений $\mathfrak{R}_{Q,r}(x_0)$ равностепенно непрерывно в точке x_0, как только выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) $Q \in FMO(x_0)$; *в частности, в этом случае при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ имеет место оценка*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq C_n(x_0, r)\left\{\frac{1}{\log\frac{1}{|x-x_0|}}\right\}^p,$$

где степень $p = p(n, Q) > 0$ может зависеть только от размерности пространства n и функции Q, а $C_n(x_0, r) > 0$ — от n, r и x_0;

2) при некотором $C > 0$ и $r \to 0$ выполнено условие (2.3.10); в этом случае при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ выполнено соотношение

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{M}{\left(\log \frac{1}{|x-x_0|}\right)^{\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{n-1}}}}\,,$$

где M — некоторая постоянная, зависящая только от размерности пространства n, r и x_0;

3) при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, выполнено условие (2.3.5).

II. Семейство отображений $\mathfrak{R}_{Q,r}(D)$ нормально, как только хотя бы одно из условий 1)—3) выполнено в каждой точке $x_0 \in D$.

Доказательство теоремы 3.5.2 полностью аналогично доказательству теоремы 3.3.2 и опирается на выбор функции $\psi \equiv \psi_\varepsilon = \dfrac{1}{t \log 1/t}$ в лемме 3.5.3 в случаях 1) и 2), а в случае 3) — на теорему 3.5.1. $\Box$

3.6. Равностепенная непрерывность отображений, не принимающих значения положительной емкости

3.6.1. Итак, мы частично ответили на вопрос, будет ли семейство ограниченных открытых дискретных кольцевых Q-отображений нормальным (равностепенно непрерывным) при надлежащих условиях на Q. Осталось исследовать случай, когда семейство не обязано принимать значения из ограниченного множества. Как оказалось, для равностепенной непрерывности (нормальности) указанных отображений достаточно, чтобы рассматриваемое семейство не принимало значения некоторого множества положительной емкости. Тем не менее, в этом случае качество результата несколько снижается, поскольку оценки искажения хордального расстояния получаем лишь в неявном виде. Следующие утверждения позволяют внести ясность в изучение данной проблемы.

Лемма 3.6.1. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное множество положительной емкости, $\mathfrak{F}_{Q,E}(x_0)$ — семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ в точке $x_0 \in D$. Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)\, dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{3.6.1}$$

для некоторой точки $x_0 \in D$, $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, где $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ —

семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0, \varepsilon_0)$ функций таких, что при некотором $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ выполнено условие (3.5.3). Тогда семейство отображений $\mathfrak{F}_{Q,E}$ равностепенно непрерывно в точке x_0.

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $\mathcal{E} = (A,\, C)$, где

$$A = B\left(x_0, r_0\right)\,, \quad C = \overline{B(x_0,\, \varepsilon)}\,,$$

а $r_0 = \mathrm{dist}\;(x_0,\, \partial D)\,.$ Как прежде, $r_0 := \infty$ при $D = \mathbb{R}^n$. Выберем произвольно число $a > 0$. Для этого числа найдется число $\delta = \delta(a)$, для которого выполнено условие предложения 2.2.1 относительно множества E, соответствующего условию леммы 3.6.1. Используя оценку (3.5.4) из леммы 3.5.2, из условия (3.6.1) получаем $\mathrm{cap}\; f\left(\mathcal{E}\right) \le \alpha(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0')$, где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда для числа $\delta = \delta(a)$ найдется $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$ такое, что

$$\mathrm{cap}\; f\left(\mathcal{E}\right) \le \delta \qquad \forall\; \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_*(a))\,. \tag{3.6.2}$$

Используя соотношение (3.6.2), имеем

$$\mathrm{cap}\;\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E,\, f\left(\overline{B(x_0,\, \varepsilon)}\right)\right) \le$$

$$\le \mathrm{cap}\;\left(f\left(B(x_0,\, r_0)\right)\,,\, f\left(\overline{B(x_0,\, \varepsilon)}\right)\right) \le \delta$$

при $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_*(a))\,.$

Тогда из предложения 2.2.1 следует, что $h\left(f\left(\overline{B(x_0,\, \varepsilon)}\right)\right) < a$. Окончательно, для любого $a > 0$ существует $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$ такое, что

$$h\left(f\left(\overline{B(x_0,\, \varepsilon)}\right)\right) < a$$

как только $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_*(a))\,.$ Лемма доказана. □

3.6.2. Обозначим, как прежде, символом $\mathfrak{F}_{Q,E}(x_0)$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}\setminus E$ в точке $x_0 \in D$, а через $\mathfrak{F}_{Q,E}(D)$ — семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}\setminus E$, принадлежащих классу $\mathfrak{F}_{Q,E}(x_0)$ в каждой точке $x_0 \in D$. Основной результат настоящего параграфа заключается в следующем.

Теорема 3.6.1. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное множество положительной емкости.*

I. Семейство отображений $\mathfrak{F}_{Q,E}(x_0)$ равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$, как только выполнено одно из следующих условий:

1) $Q \in FMO(x_0)$;

2) $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при* $r \to 0$;

3) при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *выполнено условие (2.3.5).*

II. Семейство отображений $\mathfrak{F}_{Q,E}(D)$ *нормально, как только хотя бы одно из условий 1)—3) выполнено в каждой точке области* D.

Доказательство. Отметим, что вторая часть теоремы есть следствие теоремы Арцела—Асколи (см. предложение 3.1.1), так что достаточно установить первую часть теоремы.

Первая часть теоремы вытекает непосредственно из лемм 2.3.1 и 3.6.1; отметим, что условие (2.3.4) выполнено автоматически ввиду замечания 2.7.1. □

3.7. Равностепенная непрерывность кольцевых Q-гомеоморфизмов в замыкании области

3.7.1. До сих пор речь шла о свойстве равностепенной непрерывности (нормальности) семейств отображений внутри области, не включая граничные точки. Однако, как показано далее, аналогичные результаты имеют место и в соответствующих замкнутых областях. Разумеется, все изложенное выше справедливо лишь для областей, имеющих специальные границы, когда исходное отображение (по крайней мере) может быть продолжено на границу непрерывным образом. Отметим, что автором разработана определенная техника, касающаяся равностепенной непрерывности в замыкании Q-гомеоморфизмов. Относительно открытых дискретных отображений, то подобные вопросы, по-видимому, еще не изучены в достаточной мере.

3.7.2. Исследование граничного поведения рассматриваемых классов отображений можно условно разбить на две части следующим образом. Первая часть касается равностепенной непрерывности кольцевых Q-гомеоморфизмов, когда вместо условия (1.3.1) рассматривается более слабое условие (2.11.1). В этой части исследований ослабление условий на отображение "компенсируется" довольно жесткими требованиями на границу области (такими, как, например, условие QED-области, см. ниже). Эта часть исследования приведена далее.

Вторая часть касается исследований свойств равностепенной непрерывности (нормальности) Q-гомеоморфизмов, однако при этом требования на границы выглядят значительно слабее, нежели в первой части. Эта часть исследований изложена в следующем параграфе.

3.7.3. Следующий результат касается возможности непрерывного продолжения на границу Q-гомеоморфизмов [125, леммы 6.7 и 13.3], [189, лемма 5.1].

Предложение 3.7.1. *Пусть $x_0 \in \partial D$, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — Q-гомеоморфизм в области D. Предположим, что найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$ такое, что выполнено соотношение (3.6.1), где $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ — некоторое семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0, \varepsilon_0)$ функций таких, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, где, как и прежде, $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определено соотношением (3.5.3).*

Предположим, что область D локально связна в точке x_0, а граница $\partial D'$ области $D' = f(D)$ сильно достижима. Тогда отображение f продолжается в точку x_0 непрерывным образом.

В связи с утверждением, приведенным выше, необходимо сделать следующее замечание.

Замечание 3.7.1. Предложение 3.7.1 остается справедливым, если f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке x_0 [261, лемма 4].

3.7.4. Рассмотрим следующее определение.

Определение 3.7.1. Согласно [34] область D в $\mathbb{R}^n$ будем называть *областью квазиэкстремальной длины*, сокращенно *QED-областью,* если

$$M(\Gamma(E, F, \mathbb{R}^n)) \le A \cdot M(\Gamma(E, F, D)) \tag{3.7.1}$$

для конечного числа $A \ge 1$ и всех континуумов E и F в D.

Отметим, что произвольные QED-области в $\mathbb{R}^n$ имеют сильно достижимые границы [125, § 13.10, замечание 13.10], а также определение сильно достижимой границы (определение 2.11.3), обратное заключение неверно.

Имеет место следующее замечание.

Замечание 3.7.2. Известно [66, с. 173, теорема 2.8], что если D является QED-областью, то в этом случае (3.7.1) выполнено также для каждой пары непересекающихся континуумов E и F в $\overline{D}$. Кроме того, определения, аналогичные приведенным выше, в частности, определение QED-области, могут быть также даны для области $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$.

С помощью следующей леммы можно установить оценки искажения при отображении f для произвольного континуума, лежащего сколь угодно близко к некоторой точке x_0 границы области D.

Лемма 3.7.1. *Пусть $x_0 \in \partial D$, $x_0 \ne \infty$, область D локально связна в любой точке своей границы, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — кольцевой Q-гомеоморфизм* *в точке x_0 (в смысле определения 2.11.1). Предположим, что $b_0' = f(b_0)$ для некоторых $b_0 \in D$ и $b_0' \in D' = f(D)$, а область D' является QED-областью. Кроме того, предположим, что найдется $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t) : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ со следующим свойством. Для любого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1]$ такое, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_2) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_2} \psi(t) dt < \infty \tag{3.7.2}$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и, кроме того, при тех же ε

$$\int\limits_{A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) \le K \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)\,, \tag{3.7.3}$$

где, как обычно, сферическое кольцо $A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)$ определено как в (1.1.1).

Тогда найдется число $\widetilde{\varepsilon_0} = \widetilde{\varepsilon_0}(x_0) \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что при каждом $\sigma \in (0, \widetilde{\varepsilon_0})$ и любом континууме $E_1 \subset B(x_0, \sigma) \cap D$ выполнено неравенство

$$h(f(E_1)) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(\sigma, \varepsilon_0) \cdot (\alpha(\sigma, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0))^{-1/(n-1)}\right\}\,, \tag{3.7.4}$$

где $h(f(E_1)$, как обычно, обозначает хордальный диаметр множества $f(E_1)$ (см. (3.2.2)),

$$\alpha(\sigma, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0) = \left(1 + \frac{\int\limits_{\widetilde{\varepsilon_0}}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt}{\int\limits_{\sigma}^{\widetilde{\varepsilon_0}} \psi(t)\, dt}\right)^n\,, \tag{3.7.5}$$

$\delta = \dfrac{1}{2} \cdot h\left(b_0', \partial D'\right)$, α_n — некоторая постоянная, зависящая только от n, A — постоянная, участвующая в определении QED-области D' (см. (3.7.1)), $\beta_n = \left(\dfrac{\omega_{n-1}}{KA}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, а $\gamma_{n,p} = 1 - \dfrac{p-1}{n-1}$.

Доказательство. Если граница ∂D области D содержит еще хотя бы одну точку $y_0 \in \partial D$, $y_0 \ne \infty$, то введем ее в рассмотрение. В противном случае полагаем $y_0 := \infty$. Выберем $\widetilde{\varepsilon_0} \in (0, \varepsilon_0)$ так, чтобы точка b_0 могла быть соединена непрерывной кривой с точкой y_0, лежащей целиком в $D \setminus B(x_0, \widetilde{\varepsilon_0})$, кроме своей концевой точки y_0. Отметим, что это возможно, так как область D, по условию, предполагалась локально связной в любой точке границы [125, гл. 13, предложение 13.2]. Последнюю кривую обозначим через E_3. Известно, что предельное множество $C(\partial G, g)$ лежит на границе области $G' := g(G)$, как только $g : G \to G'$ — гомеоморфизм; [125, гл. 13, предложение 13.5], [189, предложение 2.5]. Учитывая приведенное выше, $C(y_0, f) \in \partial D'$. Отсюда вытекает, что найдется точка $a_0 \in E_3$ такая, что

$$h\left(b_0', f(a_0)\right) \geq \frac{1}{2} \cdot h\left(b_0', \partial D'\right) := \delta\,. \tag{3.7.6}$$

Замкнутую подкривую кривой E_3, соединяющую точки a_0 и b_0 в D, обозначим через E_2. Пусть $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon_0})$, $E_1 \subset \overline{B(x_0, \varepsilon)} \cap D$ — произвольный континуум. По условию леммы $I(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0})$ больше нуля при малых ε. Рассмотрим измеримую функцию

$$\eta_{\varepsilon}(t) = \left\{ \begin{array}{rr} \psi(t)/I(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0}), & t \in (\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0}), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0})\,, \end{array} \right.$$

где, как и прежде, $I(a,b)$ определяется соотношением $I(a,b) = \int\limits_a^b \psi(t)\,dt$. Отметим, что функция $\eta_{\varepsilon}(t)$ удовлетворяет соотношению вида (2.11.2), где вместо r_1 и r_2 участвуют ε и $\widetilde{\varepsilon_0}$, соответственно. В таком случае согласно соотношению (2.11.1), с учетом (3.7.3) получаем

$$M\left(f\left(\Gamma\left(E_1, E_2, D\right)\right)\right) = M\left(\Gamma\left(f(E_1), f(E_2), f(D)\right)\right) \leq$$

$$\leq \frac{K \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)}{I^n(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0})} = K \cdot I^{p-n}(\varepsilon, \varepsilon_0) \cdot \alpha(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0)\,, \tag{3.7.7}$$

где $\alpha(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0)$ определяется из соотношения (3.7.5) при $\sigma = \varepsilon$. Так как по условию область $D' = f(D)$ является QED-областью, то при некоторой постоянной $A < \infty$, см. (3.7.1), из (3.7.7) получаем

$$M\left(\Gamma\left(f(E_1), f(E_2), \overline{\mathbb{R}^n}\right)\right) \leq K \cdot A \cdot I^{p-n}(\varepsilon, \varepsilon_0) \cdot \alpha(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0)\,. \tag{3.7.8}$$

Тогда по предложению 3.2.2 из (3.7.8) находим

$$\frac{\omega_{n-1}}{\left[\log \frac{2\lambda_n^2}{h(f(E_1))h(f(E_2))}\right]^{n-1}} \leq K \cdot A \cdot I^{p-n}(\varepsilon, \varepsilon_0) \cdot \alpha(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0)\,,$$

откуда

$$h(f(E_1)) \leq$$

$$\leq \frac{2\lambda_n^2}{h(f(E_2))} \exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{KA}\right)^{\frac{1}{n-1}} I^{\frac{n-p}{n-1}}(\varepsilon, \varepsilon_0)\cdot(\alpha(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0))^{-\frac{1}{n-1}}\right\}. \quad (3.7.9)$$

Ввиду (3.7.6), из (3.7.9) следует

$$h(f(E_1)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(\varepsilon, \varepsilon_0)\cdot(\alpha(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0))^{-\frac{1}{n-1}}\right\}. \quad (3.7.10)$$

Из соотношения (3.7.10) в силу произвольности $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon_0})$ следует требуемое соотношение (3.7.4) для любого континуума $E_1 \subset B(x_0, \sigma) \cap D$ и $\sigma := \varepsilon$. $\Box$

3.7.5. Для заданных областей D, $D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, измеримой по Лебегу функции $Q(x) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, $b_0 \in D$, $b_0' \in D'$, обозначим через $\mathfrak{G}_{b_0, b_0', Q}(D, D', x_0)$ семейство всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : D \to D'$ в точке x_0, таких, что $f(D) = D'$, $b_0' = f(b_0)$. Символом $\mathfrak{G}_{b_0, b_0', Q}\left(D, D', \overline{D}\right)$ обозначим семейство таких же отображений, удовлетворяющих аналогичным условиям в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$. Если каждое отображение $\mathfrak{G}_{b_0, b_0', Q}\left(D, D', \overline{D}\right)$ продолжается в произвольную точку границы ∂D по непрерывности, то семейство всех продолженных таким образом отображений обозначаем через $\overline{\mathfrak{G}_{b_0, b_0', Q}\left(D, D', \overline{D}\right)}$. В следующей лемме устанавливается равностепенная непрерывность (нормальность) вплоть до границы семейства кольцевых Q-гомеоморфизмов в наиболее общей формулировке.

Лемма 3.7.2. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, D' является QED-областью и для точки $x_0 \in \partial D$, $x_0 \neq \infty$, найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t)$, удовлетворяющая условию (3.7.3). Предположим, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) < \infty$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и, кроме того, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ (где $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определено в (3.7.2)). Тогда каждое $f \in \mathfrak{G}_{b_0, b_0', Q}(D, D', x_0)$ продолжается по непрерывности в точку $x_0 \in \partial D$ и, кроме того, семейство $\overline{\mathfrak{G}_{b_0, b_0', Q}(D, D', x_0)}$, состоящее из всех продолженных таким образом отображений $\overline{f} : D \cup \{x_0\} \to \overline{D'}$, является равностепенно непрерывным в точке $x_0 \in \partial D$.*

Доказательство. Прежде всего, условие (3.7.2) автоматически выполнено ввиду предположения, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Заключение о возможности непрерывного продолжения отображения $f \in \mathfrak{G}_{b_0, b_0', Q}(D, D', x_0)$ в точку x_0 есть утверждение предложения 3.7.1 и замечания 3.7.1. Покажем равностепенную непрерывность семейства $\mathfrak{G}_{b_0,b_0',Q}\,(D,D',x_0)$ (обозначения не меняем) в точке x_0. Предположим противное, тогда найдется число $a>0$ такое, что для каждого $m=1,2,\ldots$ существуют точка $x_m\in D$ и элемент $f_m\in\mathfrak{G}_{b_0,b_0',Q}\,(D,D',x_0)$ такие, что $|x_0-x_m|<1/m$ и

$$h\,(f_m(x_m),f_m(x_0))\geq a\,. \qquad (3.7.11)$$

В силу локальной связности области D в точке x_0 найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0 такая, что множества $W_m:=D\cap V_m$ являются связными и $W_m\subset B(x_0,2^{-m})$. Тогда найдется возрастающая последовательность номеров m_k, $k=1,2,\ldots,$ такая, что $x_{m_k}\in W_{m_k}$. Можно считать, что $B(x_0,2^{-m_k})\subset B(x_0,\widetilde{\varepsilon_0})$ при всех $k\in\mathbb{N}$, где $\widetilde{\varepsilon_0}$ — число из формулировки леммы 3.7..1. Поскольку граничные точки области, локально связной на границе, являются достижимыми из D некоторым локально спрямляемым путем [125, гл. 13, предложение 13.2], можно соединить точки x_{m_k} и x_0 непрерывной кривой $\gamma_k(t):[0,1]\rightarrow\mathbb{R}^n$ такой, что $\gamma_k(0)=x_{m_k}$, $\gamma_k(1)=x_0$ и $\gamma_k(t)\in W_{m_k}$ при $t\in(0,1)$.

Далее применим лемму 3.5.1 для некоторой части кривой γ_k, которая в обозначениях леммы 3.7.1 играет роль E_1. Отметим, что мы не имеем права применять эту лемму для всей кривой $\gamma_k:=E_1$, поскольку эта кривая одним своим концом лежит на границе области D. Здесь мы обязаны рассмотреть аппроксимирующую последовательность точек на кривой, сходящуюся к этому концу.

Для этого рассмотрим при фиксированном $k\in\mathbb{N}$ произвольную последовательность $\{t_l\}_{l=1}^{\infty}$ такую, что $t_l\in(0,1)$ и $t_l\rightarrow 1$ при $l\rightarrow\infty$ и соответствующую подкривую $\gamma_k^l(t)=\gamma_k|_{[0,t_l]}$ кривой $\gamma_k(t)$. При каждых фиксированных $k,l\in\mathbb{N}$ континуум $E_1:=\gamma_k^l(t)$, $t\in[0,t_l]$, удовлетворяет условию леммы 3.5.1. Тогда по неравенству (3.7.4) получаем

$$h(f_{m_k}(x_{m_k}),f_{m_k}(\gamma_k(t_l)))\leq$$

$$\leq\frac{\alpha_n}{\delta}\,\exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(2^{-m_k},\varepsilon_0)\cdot(\alpha(2^{-m_k},\widetilde{\varepsilon_0},\varepsilon_0))^{-1/(n-1)}\}\,, \qquad (3.7.12)$$

где функция α взята из формулировки леммы 3.7.1, см. соотношение (3.7.5); также учтено, что $\gamma_k(0)=x_{m_k}$. Из этого же соотношения (3.7.5), учитывая условие $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\rightarrow\infty$ при $\varepsilon\rightarrow 0$, видно, что $\alpha(\varepsilon,\widetilde{\varepsilon_0},\varepsilon_0)\rightarrow 1$ при $\varepsilon\rightarrow 0$. В последнем соотношении (3.7.12) правая часть не зависит от l. Переходим здесь к пределу при $l\rightarrow\infty$. Учитывая, что f_{m_k} непрерывно в точке x_0, а $\gamma_k(t_l)\rightarrow\gamma(1)=x_0$ при $l\rightarrow\infty$, получаем

$$h(f_{m_k}(x_{m_k}),f_{m_k}(x_0))\leq$$

$$\leq \frac{\alpha_n}{\delta}\,\exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(2^{-m_k},\varepsilon_0)\cdot(\alpha(2^{-m_k},\widetilde{\varepsilon_0},\varepsilon_0))^{-1/(n-1)}\}\,. \qquad (3.7.13)$$

Так как по условию $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, а $\gamma_{n,p}=1-\frac{p-1}{n-1}$, см. формулировку леммы 3.7.1, то из (3.7.13) следует, что $h(f_{m_k}(x_{m_k}), f_{m_k}(x_0))\to \to 0$ при $k\to\infty$. Однако последнее противоречит предположению, сделанному в (3.7.11). □

3.7.6. Основные результаты настоящего параграфа содержат следующее утверждение.

Теорема 3.7.1. *I. Пусть область D локально связна в точке $x_0\in \in\partial D$, ∂D содержит не менее одной конечной точки, а область D' является QED-областью. Тогда семейство отображений $\mathfrak{G}_{b_0,b_0',Q}\,(D,D',x_0)$ равностепенно непрерывно в точке $x_0\in\partial D$, как только выполнено одно из следующих условий:*

1) $Q\in FMO(x_0)$;

2) $q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r\to 0$;

3) при некотором $\varepsilon_0=\varepsilon(x_0)>0$ выполнены условия (2.3.4) и (2.3.5).

II. Пусть область D локально связна в каждой точке $x_0\in\partial D$, ∂D содержит не менее одной конечной точки, а область $D'\neq\mathbb{R}^n$ является QED-областью. Тогда семейство отображений $\overline{\mathfrak{G}_{b_0,b_0',Q}\left(D,D',\overline{D}\right)}$ нормально, как только хотя бы одно из условий 1)—3) выполнено в каждой точке $x_0\in\overline{D}$.

Доказательство. Как и ранее, вторая часть теоремы является прямым следствием первой части и теоремы 3.3.2 ввиду теоремы Арцела—Асколи (см. предложение 3.1.1). Докажем первую часть теоремы.

Доказательство этой части вытекает из леммы 3.7.2. Выбирая в качестве $\psi(t)=\dfrac{1}{t\log(1/t)}$, получаем, что в случае 1) требуемое доказательство вытекает из соотношений (2.3.6), (2.3.7), в случае 2) — из соотношения (2.3.8), а в случае 3) — из соотношения (2.3.9). Иными словами, доказательство теоремы 3.7.1 отчасти аналогично доказательству леммы 2.3.1, а в остальном опирается на лемму 3.7.2. □

3.8. Равностепенная непрерывность Q-гомеоморфизмов в замыкании области

3.8.1. Рассмотрим вопрос о равностепенной непрерывности гомеоморфизмов, удовлетворяющих более жесткому условию (1.3.1). При этом значительно упрощаются требования на границы областей.

Здесь мы отказываемся от требования QED-области для D' (см. (3.7.1)), рассматривая более общие условия на $\partial D'$. При этом исследуем семейства гомеоморфизмов, удовлетворяющих (1.3.1) вместо (2.11.1), фиксирующих уже не одну, а две внутренних точки D.

3.8.2. Следующее утверждение см. в [281, теорема 10.12, а также соотношения (10.4) и (10.11)].

Предложение 3.8.1. *Пусть $0 < a < b$, E, $F \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $E \cap F = \varnothing$, и при каждом $t \in (a, b)$ выполнено условие $E \cap S(0, t) \neq \varnothing \neq F \cap S(0, t)$. Предположим, что $A(a, b, 0) \subset D$, (1.1.1). Тогда*

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geq c_n \log \frac{b}{a}\,,$$

где c_n — некоторая постоянная, зависящая только от размерности пространства n.

3.8.3. Следующая лемма позволяет более четко получить представление о границах областей, удовлетворяющих условиям типа (2.11.3).

Лемма 3.8.1. *Пусть $x_0 \in \partial D$, $x_0 \neq \infty$, и для любой окрестности U точки x_0 найдутся компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что соотношение (2.11.3) выполнено для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Тогда для любой окрестности U точки x_0 и произвольного континуума $E^* \subset D$ найдутся окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta^* > 0$ такие, что*

$$M\left(\Gamma(E^*, F, D)\right) \geq \delta^*$$

для каждого континуума F в D, такого что $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$.

Доказательство. Проведем доказательство, используя подход, изложенный в [141, теорема 1.16]. Пусть E —- компакт из условия леммы 3.8.1, см. также соотношение (2.11.3), E^* —- любой другой континуум в D. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$E \cap E^* = \varnothing\,. \tag{3.8.1}$$

Пусть U — произвольная окрестность точки x_0. Выберем в качестве V произвольную окрестность точки x_0, которая содержится во множестве $B(x_0, t_0) \cap U$, $t_0 = \mathrm{dist}\,(x_0, E)/2$, для которой соотношение (2.11.3) уже имеет место. Пусть F — произвольный континуум в D такой, что $F \cap$ $\cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$. Учитывая (3.8.1), имеем

$$4r := \min\left\{\mathrm{dist}\,(E, E^*), \quad \mathrm{dist}\,(E, \partial D), \quad \mathrm{dist}\,(E, B(x_0, t_0))\right\} > 0\,.$$

Обозначим через $E_1, \ldots, E_p$ конечное покрытие компакта E замкнутыми шарами с центрами в точках $e_i \in E_i$ радиусов r, $i = 1, \ldots, p$. Учитывая известный факт о положительности модуля семейства кривых, соединяющих два континуума в произвольной области D [141, лемма 1.15], полагаем

$$\Gamma_i^* = \Gamma\left(E_i, E^*, D\right)\,, \qquad M(\Gamma_i^*) = \delta_i > 0\,, \tag{3.8.2}$$

$$\delta^* = 3^{-n} \min\left\{\delta/p, \delta_1, \ldots, \delta_p, c_n \log 2\right\}\,, \tag{3.8.3}$$

где c_n — постоянная из формулировки предложения 3.8.1,

$$\Gamma = \Gamma(E, F, D)\,, \qquad \Gamma_i = \Gamma(E_i, F, D)\,, \qquad \Gamma^* = \Gamma\left(E^*, F, D\right)\,.$$

Учитывая свойство полуаддитивности модуля (1.1.6) и свойство (2.11.3), имеем

$$0 < \delta \leq M(\Gamma) \leq M\left(\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i, F, D\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{p} M(\Gamma_i)\,. \tag{3.8.4}$$

Из (3.8.4) следует, что хотя бы для одного $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ выполнено $M(\Gamma_{i_0}) \geq \delta/p$; не ограничивая общности, можно считать, что

$$M(\Gamma_1) \geq \delta/p\,. \tag{3.8.5}$$

Покажем, что

$$M(\Gamma^*) \geq \delta^*\,. \tag{3.8.6}$$

Как отмечено ранее, модуль семейства кривых, содержащих хотя бы одну постоянную кривую, бесконечен (см. комментарии после определения 1.1.9). Исходя из приведенного выше, достаточно рассмотреть случай, когда $E^* \cap F \neq \varnothing$. Выберем произвольно $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma^*$. Если выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

$$\int\limits_{\gamma_1} \rho\,|dx| \geq 1/3\,, \qquad \int\limits_{\gamma_1^*} \rho\,|dx| \geq 1/3\,, \tag{3.8.7}$$

для каждой $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_1^* \in \Gamma_1^*$, то получаем $3\rho \in \operatorname{adm}\Gamma_1$ и $3\rho \in \operatorname{adm}\Gamma_1^*$, соответственно, что, в свою очередь, влечет соотношение

$$\int\limits_{D} \rho^n(x)\,dm(x) \geq 3^{-n} \min\{M(\Gamma_1), M(\Gamma_1^*)\}\,. \tag{3.8.8}$$

Однако соотношение (3.8.8) с учетом (3.8.2), (3.8.3) и (3.8.5) влечет (3.8.6).

Пусть теперь найдется хотя бы пара кривых $\gamma_1 \in \Gamma_1$ и $\gamma_1^* \in \Gamma_1^*$, для которых соответствующие соотношения в (3.8.7) нарушены. Предположим сначала, что $F \cap B(e_1, 2r) = \varnothing$. Пусть

$$R_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x - e_1| < 2r\}\,, \qquad \Delta_1 := \Gamma\left(\gamma_1, \gamma_1^*, R_1\right)\,.$$

Так как $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma^*$, то по выбору γ_1 и γ_1^*

$$\int\limits_{\alpha_1} \rho\,|dx| \geq 1/3$$

для каждой кривой $\alpha_1 \in \Delta_1$. Отметим, что при каждом $t \in (r, 2r)$ выполнено $\gamma_1 \cap S(e_1, t) \neq \varnothing \neq \gamma_1^* \cap S(e_1, t)$, а $B(e_1, 2r) \subset D$, поэтому, применяя предложение 3.8.1, получаем оценку

$$\int\limits_{D} \rho^n(x)\,dm(x) \geq 3^{-n} c_n \log 2\,. \tag{3.8.9}$$

Однако соотношение (3.8.9) с учетом (3.8.3) доказывает (3.8.6). Предположим, что $F \cap B(e_1, 2r) \neq \varnothing$. Пусть

$$R_1^* := \{x \in \mathbb{R}^n : 2r < |x - e_1| < 4r\}\,, \qquad \Delta_1^* := \Gamma\left(F, \gamma_1^*, R_1^*\right)\,.$$

В этом случае

$$\int\limits_{\alpha_1^*} \rho\,|dx| \geq 1/3$$

для каждой кривой $\alpha_1^* \in \Delta_1^*$. Кроме того, по выбору r и ввиду условий $V \subset B(x_0, t_0)$, $t_0 = \operatorname{dist}(x_0, E)/2$ и $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$ заключаем, что континуум F пересекает сферу $S(e_1, t)$ при любом $t \in (2r, 4r.)$ Снова, применяя предложение 3.8.1, получаем оценку

$$\int\limits_{D} \rho^n(x)\,dm(x) \geq 3^{-n} c_n \log 2\,. \tag{3.8.10}$$

Однако соотношение (3.8.10) с учетом (3.8.3) снова доказывает (3.8.6). $\Box$

3.8.4. Для областей D, $D' \subset \mathbb{R}^n$, $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$, z_1', $z_2' \in D'$ и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ такой, что $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, обозначим $\mathfrak{R}_{z_1, z_2, z_1', z_2', Q}(D, D')$ семейство всех Q-гомеоморфизмов $f : D \to D'$, $f(D) = D'$, таких, что

$$f(z_1) = z_1', \quad f(z_2) = z_2'\,. \tag{3.8.11}$$

Если каждое $f \in \mathfrak{R}_{z_1, z_2, z_1', z_2', Q}(D, D')$ продолжается в произвольную точку границы по непрерывности, то семейство продолженных таким образом отображений обозначаем символом $\overline{\mathfrak{R}_{z_1, z_2, z_1', z_2', Q}(D, D', \overline{D})}$.

Лемма 3.8.2. *Пусть $Q \in L^1_{loc}(D)$, область D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, а $\partial D'$ сильно достижима. Предположим, что найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t)$, удовлетворяющая условиям (3.7.2) и (3.6.1) при $\psi_\varepsilon \equiv \psi$. Тогда каждый элемент $f \in \mathfrak{R}_{z_1, z_2, z_1', z_2', Q}(D, D')$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{f} : D \cup \{x_0\} \to \overline{D'}$. Если, кроме того, исходное семейство отображений $\mathfrak{R}_{z_1, z_2, z_1', z_2', Q}(D, D')$ является равностепенно непрерывным в D, то семейство $\overline{\mathfrak{R}_{z_1, z_2, z_1', z_2', Q}(D, D', x_0)}$, состоящее из всех продолженных таким образом отображений $\overline{f} : D \cup \{x_0\} \to \overline{D'}$, является равностепенно непрерывным в точке x_0.*

Доказательство. Ввиду следствия 1.9.1 имеем, что $Q(x) \geq 1$ почти всюду в области D. Тогда из условия (3.6.1) вытекает, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. В таком случае возможность продолжения каждого элемента f семейства $\mathfrak{R}_{z_1, z_2, z_1', z_2', Q}(D, D')$ в точку x_0 есть утверждение предложения 3.7.1.

Покажем, что семейство $\mathfrak{R}_{z_1, z_2, z_1', z_2', Q}(D, D')$ (обозначения не меняем) при сделанных предположениях равностепенно непрерывно в точке x_0. Предположим противное. Тогда найдется число $a > 0$ такое, что для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существуют точка $x_m \in D$ и элемент f_m семейства $\mathfrak{R}_{z_1, z_2, z_1', z_2', Q}(D, D')$ такие, что $|x_0 - x_m| < 1/m$ и

$$h\left(f_m(x_m), f_m(x_0)\right) \geq a\,. \tag{3.8.12}$$

Поскольку всякое замкнутое подмножество компактного пространства компактно (см. [104, часть II, гл. 4, § 41, теорема 2]), то множество $\overline{D'}$ является компактом в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Следовательно, существует возрастающая подпоследовательность номеров m_k и $y_0 \in \partial D'$ такие, что

$$h(f_{m_k}(x_0),\, y_0) \to 0 \tag{3.8.13}$$

при $k\to\infty$. Можно считать, что

$$h\left(f_{m_k}(x_0),\,y_0\right)\le a/2\qquad\forall\quad k\in\mathbb{N}\,.\tag{3.8.14}$$

Тогда из (3.8.12), (3.8.14) и неравенства треугольника следует

$$h\left(f_{m_k}(x_{m_k}),\,y_0\right)\ge a/2$$

при всех $k\in\mathbb{N}$. В силу локальной связности области D в точке x_0 найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0 с $\operatorname{diam}V_m\to 0$ при $m\to\infty$ такая, что множества $D\cap V_m$ являются областями и $x_{m_k}\in$ $\in D\cap V_{m_k}$. Так как граничные точки области, локально связной на границе, являются достижимыми из D некоторым локально спрямляемым путем [125, гл. 13, предложение 13.2], то можно соединить точки x_{m_k} и x_0 непрерывной кривой $\gamma_k(t):[0,1]\to\mathbb{R}^n$ такой, что $\gamma_k(0)=x_0$, $\gamma_k(1)=x_{m_k}$ и $\gamma_k(t)\in V_{m_k}$ при $t\in(0,1)$. Обозначим через C_k образ кривой $\gamma_k(t)$ при отображении f_{m_k}. Ввиду нормальности (равностепенной непрерывности) $\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D')$ в D можно считать, что $f_{m_k}\to f$ при $k\to\infty$ локально равномерно в D. В таком случае ввиду теоремы 3.4.1 и условий нормировки (3.8.11) предельное отображение f является гомеоморфизмом в D. Так как граница $\partial D'$ по условию сильно достижима, а C_k — последовательность континуумов в D' таких, что $h\left(C_k,y_0\right)\to 0$ при $k\to\infty$, см. (3.8.13), то ввиду леммы 3.8.1 для любого континуума $C\subset f(D)=D'$, некоторого $\delta>0$ и достаточно больших $k\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$M\left(\Gamma\left(C_k,C,D'\right)\right)\ge\delta\,.\tag{3.8.15}$$

Так как f — гомеоморфизм, при $k\to\infty$ последовательность $f_{m_k}^{-1}\to f^{\,-1}$ сходится локально равномерно в $f(D)$ [195, лемма 2], то $C\subset f(D)$, компакты $K_{m_k}:=f_{m_k}^{-1}(C)$ при $k\to\infty$ сходятся к компакту $f^{\,-1}(C)$ в смысле хаусдорфовой метрики. Тогда, учитывая, что $x_0\in\partial D$, имеем $\varepsilon_1:=\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}\operatorname{dist}\left(x_0,f_{m_k}^{-1}(C)\right)>0$. Полагаем $\varepsilon_2:=\min\{\varepsilon_0,\varepsilon_1\}$. Пусть $\Gamma_{\varepsilon,k}$ — семейство кривых, соединяющих шар $B(x_0,\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$, с компактом K_{m_k}.

