Т.В. Дідківська
кандидат фізико-математичних наук, доцент
І.А. Сверчевська
кандидат педагогічних наук, доцент
Житомирський державний університет імені Івана Франка
iryna_sver@ukr.net

# ГЕОМЕТРИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

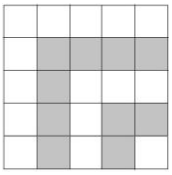
Творчі вміння людини формуються ще під час навчання в школі. А успіх цієї роботи залежить від учителя, тому розвиток творчих умінь студентів є першочерговим завданням. Математика має великі можливості для успішного виконання цього завдання. Можливі шляхи різноманітні, але найважливішим, на нашу думку, є розвиток умінь розв'язувати математичні задачі.

Ми виділяємо задачі, які розв'язуються нетрадиційно, а саме – задачі негеометричні, що розв'язуються геометрично.

**Задачі на доведення.**

1. Сума довільної кількості непарних чисел, починаючи з одиниці, є точний квадрат [1, с. 11].

Розглянемо метод, що пропонувався в школі Піфагора (рис. 1).



Квадрат з $n^2$ клітин можна уявити як такий, що складається з однієї клітинки 1, до якої послідовно додаються "гномони" з 3, 5, 7 і т. д. клітин, тоді одержимо $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$.

Рис. 1

2. Довільне непарне число $2n+1$ є різницею двох квадратів [2, с. 12].

Дійсно, якщо від квадрата відняти "гномон", що подає непарне число, то одержимо квадрат, тобто $(2n+1)^2-(2n+1)=n^2$, $2n+1=(2n+1)^2-n^2$.

3. Довести

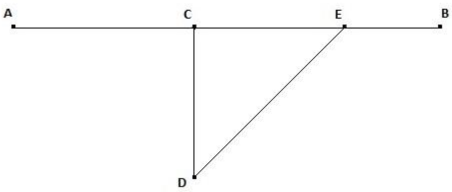
а) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ [3, с. 48].

Будуємо квадрат зі стороною $a+b$ і розбиваємо його на два квадрати, площею $a^2$ та $b^2$ і два прямокутники площею $ab$. Маємо площа квадрата: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$.

б) $(a+b)c=ac+bc$.

Будуємо прямокутник зі стороною $a+b$ і $c$, він складається з двох прямокутників, тому його площа: $(a+b)c=ac+bc$.

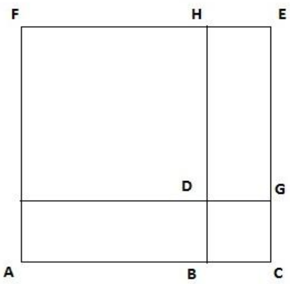
**Задачі на розв'язування алгебраїчних рівнянь.**




1. $x^2+b^2=ax$ [3, с. 49]. Будуємо відрізок $AB=a$, точкою C ділимо AB навпіл, проводимо в точці C перпендикуляр CD до AB довжини $b$. Проводимо $DE=BC=\dfrac{a}{2}$. Одержаний відрізок $BE=x$ буде розв'язком рівняння $x^2+b^2=ax$.

Рис. 2

Доведення (рис. 2). З $\Delta\ CDE$: $b^2+\left(\dfrac{a}{2}-x\right)^2=\dfrac{a^2}{4}$; $b^2+\dfrac{a^2}{4}-ax=\dfrac{a^2}{4}$; $x^2+b^2=ax$.



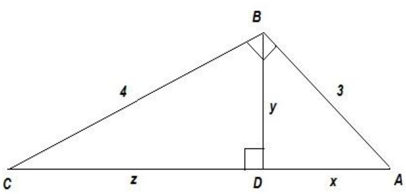

2. $x^2+6x=91$ [1, с. 47].

Будуємо квадрат ACEF зі стороною $x+3$, виділяємо в ньому квадрат BCGD зі стороною 3 і продовжуємо його сторони (рис. 3). Тоді площа квадрата ACEF складається з площ двох квадратів і двох прямокутників, тобто $x^2+2\cdot 3x+9$. За умовою $x^2+6x=91$, тобто площа квадрата ACEF дорівнює $91+9=100$. Сторона побудованого квадрата дорівнює 10, а за побудовою $x+3$. Маємо $x+3=10,\ x=7$.

3. $x^3+p^2x=p^2q$ [4, с. 53].

Омар Хайям розв'язував це рівняння за допомогою побудови кола Рис. 3 $x^2+y^2=qx$ і параболи $x^2=py$.