Согласно лемме 2.10.1 найдется борелевская функция $\psi_*(t)$ такая, что $\psi_*(t)=\psi(t)$ при п.в. t [28, п. 2.3.6].

Поскольку $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, то можно считать, что $I(\varepsilon,\varepsilon_2)=$ $=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_2}\psi(t)\,dt>0$ при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$. Тогда функция

$$\rho_\varepsilon(x)=\left\{\begin{array}{rr}\psi_*(|x-x_0|)/I(\varepsilon,\varepsilon_2), & x\in\{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_2\}\cap D,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_2\}\cap D\end{array}\right.$$

определена корректно, является борелевской и для всякой (локально спрямляемой) кривой $\gamma\in\Gamma_{\varepsilon,k}$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\gamma}\rho_{\varepsilon}\,|dx|\ \geq\ \frac{1}{I\left(\varepsilon,\varepsilon_2\right)}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_2}\psi_*(t)\,dt=1$$

[281, теорема 5.7]. Следовательно, $\rho_{\varepsilon}\in\operatorname{adm}\Gamma_{\varepsilon,k}$. Полагаем

$$\mathcal{F}(\varepsilon):=\frac{1}{I(\varepsilon,\varepsilon_2)^n}\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0}Q(x)\,\psi_*^n(|x-x_0|)\,dm(x)\,.$$

Отметим, что $\mathcal{F}(\varepsilon)\to 0$ ввиду условия (3.6.1). Следовательно,

$$M\left(f_{m_k}(\Gamma_{\varepsilon,k})\right)\to 0 \qquad (3.8.16)$$

при $\varepsilon\to 0$ и каждом фиксированном $k\in\mathbb{N}$. С другой стороны, для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$ при больших k имеет место включение $D\cap V_{m_k}\subset$ $\subset B(x_0,\varepsilon)$, следовательно, $C_k\subset f_{m_k}\left(B(x_0,\varepsilon)\right)$. Кроме того, при тех же $k\in\mathbb{N}$, имеем: $\Gamma(C_k,C,D')\subset f_{m_k}\left(\Gamma_{\varepsilon,k}\right)$. Тогда в силу (1.1.5)

$$M\left(\Gamma(C_k,C,D')\right)\leq M(f_{m_k}\left(\Gamma_{\varepsilon,k}\right))\,,$$

откуда в силу (3.8.15) следует, что при всех $k\geq k_0$ и произвольном фиксированном $\varepsilon>0$

$$M(f_{m_k}\left(\Gamma_{\varepsilon,k}\right))\geq\delta\,. \qquad (3.8.17)$$

Однако соотношение (3.8.17) противоречит (3.8.16). Полученное противоречие доказывает лемму. $\Box$

3.8.5. Основные результаты настоящего параграфа заключаются в следующем.

Теорема 3.8.1. *Предположим, что $Q(x):\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$, $Q(x)\equiv 0$ при $x\notin D$ — измеримая по Лебегу функция.*

I. Предположим, что D локально связна в точке $x_0\in\partial D$, а $\partial D'$ сильно достижима. Пусть также выполнено по крайней мере одно из следующих условий:

1) $Q\in FMO(x_0)$;

2) $q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r\to 0$;

3) при некотором $\varepsilon_0=\varepsilon(x_0)>0$ выполнены условия (2.3.4) и (2.3.5).

Тогда f продолжается по непрерывности в точку x_0. Если, кроме того, семейство $\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D')$ нормально в D и $Q\in L^1_{loc}(D)$, *то семейство отображений $\overline{\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D',x_0)}$, состоящее из всех таким образом продолженных отображений f в точку x_0, равностепенно непрерывно в этой точке.*

II. Предположим, что D локально связна в каждой точке $x_0 \in \partial D$, а $\partial D'$ сильно достижима. Семейство отображений $\mathfrak{R}_{z_1,z_2,z_1',z_2',Q}(D,D',\overline{D})$ нормально в $\overline{D}$, как только $Q \in L^1_{loc}(D)$ и хотя бы одно из условий 1)—3) выполнено в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Доказательство этой части вытекает из леммы 3.8.2, где в качестве ψ нужно выбрать функцию $\psi(t) = \dfrac{1}{t\log(1/t)}$. Тогда необходимое заключение в случае 1) следует из соотношений (2.3.6), (2.3.7), в случае 2) — из соотношения (2.3.8). В случае 3) мы выбираем функцию ψ по правилу (3.5.16) и требуемое заключение следует из соотношения (2.3.9).

Вторая часть теоремы является следствием первой части, а также доказанной ранее теоремы 3.3.2 и критерия Арцела—Асколи (см. предложение 3.1.1). $\square$

3.9. Равностепенная непрерывность обратных Q-гомеоморфизмов

3.9.1. До сих пор мы рассматривали равностепенную непрерывность (нормальность) семейства прямых отображений, не затрагивая вопрос о сходимости обратных гомеоморфизмов. Здесь показано, что подобная сходимость имеет место при довольно простом предположении $Q \in L^1(D)$ и соответствующих условиях нормировки.

3.9.2. Для областей $D,\ D' \subset \mathbb{R}^n$, $z_0, x_0 \in D$, $z_0 \neq x_0$, $z_0', x_0' \in D'$, $z_0' \neq x_0'$, и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x) : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$ обозначим через $\mathfrak{H}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D,D')$ семейство всех Q-гомеоморфизмов $f : D \to D'$, $f(D) = D'$, таких, что $f(z_0) = z_0'$, $f(x_0) = x_0'$.

Теорема 3.9.1. *Предположим, что область D локально связна во всех граничных точках, $\overline{D}$ является компактом, D' является QED-областью и $Q \in L^1(D)$. Тогда каждый элемент g семейства отображений $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D,D')$, состоящего из всех обратных гомеоморфизмов $\{g = f^{-1} : D' \to D\}$, где отображение $f \in \mathfrak{H}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D,D')$, может быть продолжен по непрерывности до отображения $\overline{g} = \overline{f}^{\,-1} : \overline{D'} \to \overline{D}$, причем семейство гомеоморфизмов $\overline{\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D,D')}$, состоящее* *из всех продолженных отображений* $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$, $g \in \mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D, D')$, *является равностепенно непрерывным в* $\overline{D'}$.

Доказательство. Так как область D' является QED-областью, то каждый обратный гомеоморфизм $f^{-1} \in \mathfrak{H}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D, D')$ имеет непрерывное продолжение на границу D' [125, гл. 13, теорема 13.3].

Осталось показать равностепенную непрерывность семейства отображений $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D, D')$ (обозначения не меняем) в области $\overline{D'}$.

Покажем сначала, что $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D, D')$ равностепенно непрерывно в $\overline{D'} \setminus \{z_0'\}$. Предположим противное, т.е. найдутся $y_0 \neq z_0'$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $y_m \in \overline{D'}$ с $h(y_m, y_0) < 1/m$ и элемент $f_m^{-1} \in \mathfrak{H}^{-1}_{z_0,x_0,z_0',x_0',Q}(D, D')$ такие, что

$$|f_m^{-1}(y_m) - f_m^{-1}(y_0)| \geq \varepsilon_0 \,. \tag{3.9.1}$$

Так как по условию $\overline{D}$ является компактом, то существует возрастающая подпоследовательность номеров m_k и $x_0^1, x_0^2 \in \overline{D}$ таких, что $f_{m_k}^{-1}(y_{m_k}) \to x_0^1$ и $f_{m_k}^{-1}(y_0) \to x_0^2$ при $k \to \infty$. В силу неравенства (3.9.1) $|x_0^1 - x_0^2| \geq \varepsilon_0/2$. Поскольку D локально связна на границе, то существуют окрестности U_i точек x_0^i, $i = 1, 2$, такие, что множества $W_i = U_i \cap D$ являются связными, причем $W_i \subset B(x_0^i, \varepsilon_0/6)$. Отметим, что $\mathrm{dist}\,(W_1, W_2) \geq \varepsilon_0/6$. Можно считать, что x_0 лежит вне W_2, а z_0 — вне W_1. Соединим точки x_0 и x_0^1 замкнутой кривой C_1, лежащей в области D, кроме, возможно, одной концевой точки, а z_0 и x_0^2 — замкнутой кривой C_2 так, что $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Рассмотрим множества $A_1 := W_1 \cup C_1$ и $A_2 := W_2 \cup C_2$. Отметим, что $\mathrm{dist}\,(\overline{A_1}, \overline{A_2}) = \delta > 0$. Пусть Γ — семейство кривых, соединяющих множества $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ в D, тогда функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

является допустимой для семейства Γ и

$$M(f_{m_k}(\Gamma)) \leq \frac{1}{\delta^n} \int\limits_D Q(x)\, dm(x) := c(\delta) < \infty \,, \tag{3.9.2}$$

так как $Q \in L^1(D)$. С другой стороны, z_0' и $y_0 \in f_{m_k}(A_2)$ и $\mathrm{diam}\, f_{m_k}(A_2) \geq h(z_0', y_0) \geq \delta_2 > 0$, поскольку по предположению $z_0' \neq y_0$. Аналогично, x_0' и $y_{m_k} \in f_{m_k}(A_1)$ и $\mathrm{diam}\, f_{m_k}(A_1) \geq h(x_0', y_{m_k}) \geq \frac{1}{2} h(x_0', y_0) > \delta_1 > 0$, так как $h(y_{m_k}, y_0) \to 0$ при $k \to \infty$ и $x_0' \neq y_0$, ибо в противном случае $f_{m_k}(x_0) = y_0 \in f_{m_k}(A_1)$, однако, также $y_0 \in f_{m_k}(A_2)$, что противоречит гомеоморфности f_{m_k}. Кроме того, $h(f_{m_k}(A_1), f_{m_k}(A_2)) \to 0$ при $k \to \infty$, так как $h(y_{m_k}, y_0) < 1/m_k$ и, следовательно, $h\left(\overline{f_{m_k}(A_1)}, \overline{f_{m_k}(A_2)}\right) \to 0$ при $k \to \infty$. Отметим, что

$$f_{m_k}(\Gamma) = \Gamma\left(\overline{f_{m_k}(A_1)}, \overline{f_{m_k}(A_2)}, D'\right) . \qquad (3.9.3)$$

Так как D' является QED-областью (ввиду замечания 3.7.2 и свойства сближающихся континуумов [67, лемма 3.20]), то, учитывая соотношение (3.9.3), получаем

$$A \cdot M(f_{m_k}(\Gamma)) = A \cdot M\left(\Gamma\left(\overline{f_{m_k}(A_1)}, \overline{f_{m_k}(A_2)}, D'\right)\right) \geq$$

$$\geq M\left(\Gamma\left(\overline{f_{m_k}(A_1)}, \overline{f_{m_k}(A_2)}, \overline{\mathbb{R}^n}\right)\right) \to \infty$$

при $k \to \infty$. Однако последнее соотношение противоречит (3.9.2). Полученное противоречие доказывает равностепенную непрерывность семейства отображений $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0, x_0, z_0', x_0', Q}(D, D')$ в $\overline{D'} \setminus \{z_0'\}$.

Аналогично, семейство $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0, x_0, z_0', x_0', Q}(D, D')$ равностепенно непрерывно в $\overline{D'} \setminus \{x_0'\}$, откуда следует равностепенная непрерывность семейства отображений $\mathfrak{H}^{-1}_{z_0, x_0, z_0', x_0', Q}(D, D')$ в $\overline{D'}$. $\Box$

3.10. О существенном значении некоторых условий, связанных с равностепенной непрерывностью Q-отображений

3.10.1. При исследовании свойства равностепенной непрерывности Q-отображений мы преимущественно имели дело с теми же условиями на функцию Q, при которых делалось заключение о возможности устранения их изолированной особенности (см. гл. 2). Теперь проясним вопрос о необходимости этих условий, точнее — о невозможности их ослабления в каком-то смысле. Также рассмотрим условия фиксации отображениями одной или нескольких точек, которые, например, неявно присутствовали в формулировках основных результатов §3.7 и 3.8.

3.10.2. Прежде всего, в §3.2 отмечено, что условие выпускания семейством отображений не менее двух значений не может быть отброшено даже для $Q \equiv 1$ и в случае гомеоморфизмов (см. п. 3.2.1). Остановимся теперь на условиях вида (3.2.9), (3.2.10), а также условиях типа FMO, (2.3.5), (2.3.10) и им подобным.

Отметим, что условие (2.3.5) — точное, как показывает теорема 3.3.3. Теперь более подробно рассмотрим вопрос о невозможности заменить указанные условия требованием локальной интегрируемости в сколь угодно большой степени.

Полагаем $D := \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, $D' := B(0,2) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathfrak{A}_Q$ семейство всех Q-гомеоморфизмов $g : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$. Справедливо следующее заключение.

Теорема 3.10.1. *Для каждого $p \geq 1$ существуют функция $Q : \mathbb{B}^n \to [1,\infty]$, $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$ и последовательность $g_m \in \mathfrak{A}_Q$ такие, что каждое g_m продолжается в точку $x_0 = 0$ по непрерывности и при этом семейство $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в точке $x_0 = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим следующий пример. Зафиксируем числа $p \geq 1$ и $\alpha \in (0, n/p(n-1))$. Можно считать, что $\alpha < 1$ в силу произвольности выбора p. Зададим последовательность гомеоморфизмов $g_m : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$g_m(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|} \cdot x\,, & 1/m \leq |x| \leq 1, \\ \frac{1+(1/m)^{\alpha}}{(1/m)} \cdot x\,, & 0 < |x| < 1/m\;. \end{cases}$$

Отметим, что каждое отображение g_m переводит проколотый шар $D = \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ в кольцо $D' = B(0,2) \setminus \{0\}$, которое, как известно, является QED-областью, что точка $x_0 = 0$ является устранимой особенностью каждого g_m, $m \in \mathbb{N}$, причем $\lim\limits_{x\to 0} g_m(x) = 0$, и что последовательность g_m постоянна при $|x| \geq 1/m$, а именно, $g_m(x) \equiv g(x)$ при всех $x : \frac{1}{m} < |x| < 1$, $m = 1, 2\ldots$, где $g(x) = \frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|} \cdot x$.

Отметим, что $g_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$. Действительно, отображения $g_m^{(1)}(x) = \frac{1+(1/m)^{\alpha}}{(1/m)} \cdot x$, $m = 1, 2, \ldots$, являются отображениями класса C^1, например, в шаре $B(0, 1/m + \varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$, а отображения $g_m^{(2)}(x) = \frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|} \cdot x$ — отображениями класса C^1, например, в кольце

$$A(1/m - \varepsilon, 1, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : 1/m - \varepsilon < |x| < 1\}$$

при малых $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что гомеоморфизмы g_m являются липшицевыми в $\mathbb{B}^n$ и, следовательно, $g_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$ [281, гл. 5, с. 12]. Далее, в каждой регулярной точке $x \in D$ отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ рассмотрим внутреннюю дилатацию отображения f в точке x (см. соотношение (1.1.11)). Поскольку каждое g_m имеет вид (1.1.17), то согласно предложению 1.1.1 можно вычислить $K_I(x,f)$ для $f := g_m$, а именно

$$K_I(x,g_m) = \begin{cases} \left(\frac{1+|x|^{\alpha}}{\alpha|x|^{\alpha}}\right)^{n-1}, & 1/m \le |x| \le 1, \\ 1\,, & 0 < |x| < 1/m\,. \end{cases}$$

Отметим, что при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$, $K_I(x,g_m) \le c_m$ при некоторой постоянной $c_m \ge 1$. Тогда $g_m \in W^{1,n}_{loc}(\mathbb{B}^n)$ и $g_m^{-1} \in W^{1,n}_{loc}(B(0,2))$, поскольку условие $K_I(x,g_m) \le c_m$ влечет, что g_m и g_m^{-1} квазиконформны [281, следствие 13.3 и теорема 34.6]. Ввиду примера 4 п. 1.3.6 гомеоморфизмы g_m являются Q-гомеоморфизмами в области $D = \mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ при $Q = Q_m(x) := K_I(x,g_m)$. Более того, отсюда следует, что g_m являются Q-гомеоморфизмами при $Q = \left(\dfrac{1+|x|^{\alpha}}{\alpha|x|^{\alpha}}\right)^{n-1}$. Поскольку $\alpha p(n-1) < n$, то имеем, что $Q \in L^p(\mathbb{B}^n)$ (см. рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2.12.1). С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x\to 0} |g(x)| = 1\,, \tag{3.10.1}$$

и g отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < 2$. Тогда ввиду (3.10.1) получаем

$$|g_m(x)| = |g(x)| \ge 1 \qquad \forall \quad x : |x| \ge 1/m, \quad m = 1, 2, \ldots\,,$$

т.е. семейство $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в нуле. $\Box$

Замечание 3.10.1. В построенном выше примере в силу конструкции каждое отображение g_m фиксирует бесконечное множество точек из D, кроме того, g_m продолжается по непрерывности на сферу $\mathbb{S}^{n-1}$. Поэтому, учитывая утверждение предложения 3.1.4 и теорему 3.10.1, необходимо отметить коренное различие между семействами отображений, удовлетворяющих неравенствам вида (1.3.1), соответственно, при ограниченных и неограниченных Q. В случае неограниченных Q теорема 3.10.1 показывает, что продолжение каждого элемента g_m семейства $\mathfrak{A}_Q(D)$ на границу по непрерывности еще не влечет его равностепенную непрерывность в $\overline{D}$.

3.10.3. Следующий пример показывает важность условия открытости каждого отображения семейства в результатах, приведенных в §3.5, 3.6.

Теорема 3.10.2. *Для функции $Q(x) \equiv 1$ найдется последовательность дискретных (но не открытых) Q-отображений $g_m : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$, не являющаяся равностепенно непрерывной в точке $x_0 = 0$ и, следовательно, не являющаяся нормальным семейством отображений в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Всюду далее $[a]$ означает целую часть числа $a \in \mathbb{R}$. Для точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)$, пусть отображение $\sigma_i(x_0)$ означает симметрическое отражение точки x от гиперплоскости $x_i = [x_i^0]$ при условии, что $[x_i^0] > 2$, гиперплоскости $x_i = [x_i^0] + 1$ при условии, что $[x_i^0] < -2$, а для всех x_0 таких, что $-2 \le [x_i^0] \le 2$, отображение σ_i определяем как тождественное: $\sigma_i(x_0) = x_0$. Рассмотрим последовательность

$$f_m(x) : \mathbb{R}^n \setminus \prod_{i=1}^{n} [-1, 1] \to \mathbb{R}^n \,,$$

определенную следующим образом:

$$f_1(x) = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \sigma_n(x) \,,$$
$$f_2(x) = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \sigma_n(f_1(x)) \,,$$

$$f_m(x) = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \sigma_n(f_{m-1}(x)) \,,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \,,$$

состоящую из дискретных отображений, являющихся Q-отображениями при $Q(x) \equiv 1$. Действительно, по построению каждое f_m сохраняет длины кривых, дифференцируемо почти всюду, обладает N и N^{-1}-свойствами Лузина. Кроме того, заметим, что $K_I(x, f_m) = 1$ почти всюду, так что каждое f_m является 1-отображением ввиду [125, следствие 8.3 и теорема 8.6]. Понятно также, что каждое из отображений f_m является дискретным. Полагаем $f_m(\infty) = \infty$, при этом отметим, что каждое отображение f_m, $m \in \mathbb{N}$, непрерывно в точке ∞. Укажем, что f_m сходится поточечно к отображению такого же типа, что и отображение G_2 из теоремы 2.12.3, являющееся разрывным в точке ∞. Беря инверсию $g_m(x) := f_m \circ G_3(x)$, где $G_3(x) = \frac{x}{|x|^2}$, получаем последовательность, не являющуюся равностепенно непрерывной в нуле. А именно, из приведенного выше вытекает, что $g_m(0) = \infty$ и можно выбрать последовательность $x_m \in \mathbb{R}^n$ такую, что $x_m \to 0$ при $m \to \infty$ и $h\left(g_m(0), g_m(x_m)\right) \to \frac{\sqrt{2}}{2}$ при $m \to \infty$. Построенная последовательность по определению не принимает значения множества $\prod\limits_{i=1}^{n}[-1, 1]$, имеющего положительную емкость. $\Box$

3.10.4. Сделаем следующее замечание.

Замечание 3.10.2. Как в условиях леммы 3.7.2 и теоремы 3.7.1, так и в условиях леммы 3.8.2 и теоремы 3.8.1, даже в случае $Q(x) \equiv 1$, от условия фиксации, по крайней мере, одной внутренней точки области D каждым гомеоморфизмом f соответствующего семейства отображений отказаться нельзя. Изложенное выше подтверждает следующий пример семейства конформных ($Q(x) \equiv 1$) отображений на плоскости: $f_t(z) = \dfrac{z-t}{1-tz}$, которое при каждом фиксированном $t \in (-1, 1)$ переводит область $D = \mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}$ на $D' = \mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}$ [47, гл. V, § 1, соотношение (12)]. При этом при каждом фиксированном $z \in \mathbb{B}^2$, $f_t(z) \to -1$ при $t \to 1$, в то же время $f_t(1) = 1$ при всех $t \in (-1, 1)$, откуда следует, что семейство $f_t(z)$ не является равностепенно непрерывным в точке $z_0 = 1$.

Что касается условия фиксации не менее двух точек области, то как в лемме 3.8.2 и теореме 3.8.1, это условие может относиться к методу доказательства и формально не быть необходимым. Также трудно привести окончательную оценку использованию в указанных выше утверждениях более сильной оценки (1.3.1), нежели (2.11.1).

3.11. Равностепенная непрерывность кольцевых Q-гомеоморфизмов с ограничениями интегрального типа

3.11.1. Как и в §2.14 (см. гл. 2), рассмотрим семейство кольцевых Q-гомеоморфизмов, характеристика квазиконформности Q которых удовлетворяет ограничениям вида (2.14.31). Используя теоремы 3.3.2 и 2.14.2, легко видеть, что семейство всех Q-гомеоморфизмов, не принимающих два фиксированных значения в $\overline{\mathbb{R}^n}$, характеристика Q которых удовлетворяет условиям типа (2.14.31) и (2.14.23) при $p = n - 1$, является равностепенно непрерывным в рассматриваемой области. Однако ниже приведен более сильный результат.

3.11.2. Предположим, что заданы функция $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ и числа $M > 0$ и $\Delta > 0$. Обозначим через $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ семейство всех кольцевых

Q-гомеоморфизмов в D таких, что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right)\geq\Delta$ и

$$\int\limits_D \Phi\left(Q(x)\right)\frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n}\ \leq\ M\,. \tag{3.11.1}$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 3.11.1. *Пусть $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция. Если*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}=\infty \tag{3.11.2}$$

для некоторого $\delta_0>\tau_0:=\Phi(0)$, то класс $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ является равностепенно непрерывным и, следовательно, образует нормальное семейство отображений при всех $M\in(0,\infty)$ и $\Delta\in(0,1)$.

Доказательство. По теореме 3.3.1 получаем

$$h\left(f(x),f(x_0)\right)\leq\frac{\alpha_n}{\Delta}\exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\rho}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\} \tag{3.11.3}$$

для всех $x\in B(x_0,\rho)$ и каждого положительного $\rho=\rho(x_0)<\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)$.

После замены $y=(x-x_0)/\rho$ интеграл в правой части (3.11.3) по лемме 2.14.1 оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{|x-x_0|}^{\rho}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}=\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{rq^{\frac{1}{n-1}}(r)}\geq\frac{1}{n}\int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\,, \tag{3.11.4}$$

где $\varepsilon=|x-x_0|/\rho$, $q(r)=q_{x_0}(\rho r)$ и

$$M(\varepsilon)=\frac{1}{\Omega_n\rho^n\left(1-\varepsilon^n\right)}\int\limits_R\Phi\left(Q(z)\right)dm(z)\,,$$

$R=\{z\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<|z-x_0|<\rho\}$ — кольцо с центром в точке x_0 и Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Так как $|z|\leq|z-x_0|+|x_0|\leq$ $\leq\rho(x_0)+|x_0|$, то имеем

$$M(\varepsilon)\leq\frac{\beta_n(x_0)}{\Omega_n(1-\varepsilon^n)}\int\limits_R\Phi(Q(z))\frac{dm(z)}{(1+|z|^2)^n}\,,$$

где $\beta_n(x_0) = (1 + (\rho(x_0) + |x_0|)^2)^n / \rho^n(x_0)$. Тогда, при $\varepsilon \le 1/\sqrt[n]{2}$

$$\Phi(0) \le M(\varepsilon) \le \frac{2\beta_n(x_0)}{\Omega_n} M\,.$$

Из неравенств (3.11.3) и (3.11.4) следует, что для всех x таких, что $|x - x_0| < \rho(x_0)/2$,

$$h\left(f(x), f(x_0)\right) \quad \le \quad \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp\left\{ -\frac{1}{n} \int\limits_{\lambda_n \beta_n(x_0) M}^{\frac{\Phi(0)\rho^n(x_0)}{|x-x_0|}} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(r)\right]^{\frac{1}{n-1}}} \right\},$$

где постоянная $\lambda_n = 2e/\Omega_n$ зависит только от n. Следовательно, семейство $f \in \mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ является равностепенно непрерывным в точке x_0. $\Box$

Следствие 3.11.1. *Каждое из условий (2.14.5)—(2.14.10) при $p \in \in (0, n-1]$ влечет равностепенную непрерывность и нормальность класса $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ для всех $M \in (0,\infty)$ и $\Delta \in (0,1)$.*

3.11.3. Как и в случае устранения изолированной особенности, условие расходимости вида (3.11.2) является не только достаточным, но и необходимым условием равностепенной непрерывности соответствующего семейства отображений.

Введем обозначения. Обозначим через $\mathfrak{S}^{\Phi}_{M,\Delta}$ семейство всех кольцевых Q-гомеоморфизмов в D таких, что $Q(x) \ge 1$ почти всюду и, кроме того, $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \ge \Delta$ и выполнено условие (3.11.1). Справедлив следующий результат.

Теорема 3.11.2. *Предположим, что класс отображений $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ равностепенно непрерывен (нормален) при неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, $\Phi(t) \not\equiv \infty$, для всех $M \in (0,\infty)$, $\Delta \in (0,1)$. Тогда*

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty$$

для всех $\delta_* \in (\tau_0, \infty)$, где $\tau_0 := \Phi(0)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $D = \mathbb{B}^n$. Поскольку класс $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ нормален, то класс $\mathfrak{S}^{\Phi}_{M,\Delta}$ также нормален. Таким образом, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $Q(x) \ge 1$ почти всюду. Если функция $\Phi(t)$ в теореме 3.11.2 постоянна, то утверждение теоремы не содержательно. Из условия теоремы также вытекает, что функция $\Phi(t)$ всюду конечна (см. критерий (2.14.7), а также (2.14.10)). В таком случае согласно известному критерию выпуклости конечных действительнозначных функций [19, гл. I, § 4, п. 3, предложение 5] функция наклона $[\Phi(t)-\Phi(0)]/t$ является неубывающей. Следовательно, поскольку функция $\Phi_{n-1}(t):=\Phi(t^{n-1})$ также выпукла и не убывает, и значения Φ на $[0,1]$ не несут в себе информации о функции Q, можно считать, что $\Phi_{n-1}(t)=t$ при всех $t\in[0,1]$ и $\Phi(t)\geq t^{\frac{1}{n-1}}$ при всех $t>0$. Следовательно, можно воспользоваться утверждением леммы 2.14.2. Согласно этой лемме найдется строго убывающая непрерывная функция $K(r)$ такая, что $K(r)<\infty$, $r\in(0,1]$, $K(r)\to\infty$ при $r\to 0$ и при этом

$$K(r)\geq\Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right)\,, \tag{3.11.5}$$

где $\gamma=\Phi^{1/2}(1)\geq 1$ и $\Phi_{n-1}(t):=\Phi(t^{n-1})$.

Определим следующие отображения в единичном шаре $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$:

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\rho(|x|)\,,\qquad f_m(x)=\frac{x}{|x|}\;\rho_m(|x|)\,,\qquad m=1,2,\ldots\,,$$

где

$$\rho(t)=\exp\{I(0)-I(t)\}\,,\quad \rho_m(t)=\exp\{I(0)-I_m(t)\}\,,$$

$$I(t)=\int\limits_t^1\frac{dr}{rK(r)},\qquad I_m(t)=\int\limits_t^1\frac{dr}{rK_m(r)}$$

и

$$K_m(r)\;=\;\begin{cases}K(r), & r\geq 1/m,\\ K\left(\frac{1}{m}\right), & r\in(0,1/m)\,.\end{cases}$$

Из (3.11.5) получаем

$$I(0)-I(t)=\int\limits_0^t\frac{dr}{rK(r)}\;\leq\;\int\limits_0^t\frac{dr}{r\Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right)}\;=\;\int\limits_{\frac{\gamma}{t}}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\Phi_{n-1}^{-1}(\tau)}\qquad\forall\quad t\in(0,1]\,,$$

где $\gamma/t\geq\gamma\geq 1>\Phi(0)=0$. Поэтому ввиду (2.14.38)

$$I(0)-I(t)\leq I(0)=\int\limits_0^1\frac{dr}{rK(r)}<\infty\qquad\forall\quad t\in(0,1]\,.$$

Кроме того, f_m и $f \in C^1(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$, поскольку $K_m(r)$ и $K(r)$ непрерывны. Отметим, что

$$f_m(x) \equiv f(x) \qquad \forall\, x : \frac{1}{m} < |x| < 1, \quad m = 1, 2 \dots\,, \tag{3.11.6}$$

и $K_I(x, f) = K^{n-1}(|x|)$ (см. (2.14.42)). Используя методологию, изложенную в п. 1.1.9 (см. предложение 1.1.1), получаем, что $K_I(x, f_m) = K_I(x, f) = K^{n-1}(|x|)$ для $\frac{1}{m} < |x| < 1$ и $K_I(x, f_m) = K^{n-1}(1/m)$ для $0 < |x| < \frac{1}{m}$. Таким образом, f_m есть квазиконформными в $\mathbb{B}^n$, поэтому f_m и f являются Q-гомеоморфизмами при $Q(x) = K^{n-1}(|x|)$, кроме того, ввиду (2.14.34)

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi\left(K_I(x, f_m)\right) dm(x) \leq \int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi_{n-1}\left(K(|x|)\right)\, dm(x) =$$

$$= \omega_{n-1} \int\limits_0^1 \frac{\Psi\left(K(r)\right)}{rK(r)} \cdot r^n dr \leq\ \gamma^2 \omega_{n-1} \int\limits_0^1 \frac{dr}{rK(r)} \leq\ M\ :\ =\ \gamma^2 \omega_{n-1} I(0) < \infty\,.$$

Отметим, что f_m отображают единичный шар $\mathbb{B}^n$ на шар с центром в начале координат радиуса $R = e^{I(0)} < \infty$. Таким образом, $f_m \in S^{\Phi}_{M,\Delta}$ при некотором $\Delta > 0$, где M указано выше. С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{t \to 0}\ \rho(t) = e^0 = 1\,, \tag{3.11.7}$$

т.е. f отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < R = e^{I(0)}$. Тогда в силу (3.11.6) и (3.11.7) получаем

$$|f_m(x)| = |f(x)| \geq 1 \qquad\qquad \forall \quad x : |x| \geq 1/m, \quad m = 1, 2, \dots\,,$$

т.е. семейство $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в нуле. Полученное противоречие доказывает теорему.$\Box$

3.12. Равностепенная непрерывность открытых дискретных кольцевых Q-отображений с ограничениями интегрального типа

3.12.1. В предыдущем параграфе исследована равностепенная непрерывность гомеоморфизмов, характеристика которых удовлетворяет некоторым интегральным условиям. Рассмотрим свойство равностепенной непрерывности аналогичных классов открытых дискретных отображений.

3.12.2. Пусть E — компактное множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ такое, что его конформная емкость положительна, $\operatorname{cap} E > 0$. Обозначим через $\mathfrak{R}^{Q}_{M,E}$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.12.1. *Пусть $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция. Если для некоторого $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$ выполнены соотношения вида*

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q(x)\right) \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leq \ M \tag{3.12.1}$$

и

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} \ = \ \infty \tag{3.12.2}$$

при некотором $\delta_0 > 0$, то класс $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,E}$ является равностепенно непрерывным и, следовательно, образует нормальное семейство отображений при всех $M \in (0,\infty)$.

Доказательство. Необходимое заключение вытекает из теорем 3.6.1 и 2.14.2, поскольку, в частности, из условий (3.12.1) и (3.12.2) вытекает расходимость интеграла в (2.3.5). $\Box$

Замечание 3.12.1. Отметим принципиальную разницу между результатами теорем 3.11.1 и 3.12.1. В определении класса отображений $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$, участвующего в теореме 3.11.1, функция Q (по определению) *не фиксирована*, а класс в целом определяется функцией Φ. Напротив, в теореме 3.12.1 предполагается, что Q — фиксированная функция, а условия (3.12.1) и (3.12.2) являются лишь некоторыми условиями на функцию Q.

3.12.3. Отметим следующий результат.

Теорема 3.12.2. *Пусть $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — заданная неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для всех множеств E, имеющих положительную емкость, и всех чисел $M > 0$ класс отображений $\mathfrak{R}^{Q}_{M,E}$ является равностепенно непрерывным (нормальным). Тогда* *для всех* $\delta_* \in (\tau_0, \infty)$, $\tau_0\colon = \Phi(0)$, *выполнено условие*

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty\,.$$

Доказательство непосредственно вытекает из утверждения теоремы 3.11.2. □

3.13. Необходимые и достаточные условия равностепенной непрерывности. Аналог теоремы Миньйович

3.13.1. До сих пор мы рассматривали различные достаточные условия, при которых то или иное семейство кольцевых Q-отображений является равностепенно непрерывным (нормальным), не вдаваясь особо в вопросы, касающиеся необходимости этих условий. Далее мы углубимся в изучение данной проблемы, т.е. зафиксируем какое-либо условие на функцию Q и предположим, что семейство кольцевых Q-отображений равностепенно непрерывно. Какие локальные свойства семейства отображений вытекают из указанного свойства его равностепенной непрерывности?

Ответ на этот вопрос в случае ограниченной функции Q получен в работе Р. Миньйович [139]. Сформулируем основной результат указанной работы [139, теорема 1].

Предложение 3.13.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство отображений с ограниченным искажением, имеющих общую постоянную квазиконформности K. Тогда семейство $\mathfrak{F}$ нормально тогда и только тогда, когда для каждого компактного множества $E \subset D$ найдется конечное число M такое, что $h(f(x_1), f(x_2)) < M(h^{\alpha}(x_1, x_2))$ для всех $x_1 \in E$, $x_2 \in D$ и $f \in \mathfrak{F}$, где $\alpha = K^{1/(n-1)}$, а h, как обычно, — хордальная метрика.*

В настоящем параграфе эта проблема решена для случая, когда функция Q может оказаться неограниченной.

3.13.2. Напомним, что *мебиусовым преобразованием* $U : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называют отображение, представляющее собой композицию конечного числа преобразований подобия и инверсий относительно сферы [168, гл. I, § 2.2]. Отметим, что согласно теореме Лиувилля любое конформное отображение области D пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, является сужением на D некоторого мебиусова преобразования (см. соответствующий результат в [61] для класса C^1, а также [175, гл. I, теорема 2.5]). При этом для области $D := \overline{\mathbb{R}^n}$ указанный результат верен также при $n = 2$ [140]. Обратно, сужение каждого мебиусова преобразования $U : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ на произвольную область $D \setminus \{\infty, U^{-1}(\infty)\}$ по определению является конформным отображением, поэтому $M(U(\Gamma)) = M(\Gamma)$ для каждого мебиусова отображения $U : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ и произвольного семейства кривых Γ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ [281, теорема 8.1].

3.13.3. Следующая лемма определяет характер локального поведения классов кольцевых Q-отображений, являющихся равностепенно непрерывными (нормальными).

Лемма 3.13.1. *Пусть $\mathfrak{F}_Q$ — некоторое семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке x_0, $n \geq 2$. Предположим, что найдутся числа $p < n$, $\varepsilon_0 \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$, $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ и неотрицательная измеримая по Лебегу функция $\psi : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, для которых выполнено условие вида (3.5.9), где $\psi_\varepsilon \equiv \psi$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, функция $I(a, b)$ определена соотношением (3.5.3) и, кроме того, выполнено условие: $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.*

Тогда семейство $\mathfrak{F}_Q$ является равностепенно непрерывным в точке x_0 тогда и только тогда, когда найдутся $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_0)$, $i = 1,2$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, такие, что для любого $f \in \mathfrak{F}_Q$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_1)$ выполнена оценка

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \alpha_n \exp\{-\widetilde{\beta_n} I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|, \varepsilon_2)\}\,, \tag{3.13.1}$$

где $\widetilde{\beta_n} = \left(\frac{\omega_{n-1}}{2K}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, а α_n и $\gamma_{n,p}$, как и прежде, определены в соотношении (3.2.12).

Доказательство. Достаточность утверждения леммы очевидна, поскольку из соотношения (3.13.1) при $p < n$ и условия $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ немедленно следует равностепенная непрерывность семейства отображений $\mathfrak{F}_Q$. Покажем необходимость утверждения леммы. Предположим, что семейство $\mathfrak{F}_Q$ равностепенно непрерывно в точке x_0. Тогда для произвольного $\sigma > 0$ найдется $\Delta = \Delta(\sigma, x_0)$ такое, что

$$h(f(x), f(x_0)) < \sigma, \tag{3.13.2}$$

как только $|x - x_0| < \Delta$. Можно считать, что $\Delta < \varepsilon_0$. Для фиксированного отображения $f \in \mathfrak{F}_Q$ и точки $x_0 \in D$ определим мебиусово преобразование $U : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ как такое, что

$$U(f(x_0)) = 0, \qquad h(U(f(x)), U(f(x_0))) = h(f(x), f(x_0)) \tag{3.13.3}$$

(такое мебиусово преобразование U существует [281, теорема 12.2]). В силу сделанных перед леммой 3.13.1 замечаний отображение $v := U \circ f$

также является кольцевым Q-отображением в точке x_0, при этом из оценки (3.13.2) при достаточно малом значении σ и соотношений (3.13.3) вытекает, что при некотором $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x_0) < \Delta$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_2)$ выполнено неравенство: $|v(x)| \le 1$. Рассмотрим сужение отображения v на шар $B(x_0, \varepsilon_2)$, $g := v|_{B(x_0,\varepsilon_2)}$. Так как $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то $0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) < 2 \cdot I(\varepsilon, \varepsilon_2) < \infty$ при некотором $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2)$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Тогда из условия (3.5.9) вытекает

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_2} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) \le$$

$$\le 2K \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_2) \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)\,. \tag{3.13.4}$$

Однако условие (3.13.4) совпадает с условием (3.5.9), где роль ε_0 играет ε_2, роль ε_0' играет ε_1, а роль K — новая постоянная $2K$. Необходимое заключение следует теперь из леммы 3.5.3, примененной к отображению g, и соотношений (3.13.3). $\Box$

В дальнейшем нам понадобится еще одна лемма, которая является некоторой вариацией леммы 3.13.1.

Лемма 3.13.2. *Пусть $\mathfrak{F}_Q$ — семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке x_0, $n \ge 2$. Предположим, что существует число $\widetilde{\varepsilon_0} \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$, обладающее следующим свойством. Для любого числа $\varepsilon_0 \in (0, \widetilde{\varepsilon_0})$ найдется число $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ и неотрицательная измеримая по Лебегу функция $\psi : (0, \widetilde{\varepsilon_0}) \to [0, \infty]$ такая, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0') \tag{3.13.5}$$

и, кроме того, выполнено условие вида

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) \le K \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_0) \;\; \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,. \tag{3.13.6}$$

Тогда если семейство $\mathfrak{F}_Q$ является равностепенно непрерывным в точке x_0, то найдутся такие числа $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_0)$, $i = 1, 2$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \widetilde{\varepsilon_0}$, что для всех $f \in \mathfrak{F}_Q$ и $x \in B(x_0, \varepsilon_1)$ выполнена оценка

$$h(f(x), f(x_0)) \le \alpha_n \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|, \varepsilon_2)\}\,, \tag{3.13.7}$$

где α_n, β_n и $\gamma_{n,p}$, как и прежде, определены в соотношении (3.2.12).

Доказательство. Предположим, что семейство $\mathfrak{F}_Q$ равностепенно непрерывно в точке x_0. Тогда для произвольного $\sigma > 0$ найдется $\Delta = \Delta(\sigma, x_0)$ такое, что выполнено соотношение (3.13.2). Для фиксированного отображения $f \in \mathfrak{F}_Q$ и точки $x_0 \in D$ определим мебиусово преобразование $U : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ как такое, что выполнены равенства (3.13.3). В силу сделанных перед леммой 3.13.1 замечаний отображение $v := U \circ f$ также является кольцевым Q-отображением в точке x_0, при этом из оценки (3.13.2) при достаточно малом значении σ и соотношений (3.13.3) вытекает, что при некотором $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x_0) < \Delta$ и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_1)$ выполнено $|v(x)| \leq 1$. Рассмотрим сужение отображения v на шар $B(x_0, \varepsilon_2)$, $g := v|_{B(x_0,\varepsilon_2)}$. Отметим, что в силу условия (3.13.5) при некотором $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2)$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено условие $0 < I(\varepsilon, \varepsilon_2) < \infty$. Тогда из (3.13.6) вытекает

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_2} Q(x) \cdot \psi^n(|x-x_0|)\, dm(x) \leq K \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_2) \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)\,. \tag{3.13.8}$$

Однако (3.13.8) совпадает с условием (3.5.9). Необходимое заключение следует теперь из леммы 3.5.3, примененной к отображению g, и равенств в (3.13.3). $\square$

Замечание 3.13.1. Заключения лемм 3.13.1 и 3.13.2 получены при различных предположениях и не сравнимы между собой. В частности, утверждение леммы 3.13.2 более точное, чем утверждение леммы 3.13.1, поскольку в правой части соотношения (3.13.7) постоянная $\beta_n = (\frac{\omega_{n-1}}{K})^{1/(n-1)}$ больше постоянной $\widetilde{\beta_n} = (\frac{\omega_{n-1}}{2K})^{1/(n-1)}$, стоящей в правой части соотношения (3.13.1). Однако условия леммы 3.13.1 предполагают выполнение соотношений (3.5.3), (3.5.9) лишь при одном фиксированном ε_0, в то время как в лемме 3.13.2 такие условия должны быть выполнены при каждом достаточно малом ε_0 и одной и той же постоянной $K > 0$. Как показано в следующем параграфе, обе леммы имеют свои приложения к конкретным классам функций Q.

3.13.4. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.13.1. *Семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $x_0 \in D$ таких, что $Q \in FMO(x_0)$, равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда при некоторых $p = p(n, Q) > 0$, $C_n(x_0) > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ и всех*

$x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ *выполнено неравенство*

$$h(f(x), f(x_0)) \le C_n(x_0) \left\{ \frac{1}{\log \frac{1}{|x-x_0|}} \right\}^p . \tag{3.13.9}$$

Доказательство. Полагаем $\psi(t) := \dfrac{1}{t \log 1/t}$. Пусть $\varepsilon_0 < e^{-1}$ — произвольно. Тогда в сделанных выше обозначениях

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt = \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}} ,$$

при этом условие $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ проверяется непосредственно, а условие (3.5.9) при $p = 1$ выполнено в силу предложения 2.3.1. Условие (3.13.9) вытекает из (3.13.1) при выбранной функции ψ. $\Box$.

Теорема 3.13.2. *Семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $x_0 \in D$ таких, что при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) \in (0, \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D))$ выполнено условие*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty, \tag{3.13.10}$$

равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда при некотором $\varepsilon_0' < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0' > 0$, и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0')$ выполнено соотношение

$$h(f(x), f(x_0)) \le \alpha_n \cdot \exp \left\{ - \int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right\} , \tag{3.13.11}$$

где α_n — постоянная из формулировки леммы 3.13.1.

Доказательство. Достаточность утверждения теоремы непосредственно вытекает из условий (3.13.10) и (3.13.11). Докажем необходимость. При достаточно малых ε рассмотрим функцию

$$\psi(t) \quad = \quad \begin{cases} 1/[t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)] \, , & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0 \, , & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0) \, , \end{cases}$$

а функцию $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, как и прежде, определим по правилу $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt$. В силу условия (3.13.10) для каждого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ найдется $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$. Кроме того, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) < \infty$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (см. замечание 2.7.1). Наконец, функция ψ удовлетворяет также соотношению (4.4.15) при $p = 1$ и $K = \omega_{n-1}$, поскольку несложные вычисления показывают, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = \omega_{n-1} \cdot I(\varepsilon, \varepsilon_0)\,.$$

Необходимое заключение следует теперь из леммы 3.13.2. $\square$

Из теоремы 3.13.2 непосредственно вытекает следующее

Следствие 3.13.1. *Семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $x_0 \in D$ таких, что при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) \in (0, \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D))$*

$$q_{x_0}(r) \le C \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1} \qquad \forall\ r \in (0, \varepsilon_0)\,,$$

равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда при некотором $\varepsilon_0' < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0' > 0$, и всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0')$ выполнено соотношение

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{M}{\left(\log \frac{1}{|x-x_0|}\right)^{\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{n-1}}}}\,,$$

где M — некоторая постоянная, зависящая только от размерности пространства n и точки x_0.

3.14. Равностепенная непрерывность семейств отображений, не принимающих значения из переменного множества. Аналог теоремы Вуоринена

3.14.1. В §3.6 приведены некоторые результаты о равностепенной непрерывности семейств отображений, не принимающих значения из *фиксированного* множества E положительной емкости. В настоящем параграфе речь идет о том, что указанное условие, касающееся наличия такого фиксированного множества, может быть несколько ослаблено.

Точнее, множество E не будет предполагаться фиксированным и может зависеть от отображения f из данного семейства. При этом E все равно должно удовлетворять некоторым дополнительным ограничениям.

Поясним изложенное выше более подробно. Понятно, что наличие "общего" E для всего семейства отображений может оказаться существенным: простой пример семейства отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in \mathbb{C}$, рассматриваемых в круге $B(0,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, и не являющегося семейством, равностепенно непрерывным в точках сферы $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (а также нормальным в указанной области $\mathrm{B}(0, 2)$), показывает, что если каждое отображение в отдельности не принимает значения некоторого множества положительной емкости E_m, то равностепенная непрерывность этого семейства не следует даже в случае $Q(z) \equiv 1$. Однако при определенных условиях на E результат о равностепенной непрерывности семейства отображений остается справедливым, даже если множество $E = E_f$ будет зависеть от f.

Отметим еще одну особенность. Результат Р. Миньйович [139] утверждает, что для равностепенной непрерывности (нормальности) семейств отображений в случае ограниченных Q и $n \geq 2$ достаточно, чтобы семейство отображений не принимало $l+1$ различных значений, где натуральное число l вполне определяется коэффициентом квазиконформности K и размерностью пространства n [139, теорема 4]. Что касается изучаемого случая неограниченных функций Q, то конечного числа не принимаемых значений может оказаться недостаточно.

3.14.2. Дальнейшее изложение тесно связано с работой М. Вуоринена [294], в которой исследованы отображения с ограниченным искажением. Нами рассмотрены аналогичные вопросы, соответствующие случаю, когда функция Q из (1.3.2) ограничена. Как и при ограниченных функциях Q, введем специальную функцию множеств $c(\cdot)$.

Как и прежде, для множеств E и $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ символ $\Gamma(E, F, D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$. При $D := \overline{\mathbb{R}^n}$ полагаем $\Gamma(E, F) := \Gamma(E, F, \overline{\mathbb{R}^n})$. Пусть $Q(x, t) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, y) < t\}$ — сферический шар с центром в точке x радиуса t. Для $x \in \overline{\mathbb{R}^n}$, множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ и чисел $0 < r < t < 1$ полагаем $\widetilde{x} = -\dfrac{x}{|x|^2}$,

$$\begin{cases} m_t(E, r, x) = M(\Gamma(\partial Q(x, t), E \cap \overline{Q(x, r)})) \, , \\ \qquad\qquad m(E, x) = m_{\sqrt{3}/2}(E, \frac{\sqrt{2}}{2}, x) \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\left\{\begin{array}{r} c(E,x)=\max\{m(E,x),m(E,\widetilde{x})\}\,,\\ c(E)=\inf\limits_{x\in\overline{\mathbb{R}^n}}c(E,x)\,.\end{array}\right. \qquad (3.14.1)$$

Отметим, что для компактного множества $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ имеет место следующая взаимосвязь: $c(E)=0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{cap}\,E=0$ [294, следствие 3.19].

Обозначим через $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(x_0)$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f:D\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E_f$ в точке $x_0\in D$ таких, что $c(E_f)\geq\delta>0$, где множество E_f компактно, а функция множества $c(\cdot)$ определена соотношением (3.14.1).

Следующий вспомогательный результат можно доказать для семейства отображений $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(x_0)$ в наиболее общей формулировке.

Лемма 3.14.1. *Предположим, что найдется* $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<\mathrm{dist}(x_0,\partial D)$, $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_0)$ *и функция* $\psi:(0,\varepsilon_0)\rightarrow[0,\infty]$ *такие, что*

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt<\infty\qquad\forall\;\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$$

и

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0}Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\;dm(x)=o\left(I^n\left(\varepsilon,\varepsilon_0\right)\right) \qquad (3.14.2)$$

при $\varepsilon\rightarrow0$. *Тогда семейство отображений* $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(x_0)$ *равностепенно непрерывно в точке* x_0.

Доказательство. Для фиксированного отображения $f\in\mathfrak{F}_{Q,\delta}(x_0)$ рассмотрим конденсаторы $E=(A,C)$ и $f(E)=E'=(f(A),f(C))$, где $C:=\overline{B(x_0,\varepsilon)}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$, $A=B(x_0,r_0)$, $r_0=\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)$. Пусть $\Gamma_{E'}$ и Γ_E — семейства кривых в смысле предложения 1.4.1. Заметим, что $\Gamma(f(C),E_f)>\Gamma_{E'}$ [104, гл. I, § 46 теорема 1] и, следовательно, в силу свойства минорирования модуля (1.1.7), леммы 3.5.2 и условия (3.14.2)

$$M(\Gamma(f(C),E_f))\leq M(\Gamma_{E'})=\mathrm{cap}\,f(E)\leq\alpha(\varepsilon)\,, \qquad (3.14.3)$$

где $\alpha(\varepsilon)\rightarrow0$ при $\varepsilon\rightarrow0$. С другой стороны, согласно [294, теорема 3.14]

$$M(\Gamma(f(C),E_f))\geq\beta_n\min\{c(f(C)),c(E_f)\}\,, \qquad (3.14.4)$$

где постоянная β_n зависит только от n. Поскольку для каждого связного множества F в $\overline{\mathbb{R}^n}$ имеет место неравенство $c(F)\geq a_nh(F)$, где $h(F)$ —

хордальный диаметр множества F, а a_n — некоторая постоянная [294, следствие 3.13], то имеем

$$c(f(C)) \geq a_n \cdot h(f(C))\,. \tag{3.14.5}$$

Известно, что $c(E) \leq \omega_{n-1} \cdot \left(\log \sqrt{3}\right)^{1-n}$ для любого множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ [294, соотношение (3.7)], а также см. определение функции $c(\cdot)$ в (3.14.1), так что

$$\frac{c(E)}{\omega_{n-1} \cdot \left(\log \sqrt{3}\right)^{1-n}} \quad \leq \quad 1 \qquad \forall\, E \subset \overline{\mathbb{R}^n}\,. \tag{3.14.6}$$

Предположим, что min в правой части (3.14.4) равен $c(f(C))$, тогда в силу соотношений (3.14.5) и (3.14.6)

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq \beta_n \cdot a_n \cdot h(f(C)) \geq \frac{\beta_n \cdot a_n \cdot h(f(C))c(E_f)}{\omega_{n-1} \cdot \left(\log \sqrt{3}\right)^{1-n}}\,. \tag{3.14.7}$$

Пусть $\min\{c(f(C)), c(E_f)\} = c(E_f)$, тогда из (3.14.4) следует

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq \beta_n \cdot c(E_f) \geq \beta_n \cdot h(f(C))c(E_f)\,. \tag{3.14.8}$$

Полагая $c_n := \min\left\{\beta_n, \dfrac{\beta_n \cdot a_n}{\omega_{n-1} \cdot \left(\log \sqrt{3}\right)^{1-n}}\right\}$, из (3.14.7) и (3.14.8) имеем

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq c_n \cdot h(f(C))c(E_f) \geq c_n\delta h(f(C))\,. \tag{3.14.9}$$

Из соотношений (3.14.3) и (3.14.9) вытекает

$$h(f(C)) \leq \frac{\alpha(\varepsilon)}{c_n\delta}\,. \tag{3.14.10}$$

Поскольку $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то из (3.14.10) следует, что для любого $\sigma > 0$ найдется $\Delta = \Delta(\sigma)$ такое, что $h(f(C)) < \sigma$ как только $\varepsilon < \Delta$. Тем самым, $h(f(x), f(x_0)) < \sigma$ при всех $x \in B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon < \Delta$. Таким образом, неравенство $h(f(x), f(x_0)) < \sigma$ имеет место для всех $x \in B(x_0, \Delta)$ и всех $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta}(x_0)$, что и доказывает равностепенную непрерывность семейства отображений $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(x_0)$ в точке x_0. $\square$

3.14.3. Имеет место следующий результат.

Теорема 3.14.1. *Семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta}(x_0)$ всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E_f$ в точке $x_0 \in D$ таких, что*

$c(E_f) \geq \delta > 0$, *где множество* E_f *компактно, а* $c(\cdot)$ *— функция множества, определенная в соотношении (3.14.1), равностепенно непрерывно в точке* $x_0 \in D$, *как только выполнено хотя бы одно из следующих условий: 1)* $Q \in FMO(x_0)$; *2)* $q_{x_0}(r) \leq C \cdot (\log \frac{1}{r})^{n-1}$ *при* $r \to 0$, *где* $C > 0$ *— некоторая постоянная; 3) при некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *имеет место соотношение*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty\,. \tag{3.14.11}$$

Доказательство немедленно следует из лемм 3.14.1 и 2.3.1. □

3.14.4. Конечно, условие вида $c(E_f) \geq \delta > 0$ может оказаться затруднительным для проверки ввиду сложности вычисления $c(E_f)$. Однако в большинстве случаев можно обойтись иными сравнительно простыми условиями, проверяющимися непосредственно. По этой причине рассмотрим два случая: 1) когда множества E_f являются связными для каждого f; 2) когда множество E_f не обязано быть связным. Имеют место следующие утверждения.

Следствие 3.14.1. *Семейство* $\mathfrak{A}_{Q,\delta}(x_0)$, *состоящее из всех открытых дискретных кольцевых* Q*-отображений* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E_f$ *в точке* $x_0 \in \in D$ *таких, что* $h(E_f) \geq \delta > 0$, *где множество* E_f *компактно и связно, равностепенно непрерывно в точке* $x_0 \in D$, *как только выполнено хотя бы одно из следующих условий: 1)* $Q \in FMO(x_0)$; *2)* $q_{x_0}(r) \leq \leq C \cdot (\log \frac{1}{r})^{n-1}$ *при* $r \to 0$, *где* $C > 0$ *— некоторая постоянная; 3) при некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0)$ *имеет место соотношение (3.14.11).*

Доказательство. Для произвольного связного множества $E_f \subset \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ имеет место неравенство: $c(E_f) \geq a_n \cdot h(E_f)$, где, как и прежде, функция множеств $c(\cdot)$ определена в (3.14.1), а $h(\cdot)$ — хордальный диаметр множества [294, п. (4), теорема 1.1]. Таким образом, для любого отображения $f \in \mathfrak{A}_{Q,\delta}(x_0)$ выполнено условие $c(E_f) \geq a_n \cdot \delta$. Заключение следствия 3.14.1 вытекает теперь на основании теоремы 3.14.1. □

Пусть $h(E, F)$ означает хордальное расстояние между множествами $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $h(E, F) = \sup\limits_{x \in E, y \in F} h(x, y)$. Обозначим символом $\mathfrak{B}_{Q,\delta}(x_0)$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E_f$ в точке $x_0 \in D$, где множество E_f компактно, таких, что для каждого f найдется компактное множество $\widetilde{E_f} \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого $h(E_f, \widetilde{E_f}) \geq \delta > 0$ и $M(\Gamma(E_f, \widetilde{E_f}, \overline{\mathbb{R}^n})) \geq \delta$. Имеет место следующее

Следствие 3.14.2. *Семейство отображений $\mathfrak{B}_{Q,\delta}(x_0)$ равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$, как только выполнено хотя бы одно из следующих условий: 1) $Q \in FMO(x_0)$; 2) $q_{x_0}(r) \le C \cdot (\log \frac{1}{r})^{n-1}$ при $r \to 0$, где $C > 0$ — некоторая постоянная; 3) при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0)$ имеет место соотношение (3.14.11).*

Доказательство. Ввиду [294, теорема 3.15] для каждого из отображений $f \in \mathfrak{B}_{Q,\delta}(x_0)$ имеет место соотношение

$$c(E_f) \ge \min\{c(E_f), c(\widetilde{E_f})\} \ge \frac{1}{\alpha} \cdot M(\Gamma(E_f, \widetilde{E_f}, \overline{\mathbb{R}^n})) \ge \frac{\delta}{\alpha}\,,$$

где постоянная $\alpha > 0$ зависит только от размерности пространства n и δ. Тогда заключение следствия 3.14.2 вытекает из теоремы 3.14.1. $\Box$

Замечание 3.14.1. Как показывает все тот же пример семейства отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in B(0,2)\setminus\{0\}$, условие связности множества E_f в формулировке следствия 3.14.1 является существенным. Указанное семейство не является нормальным в данной области, хотя каждое из отображений этого семейства не принимает значения множества $E_f = \{0, \infty\}$, при этом $h(E_f) = 1$ для всех f. Причина такого обстоятельства заключается в том, что множество E_f не связно.

Замечание 3.14.2. Аналогично приведенному выше пример семейства отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in B(0,2) \setminus \{0\}$, показывает, что ни одно из условий

$$h(E_f, \widetilde{E_f}) \ge \delta > 0; \quad M(\Gamma(E_f, \widetilde{E_f}, \overline{\mathbb{R}^n})) \ge \delta\,,$$

входящих в определение класса $\mathfrak{B}_{Q,\delta}(x_0)$ из формулировки следствия 3.14.2, не может быть отброшено.

В связи с этим рассмотрим вместо класса $\mathfrak{B}_{Q,\delta}(x_0)$ семейство отображений $\mathfrak{B}'_{Q,\delta}(x_0)$, состоящее из открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}\setminus E_f$ в точке $x_0 \in D$, где множество E_f компактно, таких, что для каждого f найдется компактное множество $\widetilde{E_f} \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого $h(E_f, \widetilde{E_f}) \ge \delta > 0$, а также семейство $\mathfrak{B}''_{Q,\delta}(x_0)$, состоящее из открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E_f$ в точке $x_0 \in D$, где множество E_f компактно, таких, что для каждого f найдется компактное множество $\widetilde{E_f} \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого выполнено условие $M(\Gamma(E_f, \widetilde{E_f}, \overline{\mathbb{R}^n})) \ge \delta$.

Пусть x_0 — произвольная точка области $B(0,2)\setminus\{0\}$. Отметим, что семейство отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in B(0,2)\setminus\{0\}$, представляет собой пример семейства как класса $\mathfrak{B}'_{Q,\delta}(x_0)$ при $Q \equiv 1$, так и класса $\mathfrak{B}''_{Q,\delta}(x_0)$ при $Q \equiv 1$. В первом случае указанное семейство принадлежит $\mathfrak{B}'_{1,\delta}(x_0)$ при некотором δ, поскольку оно не принимает два фиксированных значения 0 и ∞. Во втором случае семейство отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in B(0,2)\setminus\{0\}$, принадлежит классу $\mathfrak{B}''_{1,\delta}(x_0)$ при некотором δ, так как для любого $m \in \mathbb{N}$ можно указать $R_m > 0$ так, что $f_m\left(B(0,2)\setminus\{0\}\right) \subset \subset B(0,R_m)$, но тогда для множества $E_m := \overline{\mathbb{C}} \setminus B(0,2R_m)$ будем иметь: $M(\Gamma(E_m, B(0,R_m), \overline{\mathbb{C}})) = \dfrac{2\pi}{\log 2} := \delta > 0$, где $\delta > 0$ не зависит от m.

И в первом, и во втором случаях причина того, что семейство отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in B(0,2)\setminus\{0\}$, не является нормальным, заключается в том, что одно из условий из определения класса $\mathfrak{B}_{Q,\delta}(x_0)$: (условие $M(\Gamma(E_f, \widetilde{E_f}, \overline{\mathbb{R}^n})) \geq \delta$, либо условие $h(E_f, \widetilde{E_f}) \geq \delta > 0$,) в точности нарушается.

3.15. Радиус инъективности локальных кольцевых Q-гомеоморфизмов. Равностепенная непрерывность

3.15.1. Семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений равностепенно непрерывно, как только выполнены некоторые ограничения на возрастание функции Q, а семейство не принимает значения множества положительной емкости (см. §3.6 и 3.14). Однако для локальных гомеоморфизмов при $n > 2$ требование выпускания множества положительной емкости, как приведено ниже, является слишком жестким. Далее показано, что в этом случае достаточно лишь выпускания пары значений семейством отображений, как и в случае гомеоморфизмов (см. §3.3).

3.15.2. С проблемой равностепенной непрерывности локальных кольцевых Q-гомеоморфизмов тесно связана так называемая проблема о радиусе инъективности, с которой мы начнем дальнейшее изложение.

Как указано ранее, локальным гомеоморфизмом называется отображение, обладающее следующим свойством: каждая точка области определения отображения имеет окрестность, в которой это отображение является гомеоморфизмом (см. определение 1.1.5). Конечно, радиус этой окрестности (который в этом случае называется *радиусом инъективности* отображения) зависит от отображения f. Однако некоторые специальные классы отображений имеют радиус инъективности "универсальный", зависящий только от класса в целом и независящий от конкретного отображения в отдельности.

В 70-х годах XX столетия О. Мартио, С. Рикманом и Ю. Вяйсяля было установлено, что при $n \geq 3$ каждое локально гомеоморфное отображение с ограниченным искажением имеет радиус инъективности, зависящий только от размерности пространства и постоянной квазиконформности. Следующий результат доказан в работе [117, теорема 2.3], см. также [175, гл. III, теорема 3.4] и [90].

Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — локально гомеоморфное отображение с ограниченным искажением с коэффициентом квазиконформности K. Тогда отображение f является инъективным в некотором шаре $B\left(0, \psi(n, K)\right)$, где ψ — положительная величина, зависящая только от n и K.

Аналогичное утверждение при $n = 2$ оказалось неверным, как показывает простой пример последовательности аналитических функций $f_m(z) = e^{mz,}$ $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Несколько позднее О. Мартио и У. Сребро обобщили результат О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вяйсяля на отображения с ограниченным искажением, допускающие бесконечное значение (квазимероморфные отображения) [128].

Результат, приведенный в настоящем параграфе, касается доказательства аналогичного утверждения для локальных кольцевых Q-гомеоморфизмов.

3.15.3. Следующее утверждение см. в [175, гл. III, лемма 3.3].

Предложение 3.15.1. *Пусть $f : G \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — локальный гомеоморфизм, $A, B \subset G$, при этом f гомеоморфно в A и B. Если $A \cap B \neq \varnothing$ и множество $f(A) \cap f(B)$ является связным, то f гомеоморфно в $A \cup B$.*

Далее нам понадобится следующее утверждение [90, лемма 3.1].

Предложение 3.15.2. *Пусть $n \geq 1$, $r > 0$, $a \neq b$, $a, b \in S(0, r)$. Тогда найдется точка $p = p(a, b) \in B(0, r)$ такая, что для каждого $t \in \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$ либо*

$$0, b \in B(p, t) \quad \textit{и} \quad a \notin B(p, t)\,,$$

либо

$$a, b \in B(p, t) \quad \textit{и} \quad 0 \notin B(p, t)\,.$$

Приведем еще один результат, принадлежащий Ю. Вяйсяля [281, теорема 10.2]. Пусть $S = S(x_0, r)$, $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Определение 3.15.1. *Сферической шапочкой* условимся называть множество вида $H \cap S$, где H — открытое полупространство в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.15.2. *Модулем $M^S(\Gamma)$ семейства кривых Γ относительно S* будем называть величину

$$M^S(\Gamma)=\inf_{\rho\in\,\mathrm{adm}\,\Gamma}\int\limits_{S}\rho^n(x)d\mathcal{H}^{n-1}\,.$$

Имеет место следующее заключение [281, теорема 10.2].

Предложение 3.15.3. *Пусть K — произвольная сферическая шапочка сферы S, а E и F — непустые непересекающиеся подмножества K. Пусть $\Gamma=\Gamma(E,F,K)$, тогда*

$$M^S(\Gamma)\geq b_n/r\,,$$

где постоянная b_n зависит только от размерности пространства n.

3.15.4. Главную смысловую нагрузку настоящей работы несет следующая лемма.

Лемма 3.15.1. *Предположим, что $n\geq 3$, $Q:\mathbb{B}^n\rightarrow[0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция и $f:\mathbb{B}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ — локальный кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0=0$. Предположим, что найдется измеримая по Лебегу функция $\psi:(0,1)\rightarrow[0,\infty]$ и постоянная $C=C(n,Q,\psi)$ такие, что*

$$0<I(r_1,r_2):=\int\limits_{r_1}^{r_2}\psi(t)\,dt<\infty\quad\forall\,r_1,r_2\in(0,1) \tag{3.15.1}$$

и при некотором $\alpha>0$

$$\int\limits_{r_1<|x|<r_2}Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x)\leq C\cdot I^{n-\alpha}(r_1,r_2)\,. \tag{3.15.2}$$

Если

$$I(0,1):=\int\limits_{0}^{1}\psi(t)dt=\infty\,, \tag{3.15.3}$$

то отображение f инъективно в некотором шаре $B\left(0,\delta(n,Q,\psi)\right)$, где δ — положительное число, зависящее только от n и функций Q и ψ.

Доказательство.

1 шаг. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $f(0)=0$. Пусть $r_0=\sup\{r\in\mathbb{R}:r>0,\overline{U(0,r)}\subset\mathbb{B}^n\}$, где $U(0,r)$

означает компоненту связности множества $f^{-1}(B(0,r))$, содержащую точку 0. Очевидно, что $r_0>0$. Зафиксируем число $r<r_0$ и положим $U=U(0,r)$,

$$l^*=l^*(0,f,r)=\inf\{|z|:z\in\partial U\}\,,$$

$$L^*=L^*(0,f,r)=\sup\{|z|:z\in\partial U\}\,.$$

По предложению 2.13.4 f отображает множество $\overline{U}$ на $\overline{B(0,r)}$ гомеоморфно. Следовательно, f инъективно в шаре $B(0,l^*)$ и, значит, достаточно найти нижнюю границу для l^*.

2 шаг. Отметим, что $L^*\to 1$ при $r\to r_0$. Действительно, пусть $L^*\not\to 1$ при $r\to r_0$. Тогда:

1) отметим, что $U(0,r_1)\subset U(0,r_2)$ при $0<r_1<r_2<r_0$. Действительно, если бы нашелся элемент $x\in U(0,r_1)\setminus U(0,r_2)$, то, поскольку $f(U(0,r_i))=B(0,r_i)$, $i=1,2$, мы бы имели $f(x)=y\in B(0,r_1)$ и $f(z)=y\in B(0,r_1)$, $z\ne x$. Однако это противоречит предложению 3.15.1, поскольку по этому предложению f должно гомеоморфно отображать объединение множеств $U(0,r_1)\cup U(0,r_2)$;

2) из пункта а) вытекает, что функция L^* возрастает по r и, следовательно, существует предел L^* при $r\to r_0$. Тогда $L^*\to\varepsilon_0$ при $r\to r_0$, где $\varepsilon_0\in(0,1)$. В таком случае все множества $U(0,r)$, $0<r<r_0$, лежат в фиксированном шаре $B(0,\varepsilon_0)$;

3) отметим, что $B(0,r_0)\subset f(B(0,\varepsilon_0))$. Действительно, пусть $y\in$ $\in B(0,r_0)$, тогда также $y\in B(0,r_1)$ при некотором $r_1\in(0,r_0)$, откуда следует, что найдется $x\in U(0,r_1)$ такой, что $f(x)=y$, следовательно, $y\in f(B(0,\varepsilon_0))$, т.е. $B(0,r_0)\subset f(B(0,\varepsilon_0))$;

4) отметим, что $\overline{B(0,r_0)}\subset f(\overline{B(0,\varepsilon_0)})$ и ввиду локальной гомеоморфности отображения f при произвольном $\varepsilon_1\in(\varepsilon_0,1)$ множество $f(B(0,\varepsilon_1))$ содержит некоторую окрестность множества $\overline{B(0,r_0)}$. Значит, компонента связности $U(0,r_0)$ лежит внутри замкнутого шара $\overline{B(0,\varepsilon_0)}$, что противоречит определению r_0. Противоречие, полученное выше, означает, что $L^*\to 1$ при $r\to r_0$, что и требовалось установить.

3 шаг. Выберем x и $y\in\partial U$ такими, что $|x|=L^*$ и $|y|=l^*$. По определению множества U имеем: $f(x)$, $f(y)\in S(0,r)$. По предложению 3.15.2 найдется точка $p\in B(0,r)$ такая, что для каждого $t\in\left(\dfrac{r}{2},\dfrac{\sqrt{3}r}{2}\right)$, элемент $f(x)\in B(p,t)$ и либо $0\in B(p,t)$ и $f(y)\notin B(p,t)$, либо $0\notin$ $\notin B(p,t)$ и $f(y)\in B(p,t)$. Зафиксируем какое-либо такое t. Отметим, что 0 и $f(y) \in \overline{f(B(0,l^*))}$ и, следовательно, $f(B(0,l^*)) \cap B(p,t) \neq \varnothing \neq$ $\neq f(B(0,l^*)) \setminus B(p,t)$. Поскольку множество $f(B(0,l^*))$ связно, найдется точка $z_t \in S(p,t) \cap f(B(0,l^*))$ [104, часть I, гл. 5, § 46, теорема 1].

Пусть z_t^* — единственная точка множества $f^{-1}(z_t) \cap B(0,l^*)$, $C_t(\varphi) \subset$ $\subset S(p,t)$ — сферическая шапочка с центром в точке z_t и раствором угла φ, определенная равенством

$$C_t(\varphi) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-p| = t, (z_t - p, y - p) > t^2 \cos\varphi\}\,.$$

Обозначим символом φ_t точную верхнюю грань тех углов φ, для которых компонента связности множества $f^{-1}(C_t(\varphi))$, содержащая точку z_t^*, отображается гомеоморфно на множество $C_t(\varphi)$. Обозначим $C_t =$ $= C_t(\varphi_t)$ и через C_t^* — компоненту связности множества $f^{-1}(C_t)$, содержащую точку z_t^*.