**Задачі на дослідження**.

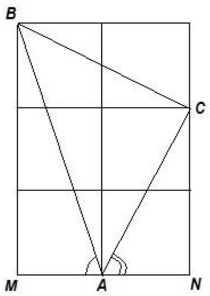



1. Дано: $x^2+y^2=9;\ y^2+z^2=16$ і $y^2=xz;\ x>0;\ y>0;\ z>0$, дослідити значення $xy+yz$ [5, с. 6].

Розв'язання. Числа x і y є катетами прямокутного трикутника з гіпотенузою 3. Числа y і z є катетами прямокутного трикутника з гіпотенузою 4 (рис. 4). З третьої умови маємо, що число y є середнє пропорційне чисел x і z, тому кут при вершині побудованого трикутника прямий. Розглянемо вираз $xy+yz=(x+z)y=2S_{\Delta ABC}=3\cdot 4=12$.

Рис. 4

2. Чи можна стверджувати, що $arctg1 + arctg2 + arctg3 = \pi$ ? [5, с. 43]




Розв'язання. Будуємо прямокутник зі сторонами 2 і 3, в який вписуємо $\Delta$ ABC (рис. 5). AC=BC, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ $(AC^2 = 2^2 + 1^2 = 5,\ \ BC^2 = 2^2 + 1^2 = 5,\ \ AB^2 = 1^2 + 3^2 = 10,\ \ AB^2 = AC^2 + BC^2)$.

$\angle BAM = arctg3;\ \ \angle NAC = arctg2;\ \ \angle CAB = 45^0 = arctg1,\ \ \angle BAM + \angle BAC + \angle CAN = \pi$.

Отже, $arctg1 + arctg2 + arctg3 = \pi$.

На наш погляд, нетрадиційний підхід до розв'язування математичної задачі дозволяє самостійно робити перші відкриття в математиці. Різні типи задач формують уміння аналізувати і застосовувати формальні знання, підвищують зацікавленість учнів та студентів і розвивають їх здібності.

Рис. 5

Література

1. Попов Г.Н. Сборник исторических задач по элементарной математике. – М.-Л.: ОНТИ, 1938. – 216 с.
2. Баврин И.И. Старинные задачи / И.И. Баврин, Е.А. Фрибус. – М.: Просвещение, 1994. – 128 с.
3. Вивальнюк А.М., Ігнатенко М.Я. Елементи історії математики. – К.: ІЗМН, 1996. – 180 с.
4. Бевз В.Г. Практикум з історії математики / В.Г. Бевз. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004 – 312 с.
5. Генкин Г.З. Геометрические решения негеометрических задач. – М.: Просвещение, 2007. – 79 с.

Анотація. Дідківська Т.В., Сверчевська І.А. Геометричне розв'язання негеометричних задач.

Досліджуються різні типи задач: на доведення, дослідження та обчислення за допомогою побудов. Для задач на доведення використовуються методи, що виникли в школі Піфагора. Дослідження здійснюються шляхом геометричних побудов. Задачі на визначення коренів квадратних і кубічних рівнянь є задачами видатних математиків, які були збережені історією. Методи, якими запропоновано розв'язувати задачі, є нетрадиційними.

Ключові слова: математична задача, геометричні методи, рівняння, задачі на доведення, задачі на дослідження, корені рівняння, нетрадиційні методи.

Аннотация. Дидковская Т.В., Сверчевская И.А. Геометрические решения негеометрических задач.

Исследуются разные типы задач: на доказательство, исследование и вычисление с помощью построений. Для задач на доказательство используются методы, которые возникли в школе Пифагора. Исследование ведется путем геометрических построений. Задачи на определение корней квадратных и кубических уравнений являются задачами выдающихся математиков, которые были сохранены историей. Методы, которыми предложено решать задачи, являются нетрадиционными.

Ключевые слова: математическая задача, геометрические методы, уравнения, задачи на доказательство, задачи на исследование, корни уравнения, нетрадиционные методы.

Summary. Didkivska T.V., Sverchevska I.A. Geometric solving of non-geometric tasks.

Different tasks types are researched: proof-related tasks, research-related tasks and tasks which combine construction and calculation. The proof-related tasks are being solved using methods of Pythagorean school. The research is being done using geometrical constructions. Tasks of quadratic and cubic equation roots finding are the ones suggested by famous mathematicians and preserved by history. Methods of these tasks solving are non-traditional.

Key words: mathematical task, geometric methods, equations, proof-related tasks, research-related tasks, roots of equation, non-traditional methods.