4 шаг. Покажем, что множества C_t^* и $S(0,L^*)$ имеют общую точку. Предположим противное:

1) поскольку множество C_t^* связно и $C_t^* \cap B(0,L^*) \neq \varnothing$, отсюда вытекает, что $C_t^* \subset B(0,L^*)$ [104, часть I, гл. 5, §46, теорема 1]). В таком случае, множество C_t^* является компактным подмножеством U. По предложению 2.13.4 отображение f переводит $\overline{C_t^*}$ на $\overline{C_t}$ гомеоморфно (что не является верным при $n = 2$, поскольку множество $C_t(\pi)$ не является относительно локально связным в этом случае). По предложению 2.13.5 f инъективно в некоторой окрестности множества $\overline{C_t^*}$. Следовательно, $\varphi_t = \pi$, $\overline{C_t} = S(p,t)$ и $\overline{C_t^*}$ топологически эквивалентно $(n-1)$-мерной сфере в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что ограниченная компонента связности D множества $\mathbb{R}^n \setminus \overline{C_t^*}$ содержится в $B(0,L^*)$. Тогда $\overline{f(D)}$ — компактное подмножество $f(\mathbb{B}^n)$ и, поскольку f — открытое отображение, $\partial f(D) \subset f(\partial D)$;

2) покажем, что $f(D) \subset B(p,t)$. Предположим противное, тогда найдется $y \in f(D) \setminus \overline{B(p,t)}$. В таком случае $\Big(f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p,t)}\Big) \cap f(D) \neq \varnothing$. Поскольку $f(D)$ — компактная подобласть $f(\mathbb{B}^n)$, имеем $\Big(f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p,t)}\Big) \setminus$ $f(D) \neq \varnothing$. Так как $f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p,t)}$ связно, отсюда вытекает, что найдется $z \in \partial f(D) \cap \Big(f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p,t)}\Big)$ [104, часть I, гл. 5, § 46, теорема 1], что противоречит включению $\partial f(D) \subset S(p,t)$. Таким образом, включение $f(D) \subset B(p,t)$ установлено;

3) отметим, что $B(p,t) \subset f(D)$. Действительно, пусть найдется $a \in$ $\in B(p,t) \setminus f(D)$. Поскольку множество $B(p,t)$ связно и $B(p,t) \cap f(D) \neq$

$\neq \varnothing$, отсюда следует, что $\partial f(D) \cap B(p,t) \neq \varnothing$ [104, часть I, гл. 5, § 46, теорема 1]. Последнее противоречит включению $\partial f(D) \subset S(p,t)$;

4) таким образом, из включений $f(D) \subset B(p,t)$ и $B(p,t) \subset f(D)$, установленных выше в п. 2) и 3), вытекает, что $f(D) = B(p,t)$. По определению область D является компонентой связности множества $f^{-1}(B(p,t))$. В силу предложения 2.13.4 отображение f переводит $\overline{D}$ на $\overline{B(p,t)}$ гомеоморфно;

5) поскольку $z_t^* \in \overline{C_t^*} \cap U$, имеем $\overline{D} \cap \overline{U} \neq \varnothing$. Так как f гомеоморфно отображает $\overline{U}$ на $\overline{B(0,r)}$, то отображение f инъективно в $\overline{U} \cup \overline{D}$ по предложению 3.15.1. Последнее невозможно, поскольку из равенства $f(D) = B(p,t)$ и того, что $f(x) \in B(p,t)$, вытекает существование точки $x_1 \neq x$, $x_1 \in D$, такой, что $f(x_1) = f(x)$. Следовательно, множества C_t^* и $S(0,L^*)$ имеют непустое пересечение, что и требовалось установить.

5 шаг. Пусть $k_t^* \in C_t^* \cap S(0,L^*)$ и $k_t = f(k_t^*)$. Обозначим через Γ_t' семейство всех кривых, соединяющих точки k_t и z_t в C_t. Пусть Γ' — объединение семейств кривых Γ_t', $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$. Обозначим через f_t сужение отображения f на множество C_t^*. Тогда f_t гомеоморфно отображает C_t^* на C_t. Обозначим

$$\Gamma = \bigcup_{t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)} \left\{ f_t^{-1} \circ \gamma : \gamma \in \Gamma_t' \right\}.$$

Отметим, что при каждом $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$ выполнено: $z_t^* \in B(0,l^*)$ и $k_t \in S(0,L^*)$. Тогда по определению кольцевого Q-отображения в точке 0 для каждой измеримой по Лебегу функции $\eta : (l^*, L^*) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{l^*}^{L^*} \eta(r)dr \geq 1\,, \tag{3.15.4}$$

выполнено неравенство

$$M(f(\Gamma(S(0,l^*), S(0,L^*), A(0,l^*,L^*)))) \leq$$

$$\leq \int\limits_{A(0,l^*,L^*)} Q(x) \cdot \eta^n(|x|)dm(x)\,. \tag{3.15.5}$$

Полагаем $\eta(t) = \psi(t)/I(l^*, L^*)$, где ψ — функция из условия леммы. Отметим, что выбранная таким образом функция η удовлетворяет соотношению (3.15.4). Тогда из условий (3.15.2) и (3.15.5) вытекает

$$M(\Gamma') = M(f(\Gamma(S(0,l^*), S(0,L^*), A(0,l^*,L^*)))) \leq$$

$$\leq \int\limits_{A(0,l^*,L^*)} Q(x) \cdot \eta^n(|x|)dm(x) \leq C/I^{\alpha}(l^*, L^*)\,. \qquad (3.15.6)$$

По предложению 3.15.3

$$\int\limits_{S(p,t)} \rho^n(x) d\mathcal{A} \geq \frac{C_n'}{t} \qquad (3.15.7)$$

для каждой функции $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma_t'$ и некоторой положительной постоянной C_n'. Интегрирование неравенства (3.15.7) по всем указанным выше значениям t и применение теоремы Фубини [203, гл. III, теорема 8.1] приводит к неравенству

$$M(\Gamma') \geq C_n\,, \qquad (3.15.8)$$

где постоянная C_n зависит только от n. Из (3.15.6) и (3.15.8) вытекает

$$C_n \leq C/I^{\alpha}(l^*, L^*) \leq C/I^{\alpha}(l^*(0,f,r_0), L^*(0,f,r)), \qquad (3.15.9)$$

поскольку $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > I(\varepsilon_3, \varepsilon_2)$ при $\varepsilon_3 > \varepsilon_1$. Переходя к пределу в (3.15.9) при $r \to r_0$, получаем

$$C_n \leq C/I^{\alpha}(l^*(0,f,r_0), 1)\,. \qquad (3.15.10)$$

Отметим, что из (3.15.10) вытекает неравенство $I(\varepsilon, 1) < \infty$ при каждом $\varepsilon \in (0,1)$. Пусть $l^*(0, f_k, r_0) \to 0$ для некоторой последовательности локальных кольцевых Q-гомеоморфизмов, удовлетворяющих условию леммы. Тогда из (3.15.3) следует, что правая часть соотношения (3.15.10) стремится к нулю, что противоречит (3.15.10). Следовательно, $l^*(0, f, r_0) \geq \delta$ для всех рассматриваемых f. Доказательство завершено. $\square$

3.15.5. Перейдем к основным результатам, касающихся поиска радиуса инъективности локальных кольцевых Q-гомеоморфизмов. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.15.1. *Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$, — локальный кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0=0$ такой, что $Q\in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$ и*

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}=\infty\,. \qquad (3.15.11)$$

Тогда отображение f инъективно в некотором шаре $B\left(0,\delta(n,Q)\right)$, где δ — положительное число, зависящее только от n и функции Q.

Кроме того, условие (3.15.11) является точным в следующем смысле: для каждого $\delta>0$ и функции $Q\in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$ такой, что $Q(x)\geq 1$ п.в. и

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}<\infty, \qquad (3.15.12)$$

найдется локальный кольцевой Q-гомеоморфизм $f=f_Q:\mathbb{B}^n\to\mathbb{R}^n$ в точке $x_0=0$, не являющийся инъективным в шаре $B(0,\delta)$.

Доказательство. Как обычно, придерживаемся соотношений: $a/\infty=0$ при $a\neq\infty$, $a/0=\infty$ при $a>0$ и $0\cdot\infty=0$ [203, гл. I, § 3, с. 18]. Для произвольных $0<r_1<r_2<r_0=1$ рассмотрим функцию

$$\psi(t)\quad=\quad\left\{\begin{array}{rr} 1/[tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)]\,, & t\in(r_1,r_2)\,,\\ 0\,, & t\notin(r_1,r_2)\,.\end{array}\right.$$

Отметим, что функция ψ удовлетворяет всем условиям леммы 3.15.1, в частности, ввиду замечания 2.7.1 имеем неравенство: $\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}<$ $<\infty$. Согласно теореме Фубини [203, гл. III, теорема 8.1] имеем $\int\limits_{r_1<|x|<r_2} Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x)=\omega_{n-1}\cdot I(r_1,r_2)$. Таким образом, первая часть заключения теоремы 3.15.1 следует из леммы 3.15.1.

Для доказательства второй части теоремы выберем $\delta>0$ и произвольную функцию $Q\in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$, $Q\geq 1$ п.в., для которой выполнено соотношение (3.15.12). Полагаем

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\rho(|x|)\,.$$

Здесь

$$\rho(r)=\exp\left\{-\int\limits_{r}^{1}\frac{dt}{t\widetilde{q}_0^{\,1/(n-1)}(t)}\right\}, \qquad \widetilde{q}_0(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x|=r}\widetilde{Q}(x)\,d\mathcal{A}\,,$$

$$\widetilde{Q}(x) \quad = \quad \begin{cases} Q(x), & |x|>\delta\,,\\ 1/K\,, & |x|\le\delta\,,\end{cases}$$

где постоянная величина $K\ge 1$ будет выбрана ниже. Отметим, что отображение f является кольцевым $\widetilde{Q}$-гомеоморфизмом в точке $x_0 = = 0$. Действительно, непосредственные вычисления приводят к равенству $f(S(0,r))=S(0,R)$, где $R:=\exp\left\{-\int\limits_{r}^{1}\frac{dt}{t\widetilde{q}_0^{\,1/(n-1)}(t)}\right\}$. В таком случае

$$f(\Gamma(S(0,r_1),S(0,r_2),A(r_1,r_2,0)))=\Gamma(S(0,R_1),S(0,R_2),A(R_1,R_2,0))\,,$$

где $R_i:=\exp\left\{-\int\limits_{r_i}^{1}\frac{dt}{t\widetilde{q}_0^{\,1/(n-1)}(t)}\right\}$, $i=1,2$, а $A(r_1,r_2,0)$ обозначает сферическое кольцо с центром в нуле и радиусами $0<r_1<r_2<1$ (см. (4.4.10)). Ввиду [281, § 7.5]

$$M(f(\Gamma(S(0,r_1),S(0,r_2),A(r_1,r_2,0))))=\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t\widetilde{q}_0^{\,1/(n-1)}(t)}\right)^{n-1}}\,.$$

В таком случае f — кольцевой $\widetilde{Q}$-гомеоморфизм в точке $x_0=0$ ввиду предложения 1.3.1 и, значит, кольцевой Q-гомеоморфизм в нуле, поскольку $\widetilde{Q}(x)\le Q(x)$ почти всюду. Отметим, что при $\delta\to 0$ образ $f(B(0,\delta))$ шара $B(0,\delta)$ при отображении f содержит шар $B(0,\sigma)$, где σ может быть выбрано не зависящим от δ. Отобразим теперь шар $B(0,\sigma)$ при помощи некоторого отображения g, которое преднамеренно выберем отображением с ограниченным искажением с постоянной квазиконформности $K\ge 1$, являющимся локальным гомеоморфизмом и не являющимся инъективным в шаре $B(0,\sigma)$. Например, в качестве g можно выбрать так называемое закручивание вокруг оси, ось вращения которого не содержится в шаре $\mathbb{B}^n=f(B(0,1))$ [168, гл. I, § 5.2]. При этом постоянная квазиконформности K не зависит от δ. Таким образом, построен локальный кольцевой $K\cdot Q(x)$-гомеоморфизм f_2 в нуле,

$f_2 = g \circ f$, не являющийся инъективным в шаре $B(0, \delta)$. Поскольку Q — произвольная локально интегрируемая функция, удовлетворяющая условиям $Q \geq 1$ и (3.15.12), то можно заменить Q на Q/K в первой части доказательства. Таким образом, мы получили локальный кольцевой $Q(x)$-гомеоморфизм в нуле с требуемыми свойствами. $\Box$

Простым следствием из первой части теоремы 3.15.1 является следующее утверждение.

Следствие 3.15.1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — локальный кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0 = 0$ такой, что при некоторой постоянной $C > 0$ и $r \to 0$*

$$q_0(r) \leq C \cdot \log^{n-1} \frac{1}{r} \, . \tag{3.15.13}$$

Тогда отображение f инъективно в некотором шаре $B\left(0, \delta(n, Q)\right)$, где δ — положительное число, зависящее только от n и функции Q.

Доказательство. Необходимое заключение следует из теоремы 3.15.1, поскольку из условия (3.15.13) в силу теоремы Фубини [203, гл. III, теорема 8.1] вытекает, что $Q \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$, кроме того, из (3.15.13) вытекает также справедливость соотношения (3.15.11). $\Box$

Ниже изложен важный частный случай, когда локальный гомеоморфизм f имеет окрестность, зависящую только от размерности пространства n и мажоранты Q, в которой отображение f гомеоморфно.

Теорема 3.15.2. *Пусть $g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — локальный кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0 = 0$ такой, что $Q \in FMO(0)$. Тогда отображение g инъективно в некотором шаре $B\left(0, \delta(n, Q)\right)$, где δ — некоторое положительное число, зависящее только от n и функции Q.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — число из формулировки предложения 2.3.1. Рассмотрим отображение $f := g(x\varepsilon_0)$, $x \in \mathbb{B}^n$. Отметим, что g является локальным кольцевым $Q(\varepsilon_0 x)$-гомеоморфизмом в нуле. Применим лемму 3.15.1 для отображения g и функции $\psi = \dfrac{1}{\varepsilon_0 t \log \frac{1}{\varepsilon_0 t}}$. Согласно предложению 2.3.1 для указанной выше функции выполнено соотношение (3.15.2) при $\alpha = n$, кроме того, выполнены также соотношения (3.15.1) и (3.15.3). Необходимое заключение вытекает из леммы 3.15.1. $\Box$

3.15.6. Результаты настоящего пункта представляют собой комбинацию полученных выше результатов с результатами §3.3.

Обозначим символом $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}(x_0)$ семейство всех локальных кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке x_0 таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta >$ > 0. Далее $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}(D)$ обозначает семейство всех локальных гомеоморфизмов $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в области D таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)) \geq \Delta > 0$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.15.3. Семейство отображений $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}(x_0)$ является равностепенно непрерывным в точке $x_0 \in D$, как только выполнено хотя бы одно из следующих условий: 1) при некотором $\varepsilon(x_0) > 0$, $\varepsilon(x_0) < < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty$; 2) $q_{x_0}(r) \leq C \cdot \log^{n-1}\frac{1}{r}$ при $r \to 0$ и некоторой постоянной $C > 0$; 3) $Q \in FMO(x_0)$. Кроме того, если хотя бы одно из условий 1)—3) выполнено в каждой точке $x_0 \in D$, то семейство отображений $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}(D)$ является равностепенно непрерывным (нормальным) в области D.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что каждое отображение $f \in \mathfrak{F}_{Q,\Delta}(x_0)$ не принимает, по крайней мере, два значения a_f и b_f в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Пусть T_f — мебиусово преобразование, переводящее точку b_f в ∞. Поскольку, как известно, мебиусовы преобразования сохраняют модуль семейства кривых [281, теорема 8.1], то семейство отображений $\widetilde{\mathfrak{F}}_{Q,\Delta}(x_0) = \{\widetilde{f} = T_f \circ f : f \in \mathfrak{F}_{Q,\Delta}(x_0)\}$ состоит из локальных кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : D \to \mathbb{R}^n$ в точке x_0, не принимающих два значения: $\widetilde{a_f} \in \mathbb{R}^n$ и ∞. В каждом из случаев: 1)—3) найдется окрестность точки x_0, радиус которой зависит только от n и Q, в которой каждое из отображений $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{Q,\Delta}(x_0)$ инъективно (см. теоремы 3.15.1, 3.15.2 и следствие 3.15.1, соответственно). Тогда семейство $\widetilde{\mathfrak{F}}_{Q,\Delta}(x_0)$, а следовательно, и семейство $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}(x_0)$, равностепенно непрерывно в точке x_0 ввиду теоремы 3.3.2. Аналогичные заключения относительно семейства $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}(D)$ вытекают из доказанного выше, а также из приведенного критерия нормальности Арцела—Асколи (см. предложение 3.1.1). $\Box$

Замечание 3.15.1. Результаты, изложенные выше, не являются верными при $n = 2$, как показывает пример последовательности 1-отображений $f_m(z) = e^{mz}$, $m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{B}^2$, каждое из которых является локальным гомеоморфизмом в $\mathbb{B}^2$, при этом радиус r шара $B(0, r)$, в котором инъективно каждое из отображений, зависит от m. Кроме того, данное семейство отображений не является нормальным в $\mathbb{B}^n$.

4. Приложения теорий Q-отображений и кольцевых Q-отображений

В данной главе[1] приведены результаты, касающиеся так называемых *отображений с конечным искажением длины*, введенных в рассмотрение О. Мартио, В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым в 2002 г. [123, 125] и являющихся важным частным случаем Q-отображений. В этих работах показано, что отображения с конечным искажением длины удовлетворяют соотношению (1.3.1) при $Q = K_I(x, f)$ [123, теоремы 4.6 и 6.10], [125, теоремы 8.1 и 8.6]. Таким образом, техника, касающаяся кольцевых Q-отображений и Q-отображений, а также приведенные для них в главах 1—3 результаты, автоматически переносятся на указанный класс. Тем самым теории кольцевых Q-отображений и Q-отображений доказывают свое право на существование.

В § 4.1 изложена минимально необходимая информация об отображениях с конечным искажением длины, а также исторические сведения, касающиеся рассматриваемых ниже проблем. В частности, упомянуто о важном неравенстве, доказанном Ю. Вяйсяля для отображений с ограниченным искажением [282]. В § 4.2 приведено доказательство аналогичного неравенства типа Вяйсяля для отображений с конечным искажением длины. Полезные следствия из этого неравенства изложены в § 4.3, в частности, доказаны оценки емкостей конденсаторов при указанных отображениях. Параграф 4.4 посвящен вопросу об устранении изолированной особенности отображений с конечным искажением длины в случае, когда это отображение в окрестности точки не слишком сильно возрастает; при этом никаких условий типа выпускания множества положительной емкости не требуется. В § 4.5 приведено доказательство аналога леммы Е.А. Полецкого, на основе чего к широким классам отображений на плоскости и в пространстве может быть применена модульная техника. В § 4.6 получена теорема существования для вырожденного квазилинейного уравнения Бельтрами.

4.1. Вспомогательные сведения и исторические комментарии

4.1.1. Приведем определение и примеры отображений с конечным искажением длины [123, 125]. Отображения с конечным искажением длины — это дифференцируемые почти всюду отображения, обладающие

[1] Результаты, изложенные в главе, получены автором и опубликованы в работах [232–234, 238, 247, 250–252, 256, 259].

N-свойством в прямую и обратную сторону относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^n$, а также линейной меры на кривых. Указанный класс отображений, по-видимому, является "минимальным" классом, в котором выполнены какие-либо модульные неравенства. Отображения с конечным искажением длины включают класс отображений с ограниченным искажением (в частности, сюда входят все квазиконформные отображения), а также гомеоморфизмы класса $W_{loc}^{1,n}$, обратные к которым также класса $W_{loc}^{1,n}$.

4.1.2. Прежде всего приведем необходимые вспомогательные сведения.

Пусть $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ — некоторое отображение. Полагаем

$$L(x, \varphi) = \limsup_{y \to x, y \in E} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|y - x|}, \quad l(x, \varphi) = \liminf_{y \to x, y \in E} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|y - x|}.$$

Определение 4.1.1. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется отображением с *конечным метрическим искажением,* $f \in FMD$, если f обладает N-свойством Лузина и для п.в. $x \in D$

$$0 < l(x, f) \leq L(x, f) < \infty .$$

Иными словами, f — отображение с конечным метрическим искажением, если его минимальное отклонение l и максимальное отклонение L отделены как от нуля, так и от бесконечности в почти всех точках области D.

Пусть $\triangle \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал числовой прямой, $\gamma : \triangle \to \mathbb{R}^n$ — локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma : \triangle \to \triangle_\gamma \subseteq \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \triangle$, такая, что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma|_{[t_0, t]}$ кривой γ, если $t > t_0$, и длине подкривой $\gamma|_{[t_0, t]}$ со знаком "-", если $t < t_0$, $t \in \triangle$. Пусть $g : |\gamma| \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\triangle) \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma, g} : \triangle_\gamma \to \triangle_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что

$$L_{\gamma, g} (l_\gamma(t)) = l_{\widetilde{\gamma}}(t) \qquad \forall\ t \in \triangle\ .$$

Определение 4.1.2. Кривая $\gamma \in D$ называется *поднятием кривой* $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ *при отображении* $f : D \to \mathbb{R}^n$, если $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

Определение 4.1.3. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает (L)-*свойством*, если выполнены следующие условия:

(L_1) для п.в. кривых $\gamma \in D$ кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция $L_{\gamma, f}$ обладает N-свойством;

(L_2) для п.в. кривых $\widetilde{\gamma} \in f(D)$ каждое поднятие γ кривой $\widetilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma, f}$ обладает N^{-1}-свойством.

Определение 4.1.4. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ является *отображением с конечным искажением длины*, $f \in FLD$, если $f \in FMD$ и обладает (L)-свойством.

Перечислим некоторые известные свойства отображений с конечным искажением длины.

Предложение 4.1.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса FMD. Тогда:*
(i) f дифференцируемо почти всюду и

$$J(x, f) \neq 0 \quad \textit{п.в.};$$

(ii) f обладает N^{-1}-свойством;
(iii) для каждой измеримой функции $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ и для каждого измеримого множества $E \subset D$ имеет место формула замены переменных:

$$\int\limits_E g(f(x))|J(x, f)|\, dm(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) N(y, f, E)\, dm(y)\,.$$

В частности, если f — отображение с конечным искажением длины, то имеет место каждое из заключений (i)—(iii).

4.1.3. Принадлежность отображения классу отображений с конечным искажением длины может оказаться сложной для проверки. В связи с этим приведем дополнительные сведения, позволяющие установить указанную принадлежность сравнительно нетрудными способами.

Следующее утверждение представляет собой критерий принадлежности отображения классу отображений с конечным метрическим искажением.

Предложение 4.1.2. *Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу отображений с конечным метрическим искажением, $f \in FMD$, тогда и только тогда, когда f дифференцируемо почти всюду и обладает N и N^{-1}-свойствами [123, следствие 3.14], [125, следствие 8.1].*

Здесь и далее свойства N либо N^{-1} понимаются относительно меры m Лебега $\mathbb{R}^n$ (если не оговорено противное).

Приведем теперь некоторые сведения, касающиеся выполнения (L)-свойства отображений. Рассмотрим следующие определения.

Определение 4.1.5. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *слабо нульмерным*, если множество $f^{-1}(y)$ не содержит невырожденную кривую ни для какого $y \in \mathbb{R}^n$.

Определение 4.1.6. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу ACP (*абсолютно непрерывно на путях*) в области D $f \in ACP$, если для почти всех кривых γ в области D кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция длины $L_{\gamma, f}$, введенная выше, абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в Δ_γ, для почти всех кривых γ в D.

Определение 4.1.7. Предположим, что $f : D \to \mathbb{R}^n$ — слабо нульмерное отображение, тогда может быть определена функция $L^{-1}_{\gamma, f}$. В таком случае f обладает *свойством* ACP^{-1} в области D, пишем $f \in ACP^{-1}$, если для почти всех кривых $\widetilde{\gamma} \in f(D)$ каждое поднятие γ при отображении f, $f \circ \gamma = \widetilde{\gamma}$, является локально спрямляемой кривой и, кроме того, обратная функция $L^{-1}_{\gamma, f}$ абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в $\Delta_{\widetilde{\gamma}}$, для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ в $f(D)$ и каждого поднятия γ кривой $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

Отметим, что проверка свойств ACP и ACP^{-1} во многих случаях не представляет затруднений, так как согласно лемме Фугледе $W^{1,n}_{loc} \subset$ $\subset ACP$ [281, теорема 28.2]. В частности, $C^1 \subset ACP$.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.1.3. *Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает (L)-свойством тогда и только тогда, когда f — слабо нульмерно и, кроме того, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$ [123, предложение 4.3], [125, предложение 8.5].*

Из предложений 4.1.2 и 4.1.3 получаем следующее

Предложение 4.1.4. *Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ является отображением с конечным искажением длины, $f \in FLD$, тогда и только тогда, когда f дифференцируемо почти всюду, обладает N и N^{-1}-свойствами, слабо нульмерно и $f \in ACP \cap ACP^{-1}$.*

4.1.4. П Р И М Е Р Ы отображений с конечным искажением длины.

1. Произвольное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ с ограниченным искажением является отображением с конечным искажением длины. (В частности, любое конформное либо квазиконформное отображение есть отображение с конечным искажением длины).

Действительно, поскольку f — отображение с ограниченным искажением, то f открыто и, кроме того, $f \in W^{1,n}_{loc}$; следовательно, f обладает N-свойством ввиду результата Малого и Мартио [112, следствие B]. Далее, f дифференцируемо почти всюду ввиду леммы Вяйсяля о дифференцируемости [279, лемма 3], и f обладает N^{-1}-свойством по теореме Боярского—Иванца [15, теорема 8.1]. Отметим, что ввиду леммы Фугледе $W_{loc}^{1,n} \subset ACP$ [281, теорема 28.2], так что $f \in ACP$. Ввиду результата Решетняка f — дискретно и, значит, слабо нульмерно. Наконец, $f \in ACP^{-1}$ ввиду леммы Полецкого [149, лемма 6].

Таким образом, принадлежность отображения f классу отображений с конечным искажением длины вытекает на основании предложения 4.1.4.

2. Каждый гомеоморфизм $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$ такой, что $f^{-1} \in W_{loc}^{1,n}(D)$, является отображением с конечным искажением длины.

Действительно, поскольку $f \in W_{loc}^{1,n}$, то отображение f обладает N-свойством ввиду теоремы Решетняка [161, § 4, теорема 3]. Аналогично, f обладает N^{-1}-свойством ввиду той же теоремы. Кроме того, f дифференцируемо почти всюду [279, лемма 3]. Наконец, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$ ввиду леммы Фугледе [281, теорема 28.2]. Принадлежность отображения f классу отображений с конечным искажением длины снова вытекает на основании предложения 4.1.4.

3. Произвольное открытое дискретное отображение $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$ такое, что мера множества точек ветвления B_f отображения f равна нулю и $K_O(x,f)^{n-1} \in L_{loc}^{n-1}(D)$ ($K_O(x,f)$ — внешняя дилатация отображения f в точке x, является отображением с конечным искажением длины. Это утверждение было вначале сформулировано в виде гипотезы в [125, замечание 8.5], а позднее доказано в [233, теорема 1 и следствие 3]. Доказательство этого утверждения приведено в §4.5 настоящей главы.

4.1.5. Отметим, что одним из важнейших свойств отображений с конечным искажением длины является выполнение модульного неравенства вида (1.3.1). Справедливо следующее заключение [123, теорема 6.10], [125, теорема 8.6].

Предложение 4.1.5. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — отображение с конечным искажением длины, тогда*

$$M(f(\Gamma)) \leq \int\limits_D K_I(x,f) \cdot \rho^n(x) dm(x) \tag{4.1.1}$$

для произвольного семейства кривых Γ *и* $\forall\ \rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Однако, как показано далее в настоящей главе, для отображений с конечным искажением длины имеет место даже более сильное неравенство, нежели (4.1.1). Одним из важнейших вопросов, рассмотренным в данной главе, является доказательство так называемого неравенства типа Вяйсяля для отображений указанного класса. Неравенство типа Вяйсяля впервые было установлено в 1972 г. в работе [282, теорема 3.1] для отображений с ограниченным искажением, см. также [175, гл. II, теорема 9.1]. Суть этого неравенства заключается в том, что вместо соотношения (4.1.1), выполненного для произвольного семейства Γ кривых γ и $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, выполняется условие

$$M(f(\Gamma)) \leq \frac{1}{m} \int\limits_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x)\, dm(x)\,, \qquad (4.1.2)$$

где m — некоторая постоянная, зависящая от кратности отображения $i(x, f)$. Показатель $\dfrac{1}{m}$ в правой части (4.1.2), в частности, позволяет более точно оценить емкость конденсатора благодаря связи между модулем и емкостью, см. предложение 1.4.1. В связи с упоминанием неравенства типа Вяйсяля отметим также работы [69, теорема 7], [89, теорема 4.1].

4.1.6. Одним из применений неравенства типа Вяйсяля является решение проблемы об устранении особенностей для различных классов отображений. Как отмечено в главе 2. (см., например, §2.2, 2.3), для положительного решения вопроса об устранении изолированных особенностей открытых дискретных кольцевых Q-отображений необходимо требовать дополнительные условия вида

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)\right) > 0\,.$$

Пример отображения $f(z) = e^{1/z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, показывает, что даже при $Q \equiv 1$ такие требования необходимы (содержательны).

Однако, как оказалось, альтернативным требованием может выступать условие слабого роста отображений в окрестности точки, т.е. когда отображение f удовлетворяет оценке вида $|f(x)| \leq \varphi(x)$, где φ возрастает “настолько слабо, насколько нужно”. По этому поводу Ю. Вяйсяля установил следующий результат [282, теорема 4.2].

Предложение 4.1.6. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{0\}$ имеет место неравенство*

$$|f(x)| \leq C|x - b|^{-p}\,,$$

где $p > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

В этой книге мы установим аналог предложения 4.1.6 для более общих классов.

4.1.7. Следующим важным моментом, который мы рассматриваем, является доказательство аналога одной леммы Е.А. Полецкого [149, лемма 6]. В указанной лемме установлено ACP^{-1}-свойство отображений с ограниченным искажением, на чем основано дальнейшее доказательство для них модульного неравенства вида (1.3.1) (см. замечание 1.2.3). Аналогичный результат доказан нами для более широкого класса открытых дискретных отображений $f \in W^{1,n}_{loc}(D)$, мера множества точек ветвления B_f которых равна нулю и $K_O(x,f)^{n-1} \in L^{n-1}_{loc}(D)$.

4.1.8. Этот пункт посвящен доказательству существования гомеоморфного ACL-решения квазилинейного уравнения Бельтрами, имеющего вид

$$f_{\overline{z}} = \nu\,(z, f(z))\, f_z\,, \tag{4.1.3}$$

где производные $f_{\overline{z}}$ и f_z определены в п. 1.9.4, а заданная функция $\nu = \nu\,(z,w) : D \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ удовлетворяет *условиям Каратеодори* (т.е. ν измерима по $z \in D$ при каждом фиксированном $w \in \mathbb{C}$ и непрерывна по $w \in \mathbb{C}$ при п.в. $z \in D$). Покажем, что уравнение (4.1.3) имеет гомеоморфное решение класса ACL, как только функция $K_\mu(z)$, определенная соотношением (1.9.7), удовлетворяет соотношению $K_\mu(z) \le Q(z)$, где $Q(z)$ удовлетворяет одному из условий (2.2.1), (2.2.2), $Q \in FMO$, (2.3.10) либо (2.3.5). Отметим, что классический результат по этому вопросу в случае, когда максимальная дилатация $K_\mu(z)$ ограничена, принадлежит Б. Боярскому [13, теорема 8.2]. Кроме того, в случае, когда функция ν зависит только от z, аналогичное утверждение доказано В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым [125, гл. 11], [187, гл. 4]. Отметим, наконец, что линейные уравнения Бельтрами с вырождением исследовали многие авторы [20, 54, 59, 75, 93, 107, 121, 136, 147, 277].

4.2. Неравенство типа Вяйсяля для отображений с конечным искажением длины

4.2.1. Хотя, в основном, результаты настоящего параграфа касаются отображений с конечным искажением длины, большая часть утверждений, сформулированных ниже, приводится и доказывается для более широкого класса. Далее рассмотрены дифференцируемые почти всюду отображения, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина.

4.2.2. Пусть E — множество в $\mathbb{R}^n$ и $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая. Обозначим

$$\gamma \cap E = \gamma\,(\Delta) \cap E\,.$$

Пусть кривая γ локально спрямляема и функция длины $l_\gamma(t)$ такова, как определено в предыдущем параграфе. Полагаем

$$l\,(\gamma \cap E) := m_1\,(E_\gamma), \quad E_\gamma = l_\gamma\left(\gamma^{-1}\,(E)\right)\,.$$

Здесь, как обычно, $m_1\,(A)$ обозначает длину (линейную меру Лебега) множества $A \subset \mathbb{R}$. Отметим, что

$$E_\gamma = \gamma_0^{-1}(E)\,,$$

где $\gamma_0 : \Delta_\gamma \to \mathbb{R}^n$ — натуральная параметризация кривой γ, и

$$l\,(\gamma \cap E) = \int\limits_\gamma \chi_E(x)\,|dx| = \int\limits_{\Delta_\gamma} \chi_{E_\gamma}(s)\,dm_1(s)\,,$$

[281, гл. 4, с. 8]. Следующее утверждение связывает свойства функции длины локально спрямляемой кривой со свойствами произвольного измеримого множества в $\mathbb{R}^n$ [125, теорема 9.1].

Предложение 4.2.1. *Пусть E — множество в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Тогда множество E измеримо тогда и только тогда, когда множество $\gamma \cap E$ измеримо для почти всех кривых γ в D. Более того, $m(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $l(\gamma \cap E) = 0$ для почти всех кривых γ в D.*

4.2.3. Весьма полезным для дальнейшего исследования является следующее замечание.

Замечание 4.2.1. Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — спрямляемая кривая и $S(\gamma, [a, t])$ обозначает длину кривой $\gamma|_{[a,t]}$. Отметим, что свойства функции $L_{\gamma,f}$ между натуральными параметрами $l_\gamma(t)$ и $l_{\widetilde{\gamma}}(t)$ (локально спрямляемых) кривых γ и $\widetilde{\gamma}$ таких, что $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, не зависят от выбора $t_0 \in (a, b)$. В случае замкнутой кривой γ считаем, что $t_0 = a$, поскольку при заданном $t_0 \in (a, b)$ выполнено равенство $S(\gamma, [a, t]) = S(\gamma, [a, t_0]) + l_\gamma(t)$. Пусть $I = [a, b]$. Для спрямляемой кривой $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ определяем функцию длины $l_\gamma(t)$ по следующему правилу: $l_\gamma(t) = S\,(\gamma, [a, t])$. В дальнейшем для замкнутых кривых мы отождествляем функции $l_\gamma(t)$ и $S\,(\gamma, [a, t])$, если не оговорено противное.

Определение 4.2.1. Пусть $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — спрямляемая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $l(\alpha)$ — ее длина. *Нормальным представлением кривой α* называется кривая $\alpha^0 : [0, l(\alpha)] \to \mathbb{R}^n$ такая, что

$\alpha(t) = \alpha^0 \left(S\left(\alpha, [a,t]\right)\right) = \alpha^0 \circ l_\alpha(t)$. Отметим, что такая кривая α^0 существует и единственна, при этом $S\left(\alpha^0, [0,t]\right) = t$ при $t \in [0, l(\alpha)]$ [281, теорема 2.4].

4.2.4. Далее I означает открытый, замкнутый или полуоткрытый конечный интервал числовой оси. Следующее определение см. в [175, гл. II, п. 5].

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — дискретное отображение, $\beta : I_0 \to \mathbb{R}^n$ — замкнутая спрямляемая кривая и $\alpha : I \to D$ — кривая такая, что $f \circ \circ \alpha \subset \beta$. Если функция длины $l_\beta : I_0 \to [0, l(\beta)]$ постоянна на некотором интервале $J \subset I$, то β постоянна на J и в силу дискретности f кривая α также постоянна на J. Следовательно, существует единственная кривая $\alpha^* : l_\beta(I) \to D$ такая, что $\alpha = \alpha^* \circ (l_\beta|_I)$. Будем считать, что α^* является *f-представлением кривой α относительно β.*

4.2.5. Следующее утверждение содержит в себе критерий выполнения свойства ACP^{-1} относительно произвольного отображения f в терминах абсолютной непрерывности соответствующих кривых.

Лемма 4.2.1. *Слабо нульмерное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает ACP^{-1}-свойством тогда и только тогда, когда кривая γ^* является спрямляемой и абсолютно непрерывной для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.*

Здесь и далее γ^* означает f-представление кривой γ по отношению к $\widetilde{\gamma}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f обладает ACP_p^{-1}-свойством. Тогда, во-первых, $L_{\gamma,f}^{-1}$ определена корректно для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ таких, что $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Во-вторых, кривая γ^* является спрямляемой для p почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$, как только $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, поскольку $(\gamma^*)^0 = \gamma^0$ [281, теорема 2.6]. Кроме того, для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ и всех γ таких, что $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, мы получаем равенство

$$\gamma(t) = \gamma^* \circ l_{\widetilde{\gamma}}(t) = \gamma^0 \circ l_\gamma(t) = \gamma^0 \circ L_{\gamma,f}^{-1}\left(l_{\widetilde{\gamma}}(t)\right) .$$

Полагая $l_{\widetilde{\gamma}}(t) := s$, имеем

$$\gamma^*(s) = \gamma^0 \circ L_{\gamma,f}^{-1}(s) .$$

Таким образом, кривая γ^* абсолютно непрерывна, поскольку $L_{\gamma,f}^{-1}(s)$ абсолютно непрерывна и

$$|\gamma^0(t_1) - \gamma^0(t_2)| \le |t_1 - t_2|$$

для всех $t_1, t_2 \in [0, l(\gamma)]$).

Достаточность. Согласно предположению кривая γ^* спрямляема для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$; в частности, ${\gamma^*}^0 = \gamma^0$. Более того, для таких кривых $l_{\gamma^*}(s) = L^{-1}_{\gamma,f}(s)$ и функция $L^{-1}_{\gamma,f}$ определена корректно. Следовательно, для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ и всех γ таких, что $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, кривая γ спрямляема и функция $L^{-1}_{\gamma,f}(s)$ абсолютно неперервна [281, теорема 1.3]. Пусть Γ_1 — семейство всех замкнутых кривых $\widetilde{\alpha} = f \circ \alpha$ в области $f(D)$ таких, что кривая α^* либо не спрямляема, либо функция $L^{-1}_{\alpha,f}(s)$ не абсолютно непрерывна. Пусть Γ — семейство всех кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ в области $f(D)$ таких, что γ либо не локально спрямляема, либо функция $L^{-1}_{\gamma,f}(s)$ не локально абсолютно непрерывна. Тогда $\Gamma > \Gamma_1$ и, следовательно, ввиду свойства (1.1.7) $M(\Gamma) \leq M(\Gamma_1) = 0$, что и требовалось доказать. $\Box$

4.2.6. Следующий результат доказан в [125, гл. 8, леммы 8.2 и 8.3].

Предложение 4.2.2. *Пусть отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ почти всюду дифференцируемо и обладает N и N^{-1}-свойствами Лузина. Тогда найдется не более чем счетная последовательность компактных множеств $C_k^* \subset D$ такая, что $m(B) = 0$, где $B = D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k^*$ и $f|_{C_k^*}$ взаимно однозначно и билипшицево для каждого $k = 1, 2, \ldots$. Более того, f дифференцируемо при всех $x \in C_k^*$ и выполнено условие $J(x, f) \neq 0$.*

4.2.7. Всюду ниже в данном параграфе мы предполагаем, что отображение f сохраняет ориентацию. Здесь и далее $i(x, f)$ — локальный топологический индекс отображения f в точке x (см. п. 1.1.2). Имеет место следующий результат.

Теорема 4.2.1. *(Аналог неравенства типа Вяйсяля). Пусть I — открытый, полуоткрытый или замкнутый конечный интервал вещественной прямой, $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина, Γ — семейство кривых в D, Γ' — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$ и $\widetilde{m}$ — натуральное число такое, что выполнено следующее условие. Для каждой кривой $\beta \in \Gamma'$, $\beta : I \to \mathbb{R}^n$, найдутся кривые $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\widetilde{m}}$ семейства Γ такие, что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ для всех $j = 1, \ldots, \widetilde{m}$, и, кроме того, при каждом фиксированном $x \in D$ и каждом фиксированном $t \in I$ равенство вида $\alpha_j(t) = x$ возможно лишь не более, чем при $i(x, f)$ индексах j. Тогда*

$$M(\Gamma') \quad \leq \quad \frac{1}{\widetilde{m}} \quad \int\limits_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x) dm(x) \tag{4.2.1}$$

для каждой функции $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что $m(B_f) = 0$ [125, предложение 8.4]. Пусть множества B и C_k^* таковы, как указано в предложении 4.2.2. Полагаем $B_0 = B \cup B_f$, $B_1 = C_1^* \setminus B_f$, $B_2 = C_2^* \setminus B_1 \ldots$,

$$B_k \quad = \quad C_k^* \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{k-1} B_l \cup B_f \right) .$$

Таким образом, мы получим не более, чем счетное покрытие области D борелевскими множествами B_k, $k = 0, 1, \ldots$, причем $B_l \cap B_j = \varnothing$ при $l \neq j$ и $m(B_0) = 0$, где $B_0 = D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Поскольку отображение f обладает N-свойством, получаем $m(f(B_0)) = 0$. По предложению 4.2.1 $l\,(\overline{\gamma} \cap f(B_0)) = 0$ для п.в. кривых $\overline{\gamma}$ в области $f(D)$. Следовательно, $\widetilde{\gamma}^0(s) \notin f(B_0)$ для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ в области $f(D)$ и почти всех $s \in [0, l(\widetilde{\gamma})]$; здесь $\widetilde{\gamma}^0(s)$ обозначает нормальное представление кривой $\widetilde{\gamma}(s)$. Кроме того, согласно лемме 4.2.1 кривая γ^*, являющаяся f-представлением кривой γ, абсолютно непрерывна для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Здесь f-представление γ^* кривой γ корректно определено для почти всех кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, поскольку по предположению f — дискретное отображение.

Пусть теперь Γ_1 — семейство всех кривых γ_1 в $\mathbb{R}^n$, для которых существует спрямляемая замкнутая подкривая β_1, $\beta_1 = f \circ \alpha_1$ такая, что f-представление α_1^* кривой α_1 либо не является спрямляемой кривой, либо не является абсолютно непрерывной кривой. Обозначим через Γ_2 семейство всех замкнутых спрямляемых кривых β_2, $\beta_2 = f \circ \alpha_2$ таких, что f-представление α_2^* кривой α_2 либо не является спрямляемой кривой, либо не является абсолютно непрерывной кривой. Согласно доказанному выше $M(\Gamma_2) = 0$. С другой стороны, $\Gamma_1 > \Gamma_2$ и, следовательно, $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2) = 0$. Наконец, пусть Γ_3 — семейство всех локально спрямляемых кривых в $\mathbb{R}^n$, для которых найдется подкривая β_3, $\beta_3 = f \circ \alpha_3$ такая, что f-представление α_3^* кривой α_3 либо не является локально спрямляемой кривой, либо не является локально абсолютно непрерывной кривой. Тогда $\Gamma_3 > \Gamma_1$ и, следовательно, $M(\Gamma_3) \leq M(\Gamma_1) = 0$.

Пусть $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$. Полагаем

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \rho(x)/l\,(f'(x))\,, & x \in D \setminus B_0, \\ \qquad\qquad 0, & x \in B_0\,, \end{cases}$$

где, как обычно, $l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$. Рассмотрим следующую функцию:

$$\widetilde{\rho}(y) \quad = \quad \frac{1}{\widetilde{m}}\cdot\chi_{f(D\setminus B_0)}(y)\sup\limits_{C}\sum\limits_{x\,\in\,C}\rho^*(x)\,, \tag{4.2.2}$$

где C пробегает все подмножества $f^{-1}(y)$ в $D\setminus B_0$, количество элементов которых не больше $\widetilde{m}$. Отметим, что

$$\widetilde{\rho}(y) \quad = \quad \frac{1}{\widetilde{m}}\cdot\sup\sum\limits_{i=1}^{s}\rho_{k_i}(y)\,, \tag{4.2.3}$$

где sup в (4.2.3) берется по всем возможным наборам $\{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}\}$ таким, что $i\in\mathbb{N}$, $k_i\in\mathbb{N}$, $k_i\ne k_j$ при $i\ne j$, всех $s\le\widetilde{m}$ и

$$\rho_k(y) \;=\left\{\begin{array}{rl} \rho^*\left(f_k^{-1}(y)\right), & y\in f(B_k),\\ 0, & y\notin f(B_k)\,,\end{array}\right.$$

а каждое из отображений $f_k=f|_{B_k}$, $k=1,2,\ldots$, инъективно. Из (4.2.3) следует, что функция $\widetilde{\rho}(y)$ является борелевской, поскольку множества $f(B_k)$ — борелевские [28, п. 2.3.2]. Пусть β — произвольная кривая семейства Γ'. По условию найдутся кривые $\alpha_1,\ldots,\alpha_{\widetilde{m}}$ семейства Γ такие, что $f\circ\alpha_j\subset\beta$ для всех $j=1,2,\ldots,\widetilde{m}$, и при каждом фиксированном $x\in D$ и $t\in I$ равенство $\alpha_j(t)=x$ справедливо не более, чем при $i(x,f)$ индексах j.

Покажем, что функция $\widetilde{\rho}\in\ \operatorname{adm}\Gamma'\setminus\Gamma_0$, где $M(\Gamma_0)=0$. Без ограничения общности можно считать, что все кривые β семейства Γ' локально спрямляемы [281, гл. 6, с. 18]. Пусть β — замкнутая кривая и $\beta^0:[0,l(\beta)]\to\mathbb{R}^n$ — нормальное представление кривой β, $\beta(t)=\beta^0\circ l_\beta(t)$. Обозначим символами $\alpha_j^*(s):I_j\to D$ соответствующие f-представления кривых α_j относительно кривой β, т.е. $\alpha_j(t)=\alpha_j^*\circ l_\beta(t)$, $t\in I_j$, $f\circ\alpha_j^*\subset\beta^0$. Обозначим

$$h_j(s)=\rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right)\chi_{I_j}(s)\,,\quad s\in[0,l(\beta)]\,,\quad J_s:=\{j:s\in I_j\}\,.$$

Поскольку по предположению $\beta^0(s)\notin f(B_0)$ при почти всех $s\in[0,l(\beta)]$, то при этих же s точки $\alpha_j^*(s)\in f^{-1}(\beta^0(s))$, $j\in J_s$, являются различными ввиду условия теоремы, что равенство $\alpha_j(t)=x$ возможно не более, чем при $i(x,f)$ индексах j, а $i(x,f)=1$ на каждом B_k по построению.

Тогда по определению функции $\widetilde{\rho}$ в (4.2.2)при почти всех $s \in [0, l(\beta)]$

$$\widetilde{\rho}(\beta^0(s)) \geq \frac{1}{\widetilde{m}} \cdot \sum_{j=1}^{\widetilde{m}} h_j(s)\,. \tag{4.2.4}$$

Из соотношения (4.2.4) получаем

$$\int\limits_{\beta} \widetilde{\rho}(y)\,|dy| = \int\limits_{0}^{l(\beta)} \widetilde{\rho}(\beta^0(s))\,ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{\widetilde{m}} \cdot \sum_{j=1}^{\widetilde{m}} \int\limits_{0}^{l(\beta)} h_j(s)ds = \frac{1}{\widetilde{m}} \cdot \sum_{j=1}^{\widetilde{m}} \int\limits_{I_j} \rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) dm_1(s)\,. \tag{4.2.5}$$

Осталось показать, что

$$\int\limits_{I_j} \rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) dm_1(s) \geq 1 \tag{4.2.6}$$

для почти всех кривых $\beta \in \Gamma'$. Поскольку согласно сделанному выше предположению кривая $\beta^0(s)$ локально спрямляема, то $\beta^0(s)$ дифференцируема почти всюду по $s \in I$ [281, теорема 1.3]. Кроме того, согласно приведенному выше кривая α_j^* из f-представления кривой β является абсолютно непрерывной. Отметим также, что из условия $\beta^0(s) \notin f(B_0)$ при почти всех $s \in [0, l(\beta)]$ вытекает, что $\alpha_j^*(s) \notin B_0$ при почти всех $s \in I_j$ и, следовательно, производные $f'\left(\alpha_j^*(s)\right)$ и $\alpha_j^{*\prime}(s)$ существуют при почти всех $s \in I_j$. Учитывая изложенное выше и используя формулу для производной суперпозиции функций, а также тот факт, что модуль производной по натуральному параметру равен единице [281, п. (5), теорема 1.3], получаем следующее соотношение:

$$1 = \left|\left(f \circ \alpha_j^*\right)'(s)\right| = \left|f'\left(\alpha_j^*(s)\right)\alpha_j^{*\prime}(s)\right| =$$

$$= \left|f'\left(\alpha_j^*(s)\right) \cdot \frac{\alpha_j^{*\prime}(s)}{|\alpha_j^{*\prime}(s)|}\right| \cdot |\alpha_j^{*\prime}(s)| \geq l\left(f'\left(\alpha_j^*(s)\right)\right) \cdot |\alpha_j^{*\prime}(s)|\,. \tag{4.2.7}$$

Из (4.2.7) следует

$$\rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) = \frac{\rho(\alpha_j^*(s))}{l\left(f'\left(\alpha_j^*(s)\right)\right)} \geq \rho(\alpha_j^*(s)) \cdot |\alpha_j^{*\prime}(s)|\,. \tag{4.2.8}$$

Учитывая абсолютную непрерывность кривой α_j^*, из (4.2.8) по определению функции ρ и по формуле подсчета интеграла по абсолютно непрерывной кривой [281, теорема 4.1] получаем

$$1 \le \int\limits_{\alpha_j} \rho(x)|dx| =$$

$$= \int\limits_{I_j} \rho\left(\alpha_j^*(s)\right) \cdot |\alpha_j^{*\prime}(s)| dm_1(s) \le \int\limits_{I_j} \rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) dm_1(s)\,. \tag{4.2.9}$$

Из (4.2.9) вытекает соотношение (4.2.6). Общий случай, когда β — не обязательно замкнутая кривая, получают взятием sup по всем замкнутым подкривым β' кривой β в выражении $\int\limits_{\beta'} \widetilde{\rho}(y)|dy|$. Следовательно, функция $\widetilde{\rho} \in \ \operatorname{adm} \Gamma' \setminus \Gamma_0$, где $M(\Gamma_0) = 0$, и, значит,

$$M\left(\Gamma'\right) \quad \le \quad \int\limits_{f(D)} \widetilde{\rho}^{\,n}(y)\ dm(y)\,. \tag{4.2.10}$$

Согласно [28, теорема 3.2.5] для $m = n$ получаем

$$\int\limits_{B_k} K_I(x,\, f) \cdot \rho^n(x)\ dm(x) \quad = \quad \int\limits_{f(D)} \rho_k^n(y)\, dm(y)\,. \tag{4.2.11}$$

По неравенству Гельдера для сумм

$$\left(\frac{1}{\widetilde{m}} \cdot \sum_{i=1}^{s} \rho_{k_i}(y)\right)^n \quad \le \quad \frac{1}{\widetilde{m}} \cdot \sum_{i=1}^{s} \rho_{k_i}^n(y) \tag{4.2.12}$$

для произвольного $1 \le s \le \widetilde{m}$ и любого набора $\{k_1, \ldots, k_s\}$ длины s, $1 \le i \le s$, $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \ne k_j$, если $i \ne j$. Тогда по теореме об аддитивности интеграла Лебега [203, гл. I, § 12, теорема 12.3] из (4.2.10), (4.2.11) и (4.2.12) получаем

$$\frac{1}{\widetilde{m}} \cdot \int\limits_{D} K_I(x,\, f) \cdot \rho^n(x)\ dm(x) \quad =$$

$$= \frac{1}{\widetilde{m}} \cdot \int\limits_{f(D)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^n(y)\, dm(y) \quad \ge$$

$$\geq \quad \frac{1}{\widetilde{m}} \cdot \int\limits_{f(D)} \sup\limits_{\substack{\{k_1,\ldots,k_s\},\, k_i\in\mathbb{N},\\ k_i\neq k_j,\, i\neq j}} \sum\limits_{i=1}^{s} \rho_{k_i}^n(y)\, dm(y) \quad \geq$$

$$\geq \quad \int\limits_{f(D)} \widetilde{\rho}^{\,n}(y)\, dm(y) \quad \geq \quad M(\Gamma')\,.$$

Теорема доказана. $\Box$

4.2.8. Следующий результат немедленно вытекает из теоремы 4.2.1 и определения отображений с конечным искажением длины (см. также предложение 4.1.4).

Следствие 4.2.1. *Пусть I — открытый, полуоткрытый или замкнутый конечный интервал вещественной прямой, $f : D \to \mathbb{R}^n$ — дискретное отображение с конечным искажением длины, Γ — семейство кривых в D, Γ' — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$ и $\widetilde{m}$ — натуральное число такое, что выполнено следующее условие. Для каждой кривой $\beta \in \Gamma'$, $\beta : I \to \mathbb{R}^n$, найдутся кривые $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\widetilde{m}}$ семейства Γ такие, что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ для всех $j = 1, \ldots, \widetilde{m}$, и, кроме того, при каждом фиксированном $x \in D$ и каждом фиксированном $t \in I$ равенство вида $\alpha_j(t) = x$ возможно лишь не более, чем при $i(x, f)$ индексах j. Тогда*

$$M(\Gamma') \quad \leq \quad \frac{1}{\widetilde{m}} \quad \int\limits_{D} K_I(x, f) \cdot \rho^n(x) dm(x)$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

4.3. Некоторые следствия из оценки (4.2.1)

4.3.1. Отметим некоторые полезные следствия из теоремы 4.2.1, связанные, в частности, с оценками емкостей конденсаторов. Следующая конструкция является обобщением определения 1.4.3.

Определение 4.3.1. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — k различных точек множества $f^{-1}\left(\beta(a)\right)$ и

$$\widetilde{m} = \sum\limits_{i=1}^{k} i(x_i,\, f)\,. \tag{4.3.1}$$

Последовательность кривых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\widetilde{m}}$ является *максимальной последовательностью поднятий кривой β при отображении f с началом в точках $x_1, \ldots, x_k$*, если

(a) каждая кривая α_j является максимальным поднятием кривой β при отображении f,

(b) card $\{j : a_j(a) = x_i\} = i(x_i,\, f)$, $\quad 1 \le i \le k\,,$

(c) card $\{j : a_j(t) = x\} \le i(x,\, f)$ при всех $x \in D$ и всех $t \in I_j$, где I_j — область определения кривой α_j.

Отметим, что количество кривых $\widetilde{m}$ может быть больше, чем количество соответствующих точек k, см. соотношение (4.3.1). Следующее утверждение является более общим, нежели предложение 1.4.2 [175, гл. II, теорема 3.2].

Предложение 4.3.1. *Пусть f — открытое дискретное отображение и точки $x_1, \ldots, x_k \in\ f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Тогда кривая β имеет максимальную последовательность поднятий при отображении f с началом в точках $x_1, \ldots, x_k$.*

4.3.2. Напомним, что область $G \subset D$, $\overline{G} \subset D$, называется нормальной, если $\partial f(G) \subset f\left(\partial G\right)$ (см. п. 1.1.2). Здесь и далее, как обычно, $|\alpha|$ обозначает носитель кривой α, т.е. $|\alpha| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\ t \in \mathbb{R} :\ x = \alpha(t)\}$. Согласно [175, гл. II, следствие 3.4] справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.3.2. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, область G нормальна, $\widetilde{m} = N(f, G)$, $\beta : [a, b) \to f(G)$ — некоторая кривая. Тогда найдутся кривые $\alpha_j : [a, b) \to G$, $1 \le j \le \widetilde{m}$, удовлетворяющие следующим свойствам:*

1) $f \circ \alpha_j = \beta$,

2) card $\{j : \alpha_j(t) = x\} = i(x,\, f)$ *для всех* $x \in\ G \cap f^{-1}(\beta(t))$,

3) $|\alpha_1| \cup \ldots \cup |\alpha_{\widetilde{m}}| \,=\, G \cap f^{-1}(|\beta|)$.

Предыдущий вариант предложения 4.3.2 был доказан Е.А. Полецким в работе [149, лемма 4]. Однако его справедливость в этом случае установлена при более жестких ограничениях на отображение f и кривую β, см. там же.

4.3.3. Для данного семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$ обозначим

$$M_{K_I(\cdot,\, f)}(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho\,\in\,\mathrm{adm}\,\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, K_I(x, f)\, dm(x)\,.$$

Пусть $E = (A, C)$ — произвольный конденсатор, ω — неотрицательная измеримая функция. Тогда *весовая ω-емкость* конденсатора E порядка p определяется следующим образом:

$$\mathrm{cap}_\omega\, E = \mathrm{cap}_\omega\, (A, C) = \inf \int\limits_A |\nabla u(x)|^n\, \omega(x)\, dm(x)\,, \tag{4.3.2}$$

где inf в (4.3.2) берется по всем функциям $u \in C_0^\infty(A)$ таким, что $u \geq 1$ на C. При $\omega \equiv 1$ полагаем $\operatorname{cap} E := \operatorname{cap}_1 E$.

4.3.4. Следующие утверждения распространяют хорошо известные в теории отображений с ограниченным искажением модульные и емкостные неравенства на классы отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности [175, гл. II, п. 9 и 10]. Имеет место следующая

Теорема 4.3.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина, G — нормальная область для f, Γ' — семейство кривых в $G' = f(G)$, Γ — семейство α всех кривых в G таких, что $f \circ \alpha \subset \Gamma'$ и $\widetilde{m} = N(f, G)$. Тогда*

$$M(\Gamma') \quad \leq \quad \frac{1}{N(f,G)} \quad \int\limits_D K_I\,(x,\, f) \cdot \rho^n(x) dm(x)$$

для всякой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. В частности,

$$M(\Gamma') \quad \leq \quad \frac{1}{N(f,G)} \quad M_{K_I(\cdot,\, f)}(\Gamma)\,.$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы 4.2.1 и предложения 4.3.2. $\Box$

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение и $E = (A, C)$ — конденсатор в D. Назовем величину

$$M(f, C) \quad = \quad \inf\limits_{y \in f(C)} \sum\limits_{x \in f^{-1}(y) \cap C} i(x, f)$$

минимальной кратностью отображения f в C.

Теорема 4.3.2. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина, $E = (A, C)$ — конденсатор в D. Тогда*

$$\operatorname{cap} f(E) \quad \leq \quad \frac{1}{M(f,C)} \operatorname{cap}_{K_I}(\cdot,\, f)\, E\,. \tag{4.3.3}$$

Доказательство. Пусть $E = (A, C)$ — конденсатор в области D, тогда пара множеств $f(E) = (f(A), f(C))$ также является конденсатором в области $f(D)$ ввиду открытости и непрерывности отображения f.

Пусть Γ_E и $\Gamma_{f(E)}$ — семейства кривых в смысле обозначений предложения 1.4.1. Полагаем $\widetilde{m} = M(f, C)$. Пусть $\beta : [a, b) \to f(A)$ — произвольная кривая семейства $\Gamma_{f(E)}$. Тогда $C \cap f^{-1}(\beta(a))$ содержит точки $x_1, \ldots, x_k$ такие, что

$$m' = \sum_{l=1}^{k} i(x_l, f) \geq \widetilde{m}\,.$$

По предложению 4.3.1 существует максимальная последовательность поднятий $\alpha_j : [a, c_j) \to D$ кривой β, $1 \leq j \leq m'$, при отображении f с началом в точках $x_1, \ldots, x_k$. Нетрудно видеть, что в этом случае каждая кривая α_j принадлежит семейству Γ_E в смысле обозначений предложения 1.4.1. Отсюда вытекает, что семейства $\Gamma = \Gamma_E$ и $\Gamma' = \Gamma_{f(E)}$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2.1. Следовательно, по предложению 1.4.1 и теореме 4.2.1

$$\operatorname{cap} f(E) \leq \frac{1}{M(f, C)} \cdot M_{K_I(\cdot, f)}(\Gamma_E)\,.$$

Отметим, что функция $\rho(x) = |\nabla u(x)|$ допустима для семейства Γ_E для каждой функции u такой, что $u \in C_0^{\infty}(A)$ и $u \geq 1$ на множестве C. Действительно, пусть $\gamma \in \Gamma_E$, γ локально спрямляема и s — натуральный параметр на γ, γ^0 — нормальное представление кривой γ. Фиксируем произвольное число $s_0 \in (0, l(\gamma))$. Тогда, используя геометрический смысл градиента функции, для функции $\rho(x) = |\nabla u(x)|$ получаем

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| = \int\limits_{\gamma} |\nabla u(x)||dx| = \int\limits_{0}^{l(\gamma)} |\nabla u(\gamma^0(s))|\, ds \geq \int\limits_{0}^{s_0} \left|\frac{du(\gamma^0(s))}{ds}\right| ds \geq$$

$$\geq \left|\int\limits_{0}^{s_0} \frac{du(\gamma^0(s))}{ds}\, ds\right| = \bigl|u(\gamma^0(s_0)) - u(\gamma^0(0))\bigr| \to 1$$

при $s_0 \to l(\gamma)$. Здесь мы воспользовались тем, что функция $r(s) = u(\gamma^0(s))$ абсолютно непрерывна по параметру s для каждой замкнутой подкривой кривой γ, поскольку функция $u \in C_0^{\infty}(A)$ является локально липшицевой. Следовательно, $\rho(x) = |\nabla u(x)| \in \operatorname{adm} \Gamma_E$ и, значит,

$$M_{K_I(\cdot, f)}(\Gamma_E) \leq \operatorname{cap}_{K_I(\cdot, f)} E\,,$$

откуда и вытекает соотношение (4.3.3). $\square$

Из теорем 4.3.1 и 4.3.2, а также предложения 4.1.4 вытекают следующие очевидные следствия.

Следствие 4.3.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, G — нормальная область для f, Γ' — семейство кривых в $G' = f(G)$, Γ — семейство α всех кривых в G таких, что $f \circ \alpha \subset \Gamma'$ и $\widetilde{m} = N(f, G)$. Тогда*

$$M(\Gamma') \quad \leq \quad \frac{1}{N(f,G)} \quad \int\limits_D K_I\,(x,\, f) \cdot \rho^n(x) dm(x)$$

для всякой функции $\rho \in$ $\mathrm{adm}\,\Gamma$. В частности,

$$M(\Gamma') \quad \leq \quad \frac{1}{N(f,G)} \quad M_{K_I(\cdot,\,f)}(\Gamma)\,.$$

Следствие 4.3.2. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, $E = (A, C)$ — конденсатор в D. Тогда*

$$\mathrm{cap}\, f(E) \quad \leq \quad \frac{1}{M(f,C)}\, \mathrm{cap}_{K_I}(\cdot,\, f)\, E\,.$$

4.4. Устранение особенностей отображений с конечным искажением длины

4.4.1. Всюду ниже в данном параграфе мы предполагаем, что отображение f сохраняет ориентацию. Далее приведено одно из важнейших приложений неравенства типа Вяйсяля — решение проблемы устранения изолированной особенности отображений класса ACP^{-1}. Для этих целей в некоторых случаях выполнения более слабого неравенства вида (1.3.1) может оказаться недостаточно.

Отметим, что неравенство типа Вяйсяля было установлено ранее в частном случае, когда $\widetilde{m} = 1$ [123, гл. 4], [125, гл. 8]. Однако в приложении к проблеме устранения особенностей оно использовано в наиболее общей форме.

4.4.2. Основной целью настоящего параграфа является поиск условий на отображение $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$, являющееся отображением с конечным искажением длины, при которых это отображение продолжается в точку b непрерывным образом. Известно, что даже аналитическая функция $\varphi : D \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, заданная в области $D \setminus \{b\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (без дополнительного условия выпускания множества положительной емкости), вообще говоря, не продолжается в точку b по непрерывности ($\varphi(z) = \exp\{1/z\}, \quad b = 0$). Однако, как следует из полученных ниже результатов, при определенных условиях на рост f (на рост φ) это, все же, справедливо. Необходимо также отметить, что для отображений с ограниченным искажением аналогичные вопросы были исследованы в работе Ю. Вяйсяля [282].

4.4.3. Имеет место следующее утверждение [175, гл. I, лемма 4.9].

Предложение 4.4.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение. Тогда для каждого $x \in D$ существует s_x такое, что при всех $s \in (0, s_x)$ компонента связности множества $f^{-1}(B(f(x), s))$, содержащая точку x, и обозначаемая символом $U(x, f, s)$, является нормальной окрестностью точки x при отображении f, при этом $f(U(x, f, s)) = B(f(x), s)$ и $d(U(x, f, s)) \to 0$ при $s \to 0$. (Здесь, как и прежде, $d(A)$ обозначает евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$).*

4.4.4. Следующая лемма является фундаментальным утверждением настоящего параграфа.

Лемма 4.4.1. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$, такое, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ и некоторой строго убывающей функции $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, для которой $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to 0$ имеет место неравенство*

$$|f(x)| \leq C \cdot \varphi^p(|x - b|)\,, \tag{4.4.1}$$

где $p > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1, \infty]$, числа $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b, \partial D)$, $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$, $A > 0$ и борелевская функция $\psi(t) : (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ такие, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in B(0, \delta) \setminus \{b\}$ и $\varepsilon \to 0$:

$$\int\limits_{\varepsilon < |x - b| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x - b|)\; dm(x) \leq \frac{A \cdot I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)}{(\log \varphi(\varepsilon))^{n-1}}\,, \tag{4.4.2}$$

где

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \qquad \forall \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,. \tag{4.4.3}$$

Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что точка b является существенно особой точкой отображения f. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b = 0$, $\delta < \operatorname{dist}(0, \partial D)$ и $C = 1$. В таком случае сфера $S(0, \delta)$ является компактным множеством в $D \setminus \{0\}$, поэтому найдется $R > 0$ такое, что

$$f\left(S(0,\delta)\right) \subset B(0,R)\,. \tag{4.4.4}$$

В силу теоремы 4.2.1 отображение f является кольцевым Q-отображением в точке $b = 0$. Поскольку $b = 0$ является существенно особой точкой отображения f, то в виду условий (4.4.2) и (4.4.3) по лемме 2.4.5 отображение f в $B(0, \delta) \setminus \{0\}$ принимает все значения в $\mathbb{R}^n$, за исключением, может быть, некоторого множества емкости нуль, т.е. $N(y, f, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}) = \infty$ при всех $y \in \mathbb{R}^n \setminus E$, где $\operatorname{cap} E = 0$. Так как E имеет емкость нуль, то множество $\mathbb{R}^n \setminus E$ не может быть ограниченным. В таком случае найдется $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus (E \cup B(0, R))$.

Пусть $k_0 > \dfrac{4Ap^{n-1}}{\omega_{n-1}}$, $k_0 \in \mathbb{N}$. Поскольку $N(y_0, f, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}) = \infty$, то найдутся точки $x_1, \ldots, x_{k_0} \in f^{-1}(y_0) \cap (B(0, \delta) \setminus \{0\})$. По предложению 4.4.1 при некотором фиксированном $r > 0$ каждая точка x_j, $j = 1, \ldots, k_0$, имеет нормальную окрестность $U_j := U(x_j, f, r)$ такую, что $\overline{U_l} \cap \overline{U_{\widetilde{m}}} = \varnothing$ при всех $l \neq \widetilde{m}$, $l, \widetilde{m} \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq k_0$ и $1 \leq \widetilde{m} \leq k_0$.

Полагаем $d := \min\left\{\varepsilon_0, \operatorname{dist}\left(0, \overline{U_1} \cup \ldots \cup \overline{U_{k_0}}\right)\right\}$. Пусть $a \in (0, d)$ и $V := B(0, \delta) \setminus \overline{B(0, a)}$. В силу неравенства (4.4.1), строгого убывания функции φ, а также предположения о том, что $C = 1$, имеем

$$f(V) \subset B\left(0, \varphi^p(a)\right)\,. \tag{4.4.5}$$

Поскольку $z_0 := y_0 + re \in \overline{B(y_0, r)} = f\left(\overline{U(x_j, f, r)}\right)$, $j = 1, \ldots, k_0$, где e — единичный вектор, то найдется последовательность точек $\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_{k_0}}$, $\widetilde{x_j} \in \overline{U_j}$, $1 \leq j \leq k_0$ такая, что $f(\widetilde{x_j}) = z_0$. Заметим, что $k_0 \leq \sum\limits_{j=1}^{k_0} i(\widetilde{x_j},\, f) = m'$. Отметим, что $z_0 \in f(V)$. Обозначим через H полусферу

$$H = \left\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : (e, y_0) > 0\right\}\,,$$

через Γ' — семейство всех кривых $\beta : [r, \varphi^p(a)) \to \mathbb{R}^n$ вида $\beta(t) = y_0 + te$, $e \in H$, $t \in [r, \varphi^p(a))$, а через Γ — максимальную последовательность поднятий кривой β при отображении f относительно области V с началом в точках $\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_{k_0}}$, $\widetilde{x_j} \in \overline{U_j}$, $1 \le j \le k_0$, состоящую из m' кривых, $m' = \sum\limits_{j=1}^{k_0} i(\widetilde{x_j},\, f)$, которая существует в силу предложения 4.3.1. По теореме 4.2.1

$$M(\Gamma') \le \frac{1}{m'} \int\limits_D K_I\,(x,\, f) \cdot \rho^n(x) dm(x) \le$$

$$\le \frac{1}{k_0} \int\limits_D K_I\,(x,\, f) \cdot \rho^n(x) dm(x) \qquad (4.4.6)$$

для каждой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

При любом фиксированном $e \in H$ покажем, что для каждой кривой $\beta = y_0 + te$ и каждого максимального ее поднятия $\alpha(t) : [r, c) \to V$ с началом в точке $\widetilde{x_{j_0}}$, $\alpha \in \Gamma$, $1 \le j_0 \le k_0$, существует последовательность $r_k \in [r, c)$ такая, что $r_k \to c - 0$ при $k \to \infty$ и $\operatorname{dist}(\alpha(r_k), \partial V) \to 0$ при $k \to \infty$. Предположим противное, тогда найдется $e_0 \in H$ такое, что кривая $\alpha(t)$, $t \in [r, c)$, являющаяся максимальным поднятием кривой $\beta = y_0 + te_0$, лежит внутри V вместе со своим замыканием. Пусть, как и прежде, $C(c,\, \alpha(t))$ обозначает предельное множество кривой α при $t \to c - 0$, тогда для каждого $x \in C(c,\, \alpha(t))$ найдется последовательность $t_k \to c - 0$ при $k \to \infty$ такая, что $x = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha(t_k)$. Ввиду непрерывности f поскольку по предположению $C(c,\, \alpha(t)) \subset V$, имеем $f(x) = f(\lim\limits_{k\to\infty} \alpha(t_k)) = \lim\limits_{k\to\infty} \beta(t_k) = \beta(c)$, откуда следует, что отображение f постоянно на множестве $C(c,\, \alpha(t))$. Так как по условию f дискретно, а множество $C(c,\, \alpha(t))$, очевидно, является связным, имеем $C(c,\, \alpha(t)) = p_1 \in V$.

Полагаем $b_0 := \varphi^p(a)$. Пусть $c \ne b_0$. Тогда можно построить новое максимальное поднятие α' кривой β с началом в точке p_1. Объединяя поднятия α и α', получаем еще одно поднятие α'' кривой β с началом в точке $\widetilde{x_{j_0}}$, что противоречит свойству максимальности исходного поднятия α. Значит, $c = b_0$.

В таком случае $C(b_0, \alpha(t))$ — континуум внутри V, при этом

$$C(b_0, \alpha(t)) = p_1' \in V$$

и, значит, α продолжается до замкнутой кривой, определенной на отрезке $[r, \varphi^p(a)]$. Обозначим эту кривую снова через α (обозначения не меняем). Тогда при всех $t \in [r, \varphi^p(a)]$ имеем $\beta(t) = f(\alpha(t)) \subset f(V)$, в частности, полагая $t := \varphi^p(a)$, рассмотрим элемент z_1, определяемый по правилу $z_1 := y_0 + \varphi^p(a)e_0$. Ввиду включения (4.4.5) имеем

$$z_1 = y_0 + \varphi^p(a)e_0 \in f(V) \subset B\left(0, \varphi^p(a)\right) . \tag{4.4.7}$$

Однако, поскольку $e_0 \in H$, то

$$\begin{aligned} |z_1| = |y_0 + \varphi^p(a)e_0| = \sqrt{|y_0|^2 + 2\left(y_0, \varphi^p(a)e_0\right) + \varphi^{2p}(a)} \geq \\ \geq \sqrt{|y_0|^2 + \varphi^{2p}(a)} \geq \varphi^p(a) . \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Однако соотношение (4.4.8) противоречит (4.4.7), что в свою очередь опровергает предположение о включении замыкания кривой $\alpha(t)$ во множество V.

Следовательно, $\mathrm{dist}\left(\alpha(r_k), \partial V\right) \to 0$ при $k \to \infty$ и некоторой последовательности $r_k \in [r, c)$ такой, что $r_k \to c - 0$ и $k \to \infty$, что и требовалось установить.

Отметим, что ситуация, когда $\mathrm{dist}\left(\alpha(r_k), S(0,\delta)\right) \to 0$ при $k \to \infty$, исключена. Действительно, пусть эта ситуация имеет место. Тогда найдутся $p_2 \in S(0,\delta)$ и подпоследовательность номеров k_l, $l \in \mathbb{N}$, такие, что $\alpha(r_{k_l}) \to p_2$ при $l \to \infty$. Отсюда по непрерывности f получаем, что $\beta(r_{k_l}) \to f(p_2)$ при $l \to \infty$, что невозможно ввиду соотношения (4.4.4), поскольку при каждом фиксированном $e \in H$ и $t \in [r, \varphi^p(a))$ имеем $|\beta(t)| = |y_0 + te| = \sqrt{|y_0|^2 + 2t(y_0, e) + t^2} \geq |y_0| > R$ по выбору y_0.

Из приведенного следует, что найдется последовательность $r_k \in$ $\in [r, c)$ такая, что $r_k \to c - 0$ при $k \to \infty$, и $\alpha(r_k) \to p_3 \in S(0, a)$. Кроме того, каждая такая кривая $\alpha \in \Gamma$ пересекает сферу $S(0, d)$, поскольку согласно построению α имеет начало вне шара $B(0, d)$. Из условий $K_I(x, f) \leq Q(x)$ почти всюду и (4.4.2) вытекает, что $I(a, d) \to \infty$ при $a \to 0$, так что $I(a, d) > 0$ при малых a. Рассмотрим функцию

$$\rho_a(x) = \begin{cases} \psi(|x|)/I(a, d), & x \in B(0, d) \setminus B(0, a), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \left(B(0, d) \setminus B(0, a)\right), \end{cases}$$

где $I(a, d)$ определено так же, как в (4.4.3), а ψ — функция из условия леммы. Поскольку функция $\rho_a(x)$ является борелевской и, кроме того, $\rho_a(x)$ является радиальной функцией, то в силу установленных выше свойств кривых из семейства Γ, а также в силу [281, теорема 5.7] для любой (локально спрямляемой) кривой $\alpha \in \Gamma$ имеем

$$\int\limits_{\alpha} \rho_a(x)|dx| \geq \frac{1}{I(a, d)} \int\limits_{a}^{d} \psi(t)dt = 1 ,$$

т.е. $\rho_a(x) \in \operatorname{adm}\Gamma$. В таком случае из соотношения (4.4.6) получаем

$$\begin{aligned} M(\Gamma') \quad &\leq \quad \frac{1}{k_0 \cdot I^n(a,d)} \int\limits_{a<|x|<d} K_I\left(x,\, f\right) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) \leq \\ &\leq \frac{I^n(a,\varepsilon_0)}{k_0 \cdot I^n(a,d) \cdot I^n(a,\varepsilon_0)} \int\limits_{a<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) = \\ &= \left(1+\frac{I(d,\varepsilon_0)}{I(a,d)}\right)^n \frac{1}{k_0 \cdot I^n(a,\varepsilon_0)} \int\limits_{a<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) \leq \\ &\leq \frac{2}{k_0 \cdot I^n(a,\varepsilon_0)} \int\limits_{a<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

при всех $a \in (0, d_1)$ и некотором d_1, $d_1 \leq d$, поскольку в силу соотношения (4.4.2) $I^n(a,d) \to \infty$ при $a \to 0$. Снова из (4.4.2) и (4.4.9) получаем, что при $a \in (0, d_1)$

$$M(\Gamma') \leq \frac{2A}{k_0 \left(\log \varphi(a)\right)^{n-1}}\,. \tag{4.4.10}$$

С другой стороны, в силу [281, замечание 7.7]

$$M(\Gamma') = \frac{1}{2} \frac{\omega_{n-1}}{\left(\log \frac{\varphi^p(a)}{r}\right)^{n-1}}\,. \tag{4.4.11}$$

Тогда из неравенства (4.4.10) и равенства (4.4.11) получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\omega_{n-1}}{\left(\log \frac{\varphi^p(a)}{r}\right)^{n-1}} \leq \frac{2A}{k_0 \left(\log \varphi(a)\right)^{n-1}}\,,$$

откуда

$$\left(\log\left(\frac{\varphi^p(a)}{r}\right)^{\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1} \geq \left(\log\left(\varphi(a)\right)^{\left(\frac{k_0}{2A}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1}\,,$$

$$\log\left(\frac{\varphi^p(a)}{r}\right)^{\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}} \geq \log\left(\varphi(a)\right)^{\left(\frac{k_0}{2A}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\,,$$

$$\frac{1}{r^{\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}} \geq (\varphi(a))^{\left(\frac{k_0}{2A}\right)^{\frac{1}{n-1}} - p\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\,.$$

Поскольку по выбору $k_0 > \frac{4Ap^{n-1}}{\omega_{n-1}}$, то в правой части последнего соотношения $\varphi(a)$ берется в некоторой положительной степени. Переходя здесь к пределу при $a \to 0$ и учитывая, что по условию леммы $\varphi(a) \to \infty$ при $a \to 0$, находим

$$\frac{1}{r^{\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}} \geq \infty\,,$$

что невозможно. Полученное противоречие означает, что точка $b = 0$ не может быть существенно особой для отображения f. $\square$

4.4.5. Отдельный случай леммы 4.4.1 представляет собой ситуация, когда $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \leq M \cdot \log \varphi(\varepsilon)$ при некоторой постоянной $M > 0$ и $\varepsilon \to 0$. Покажем, что в этом случае при указанных в формулировке леммы 4.4.1 отображениях, предполагающихся ограниченными, имеет место явная оценка искажения хордального расстояния.

Следующее утверждение может быть получено как следствие из леммы 3.5.3.

Лемма 4.4.2. *Предположим, что $b \in D$, $f : D \to B(0, R)$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина, при этом, существуют измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1, \infty]$, числа $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}\,(b, \partial D)$ и $A > 0$ такие, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ почти всюду в D, при этом, при $\varepsilon \to 0$ имеют место соотношения (4.4.2), (4.4.3). Пусть, кроме того, существует постоянная $M > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ такие, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено условие*

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) \leq M \cdot \log \varphi(\varepsilon)\,, \tag{4.4.12}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определяется соотношением (4.4.3), а $\varphi : (0, \infty) \to [0, \infty)$ — некоторая функция. Тогда при всех $x \in B(b, \varepsilon_1)$ имеет место оценка

$$|f(x) - f(b)| \leq \frac{\alpha_n(1 + R^2)}{\delta} \exp\{-\beta_n I\left(|x - b|, \varepsilon_0\right)\}\,, \tag{4.4.13}$$

где постоянные α_n и $\beta_n = \left(\dfrac{\omega_{n-1}}{AM^{n-1}}\right)^{1/(n-1)}$ зависят только от n, а δ — от R.

Доказательство. Из теоремы 4.2.1 при $\widetilde{m}=1$ вытекает, что отображение f является кольцевым Q-отображением в точке b. Из соотношения (4.4.2) с учетом (4.4.12) следует, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-b|)\;dm(x)\le AM^{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0)\,. \tag{4.4.14}$$

Поскольку $|f(x)-f(b)|\le(1+R^2)\cdot h(f(x),f(b))$, то из (4.4.14) и леммы 3.5.3 вытекает соотношение (4.4.13). $\Box$

4.4.6. Мы показали, что при определенных условиях изолированная особенность отображений, более общих, чем отображения с конечным искажением длины, является либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Однако, как приведено ниже, при еще более сильных ограничениях на рост отображения f ситуация, когда изолированная точка границы является полюсом, также исключена. Подобный результат может быть получен как следствие из оценки хордального расстояния (4.4.13). Имеет место следующее утверждение.

Следствие 4.4.1. *Предположим, что в условиях леммы 4.4.1 помимо соотношений (4.4.2) и (4.4.3) имеет место условие (4.4.12), а вместо условия (4.4.1) — более сильное предположение:*

$$\lim\limits_{x\to b}|f(x)|\cdot\exp\{-\beta_n I\left(|x-b|,\varepsilon_0\right)\}=0\,, \tag{4.4.15}$$

где $\beta_n=\left(\dfrac{\omega_{n-1}}{AM^{n-1}}\right)^{1/(n-1)}$. *Тогда точка $x=b$ является устранимой изолированной особой точкой отображения f.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b=0$. По лемме 4.4.1 точка b не может быть существенно особой для f. Предположим, что $b=0$ является для отображения f полюсом. Тогда рассмотрим композицию отображений $h=g\circ f$, где $g(x)=\dfrac{x}{|x|^2}$ — инверсия относительно единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Заметим, что $h\in ACP^{-1}$, обладает N и N^{-1}-свойствами Лузина, при этом $K_I(x,f)=K_I(x,h)$ и $h(0)=0$. Кроме того, в некоторой окрестности нуля отображение h (по построению) является ограниченным. В таком случае найдутся $\varepsilon_0>0$ и $R>0$ такие, что $|h(x)|\le R$ при $|x|<\varepsilon_0$. Следовательно, возможно применение леммы 4.4.2. По неравенству (4.4.13)

$|h(x)| = \dfrac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta} \exp\{-\beta_n I\left(|x|, \varepsilon_0\right)\}$. Отсюда следует

$$|f(x)| \cdot \exp\{-\beta_n I\left(|x|, \varepsilon_0\right)\} \geq \frac{\delta}{\alpha_n(1+R^2)}\,.$$

Однако последнее соотношение противоречит (4.4.15). Полученное противоречие доказывает, что точка $b=0$ является устранимой для отображения f. $\Box$

4.4.7. Сформулируем и докажем основные результаты настоящего параграфа.

4.4.8. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.4.1. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина, при этом для некоторых $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b, \partial D)$ и $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ имеет место условие*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^n \log^n \frac{1}{|x-b|}}\, dm(x) \leq A \cdot \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}} \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')\,, \tag{4.4.16}$$

кроме того,

$$\lim_{x\to b} \frac{|f(x)|}{\left(\log \frac{1}{|x-b|}\right)^{\beta_n}} = 0\,, \tag{4.4.17}$$

где $\beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{A}\right)^{1/(n-1)}$. Тогда точка $x = b$ является устранимой для отображения f.

Доказательство. Полагаем $\varphi(t) := \log \frac{1}{t}$ и $\psi(t) := \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$. Отметим, что в этом случае выполнено соотношение (4.4.12) при $M = 1$ и соотношение (4.4.15), которое соответствует соотношению (4.4.17) при указанном выборе функций φ и ψ (где, как и прежде, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt$). Кроме того, выполнены соотношения (4.4.2), (4.4.3). Тогда необходимое заключение следует из следствия 4.4.1. $\Box$

4.4.9. Справедлив следующий результат, касающийся случая, когда функция Q — конечного среднего колебания в фиксированной точке.

Теорема 4.4.2. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$,* *обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b,\delta)\setminus\{b\}$ имеет место неравенство*

$$|f(x)| \le C\left(\log\frac{1}{|x-b|}\right)^q , \tag{4.4.18}$$

где $q > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1,\infty]$ такая, что $K_I(x,f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$ и $Q(x) \in FMO(b)$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Доказательство. Выберем в лемме 4.4.1 в качестве $\varphi(t) := \log\dfrac{1}{t}$ и $\psi(t) := \dfrac{1}{t\log\frac{1}{t}}$. Тогда доказательство теоремы 4.4.2 вытекает из леммы 4.4.1 и оценки (4.4.16), справедливой для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и произвольной функции $Q \in FMO(b)$ (см. предложение 2.3.1), а также леммы 4.4.1. $\Box$

Следующее утверждение указывает на возможность устранения изолированной особенности отображений, исключая полюс, в случае, когда налагаемые требования на рост отображения в окрестности этой особенности являются несколько более сильными.

Следствие 4.4.2. *В условиях теоремы 4.4.2 найдется число $p_0 > 0$ такое, что точка b является для отображения f устранимой особой точкой, как только $Q \in FMO(b)$ и*

$$\lim_{x\to b}\frac{|f(x)|}{\left(\log\frac{1}{|x-b|}\right)^{p_0}} = 0\,.$$

Доказательство следствия 4.4.2 немедленно следует из теорем 4.4.1 и 4.4.2, поскольку, как отмечено выше, условия вида (4.4.16) выполняются для произвольных функций класса FMO в соответствующей точке. $\Box$

4.4.10. Следующий важный результат об устранении особенностей отображений более общих, чем отображения с конечным искажением длины, касается логарифмического роста средних значений функции Q.

Теорема 4.4.3. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина. Предположим, что существует* *некоторое число $\delta > 0$, такое, что при всех $x \in B(b,\delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство (4.4.18), где $q > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1,\infty]$ и число $L > 0$ такие, что $K_I(x,f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$ и $q_b(r) \le L \cdot \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1}$ при $r \to 0$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.*

Если, кроме того, при $p_0 = \left(\frac{1}{L}\right)^{1/(n-1)}$ имеет место оценка

$$\lim_{x\to b} \frac{|f(x)|}{\left(\log \frac{1}{|x-b|}\right)^{p_0}} = 0\,,$$

то точка b является устранимой для отображения f.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b = 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < \min\{\,\mathrm{dist}\,(0,\partial D)\,,1\}$. Полагаем $\psi(t) = \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$. Отметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int\limits_{|x|=r} \frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}\,d\mathcal{A}\right) dr \le L\cdot\omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0)\,,$$

где, как и прежде, $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt = \log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}$. Отсюда заключаем, что при указанной выше функции ψ и $\varphi = \log 1/t$ имеют место условия (4.4.2) и (4.4.3) леммы 4.4.1, где $A = L\omega_{n-1}$. Таким образом, первая часть заключения теоремы 4.4.3 установлена. Вторая часть утверждения этой теоремы вытекает из следствия 4.4.1, поскольку, в частности, соотношение (4.4.12) имеет место при $M = 1$. $\Box$

4.4.11. Сформулируем еще один важный результат, основанный на расходимости интеграла вида (2.3.5).

Теорема 4.4.4. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина, а $Q : D \to [1,\infty)$ — некоторая функция такая, что $K_I(x,f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$. Предположим, что существуют некоторые числа δ, C, $q > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$,*

$\varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(b, \partial D)$, *такие, что при всех* $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ *имеет место неравенство*

$$|f(x)| \le C \cdot \exp\left\{ q \int\limits_{|x-b|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)} \right\}. \qquad (4.4.19)$$

Пусть, кроме того, $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)} = \infty$. *Тогда точка* b *является для отображения* f *либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Если вместо условия (4.4.19) имеет место более сильное предположение:*

$$\lim_{x \to b} |f(x)| \cdot \exp\left\{ - \int\limits_{|x-b|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)} \right\} = 0\,,$$

то точка $x = b$ *является для отображения* f *устранимой особой точкой.*

Доказательство. В лемме 4.4.1 полагаем

$$\psi(t) = 1/tq_b^{1/(n-1)}(t), \quad \varphi(t) = \exp\left\{ \int\limits_t^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq_b^{1/(n-1)}(r)} \right\}.$$

Отметим, что при указанных ограничениях на $Q(x) < \infty$ (по теореме Фубини) при почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$ имеем $q_b(r) < \infty$, откуда вытекает строгое убывание функции φ и положительность функции ψ. Кроме того, по теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x-b|) dm(x) =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \int\limits_{S(b,r)} Q(x) \cdot \psi^n(|x-b|)\, d\mathcal{A}\, dr = \omega_{n-1} \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} r^{n-1} \psi^n(r) q_b(r) dr =$$

$$= \omega_{n-1} \cdot I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \omega_{n-1} \cdot \log \varphi(\varepsilon)\,.$$

Отсюда, в частности, следует, что условие (4.4.12) выполнено при $M = 1$. Оставшаяся часть утверждения следует из леммы 4.4.1 и следствия 4.4.1. $\square$

4.4.12. Полагая в лемме 4.4.1 в качестве функции $\psi(t) = 1/t$, а в качестве $\varphi(t) = t^{-q}$, $q > 0$, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.4.5. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b,\delta)\setminus\{b\}$ имеет место неравенство $|f(x)| \le C|x-b|^{-q}$, где $q > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1,\infty]$ и число $\varepsilon_0 \in (0,1)$ такие, что $K_I(x,f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in B(b,\delta) \setminus \{b\}$ и при $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^n}\, dm(x) \le C_1 \cdot \log \frac{1}{\varepsilon}\,,$$

где $C_1 = C_1(b)$ — некоторая положительная постоянная. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Кроме того, существует постоянная $p > 0$ такая, что оценка $\lim\limits_{x\to b}|f(x)| \cdot |x-b|^p = 0$ влечет, что точка b является устранимой для отображения f.

Доказательство. Отметим, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$, где, как и прежде, $I(\varepsilon,\varepsilon_0)$ задается соотношением вида (4.4.3). Все остальное непосредственно вытекает из леммы 4.4.1 и следствия 4.4.1. $\Box$

4.4.13. Следующее утверждение также касается случая, когда средние значения функции Q имеют логарифмический рост.

Теорема 4.4.6. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b,\delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство (4.4.1) при $\varphi(t) = \exp\log^{\frac{n-\alpha-1}{n-1}}(1/t)$ при некотором $\alpha \in (0, n-1)$, где $p > 0$ и $C > 0$ — фиксированные постоянные. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1,\infty]$ такая, что $K_I(x,f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$ и при некотором $L > 0$*

$$q_b(r) \le L \cdot \left(\log \frac{1}{r}\right)^{\alpha} \tag{4.4.20}$$

при $r \to 0$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \min\{1, \operatorname{dist}(b, \partial D)\})$. Полагаем $\psi(t) = 1/t$, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt$. Тогда при некоторой постоянной $C_1 > 0$ и $\varepsilon \to 0$, учитывая условие (4.4.20), имеем

$$\frac{1}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)dm(x)}{|x-b|^n} \le C_1 \cdot \frac{1}{\log^{n-\alpha-1}(1/\varepsilon)} = C_1 \log^{1-n} \varphi(\varepsilon)\,,$$

откуда вытекает выполнение условий (4.4.2), (4.4.3) леммы 4.4.1. Применяя эту лемму, заключаем, что точка b не может быть существенно особой для отображения f. $\Box$

Следствие 4.4.3. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина. Тогда найдется положительная постоянная $\gamma > 0$, $\gamma \le 1$, со следующим свойством. Если при некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \min\{1, \operatorname{dist}(b, \partial D)\})$, отображение f удовлетворяет более сильному, чем (4.4.1) (при $\varphi(t) = \exp\log^{\frac{n-\alpha-1}{n-1}}(1/t)$), условию:*

$$\lim_{x\to b} |f(x)| \cdot \exp\left\{-\gamma \log^{\frac{n-1-\alpha}{n-1}}(\varepsilon_0/|x-b|)\right\} = 0\,, \qquad (4.4.21)$$

$\alpha \in (0, n-1)$, при этом, $K_I(x, f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и при $r \to 0$ выполнено условие (4.4.20), то f имеет устранимую особенность в точке b.

Доказательство. По теореме 4.4.6 точка b не может быть существенно особой для отображения f. Осталось показать, что при выполнении условий (4.4.20), (4.4.21) точка b для отображения f также не может быть и полюсом. Отметим, что при достаточно большом $M_1 > 0$, некотором $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)dm(x)}{|x-b|^n} \le M_1 \cdot I^{\alpha+1}(\varepsilon, \varepsilon_0)\,, \qquad (4.4.22)$$

где $\psi(t) = 1/t$, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt$. Предположим, что точка b является для отображения f полюсом. Рассмотрим композицию отображений $h = g \circ f$, где $g(x) = \dfrac{x-b}{|x-b|^2}$ — инверсия относительно единичной сферы $S(b, 1)$. Отображение h является дифференцируемым почти всюду, $h \in ACP^{-1}$, обладает N и N^{-1}-свойствами Лузина, при этом $K_I(x,f) = K_I(x,h)$ и $h(0) = 0$. Кроме того, в некоторой окрестности нуля отображение h по построению является ограниченным. В таком случае найдутся $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, и $R > 0$ такие, что $|h(x)| \le R$ при $|x - b| < \varepsilon_2$. Согласно лемме 3.5.3 и оценке (4.2.1) при $\widetilde{m} = 1$, учитывая соотношение (4.4.22) в контексте неравенства (3.5.9), получаем

$$|h(x)| = \frac{1}{|f(x)|} \le \frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta} \exp\left\{-\gamma \cdot \log^{\frac{n-1-\alpha}{n-1}} \frac{\varepsilon_0}{|x-b|}\right\},$$

где постоянные α_n и $\gamma = \left(\frac{\omega_{n-1}}{M_1}\right)^{1/(n-1)}$ зависят только от n, а δ — от R. Здесь можно считать, что $M_1 > \omega_{n-1}$, т.е. $\gamma < 1$. Тогда

$$|f(x)| \cdot \exp\left\{-\gamma \cdot \log^{\frac{n-1-\alpha}{n-1}} \frac{\varepsilon_0}{|x-b|}\right\} \ge \frac{\delta}{\alpha_n(1+R^2)}.$$

Однако, если при этом выполнено условие (4.4.21), то приходим к противоречию, что и доказывает следствие. $\square$

4.4.14. Следующая теорема касается случая, когда функция удовлетворяет некоторым ограничениям интегрального типа.

Теорема 4.4.7. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина, а $Q : D \to [1,\infty)$ — некоторая функция такая, что $K_I(x,f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$. Предположим, что существуют некоторые числа δ, C, $q > 0$ такие, что при всех $x \in B(b,\delta) \setminus \{b\}$ и некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b, \partial D)$, имеет место неравенство (4.4.19). Кроме того, предположим, что существуют число $M > 0$, неубывающая выпуклая функция $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ и окрестность U точки b такие, что*

$$\int\limits_U \Phi\left(Q(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n} \ \le\ M \tag{4.4.23}$$

и

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{4.4.24}$$

при некотором $\delta_0 > \Phi(0)$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Доказательство. Из условий (4.4.23), (4.4.24) следует расходимость интеграла вида $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)} = \infty$ (см. теорему 2.14.2). Все остальное следует из теоремы 4.4.4. $\Box$

4.4.15. Из сформулированных выше результатов на основании предложения 4.1.4 вытекают такие следствия для отображений с конечным искажением длины.

Следствие 4.4.4. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство*

$$|f(x)| \leq C \left(\log \frac{1}{|x-b|}\right)^q ,$$

где $q > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1, \infty]$ такая, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$ и $Q(x) \in FMO(b)$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Следствие 4.4.5. *В условиях следствия 4.4.4 найдется число $p_0 > 0$ такое, что точка b является для отображения f устранимой особой точкой, как только $Q \in FMO(b)$ и*

$$\lim_{x \to b} \frac{|f(x)|}{\left(\log \frac{1}{|x-b|}\right)^{p_0}} = 0 .$$

Следствие 4.4.6. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство (4.4.18), где $q > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1, \infty]$ и число $L > 0$ такие, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$ и $q_b(r) \leq L \cdot \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1}$ при $r \to 0$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.*

Если, кроме того, при $p_0 = \left(\frac{1}{L}\right)^{1/(n-1)}$ имеет место оценка вида

$$\lim_{x\to b} \frac{|f(x)|}{\left(\log\frac{1}{|x-b|}\right)^{p_0}} = 0\,,$$

то точка b является устранимой для отображения f.

Следствие 4.4.7. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, а $Q : D \to \to [1, \infty)$ — некоторая функция такая, что $K_I(x, f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$. Предположим, что существуют некоторые числа δ, C, $q > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b, \partial D)$, такие, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство*

$$|f(x)| \le C \cdot \exp\left\{q \int\limits_{|x-b|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}\right\}.$$

Пусть, кроме того, $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)} = \infty$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Если вместо условия (4.4.19) имеет место более сильное предположение:

$$\lim_{x\to b} |f(x)| \cdot \exp\left\{-\int\limits_{|x-b|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}\right\} = 0\,,$$

то точка $x = b$ является для отображения f устранимой особой точкой.

Следствие 4.4.8. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство $|f(x)| \le C|x - b|^{-q}$, где $q > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1, \infty]$ и число $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ такие, что $K_I(x, f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ и при $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^n}\, dm(x) \le C_1 \cdot \log\frac{1}{\varepsilon}\,,$$

где $C_1 = C_1(b)$ — некоторая положительная постоянная. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Кроме того, существует постоянная $p > 0$ такая, что оценка $\lim\limits_{x\to b} |f(x)| \cdot |x-b|^p = 0$ влечет, что точка b является устранимой для отображения f.

Следствие 4.4.9. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b,\delta)\setminus\{b\}$ имеет место неравенство (4.4.1) при $\varphi(t) = \exp\log^{\frac{n-\alpha-1}{n-1}}(1/t)$ при некотором $\alpha \in (0, n-1)$, где $p > 0$ и $C > 0$ — фиксированные постоянные. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1,\infty]$ такая, что $K_I(x,f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$ и при некотором $L > 0$*

$$q_b(r) \le L \cdot \left(\log\frac{1}{r}\right)^{\alpha}$$

при $r \to 0$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Следствие 4.4.10. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины. Тогда найдется положительная постоянная $\gamma > 0$, $\gamma \le 1$, со следующим свойством. Если при некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \min\{1, \operatorname{dist}(b, \partial D)\})$, отображение f удовлетворяет более сильному, чем (4.4.1) (при $\varphi(t) = \exp\log^{\frac{n-\alpha-1}{n-1}}(1/t)$), условию:*

$$\lim_{x\to b} |f(x)| \cdot \exp\left\{-\gamma \log^{\frac{n-1-\alpha}{n-1}}(\varepsilon_0/|x-b|)\right\} = 0\,,$$

$\alpha \in (0, n-1)$, при этом $K_I(x,f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и при $r \to 0$ выполнено условие (4.4.20), то f имеет устранимую особенность в точке b.

Следствие 4.4.11. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, а $Q : D \to$ $\to [1,\infty)$ — некоторая функция такая, что $K_I(x,f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$. Предположим, что существуют некоторые числа δ, C, $q > 0$ такие, что при всех $x \in B(b,\delta) \setminus \{b\}$ и некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 <$ $< \operatorname{dist}(b, \partial D)$, имеет место неравенство (4.4.19). Кроме того, предположим, что существуют число $M > 0$, неубывающая выпуклая функция*

$\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *и окрестность* U *точки* b *такие, что*

$$\int\limits_{U} \Phi\left(Q(x)\right) \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \ \leq\ M$$

и

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty$$

при некотором $\delta_0 > \Phi(0)$. *Тогда точка* b *является для отображения* f *либо полюсом, либо устранимой особой точкой.*

4.5. Аналог одной леммы Полецкого для классов Соболева

4.5.1. Как отмечено ранее, отображения с конечным искажением длины включают в себя многие известные классы отображений (см. примеры п. 4.1.1). Здесь мы докажем утверждение примера 3 из п. 4.1.1, которое, пожалуй, является наиболее важным по отношению к указанным выше примерам. Ниже доказано, что некоторый широкий подкласс открытых дискретных отображений $f \in W_{loc}^{1,n}$ включен в класс отображений с конечным искажением длины и, следовательно, указанные отображения удовлетворяют модульным неравенствам вида (1.3.1).

4.5.2. В работе известного математика Е.А. Полецкого получен один важный, на наш взгляд, результат [149, лемма 6]. Пусть $f : D \to \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — отображение с ограниченным искажением, определенное в области D в $\mathbb{R}^n$, тогда для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma} \in f(D)$ таких, что $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, f-представление γ^* кривой γ по отношению к $\widetilde{\gamma}$ является абсолютно непрерывной кривой.

Докажем аналогичное утверждение для открытых дискретных отображений $f \in W_{loc}^{1,n}$, для которых мера множества точек ветвления равна нулю, а внутренняя дилатация локально интегрируема. Как следствие, установим взаимосвязь указанного класса с отображениями с конечным искажением длины (см. предложение 4.1.4). В частности, отсюда вытекает также их связь с Q-отображениями (см. предложение 4.1.5).

Вскользь мы упоминали о том, что интересующий нас факт (формулировка и доказательство которого приведены ниже) впервые был анонсирован в работе [123] без доказательства (см. также [125, замечание 8.5]). Независимо от этого, несколько позже в работе [89, теорема 2.1, теорема 4.1 и следствие 4.1] встречались утверждения подобного плана, они касались совсем других классов отображений. Методология, которая приведена в этих работах, имела достаточно сложный и громоздкий аппарат. Отметим, что упомянутые утверждения, на наш взгляд, доказаны при несколько перегруженных условиях, что обусловливает дополнительные основания для изучения данной проблемы более доступными способами. Отметим, что доказательство основных результатов настоящего параграфа целиком базируется на подходах из упомянутой работы Е.А. Полецкого [149] (см. теорему 4.5.1).

4.5.3. Наиболее трудной и важной деталью доказательства взаимосвязи классов Соболева и отображений с конечным искажением длины является установление ACP^{-1}-свойства для этих классов (см. предложение 4.1.4). Как показано ниже, остальная часть свойств согласно известных результатов может быть установлена сравнительно легко.

Здесь и далее l_γ — функция длины, определенная в соответствии с замечанием 4.2.1, т.е. для кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ значение $l_\gamma(t)$ определено как длина кривой γ на отрезке $[a, t]$. Формулировки и доказательства следующих утверждений см. в работе [149].

Предложение 4.5.1. *Пусть $\gamma_1 : I = [0, l] \to \mathbb{R}^n$ — спрямляемая кривая и $B = \overline{B} \subset I$, $l_{\gamma_1}(B) = 0$. Пусть кривая $\gamma_2 : I \to \mathbb{R}^n$ спрямляема на $I \setminus B$ и $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ при $t \in B$. Тогда кривая γ_2 также спрямляема и $l_{\gamma_2}(B) = 0$ [149, лемма 1].*

Предложение 4.5.2. *Пусть $\gamma : I = [0, l] \to \mathbb{R}^n$ — кривая, $B = \overline{B} \subset I$ и множество $E \subset I$ такое, что $\overline{E} \subset E \cup B$ и $E \cap B = \varnothing$. Если γ спрямляема на $I \setminus (E \cup B)$, кроме того, для любой точки $t \in I \setminus B$ найдется окрестность V, в которой γ спрямляема и $l_\gamma(V) = l_\gamma(V \setminus E)$, то тогда γ спрямляема на $I \setminus B$ и выполнено условие: $l_\gamma(I \setminus B) = l_\gamma\left(I \setminus (E \cup B)\right)$ [149, лемма 2].*

Предложение 4.5.3. *Пусть $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ — спрямляемая кривая. Если $l_\gamma(B) = 0$ для произвольного множества $B \subset I$ такого, что $\mathrm{mes}_1\,(B) = 0$, то функция $l_\gamma(t)$ абсолютно непрерывна [149, лемма 3].*

Пусть $V \subset D$ — нормальная область и $f(V) = V^*$. Определим отображение $g_V : V^* \to \mathbb{R}^n$ следующим образом: пусть $y \in V^*$, $f^{-1}(y) \cap \cap V = \{x_i\}$, тогда

$$g_V(y) = \frac{1}{m} \sum_i i(x_i, f) x_i\,, \tag{4.5.1}$$

где $m = \sum i(x_i, f) = \mu(f, V)$. Отметим, что величина $\mu(y, f, V) = \mu(y, V)$ постоянна в $f(V)$ для нормальных областей V и равна $N(f, V)$, где

N — функция кратности [175, гл. I, предложение 4.4, п. D_1 и предложение 4.10, п. (2)].

Предложение 4.5.4. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, $f \in W^{1,n}_{loc}(D)$ такое, что $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{loc}$ (либо $K_I(x,f) \in \in L^1_{loc}$) и $m(B_f) = 0$. Тогда отображение $g_V(y)$ непрерывно в V^* и $g_V(y) \in ACL^n(V^*)$ [89, теорема 2.1].*

4.5.4. Одним из основных результатов настоящего параграфа является следующее утверждение.

Лемма 4.5.1. *(Аналог леммы Полецкого). Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, $f \in W^{1,n}_{loc}(D)$, такое, что $K_O(x,f) \in \in L^{n-1}_{loc}$ (либо $K_I(x,f) \in L^1_{loc}$) и $m(B_f) = 0$. Тогда $f \in ACP^{-1}$.*

Доказательство. Согласно лемме 4.2.1 достаточно показать, что для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ в области D таких, что $f \circ \gamma = \widetilde{\gamma}$, f-представление γ^* кривой γ относительно $\widetilde{\gamma}$ является спрямляемым и абсолютно непрерывным. Достаточно также доказать утверждение для семейства кривых $\widetilde{\Gamma}$, принадлежащих компактной подобласти U' области D (общий случай может быть доказан при помощи рассмотрения исчерпания $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ области $f(D)$ компактными подобластями $V_i \subset D$, $\overline{V_i} \subset D$). Пусть I — отрезок, являющийся областью определения параметра s_*.

1. Обозначим через $\widetilde{\gamma}^0$ нормальное представление замкнутой спрямляемой кривой $\widetilde{\gamma}$, лежащей в области U', $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, а через γ^* — f-представление кривой γ по отношению к $\widetilde{\gamma}$. Тогда $\widetilde{\gamma}^0 : [0, l(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma^* : [0, l(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$. Полагаем $I := [0, l(\gamma)]$. Покажем, что для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ кривая γ^* спрямляема на $I \setminus \gamma^*(B_f)$, где $\gamma^*(B_f) = \{s : \gamma^*(s) \in B_f\}$. Накроем множество $U' \setminus B_f$ счетной системой окрестностей $\{A_l\}$, в каждой из которых отображение $f_l = f|_{A_l}$ является гомеоморфным. Пусть $h_l = f_l^{-1}$. Поскольку согласно сделанному предположению $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{loc}$ (либо $K_I(x,f) \in L^1_{loc}$), $h_l = = (h_{l1}, \ldots, h_{ln}) \in W^{1,n}_{loc}$ [64, теорема 6.1], [89, следствие 2.3] соответственно. Следовательно, отображение h_l абсолютно непрерывно на почти всех кривых [281, п. 28.2]. Отметим следующее: если $\gamma^*(s) \in A_l \cap A_j$, то $h_l\left(\widetilde{\gamma}^0(s)\right) = h_j\left(\widetilde{\gamma}^0(s)\right)$. Поскольку кривая $\widetilde{\gamma}^0$ параметризована при помощи параметра s, то можно определить отображение $g : \widetilde{\gamma}^0|_{I \setminus \gamma^*(B_f)} \to \to \mathbb{R}^n$ такое, что если $\gamma^*(s) \in A_k$, то $g(\widetilde{\gamma}^0(s)) = h_k\left(\widetilde{\gamma}^0(s)\right)$. Полагаем $\dfrac{\partial g_l}{\partial y_j}(s_*) = \dfrac{\partial h_{kl}}{\partial y_j}\left(\widetilde{\gamma}(s_*)\right)$. Из приведенного выше вытекает, что кривая γ^* локально абсолютно непрерывна на каждом открытом интервале мно-

жества $I \setminus \gamma^*(B_f)$ для почти всех кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Следовательно, согласно [281, теорема 1.3, соотношение (6)] получаем

$$l_{\gamma^*}\left(I \setminus \gamma^*(B_f)\right) = \int\limits_{I\setminus\gamma^*(B_f)} |\gamma^{*\prime}(s)|\, dm_1(s) \leq$$

$$\leq \int\limits_{I\setminus\gamma^*(B_f)} \left(\sum\limits_{l,j}\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}(s)\right)^2\right)^{1/2} dm_1(s)$$

для почти всех кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Поскольку $h_l \in W_{loc}^{1,n}$ и $m\left(U'\right) < \infty$, то

$$\int\limits_{I\setminus\gamma^*(B_f)} \left(\sum\limits_{l,j}\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}(s)\right)^2\right)^{1/2} dm_1(s) < \infty$$

для почти всех кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma^*$ [29, теорема 3, п. (e)]. Следовательно, для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ кривая γ^* спрямляема на $I \setminus \gamma^*(B_f)$.

2. Более того, $l_{\gamma^*}(C) = 0$ для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ и каждого множества C, $C \subset I \setminus \gamma^*(B_f)$, такого, что $\mathrm{mes}_1\,(C) = 0$. Действительно, $l_{\gamma^*}(C) = \int\limits_C |\gamma^{*\prime}(s)|\, dm_1(s) = 0$ для почти всех кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

3. Пусть B_l — множество всех точек ветвления x таких, что $i(x, f) = l$ и $\gamma^*(B_l) = \{s \in I : \gamma^*(s) \in B_l\}$. Покажем, что для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ кривая γ^* спрямляема на $I \setminus \bigcup\limits_{k>l} \gamma^*(B_k)$ при всех $l \in \mathbb{N}$ и $l_{\gamma^*}(C) = 0$ для произвольного множества C такого, что $\mathrm{mes}_1\,(C) = 0$ и $C \subset I \setminus \bigcup\limits_{k>l} \gamma^*(B_k)$. Доказательство проведем индукцией по l. При $l = 1$ утверждение доказано. Предположим, что это утверждение справедливо при $l = j - 1$. Покажем его справедливость также и при $l = j$. Отметим, что отображение f обладает N-свойством ввиду [112, следствие B], так что из равенства $m(B_f) = 0$, выполненного по условию леммы, вытекает, что также $m(f(B_f)) = 0$.

4. Покроем B_j не более, чем счетной системой нормальных областей $\{U_l\}_{l=1}^{\infty}$ таких, что $\mu\,(f, U_l) = j$, при этом $\mu\,(f, U_l) = N(f, U_l)$. (Такая система областей существует [115, лемма 2.9]). По предложению 4.5.4 отображение $g_l = g_{U_l}$, определенное соотношением (4.5.1), абсолютно непрерывно на почти всех кривых в $U_l^* = f(U_l)$ [281, п. 28.2]. Отметим, что при $\widetilde{\gamma}^0(s) \in f\left(B_j \cap U_l\right)$ выполнено условие $g_l\left(\widetilde{\gamma}^0(s)\right) = \gamma^*(s)$.

Обозначим $\alpha_{k,l} := g_l\left(\widetilde{\gamma}^{(k)}(s)\right)$, где $\widetilde{\gamma}^0|_{f(U_l)} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{\gamma}^{(k)}(s)$, $l = 1, 2, \ldots$. Учитывая абсолютную непрерывность g_l на почти всех кривых, $l_{\alpha_{k,l}}\left(\alpha_{k,l}\left(B_j \cap U_l\right)\right) = 0$ для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ таких, что $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, и, следовательно, по предложению 4.5.1 получаем

$$l_{\gamma^*}\left(\gamma^*\left(B_j \cap U_l\right)\right) = 0$$

для все тех же кривых $\widetilde{\gamma}$ и γ. Суммируя по всем окрестностям U_l, получаем, что $l_{\gamma^*}(\gamma^*(B_j)) = 0$ для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ таких, что $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. В предложении 4.5.2 полагаем $B := \bigcup\limits_{k>j} \gamma^*(B_k)$ и $E := \gamma^*(B_j)$. Отметим, что множество B есть замкнутым, поскольку локальный топологический индекс $i(x, f)$ является функцией, полунепрерывной снизу [117, лемма 4.5], [175, гл. VI, § 8, лемма 8.13]. По предположению индукции получаем, что кривая γ^* спрямляема на $I \setminus \bigcup\limits_{k>j} \gamma^*(B_k)$, выполнено условие $l_{\gamma^*}(C) = 0$ для $C \subset I \setminus \bigcup\limits_{k>j} \gamma^*(B_k)$ и $\mathrm{mes}_1\,(C) = 0$. Поскольку U' — компакт, то найдется $M \in \mathbb{N}$ такое, что $i(x, f) \le M$. Тогда по доказанному выше $l_{\gamma^*}\left(\bigcup\limits_{j=2}^{M} \gamma^*(B_j)\right) = 0$ для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ таких, что $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. По предложению 4.5.3 кривая γ^* абсолютно непрерывна и спрямляема для п.в. замкнутых кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$. Лемма доказана. $\Box$

4.5.5. На основе леммы 4.5.1 может быть доказана следующая теорема.

Теорема 4.5.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, $f \in W^{1,n}_{loc}(D)$, такое, что $K_O(x, f) \in L^{n-1}_{loc}$ (либо $K_I(x, f) \in L^1_{loc}$) и $m(B_f) = 0$. Тогда f является отображением с конечным искажением длины.*

Доказательство. Поскольку отображение f является открытым в D и принадлежит классу $W^{1,n}_{loc}(D)$, то отображение f дифференцируемо почти всюду [279, лемма 3], а также обладает N-свойством [112, следствие B]. Также f обладает N^{-1}-свойством [87, теорема 1.2]. Наконец, поскольку $f \in W^{1,n}_{loc}$, то отображение $f \in ACP$ [281, п. 28.2]. По лемме 4.5.1 $f \in ACP^{-1}$. Необходимое заключение вытекает на основании предложения 4.1.4. $\Box$

4.5.6. Следующее утверждение относится к случаю, когда рассматриваемое отображение a priori не является открытым и дискретным.

Следствие 4.5.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $W_{loc}^{1,n}$ такое, что $K_O(x, f) \in L_{loc}^p$ при некотором $p > n - 1$ и, кроме того, $m(B_f) = 0$. Тогда f является отображением с конечным искажением длины.*

Доказательство вытекает на основании того, что из условия

$$K_O(x, f) \in L_{loc}^p\,, \quad p > n - 1\,,$$

следует открытость и дискретность отображения f [113, 114], а также из теоремы 4.5.1. $\square$

Наиболее важным для нас является следующее

Следствие 4.5.2. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$ такое, что $K_O(x, f) \in L_{loc}^{n-1}$ (либо $K_I(x, f) \in L_{loc}^1$) и $m(B_f) = 0$. Тогда f является Q-отображением при $Q = K_O^{n-1}(x, f)$, а также Q-отображением при $Q = K_I(x, f)$.*

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 4.1.5 и теоремы 4.5.1.$\square$

Замечание 4.5.1. Из следствия 4.5.2 вытекает, что все результаты, полученные в главах 1—3, могут быть применены к открытым дискретным отображениям класса $W_{loc}^{1,n}$ таким, что $K_O(x, f) \in L_{loc}^{n-1}$ (либо $K_I(x, f) \in L_{loc}^1$) и $m(B_f) = 0$. Для справедливости этих результатов необходимо полагать $Q = K_O^{n-1}(x, f)$ (либо, соответственно, $Q = K_I(x, f)$) и рассматривать те же самые условия на Q, что и в указанных парагрфах.

4.6. Существование решения квазилинейного уравнения Бельтрами с вырождением

4.6.1. Рассмотрим вопрос, который никак не связан с результатами §4.2—4.5, однако представляет большой интерес с точки зрения приложений развитой в главах 1—3 теории.

Одна из наиболее известных работ, касающихся изучения квазилинейных уравнений Бельтрами, принадлежит выдающемуся ученому, академику Б. Боярскому [13]. В ней сформулирован ряд фундаментальных теорем, частный случай одной из которых приведен ниже. Для комплекснозначной функции $f : D \to \mathbb{C}$, заданной в области $D \subset \mathbb{C}$, имеющей частные производные по x и y при п.в. $z = x + iy$, полагаем $\overline{\partial} f = f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2$ и $\partial f = f_z = (f_x - if_y)/2$.

Определение 4.6.1. Функция $\nu = \nu(z, w) : D \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ удовлетворяет *условиям Каратеодори,* если ν измерима по $z \in D$ при каждом фиксированном $w \in \mathbb{C}$ и непрерывна по $w \in \mathbb{C}$ при п.в. $z \in D$.

В единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$f_{\overline{z}} = \nu\,(z, f(z))\, f_z\,, \tag{4.6.1}$$

называемое *квазилинейным уравнением Бельтрами*. Имеет место следующее утверждение [13, теорема 8.2].

Предложение 4.6.1. *Предположим, что функция $\nu\,(z, w)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и*

$$|\nu\,(z, w)\,| \le k < 1 \tag{4.6.2}$$

для п.в. $z \in \mathbb{D}$ при каждом фиксированном $w \in \mathbb{C}$. Тогда уравнение (4.6.1) имеет гомеоморфное решение $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям нормировки $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Здесь и далее под *решением* уравнения (4.6.1) понимается отображение $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ класса ACL, удовлетворяющее уравнению (4.6.1) при п.в. $z \in \mathbb{D}$. Напомним, что любой гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса ACL является дифференцируемым почти всюду [108, с. 128]. Таким образом, для гомеоморфизмов класса ACL запись (4.6.1) имеет смысл; в дальнейшем будем применять решения уравнения (4.6.1) в указанном выше смысле только для класса ACL гомеоморфизмов.

4.6.2. Основная цель настоящего параграфа заключается в том, чтобы установить теоремы существования для уравнения (4.6.1), минуя условия вида (4.6.2). Тематика вырожденных уравнений типа Бельтрами, т.е. уравнений, для которых комплексный коэффициент ν может быть близок к единице, достаточно интенсивно изучается, [20, 54, 121, 125, 185] и др. В то же время известно, что в контексте разрешимости уравнения (4.6.1) в классе ACL-гомеоморфизмов условие ограниченности левой части в (4.6.2) нельзя, например, заменить на условие локальной суммируемости соответствующей максимальной дилатации в произвольной сколь угодно большой степени $p \ge 1$ даже в том простом случае, когда ν зависит только от z. (Напомним, что определение максимальной дилатации дано формулой (1.9.7)). Условия, гарантирующие существование решений указанного выше уравнения, как и во многих других вопросах (например, об устранении изолированных особенностей, см. гл.2), являются предметом более тонкого анализа.

4.6.3. Всюду далее D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; m — мера Лебега в $\mathbb{C}$. Напомним, что якобиан (сохраняющего ориентацию) гомеоморфизма $f : D \to \mathbb{C}$ класса ACL почти всюду неотрицателен:

$$J(z, f) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \ge 0 \tag{4.6.3}$$

[108, с. 10]. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса ACL называется *регулярным,* если для него неравенство в (4.6.3) строгое. Аналогично, решение $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ уравнения (4.6.1) называется регулярным, если для этого решения $J_f(z) > 0$ п.в. в $\mathbb{D}$. Определения комплексной $\mu(z)$ и максимальной дилатаций $K_\mu(z)$, которые будут использоваться ниже, см. в п. 1.9.4. Отметим, что в силу условия (4.6.3), всегда $|\mu(z)| \le 1$ п.в. и $K_\mu \ge 1$ п.в. Кроме того, любой гомеоморфизм класса ACL удовлетворяет уравнению (4.6.1), где $\nu\,(z,\,f\,(z)) = \mu_f\,(z)$. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ класса ACL условимся называть $Q(z)$-*квазиконформным*, если $K_\mu(z) \le Q(z)$ при п.в. $z \in D$.

В дальнейшем используем следующее утверждение.

Предложение 4.6.2. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ — последовательность гомеоморфизмов класса ACL, имеющих комплексные дилатации $\mu_n(z)$, которые удовлетворяют условию $\dfrac{1+|\mu_n(z)|}{1-|\mu_n(z)|} \le Q(z) \in L^1_{loc}$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Если $f_n \to f$ локально равномерно в D при $n \to \infty$ и f — гомеоморфизм в D, то $f \in ACL$ и ∂f_n, $\overline{\partial} f_n$ сходятся слабо в L^1_{loc} к ∂f и $\overline{\partial} f$, соответственно. В этом случае отображение f является $Q(z)$-квазиконформным. Более того, если $\mu_n \to \mu$ при $n \to \infty$, то $\overline{\partial} f = \mu \partial f$ п.в. [198, теорема 3.1 и замечание 3.1].*

4.6.4. В наиболее общей форме главный результат параграфа содержится в следующей лемме.

Лемма 4.6.1. *Пусть функция $\nu = \nu\,(z,w) : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ удовлетворяет условиям Каратеодори и найдется измеримая по Лебегу функция $Q : \mathbb{D} \to [1,\infty]$ такая, что*

$$K_\nu\,(z,w) := \quad \frac{1+|\nu(z,w)|}{1-|\nu(z,w)|} \quad \le \quad Q(z) \in L^1_{loc}\,(\mathbb{D}) \tag{4.6.4}$$

при п.в. $z \in \mathbb{D}$ для любого $w \in \mathbb{C}$. Предположим, что для любого $z_0 \in \mathbb{D}$ и некотором $\varepsilon_0 <$ dist $(z_0, \partial\mathbb{D})$ выполнено соотношение

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z)\cdot\psi^2(|z-z_0|)\;dm(z) \le c\cdot I^p(\varepsilon)\,, \tag{4.6.5}$$

где $I(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, p — некоторая постоянная такая, что $0 < p \le 2$, и $\psi(t)$ — некоторая неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$ такая, что $0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, где ε_0' — некоторое положительное число, не превосходящее ε_0. Тогда уравнение (4.6.1) *имеет регулярное гомеоморфное решение f класса $W^{1,1}_{loc}$ в $\mathbb{D}$ такое, что $f^{-1}\in W^{1,2}_{loc}\left(f\left(\mathbb{D}\right)\right)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций:

$$\nu_n\left(z,w\right)=\left\{\begin{array}{rl}\nu\left(z,w\right), & Q(z)\le n, w\in\mathbb{C},\\ 0\ , & Q(z)>n, w\in\mathbb{C}.\end{array}\right. \tag{4.6.6}$$

Отметим, что $K_{\nu_n}(z,w)\le n$ при п.в. $z\in\mathbb{D}$ и всех $w\in\mathbb{C}$. Следовательно, $\nu_n\left(z,w\right)\le\frac{n-1}{n+1}<1$, поэтому уравнение (4.6.1), где вместо ν в правой части взято $\nu:=\nu_n$, а ν_n определено соотношениями (4.6.6), имеет гомеоморфное решение $f_n:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ с нормировками $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$, которое является n-квазиконформным в $\mathbb{D}$ [13, теорема 8.2]. Одновременно f_n являются $Q(z)$-квазиконформными в силу соотношения (4.6.4) и того, что $K_{\nu_n}(z,w)\le K_{\nu}(z,w)$. Следовательно, согласно [108, гл. V, соотношение (6.6)] каждое f_n является Q-гомеоморфизмом, а значит, и кольцевым Q-гомеоморфизмом. По лемме 3.2.2 и замечанию 3.2.2, учитывая соотношение (4.6.5), получаем, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет подпоследовательность f_{n_k}, которая сходится локально равномерно в $\overline{\mathbb{C}}$ к некоторому отображению f. В силу теоремы 3.4.1 и предложения 4.6.2, а также условий нормировки $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$, предельное отображение f является $Q(z)$-квазиконформным. Отметим, что для п.в. $z\in\mathbb{D}$ существует номер $k_0=k_0(z):\nu_{n_k}(z,w)=\nu(z,w)$ при $n_k\ge n_{k_0}(z)$ и всех $w\in\mathbb{C}$. Поэтому для п.в. z, $\mu_{n_k}(z)=\nu_{n_k}\left(z,f_{n_k}\left(z\right)\right)\to\nu\left(z,f(z)\right)$ при $k\to\infty$. Пусть $\mu_f(z)$ — характеристика предельного отображения f. Снова по предложению 4.6.2 получаем, что п.в. $\nu\left(z,f(z)\right)=\mu_f(z)$. Но это и означает, что отображение f является решением исходного уравнения (4.6.1).

Осталось показать, что отображение f — регулярное и $f^{-1}\in W^{1,2}_{loc}$. Так как f — гомеоморфизм, то $f_n^{-1}\to f^{-1}$ локально равномерно при $n\to\infty$. Обозначим $g_n=f_n^{-1}$. Отметим, что комплексная характеристика обратного отображения $g=f^{-1}$ связана с характеристикой f соотношением $\mu_g=-\mu_f\circ g$ [3, гл. I, п. C, соотношение 4]. В таком случае имеем

$$\int\limits_{B}\left|\partial g_n(w)\right|^2\,dm(w)=$$

$$=\int\limits_{B}\left(\left|\partial g_n(w)\right|^2-\left|\overline{\partial}g_n(w)\right|^2\right)\cdot\frac{\left|\partial g_n(w)\right|^2dm(w)}{\left(\left|\partial g_n(w)\right|^2-\left|\overline{\partial}g_n(w)\right|^2\right)}=$$

$$= \int\limits_B |J(w,g_n)| \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{\overline{\partial} g_n(w)}{\partial g_n(w)}\right|^2}\, dm(w) = \int\limits_{g_n(B)} \frac{dm(z)}{1-|\mu_n(z)|^2} \quad \le$$

$$\le \int\limits_{B^*} Q(z)\, dm(z) < \infty$$

для достаточно больших n, где B и B^* — относительно компактные области в $f(\mathbb{D})$ и $\mathbb{D}$, соответственно, такие, что $g_n(B) \subset B^*$. Замена переменных в интегралах справедлива, ибо g_n, $f_n \in W^{1,2}_{loc}$ [28, теорема 3.2.5]. Из последней оценки следует, что $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(f(\mathbb{D}))$ [168, гл. III, лемма 3.5]. Отсюда следует, что f обладает N^{-1}-свойством ввиду результата Ю.Г. Решетняка [161, § 4, теорема 3], что в свою очередь эквивалентно тому, что $J(z,f) \ne 0$ п.в. [151, теорема 1]. Наконец, для произвольного компакта $C \subset \mathbb{D}$ в силу неравенства Шварца норму производных ∂f и $\overline{\partial} f$ в $L^1(C)$ можно оценить следующим образом:

$$\|\overline{\partial} f\| \le \|\partial f\| \le \|Q(z)\|^{1/2} \cdot \|J(z,f)\|^{1/2} \le \|Q(z)\|^{1/2} \cdot \left(m\left(f(C)\right)\right)^{1/2},$$

откуда следует, что $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{D})$ (см. предложение 1.1.2). Лемма 4.6.1 доказана. $\Box$

4.6.5. Лемма 4.6.1, сформулированная и доказанная выше, является неплохим инструментом, позволяющим сформулировать основные результаты настоящего параграфа. Обозначим через $q_{z_0}(r)$ среднее значение функции $Q(z)$ над окружностью $\{|z-z_0| = r\}$, $q_{z_0}(r) == \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q(z_0+ re^{i\theta})\, d\theta$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 4.6.1. *Пусть функция $\nu(z,w) : \mathbb{D}\times\mathbb{C} \to \mathbb{D}$ удовлетворяет условиям Каратеодори и пусть $K_\nu(z,w) \le Q(z) \in L^1_{loc}(\mathbb{D})$. Предположим, что*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{rq_{z_0}(r)} = \infty\,,$$

где $\delta(z_0)$ — некоторое положительное число, $\delta(z_0) < \operatorname{dist}(z_0, \partial\mathbb{D})$. Тогда уравнение (4.6.1) *имеет регулярное гомеоморфное решение f класса $W^{1,1}_{loc}$ в $\mathbb{D}$ такое, что $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(f(\mathbb{D}))$.*

Доказательство. Отметим, что $Q(z)$ не меньше единицы, ибо по определению $K_\nu(z,w) \ge 1$ при п.в. z и каждом фиксированном w. Следовательно, $q_{z_0}(t) \geq 1$ при п.в. t. Полагаем

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{tq_{z_0}(t)}, & t \in (0, \delta(z_0)), \\ 0\,, & t \notin (0, \delta(z_0)). \end{cases}$$

Отметим, что $\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(z_0)} \psi(t)\,dt > 0 \quad \forall \quad \varepsilon \in (0, \delta(z_0))$, поскольку в противном случае $q_{z_0}(t) = \infty$ при п.в. $t \in (0, \delta(z_0))$, что невозможно, ибо по условию теоремы $Q(z) \in L^1_{loc}(\mathbb{D})$. Кроме того, $\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(z_0)} \psi(t)\,dt \leq \int\limits_{\varepsilon}^{\delta(z_0)} \dfrac{dt}{t} <$ $< \infty \forall\ \varepsilon \in (0, \delta(z_0))$. Таким образом, к указанной выше функции ψ можно применить лемму 4.6.1, из которой следует требуемое заключение. $\Box$

Теорема 4.6.2. *Пусть функция* $\nu(z, w) : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ *удовлетворяет условиям Каратеодори. Предположим, что* $K_\nu(z, w) \leq Q(z) \in$ $\in FMO(\mathbb{D})$. *Тогда уравнение* (4.6.1) *имеет регулярное гомеоморфное решение* f *класса* $W^{1,1}_{loc}$ *в* $\mathbb{D}$ *такое, что* $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}\,(f(\mathbb{D}))$.

Доказательство. Пусть $z_0 \in \mathbb{D}$, $\varepsilon_0 < \min\{\,\mathrm{dist}\,(z_0, \partial\mathbb{D})\,,\ e^{-1}\}$. На основании предложения 2.3.1 для функции $0 < \psi(t) = \dfrac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$ имеем

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z)\cdot\psi^2(|z-z_0|)\;dm(z) \;=\; O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\,.$$

Отметим также, что $I(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt \;=\; \log\dfrac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}$. Утверждение теоремы 4.6.2 следует теперь из леммы 4.6.1. $\Box$

Следствие 4.6.1. *В частности, если в каждой точке* $z_0 \in \mathbb{D}$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int\limits_{B(z_0,\,\varepsilon)} Q(z)\,dm(z) < \infty\,,$$

то уравнение (4.6.1) *имеет регулярное гомеоморфное решение* f *класса* $W^{1,1}_{loc}$ *в* $\mathbb{D}$ *такое, что* $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}\,(f(\mathbb{D}))$.

Теорема 4.6.3. *Пусть функция* $\nu(z, w) : \mathbb{D}\times\mathbb{C} \to \mathbb{D}$ *удовлетворяет условиям Каратеодори. Предположим, что* $K_\nu(z, w) \leq Q(z)$, *где*

$$q_{z_0}(r) = O\left(\log\frac{1}{r}\right) \qquad \forall \quad z_0 \in \mathbb{D} \tag{4.6.7}$$

при $r \to 0$. *Тогда уравнение* (4.6.1) *имеет регулярное гомеоморфное решение* f *класса* $W^{1,1}_{loc}$ *в* $\mathbb{D}$ *такое, что* $f^{\,-1} \in W^{1,2}_{loc}\,(f(\mathbb{D}))$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно выбрать в лемме 4.6.1 произвольно $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0, \partial\mathbb{D})$ и функцию $\psi(t) = \dfrac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$. Отметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} \frac{Q(z)dm(z)}{\left(|z-z_0|\log\frac{1}{|z-z_0|}\right)^2} =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{Q(z)dm(z)}{\left(|z-z_0|\log\frac{1}{|z-z_0|}\right)^2}\, d\mathcal{A} \right) dr \le$$

$$\le\ 2\pi \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r\log\frac{1}{r}} \ =\ 2\pi\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}} \ =\ 2\pi\cdot I(\varepsilon)\,,$$

где $I(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt$. Заключение теоремы следует теперь из леммы 4.6.1. □

Следствие 4.6.2. *Условие (4.6.7) и заключение теоремы 4.6.3 выполнены, если потребовать, чтобы в каждой точке* $z_0 \in \mathbb{D}$, $Q(z) \le C\cdot\log\dfrac{1}{|z-z_0|}$ *для некоторой постоянной* C *(которая может зависеть от* z_0*) при* $z \to z_0$.

Замечание 4.6.1. Отметим, что решения квазилинейного уравнения Бельтрами, которые приведены в данном параграфе, вообще говоря, не единственны. Единственность решений для уравнения Бельтрами — предмет отдельных исследований, требующих применения иной техники, не связанной с теорией сходимости отображений.

Список литературы

[1] *Agard S.* A removable singularity theorem for local homeomorphisms / S. Agard, A. Marden // Indiana Math. J. — 1970. — **20.** — P. 455—461.

[2] *Ahlfors L.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets / L. Ahlfors, A. Beurling // Acta Math. — 1950. — **83.** — P. 101—129.

[3] *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. — Москва: Мир, 1969. — 133 с.

[4] *Andreian Cazacu C.* Sur les transformations pseudoanalytiques // Rev. Math. Pures Appl. — 1957. — **2.** — P. 383—397.

[5] *Andreian Cazacu C.* On the length-area dilatation // Complex Var. Theory Appl. — 2005. — **50,** N 7—11. — P. 765—776.

[6] *Astala K.* Mappings of BMO-bounded distortion / K. Astala, T. Iwaniec, P. Koskela and G. Martin // Math. Annalen. — 2000. — **317.** — P. 703—726.

[7] *Astala K.* A remark on quasiconformal mappings and BMO-functions // Michigan Math. J. — 1983. — **30.** — P. 209—212.

[8] *Astala K.* Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmuller space / K. Astala and F.W. Gehring // J. d'Anal. Math. — 1986. — **46.** — P. 16—57.

[9] *Astala K.* Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane / K. Astala, T. Iwaniec and G. Martin. — Princeton: Princeton University Press, 2009. — 677 p.

[10] *Беккенбах Э.* Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Белман. — М.: Наука, 1965.

[11] *Билута П.А.* Экстремальные проблемы для отображений, квазиконформных в среднем // Сиб. матем. ж. — 1965. — **6,** № 4. — С. 717—726.

[12] *Bishop C.J.* On conformal dilatation in space / C.J. Bishop, V.Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen // Intern. J. Math. and Math. Sci. — 2003. — **22.** — P. 1397—1420.

[13] *Боярский Б.В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. — 1957. — **43(85),** № 4. — С. 451—503.

[14] *Bojarski B.* Another approach to Liouville theorem / B. Bojarski and T. Iwaniec // Math. Nachr. — 1982. — **107.** — P. 253—262.

[15] *Bojarski B.* Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$ / B. Bojarski and T. Iwaniec / Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. — 1983. — **8,** N 2. — P. 257—324.

[16] *Bojarski B.V.* General Beltrami equations and BMO / B.V. Bojarski , V.Ya. Gutlyanskiĭ, V.I. Ryazanov // Ukr. Math. Bull. — 2008. — **5,** N 3. — P. 305—326.

[17] *Bojarski B.V.* On the Beltrami equations with two characteristics / B.V. Bojarski , V.Ya. Gutlyanskiĭ, V.I. Ryazanov // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2009. — **54,** N 10. — P. 935—950.

[18] *Bojarski B.* On the Beltrami equation, once again: 54 years later / B. Bojarski // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2010. — **35,** N 1. — P. 59—73.

[19] *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. — М.: Наука, 1965. — 424 с.

[20] *Brakalova M.A.* On solution of the Beltrami equation. II / M.A. Brakalova and J.A. Jenkins // Publ. de L'Inst. Math. Nouv. sér. — 2004. — **75(89).** — P. 3—8.

[21] *Caraman P.* n-dimensional quasiconformal mappings — Newfoundland, NJ: Haessner Publishing, 1974.

[22] *Caraman P.* Relations between p-capacity and p-module (I) // Rev. Roum. Math. Pures Appl. — 1994. — **39,** N 6. — P. 509—553.

[23] *Cristea M.* Mappings of finite distortion: Zoric's theorem, and equicontinuity results // Rev. Roum. Math. Pures Appl. — 2007. — **52,** N 5. — P. 539—554.

[24] *Cristea M.* Mappings with finite distortion and arbitrary Jacobian sign // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2007. — **52,** N 1. — P. 43—57.

[25] *Cristea M.* Local homeomorphisms having local ACL^n inverses // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2008. — **53,** N 1. — P. 77—99.

[26] *Cristea M.* Open discrete mappings having local ACL^n inverses // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — **55,** N 1—3. — P. 61—90.

[27] *Евграфов М.А.* Аналитические функции. — М.: Наука, 1991. — 448 с.

[28] *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. — М.: Наука, 1987. — 760 с.

[29] *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. — 1957. — **98.** — P. 171—219.

[30] *Gehring F.W.* The definitions and exceptional sets for quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. — 1960. — **281.** — P. 1—28.

[31] *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — **103.** — P. 353—393.

[32] *Gehring F.W.* Lipschitz mappings and p-capacity of rings in n-space // Ann. of Math. Stud. — 1971. — **66.** — P. 175—193.

[33] *Gehring F.W.* Quasiconformal mappings // Complex Analysis and its Applications, V. 2. — Vienna: International Atomic Energy Agency, 1976. — P. 213—268.

[34] *Gehring F.W.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings / F.W. Gehring and O. Martio // J. d'Anal. Math. — 1985. — **24.** — P. 181—206.

[35] *Golberg A.L.* Some classes of plane topological mappings with generalized first derivatives // Ukr. Math. J. — 1992. — **44,** N 8. — P. 1016—1018.

[36] *Golberg A.L.* Quasiconformal mappings and radii of normal systems of neighborhoods // Ukr. Math. J. — 1999. — **51,** N 10. — P. 1566—1568.

[37] *Golberg A.L.* Extremal problems in a class of mappings with bounded integral characteristics // Ukr. Math. J. — 2000. — **52,** N 4. — P. 624—627.

[38] *Golberg A.L.* On geometric and analytic definitions of quasiconformality // Mat. Stud. — 2002. — **18,** N 1. — P. 29—34.

[39] *Golberg A.* Homeomorphisms with finite mean dilatations // Contemporary Math. — 2005. — **382.** — P. 177—186.

[40] *Golberg A.* Geometric characterization of locally univalent analytic functions, and a generalization // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 2006. — **51,** N 5—6. — P. 633—639.

[41] *Golberg A.* On generalization of Menshoff's theorem // Israel J. Math. — 2006. — **156.** — P. 243—254.

[42] *Golberg A.* Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms // Further Progress in Analysis, World Scientific Publ. — 2009. — P. 218—228.

[43] *Golberg A.* Directional dilatations in space // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — **55,** N 1-3. — P. 13—29.

[44] *Golberg A.* Homeomorphisms with integrally restricted moduli // In the book: Complex analysis and dynamical systems IV. Part 1. Contemp. Math., 553. — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011. — P. 83—98.

[45] *Golberg A.* Topological mappings of integrally bounded p-moduli / A. Golberg, R. Salimov // Ann. Univ. Bucharest (math. series). — 2012. — **3,** N 1. — P. 49—66.

[46] *Гольдштейн В.М.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения / В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк. — М.: Наука, 1983. — 284 с.

[47] *Гурвиц А.* Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

[48] *Гутлянский В.Я.* Точные оценки модуля однолистной аналитической функции с квазиконформным продолжением / В.Я. Гутлянский, В.А. Щепетев // Матем. заметки. — 1983. — **33,** № 2. — С. 179—186.

[49] *Gutlyanskiĭ V.Ya.* Solutions with singularities of an equation in mathematical physics / V.Ya. Gutlyanskiĭ and V.I. Ryazanov // Ukr. Math. J. — 1992. — **44,** N 2. — P. 155—159.

[50] *Гутлянский В.Я.* К теории локального поведения квазиконформных отображений / В.Я. Гутлянский, В.И. Рязанов // Изв. АН России, сер. мат. — 1995. — **59,** № 3. — С. 31—58.

[51] *Gutlyanskiĭ V.Ya.* On convergence theorems for space quasiregular mappings / V.Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, V.I. Ryazanov, M. Vuorinen // Forum Math. — 1998. — **10.** — P. 353—375.

[52] *Gutlyanskiĭ V.Ya.* On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings / V.Ya. Gutlyanskiĭ, V.I. Ryazanov, O. Martio, M. Vuorinen // Studia Math. — 1998. — **128,** № 3. — P. 243—271.

[53] *Gutlyanskiĭ V.Ya.* Infinitesimal geometry of quasiregular mappings / V.Ya. Gutlyanskiĭ, V.I. Ryazanov, O. Martio, M. Vuorinen // Ann. Acad. Sci. Fenn. — 2000. — **25,** N 1. — P. 101—130.

[54] *Gutlyanskiĭ V.Ya.* On the degenerate Beltrami equation / V.Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, T. Sugava and M. Vuorinen // Trans. Amer. Math. Soc. — 2005. — **357,** N 3. — P. 875—900.

[55] *Gutlyanskiĭ V.Ya.* Rings and Lipschitz continuity of quasiconformal mappings / V.Ya. Gutlyanskiĭ and A. Gol'berg. — Basel: Trends Math., Birkhauser, 2009. — P. 187—192.

[56] *Gutlyanskiĭ V.Ya.* On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space / V.Ya. Gutlyanskiĭ and A. Gol'berg // J. d'Anal. Math. — 2009. — **109.** — P. 233-—251.

[57] *Гутлянский В.Я.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений / В.Я. Гутлянский, В.И. Рязанов. — К.: Наук. думка, 2011. — 425 с.

[58] *The Beltrami Equation*: A Geometric Approach / [Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Srebro U., Yakubov E.]. — New York etc.: Springer, 2012. — 301 p.

[59] *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. AI. — 1988. — **13,** N 1. — P. 25—70.

[60] *Дубинин В.Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. — Владивосток: Дальнаука, 2009. — 390 с.

[61] *Hartman P.* On isometries and on a theorem of Liouville // Math. Z. — 1958. — **69.** — P. 202—210.

[62] *Hencl S.* Mappings of finite distortion: discreteness and openness for quasi-light mappings / S. Hencl and P. Koskela // Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire. — 2005. — **22,** N 3. — P. 331—342.

[63] *Hencl S.* Quasihyperbolic boundary conditions and capacity: uniform continuity of quasiconformal mappings / S. Hencl and P. Koskela // J. d'Anal. Math. — 2005. — **96.** — P. 19—35.

[64] *Heinonen J.* Sobolev mappings with integrable dilatations / J. Heinonen and P. Koskela // Arch. Rational Mech. Anal. — 1993. — **125.** — P. 81—97.

[65] *Heinonen J.* The boundary absolute continuity of quasiconformal mappings // Amer. J. of Math. — 1994. — **116.** — P. 1545—1567.

[66] *Herron J.* Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains / J. Herron and P. Koskela // Compl. Var. Theor. Appl. — 1990. — **15.** — P. 167—179.

[67] *Heikkala V.* Inequalities for conformal capacity, modulus, and conformal invariants. — Helsinki: Suomalainen tiedeakatemia, 2002. — 62 p.

[68] *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. Mat. — 1975. — **13.** — P. 131—144.

[69] *Holopainen I.* Mappings of finite distortion: global homeomorphism theorem / I. Holopainen, P. Pankka // Ann. Ac. Sc. Fen. Math. — 2004. — **29.** — P. 59—80.

[70] *Hurewicz W.* Dimension Theory / W. Hurewicz, H. Wallman. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1948. — 165 p.

[71] *Ignat'ev A.* Finite mean oscillation in the mapping theory / Ignat'ev A., Ryazanov V. — Helsinki: University of Helsinki, Reports in Mathematics, 2002. — Prepr. 332, 17 pp., http: //wiki.helsinki.fi/display/mathstat/Reports.

[72] *Игнатьев А.* Конечное среднее колебание в теории отображений / А. Игнатьев, В. Рязанов // Укр. матем. вестник. — 2005. — 2, № 3. — С. 395—417.

[73] *Игнатьев А.* К теории граничного поведения пространственных отображений / А. Игнатьев, В. Рязанов // Укр. матем. вестник. — 2006. — **3,** № 2. — С. 199—211.

[74] *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. — 1965. — **25.** — P. 175—203.

[75] *Iwaniec T.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis / T. Iwaniec, G. Martin. — Oxford: Clarendon Press, 2001. — 552 p.

[76] *Iwaniec T.* On mappings with integrable dilatation / T. Iwaniec, V. Sverák // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — **118.** — P. 181—188.

[77] *Iversen F.* Recherces sur les fonctions inverses des fonctions mèromorphes: Thesis. — Helsinki, 1914.

[78] *John F.* On functions of bounded mean oscillation / F. John, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — **14.** — P. 415—426.

[79] *Kauhanen J.* Mappings of finite distortion: discreteness and openness / J. Kauhanen, P. Koskela and J. Maly // Arch. Rational Mech. Anal. — 2001. — **160.** — P. 135—151.

[80] *Kauhanen J.* Mappings of finite distortion: condition N / J. Kauhanen, P. Koskela and J. Maly // Michigan Math. J. — 2001. — **49.** — P. 169—181.

[81] *Kovtonyuk D.* On the theory of mappings with finite area distortion / D. Kovtonyuk, V. Ryazanov // J. d' Anal. Math. — 2008. — **104.** — P. 291—306.

[82] *Ковтонюк Д.А.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов / Д.А. Ковтонюк, В.И. Рязанов // Укр. матем. вестник. — 2008. — **5,** № 2. — С. 159—184.

[83] *Коллингвуд Э.* Теория предельных множеств / Э. Коллингвуд и А. Ловатер. — М.: Мир, 1971. — 312 с.

[84] *Копылов А.П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. — Новосибирск: Наука, 1990.

[85] *Koskela P.* Mappings of finite distortion: the zero set of the Jacobian / P. Koskela and J. Maly // J. Eur. Math. Soc. — 2003. — **5,** N 2. — P. 95—105.

[86] *Koskela P.* Mappings of finite distortion: the sharp modulus of continuity / P. Koskela and J. Onninen // Trans. Amer. Math. Soc. — 2003. — **355,** N 5. — P. 1905—1920.

[87] *Koskela P.* Mappings of finite distortion: The zero set of Jacobian / P. Koskela, J. Maly // J. Eur. Math. Soc. — 2003. — **5,** N 2. — P. 95—105.

[88] *Koskela P.* Removability theorems for quasiregular mappings / P. Koskela and O. Martio // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1990. — **15.** — P. 381—399.

[89] *Koskela P.* Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities / P. Koskela and J. Onninen // J. Reine Angew. Math. — 2006. — **599.** — P. 1—26.

[90] *Koskela P.* Mappings of finite distortion: Injectivity radius of a local homeomorphism / P. Koskela, J. Onninen and K. Rajala // Future Trends in Geometric Function Theory RNC Workshop Jyväskylä, Report 92, Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, 2003. — P. 169—174.

[91] *Koskela P.* Mappings of finite distortion: removable singularities / P. Koskela, K. Rajala // Israel J. Math. — 2003. — **136.** — P. 269—283.

[92] *Koskela P.* Mappings of finite distortion: formation of cusps / P. Koskela, J. Takkinen // Publ. Math. — 2007. — **51.** — P. 223—242.

[93] *Кругликов В.И.* О существовании и единственности отображений, квазиконформных в среднем // В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений. — К.: Наук. думка, 1973. — С. 123—147.

[94] *Кругликов В.И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. — 1986. — **130,** № 2. — С. 185—206.

[95] *Кругликов В.И.* Емкости и простые концы пространственной области / В.И. Кругликов и В.И. Пайков // Докл. АН УССР, сер. А. — 1987. — **145,** № 5. — С. 10—13.

[96] *Крушкаль С.Л.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. — 1964. — **157,** №3. — С. 517—519.

[97] *Крушкаль С.Л.* Об абсолютной интегрируемости и дифференцируемости некоторых классов отображений многомерных областей // Сиб. матем. ж. — 1965. — **6,** № 3. — С.692—696.

[98] *Крушкаль С.Л.* Об отображениях, ε-квазиконформных в среднем // Сиб. матем. ж. — 1967. — **8,** № 4. — С. 798—806.

[99] *Крушкаль С.Л.* Квазиконформные отображения — новые методы и приложения / С.Л. Крушкаль, Р. Кюнау. — Новосибирск: Наука, 1984. — 216 с.

[100] *Кудьявин В.С.* Оценки искажения расстояния при отображениях, квазиконформных в среднем // Динамика сплош. ср. — 1981. — № 52. — С. 168—171.

[101] *Кудьявин В.С.* Локальные граничные свойства отображений, квазиконформных в среднем. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1981. — С. 168—171.

[102] *Кудьявин В.С.* Поведение класса отображений, квазиконформных в среднем, в изолированной особой точке // Докл. АН СССР. — 1984. — **277,** № 5. — С. 1056—1058.

[103] *Куратовский К.* Топология. (Т. 1).— М.: Мир, 1966. — 594 с.

[104] *Куратовский К.* Топология. (Т. 2). — М.: Мир, 1969. — 624 с.

[105] *Лавреньтъев М.А.* Основная задача теории квазиконформных отображений плоских областей // Матем. сб. — 1947. — **21 (63),** № 2. — С. 285—320.

[106] *Лавреньтъев М.А.* Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей // Изв. АН России, сер. мат. — 1948. — **12,** № 6. — С. 513—554.

[107] *Lehto O.* Homeomorphisms with a prescribed dilatation — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1968. — P. 58—73.

[108] *Lehto O.* Quasiconformal Mappings in the Plane / O. Lehto, K. Virtanen. — New York etc.: Springer, 1973. — 258 p.

[109] *Loewner C.* On the conformal capacity in space // J. Math. Mech. — 1959. — **8.** — P. 411—414.

[110] *Ломако Т.В.* О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу // Укр. матем. ж. — 2009. — **61,** № 10. — С. 1329—1337.

[111] *Lomako T.* On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations / T. Lomako, R. Salimov and E. Sevost'yanov // Ann. Univ. Bucharest (math. series). — 2010. — **LIX,** N 2. — P. 261—271.

[112] *Maly J.* Lusin's condition N and mappings of the class $W^{1,n}_{loc}$ / J. Maly and O. Martio // J. Reine Angew. Math. — 1995. — **458.** — P. 19—36.

[113] *Manfredi J.J.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions / J.J. Manfredi and E. Villamor // Bull. Amer. Math. Soc. — 1995. — **32,** N 2. — P. 235—240.

[114] *Manfredi J.J.* An extension of Reshetnyak's theorem / J.J. Manfredi and E. Villamor // Indiana Univ. Math. J. — 1998. — **47,** N 3. — P. 1131—1145.

[115] *Martio O.* Definitions for quasiregular mappings / O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1969. — **448.** — P. 1—40.

[116] *Martio O.* Distortion and singularities of quasiregular mappings / O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1970. — **465.** — P. 1—13.

[117] *Martio O.* Topological and metric properties of quasiregular mappings / O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1971. — **488.** — P. 1—31.

[118] *Martio O.* Boundary behavior of quasiregular mappings / O. Martio and S. Rickman // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1972. — **507.** — P. 1—17.

[119] *Martio O.* Measure properties of the branch set and its image of quasiregular mappings / O. Martio and S. Rickman // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1973. — **541.** — P. 1—15.

[120] *Мартио О.* Продолжение квазиконформных отображений / О. Мартио и Р. Някки // Сиб. матем. ж. — 1987. — **28,** № 4. — С. 162—170.

[121] *Martio O.* On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equation / O. Martio, V. Miklyukov // Complex Var. Theory Appl. — 2004. — **49,** N 7—9. — P. 647—656.

[122] *Martio O.* To the theory of Q-homeomorphisms / O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Dokl. Akad. Nauk Rossii. — 2001. — **381,** N 1. — P. 20—22.

[123] *Martio O.* Mappings with finite length distortion / O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // J. d'Anal. Math. — 2004. — **93.** — P. 215—236.

[124] *Martio O.* On Q-homeomorphisms / O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2005. — **30,** N 1. — P. 49—69.

[125] *Moduli* in modern mapping theory / Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. — New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. — 367 p.

[126] *Martio O. BMO* and Injectivity of Space Quasiregular Mappings / O. Martio, V. Ryazanov and M. Vuorinen // Math. Nachr. — 1999. — **205.** — P. 149—161.

[127] *Martio O.* Elliptic equations and maps of bounded length distortion / O. Martio and J. Väisälä // Math. Ann. — 1988. — **282.** — P. 423—443.

[128] *Martio O.* Universal radius of injectivity for locally quasiconformal mappings / O. Martio and U. Srebro // Israel J. Math. Ann. — 1978. — **29,** N 1. — P. 17—23.

[129] *Мазья В.Г.* Пространства Соболева. — Л.: Изд-во ленинградского ун-та, 1985. — 416 с.

[130] *Миклюков В.М.* Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве // Тр. Томского ун-та, сер. мех.-мат. — 1966. — **189.** — С. 80—85.

[131] *Миклюков В.М.* Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. — 1969. — **188,** № 3. — С. 525—527.

[132] *Миклюков В.М.* Об ε-квазиконформных отображениях шара на шар // Докл. АН СССР. — 1969. — **188,** № 4. — С. 734—735.

[133] *Миклюков В.М.* Граничные свойства n-мерных квазиконформных отображений // Докл. АН СССР. — 1970. — **193,** № 3. — С. 525—527.

[134] *Миклюков В.М.* Об одной оценке модуля семейств кривых на минимальной поверхности и ее применениях / В.М. Миклюков // Успехи матем. наук. — 1979. — **34(207),** № 3. — С. 207—209.

[135] *Миклюков В.М.* Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображений с ограниченным искажением // Матем. сб. — 1980. — **111(153),** № 1. — С. 42—66.

[136] *Миклюков В.М.* О существовании и единственности квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками // В кн.: Дослідження в теорії функцій комплексної змінної та її застосувань / В.М. Миклюков, Г.Д. Суворов. — К.: Ін-т математики АН УРСР, 1972. — С. 45—53.

[137] *Миклюков В.М.* О квазиконформно плоских поверхностях в римановых многообразиях // Изв. АН России, сер. мат. — 2003. — **67,** № 5. — С. 83—106.

[138] *Миклюков В.М.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. — Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005. — 273 с.

[139] *Miniowitz R.* Normal families of quasimeromorphic mappings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — **84,** N 1. — P. 35—43.

[140] *Mostow G.D.* Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms // Inst. Hautes Études Sci. Publ. math. — 1968. — **34.** — P. 53—104.

[141] *Näkki R.* Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. — 1970. — **484.** — P. 1—50.

[142] *Näkki R.* Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings / R. Näkki and B. Palka // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — **37,** N 2. — P. 427—433.

[143] *Ohtsuka M.* Extremal Length and Precise Functions. — Tokyo: Gakkotosho Co., 2003.

[144] *Perovich M.* Isolated singularity of the mean quasiconformal mappings. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979. — P. 212—214.

[145] *Перович М.* Глобальная гомеоморфность отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. — 1976. — **230,** № 4. — С. 781—784.

[146] *Песин И.Н.* К теории общих Q-квазиконформных отображений // Докл. АН СССР. — 1955. — **102,** № 2. — С. 223—224.

[147] *Песин И.Н.* Отображения, квазиконформные в среднем // Докл. АН СССР. — 1969. — **187,** № 4. — С. 740—742.

[148] *Плакса С.А.* Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. II // Укр. мат. ж. — 2001. — **53,** № 6. — С. 800—809.

[149] *Полецкий Е.А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений / Е.А. Полецкий // Матем. сб. — 1970. — **83,** № 2. — С. 261—272.

[150] *Полецкий Е.А.* О стирании особенностей квазиконформных отображений // Матем. сб. — 1973. — **92 (174),** № 2 (10). — С. 242—256.

[151] *Пономарев С.П.* N^{-1}-свойство отображений и условие (N) Лузина // Матем. заметки. — 1995. — **58.** — С. 411—418.

[152] *Пономарев С.П.* Интегральный критерий квазирегулярности // Сиб. матем. ж. — 1997. — **38,** № 1. — С. 173—181.

[153] *Rado T.* Continuous Transformations in Analysis / T. Rado and P.V. Reichelderfer. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1955. — 441 p.

[154] *Rajala K.* Mappings of finite distortion: the Rickman-Picard theorem for mappings of finite lower order // J. Anal. Math. — 2004. — **94.** — P. 235—248.

[155] *Rajala K.* Mappings of finite distortion: Removability of Cantor Sets // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2004. — **29,** N 2. — P. 269—281.

[156] *Rajala K.* Mappings of finite distortion: removable singularities for locally homeomorphic mappings // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — **132,** N 11. — P. 3251—3258.

[157] *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. — 232 p.

[158] *Reich E.* On the behavior of quasiconformal mappings at a point / E. Reich and H. Walczak / Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — **117.** — P. 338—351.

[159] *Решетняк Ю.Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду // Докл. АН СССР. — 1966. — **170,** № 6. — С. 1273—1275.

[160] *Решетняк Ю.Г.* Оценки модуля непрерывности для некоторых отображений // Сиб. матем. ж. — 1966. — **7,** № 5. — С. 1106—1114.

[161] *Решетняк Ю.Г.* Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными // Сиб. матем. ж. — 1966. — **7,** № 4. — С. 886—919.

[162] *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Докл. АН СССР. — 1967. — **174,** № 6. — С. 1281—1283.

[163] *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. матем. ж. — 1967. — **8,** № 3. — С. 629—658.

[164] *Решетняк Ю.Г.* Об условии ограниченности индекса для отображений с ограниченным искажением // Сиб. матем. ж. — 1968. — **9,** № 2. — С. 354—367.

[165] *Решетняк Ю.Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду // Матем. сб. — 1968. — **75,** № 3. — С. 323—334.

[166] *Решетняк Ю.Г.* О множестве точек ветвления отображений с ограниченным искажением // Сиб. матем. ж. — 1970. — **11,** № 6. — С. 1333—1339.

[167] *Решетняк Ю.Г.* О граничном поведении функций с обобщенными производными // Сиб. матем. ж. — 1972. — **13,** № 2. — С. 411—420.

[168] *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. — Новосибирск: Наука, 1982. — 285 с.

[169] *Rickman S.* Path lifting for discrete open mappings // Duke Math. J. — 1973. — **40.** — P. 187—191.

[170] *Rickman S.* A path lifting construction for discrete open mappings with application to quasimeromorphic mappings // Duke Math. J. — 1975. — **42,** N 4. — P. 797—809.

[171] *Rickman S.* On the value distribution of quasimeromorphic maps // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1976. — **2.** — P. 447—466.

[172] *Rickman S.* On the number of omitted values of entire quasiregular mappings // J. d'Anal. Math. — 1980. — **37.** — P. 100—117.

[173] *Rickman S.* The analogue of Picard's theorem for quasiregular mappings in dimension three // Acta Math. — 1985. — **154,** N 3—4. — P. 246—250.

[174] *Rickman S.* Remarks on the local index of quasiregular mappings / S. Rickman and U. Srebro // J. d'Anal. Math. — 1986. — **46.** — P. 246—250.

[175] *Rickman S.* Quasiregular mappings. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1993. — 213 p.

[176] *Rickman S.* Nonremovable Cantor sets for bounded quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1995. — **20.** — P. 155—165.

[177] *Rickman S.* Defect relation and its realization for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1995. — **20.** — P. 207—243.

[178] *Ryazanov V.I.* Some questions of Convergence and Compactness for Quasiconformal Mappings // Amer. Math. Soc. Transl. — 1986. — **131.** — P. 7—19.

[179] *Рязанов В.И.* О компактификации классов с интегральными ограничениями на характеристики Лаврентьева // Сиб. матем. ж. — 1992. — **33,** № 1. — С. 87—104.

[180] *Рязанов В.И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. матем. ж. — 1993. — **45,** № 7. — С. 1009—1019.

[181] *Рязанов В.И.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // Сиб. матем. ж. — 1996. — **37,** № 2. — С. 378—388.

[182] *Рязанов В.И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01. — Донецк, 1993. — 281 с.

[183] *Рязанов В.* К теории BMO-квазирегулярных отображений / В. Рязанов, У. Сребро и Э. Якубов // Докл. Акад. наук России. — 1999. — **369,** № 1. — С. 13—15.

[184] *Ryazanov V.* BMO-quasiconformal mappings / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // J. d'Anal. Math. — 2001. — **83.** — P. 1—20.

[185] *Ryazanov V.* Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean mean oscillation / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Sib. Adv. in Math. — 2001. — **11,** N 2. — P. 94—130.

[186] *Ryazanov V.* On ring solutions of Beltrami equations / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // J. d'Anal. Math. — 2005. — **96.** — P. 117—150.

[187] *Ryazanov V.* Finite mean oscillation and the Beltrami equation / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Israel Math. J. — 2006. — **153.** — P. 247—266.

[188] *Ryazanov V.* To the theory of the Beltrami equations / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Укр. матем. ж. — 2006. — **58,** № 11. -– С. 1571—1583.

[189] *Рязанов В.И.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений / В.И. Рязанов и Р.Р. Салимов / Укр. матем. вестник. — 2007. — **4,** № 2. — С. 199—234.

[190] *Ryazanov V.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Ukr. Math. Bull. — 2007. — **4,** N 1. — P. 79—115.

[191] *Рязанов В.И.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов / В.И. Рязанов, Е.А. Севостьянов // Сиб. матем. ж. — 2007. — **48,** № 6. — С. 1361—1376.

[192] *Ryazanov V.* Toward the theory of ring Q-homeomorphisms / V. Ryazanov, E. Sevost'yanov // Israel J. Math. — 2008. — **168.** — P. 101—118.

[193] *Ryazanov V.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean / V. Ryazanov, E. Sevost'yanov // Ann. Acad. Sci. Fenn. — 2011. — **36.** — P. 231—244.

[194] *Рязанов В.И.* Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений / В.И. Рязанов, Е.А. Севостьянов // Сиб. матем. ж. — 2011. — **52,** № 3. — С. 665—679.

[195] *Ryazanov V.* On the convergence of spatial homeomorphisms / V. Ryazanov, E. Sevost'yanov. — Мат. студiї. — 2013. — **39,** № 1. — С. 34—44.

[196] *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Normal families of space mappings / В.И. Рязанов, Е.А. Севостьянов // Междунар. конф. по анализу и геометрии, посв. 75-летию акад. Ю.Г. Решетняка, Новосибирск, 23 августа—2 сентября 2004 г. — 2004. — С. 224—225.

[197] *Рязанов В.И.* Асимптотика регулярных решений уравнений Бельтрами / В.И. Рязанов и Е.А. Севостьянов // Междунар. летняя матем. шк. памяти В.А. Плотникова, Одесса, 9—14 августа 2010 г. — 2010. — С. 86.

[198] *Ryazanov V.* On convergence theory for Beltrami equations / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Укр. матем. вестник. — 2008. — **5,** № 4. — С. 524—535.

[199] *Ryazanov V.* To strong ring solutions of the Beltrami equations / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Uzbek. Math. J. — 2009. — N 1. — P. 127—137.

[200] *Ryazanov V.* Moduli in modern mapping theory / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Rev. Roum. Math. Pures Appl. — 2009. — **54,** N 5—6. — P. 549—563.

[201] *Ryazanov V.* On strong solutions of the Beltrami equations / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — **55,** N 1—3. — P. 219—236.

[202] *Ryazanov V.* On integral conditions in the mapping theory / V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov // Ukr. Math. Bull. — 2010. — **7,** N 1. — P. 73—87.

[203] *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. — 495 с.

[204] *Salimov R.* ACL and differentiability of Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 2008. — **33.** — P. 295—301.

[205] *Салимов Р.Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. АН России, сер. мат. — 2008. — **72,** № 5. — С. 141—148.

[206] *Salimov R.* On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 2010. — **35.** — P. 285—289.

[207] *Салимов Р.Р.* ACL и дифференцируемость почти всюду кольцевых гомеоморфизмов / Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2008. — **16.** — С. 171—178.

[208] *Салимов Р.Р.* Оценка дилатаций открытых дискретных Q-отображений / Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2009. — **18.** — С. 148—154.

[209] *Salimov R.R.* ACL and differentiability of the open discrete ring mappings / R.R. Salimov and E.A. Sevost'yanov // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — **55,** N 1—3. — P. 49 — 59.

[210] *Салимов Р.Р.* О теореме Лаврентьева—Зорича для отображений, более общих, чем квазиконформные / Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов // Докл. АН Украины. — 2010. — № 7. — С. 22—27.

[211] *Салимов Р.Р.* Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций / Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов // Матем. сб. — 2010. — **201,** № 6. — С. 131—158.

[212] *Салимов Р.Р.* Об оценке дилатаций для отображений, более общих, чем квазирегулярные / Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов // Укр. матем. ж. — 2010. — **62,** № 11. — С. 1531—1537.

[213] *Salimov R.R.* ACL and differentiability of open discrete ring (p, Q)-mappings / R.R. Salimov and E.A. Sevost'yanov // Мат. студiї. — 2011. — **35,** № 1. — С. 28—36.

[214] *Салимов Р.Р.* Аналоги леммы Икома—Шварца и теоремы Лиувилля для отображений с неограниченной характеристикой / Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов // Укр. матем. ж. — 2011. — **63,** № 10. — С. 1368—1380.

[215] *Salimov R.R.* Differentiability a.e. and ACL — property of some generalizations of quasiregular mappings / R.R. Salimov and E.A. Sevostyanov // Conformal Structures and Dynamics (CODY) Third Year Conf., Bendlewo, Poland, September 21—26, 2009. — P. 8—9.

[216] *Salimov R.R.* Estimate of inner dilatation of the mappings with non-bounded characteristics of quasiconformality / R.R. Salimov and E.A. Sevostyanov // Intern. Conf. on Complex Analysis, dedicated to the memory of A. Goldberg, Lvov, May 31—June 5, 2010. — 2010. — P. 52—54.

[217] *Шабат Б.В.* К теории квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. — 1960. — **132,** № 5. — С. 1045—1048.

[218] *Шабат Б.В.* Нелинейные, гиперболические и пространственные задачи теории квазиконформных отображений: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01. — Донецк, 1961. — 191 с.

[219] *Шлык В.А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. матем. ж. — 1993. — **34,** №6. — С.216—221.

[220] *Севостьянов Е.А.* Теория сходимости и квазилинейные уравнения Бельтрами // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2006. — **12**. — С. 128—140.

[221] *Севостьянов Е.А.* К теории сходимости пространственных отображений с конечным искажением длины: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. — Донецк, 2005. — 129 с.

[222] *Севостьянов Е.А.* О нормальности семейств пространственных отображений с ветвлением // Сб. тр. Ин-та математики НАН Украины. — 2006. — **3.** — С. 454—464.

[223] *Севостьянов Е.А.* Оценки искажения и нормальность семейств кольцевых отображений // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2007. — **14.** — С.150—161.

[224] *Севостьянов Е.А.* Об устранении изолированных особенностей открытых дискретных отображений // Вестник Днепропетровского национ. ун-та. — 2007. — № 8. — С. 124—133.

[225] *Севостьянов Е.А.* Теория модулей, емкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление // Укр. матем. вестник. — 2007. — **4,** № 4. — С. 583—604.

[226] *Севостьянов Е.А.* Аналоги теорем Сохоцкого и Пикара для отображений с конечным искажением длины // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2007. — **15.** — С. 190—198.

[227] *Севостьянов Е.А.* Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений // Укр. матем. вестник. — 2008. — **5,** № 3. — С. 366—381.

[228] *Севостьянов Е.А.* О нормальности семейств пространственных отображений с ветвлением // Укр. матем. ж. — 2008. — **60,** № 10. — С. 1389—1400.

[229] *Севостьянов Е.А.* Существенно особые точки и ветвления открытых дискретных кольцевых отображений // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2008. — **17.** — С.166—174.

[230] *Севостьянов Е.А.* Устранение особенностей и аналоги теоремы Сохоцкого — Вейерштрасса для Q-отображений // Укр. матем. ж. — 2009. — **61,** № 1. — С. 116—126.

[231] *Sevost'yanov E.* Compactness theory and mappings with finite length distortion // Sib. Adv. in Math. — 2009. — **19,** N 3. — P. 179 — 191.

[232] *Севостьянов Е.А.* Об одном модульном неравенстве для отображений с конечным искажением длины // Укр. матем. ж. — 2009. — **61,** № 5. — С. 680—688.

[233] *Севостьянов Е.А.* Обобщение одной леммы Е.А. Полецкого на классы пространственных отображений // Укр. матем. ж. — 2009. — **61,** № 7. — С. 969—975.

[234] *Севостьянов Е.А.* О связи отображений конечного искажения с искажением длин в $\mathbb{R}^n$ // Вестник Днепропетровского национ. ун-та. — 2009. — Вып. 14, № 6/1. — С. 112—119.

[235] *Севостьянов Е.А.* Об интегральной характеризации некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. матем. ж. — 2009. — **61,** № 10. — С. 1367—1380.

[236] *Севостьянов Е.А.* Равностепенная непрерывность одного семейства отображений в замыкании области // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2009. — **19.** — С. 225—233.

[237] *Севостьянов Е.А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Изв. АН России, сер. мат. — 2010. — **74,** № 1. — С. 159—174.

[238] *Sevost'yanov E.A.* The Väisälä inequality for mappings with finite length distortion // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — **55,** 1—3. — P. 91—101.

[239] *Севостьянов Е.А.* О множествах точек ветвления отображений, более общих, чем квазирегулярные // Укр. матем. ж. — 2010. — **62,** № 2. — С. 215—230.

[240] *Севостьянов Е.А.* О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. матем. ж. — 2010. — **51,** № 5. — С. 1129—1146.

[241] *Севостьянов Е.А.* О множествах точек ветвления от отображений с конечным искажением длины в $\mathbb{R}^3$ // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2010. — **20.** — С. 139 — 148.

[242] *Севостьянов Е.А.* О множествах точек ветвления одного класса отображений // Сб. тр. Ин-та математики НАН Украины. — 2010. — **7,** № 2. — С. 297—303.

[243] *Севостьянов Е.А.* О некоторых свойствах обобщенных квазиизометрий с неограниченной характеристикой // Укр. матем. ж. — 2011. — **63,** № 3. — С. 385—398.

[244] *Севостьянов Е.А.* О точках ветвления трехмерных отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Укр. матем. ж. — 2011. — **63,** № 1. — С. 69—79.

[245] *Севостьянов Е.А.* О внутренних дилатациях отображений с неограниченной характеристикой / Е.А. Севостьянов, Р.Р. Салимов // Укр. матем. вестник. — 2011. — **8,** № 1. — С. 129—143.

[246] *Севостьянов Е.А.* Об открытости и дискретности отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Укр. матем. ж. — 2011. — **63,** № 8. — С. 1128—1134.

[247] *Севостьянов Е.А.* О квазилинейных уравнениях типа Бельтрами с вырождением // Матем. заметки. — 2011. — **90,** вып. 3. — С. 445—453.

[248] *Севостьянов Е.А.* О граничном поведении открытых дискретных отображений с неограниченной характеристикой // Укр. матем. ж. — 2012. — **64,** № 6. — С. 855—859.

[249] *Севостьянов Е.А.* О пространственных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику // Алгебра и анализ. — 2012. — **24,** № 1. — С. 131—156.

[250] *Севостьянов Е.А.* О локальном поведении отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. матем. ж. — 2012. — **53,** № 3. — С. 648—662.

[251] *Севостьянов Е.А.* Квазилинейные уравнения Бельтрами // Междунар. шк.-семинар памяти Н.В. Ефимова, Новороссийск, 5—11 сентября 2006 г. — С. 155—156.

[252] *Sevostyanov E.A.* Quasilinear Beltrami Equations // Geometric Analysis and Nonlinear PDE: Intern. Conf., Bendlewo, Poland, June 3-7, 2007. — 2007. — P. 18.

[253] *Sevostyanov Ye.* Sokhotski—Weierstrass theorem for mapping with finite length distortion // Bogolyubov Readings 2007: Intern. Conf. dedicated to Yu. A. Mitropolskii on the occasion of his 90-th birthday, Zhitomir-Kiev, Ukraine, August 19 — September 2, 2007. — 2007. — P. 50—51.

[254] *Севостьянов Е.А.* Абсолютная непрерывность на линиях открытых дискретных Q-отображений // Аналiз i топологiя: Мiжнар. конф., м. Львiв, 26 травня—7 червня 2008 р. — 2008. — С. 97—98.

[255] *Sevost'yanov E.* Branch sets of the mappings of the Sobolev class// Analytic methods of mechanics and complex analysis: Intern. Conf. dedicated to N.A. Kilchevskii and V.A. Zmorovich on the occasion of their birthday centenary, Kiev, June 29—July 5, 2009. — P. 50—51.

[256] *Sevost'yanov E.A.* The Väisälä inequality for mappings with finite length distortion // International Conference in Modern Analysis, Donetsk, June, 20—June, 23, 2011. — P. 98.

[257] *Севостьянов Е.А.* О нормальных семействах отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: Междунар. конф., г. Харьков, 17—22 апреля 2011 г. — С. 254—255.

[258] *Севостьянов Е.А.* Об устранении особенностей отображений с неограниченной характеристикой // Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел: Междунар. конф., г. Белгород, РФ, 17—21 октября 2011 г. — С. 109—110.

[259] *Sevost'yanov E.A.* About removable singularities of the mappings with non-bounded characteristics // Intern. Conf. dedicated to the 120-th anniversary of Stephan Banach. Lviv, September, 17—September, 21, 2012. — P. 158.

[260] *Sevostyanov Ye.* On injectivity radius of local ring Q-homeomorphisms // Complex Analysis & Dynamical Systems, Nahariya, Israel Intern. Conf. — May 21—24, 2013. — P. 34—35.

[261] *Смоловая Е.С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. матем. ж. — 2010. — **62,** № 5. — С. 682—689.

[262] *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971. — 680 с.

[263] *Srebro U.* Conformal capacity and quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. — 1973. — **529.** — P. 1—8.

[264] *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. — М.: Наука, 1964. — 227 с.

[265] *Стругов Ю.Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. — 1978. — **243,** № 4. — С. 859—861.

[266] *Стругов Ю.Ф.* Квазиконформные в среднем отображения и экстремальные задачи. Ч. 1. — Омск, 1994. — 154 с. — Деп. в ВИНИТИ 05.12.94, № 2786—В94.

[267] *Стругов Ю.Ф.* Квазиконформные в среднем отображения и экстремальные задачи. Ч. 2. — Омск, 1994. — 114 с. — Деп. в ВИНИТИ 05.12.94, № 2787—В94.

[268] *Суворов Г.Д.* Об искусстве математического исследования. — Донецк: Донецкая фирма наукоемких технологий НАН Украины (ТЕАН), 1999.

[269] *Сычев А.В.* Пространственные квазиконформные отображения, непрерывные по Гельдеру в граничных точках // Сиб. матем. ж. — 1970. — **11,** № 1. — С. 183—192.

[270] *Сычев А.В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. — Новосибирск: Наука, 1983.

[271] *Тамразов П.М.* О непрерывности некоторых конформных инвариантов // Укр. матем. ж. — 1966. — **18,** № 6. — С. 78—84.

[272] *Тамразов П.М.* Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях // Укр. матем. ж. — 1998. — **50,** № 10. — С. 1388—1398.

[273] *Titus C.J.* The extension of interiority with some applications / C.J. Titus, G.S. Young // Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — **103.** — P. 329—340.

[274] *Трохимчук Ю.Ю.* О непрерывных отображениях областей эвклидова пространства // Укр. матем. ж. — 1964. — **16,** № 2. — С. 196—211.

[275] *Трохимчук Ю.Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности — К.: Ин-т математики, 2008. — 539 с.

[276] *Troyanov M.* Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion / M. Troyanov and S. Vodop'yanov // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. — 2002. — **52,** N 6. — P. 1753—1784.

[277] *Tukia P.* Compactness properties of μ-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. AI. — 1991. — **16,** N 1. — P. 47—69.

[278] *Ukhlov A.D.* Sobolev spaces and mappings with bounded $(P;Q)$-distortion on Carnot groups / A.D. Ukhlov and S.K. Vodop'yanov // Bull. Sci. Mat. — 2009. — **52,** N 4. — P. 349—370.

[279] *Väisälä J.* Two new characterizations for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. — 1965. — **362.** — P. 1—12.

[280] *Väisälä J.* Removable sets for quasiconformal mappings // J. Math. Mech. — 1969. — **19,** N 1. — P. 49—51.

[281] *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971. — 144 p.

[282] *Väisälä J.* Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. — 1972. — **509.** — P. 1—14.

[283] *Водопьянов С.К.* О граничном соответствии при квазиконформных отображениях пространственных областей // Сиб. матем. ж. — 1975. — **16,** № 16. — С. 626—631.

[284] *Водопьянов С.К.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений / С.К. Водопьянов и В.М. Гольдштейн // Сиб. матем. ж. — 1976. — **17,** № 4. — С. 768—773.

[285] *Водопьянов С.К.* Структурные изоморфизмы пространств $W^{1,n}_{loc}$ и квазиконформные отображения / С.К. Водопьянов и В.М. Гольдштейн // Сиб. матем. ж. — 1975. — **16,** № 2. — С. 224—226.

[286] *Водопьянов С.К.* О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными / С.К. Водопьянов, В.М. Гольдштейн и Ю.Г. Решетняк // Успехи мат. наук. — 1979. — **34,** № 1. — С. 17—65.

[287] *Водопьянов С.К.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно / С.К. Водопьянов и А.Д. Ухлов // Сиб. матем. ж. — 1998. — **39,** № 4. — С. 776—795.

[288] *Водопьянов С.К.* Отображения с ограниченным и конечным искажением на группах Карно // Сиб. матем. ж. — 1999. — **40,** № 4. — С. 768—804.

[289] *Водопьянов С.К.* Топологические и геометрические свойства отображений класса Соболева с суммируемым якобианом // Сиб. матем. ж. — 2000. — **41,** № 1. — С. 23—48.

[290] *Водопьянов С.К.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева / С.К. Водопьянов и А.Д. Ухлов // Изв. высш. уч. заведений. — 2002. — **485,** № 10. — С. 11—33.

[291] *Водопьянов С.К.* Весовые пространства Соболева и квазиконформные отображения / С.К. Водопьянов и А.Д. Ухлов // Докл. АН. — 2005. — **403,** № 5. — С. 583—588.

[292] *Vuorinen M.* Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes. — 1976. — **11.** — P. 1—44.

[293] *Vuorinen M.* On the Iversen-Tsuji theorem for quasiregular mappings // Math. Scand. — 1977. — **41,** N 1. — P. 90—98.

[294] *Vuorinen M.* Some inequalities for the moduli of curve families // Michigan Math. J. — 1983. — **30.** — P. 369—380.

[295] *Vuorinen M.* Conformal Geometry and Quasiregular Mappings. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1988. — 209 p.

[296] *Whyburn G.T.* Analytic topology. — Rhode Island: American Mathematical Society, 1942. — 280 p.

[297] *Ziemer W.P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. — 1967. — **126,** N 3. — P. 460—473.

[298] *Зелинский Ю.Б.* О непрерывных отображениях областей обобщенных многообразий // В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений. — К.: Наук. думка, 1973. —- Вып. 4. -— С. 79—91.

[299] *Зорич В.А.* Теорема М.А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Матем. сб. — 1967. — **116,** № 3. — С. 415—433.

[300] *Зорич В.А.* О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М.А. Лаврентьева // Докл. АН СССР. — 1968. — **181,** № 3. — С. 530—533.

[301] *Зорич В.А.* Изолированная особенность отображений с ограниченным искажением // Матем. сб. — 1970. — **81 (123),** № 4. — С. 634—636.

[302] *Zorich V.A.* The global homeomorphism theorem for space quasiconformal mappings, its development and related open problems. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1992. — P. 132—148.

[303] *Зорич В.А.* Квазиконформные отображения и асимптотическая геометрия многообразий // Успехи матем. наук. — 2002. — **57,** № 3 (345). — С. 3—28.

[304] *Зорий Н.В.* Модульные, функциональные и потенциальные характеристики конденсаторов в области; соотношения между ними // Укр. матем. ж. — 1992. — **44,** №5. — С. 604—613.

Предметный указатель

Оглавление

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

СЕВОСТЬЯНОВ Євген Олександрович

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ГЕОМЕТРИЧНИМ МЕТОДОМ

(Російською мовою)

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2014

Художній редактор *І.Р. Сільман*
Технічний редактор *Т.С. Березяк*
Комп'ютерна верстка *Л.В. Багненко*

Підп. до друку 16.06.2014. Формат 70 × 100/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Таймс. Друк. офс. Ум. друк. арк. 24,7. Ум. фарбо-відб. 25,35.
Обл.-вид. арк. 16,0. Тираж 150 прим. Зам. № ДФ 221

НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру ДК № 2440 від 15.03.2006
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ПП «Видавництво "Фенікс"»
03680 Київ 680, вул. Шутова, 13б