Властивості чисел в історичних задачах.

Використання матеріалу з історії розвитку математики відіграє важливу роль під час навчання математики. Оскільки числа – одна з важливих змістовних ліній шкільного курсу математики, ми пропонуємо історичні задачі, де досліджуються властивості чисел: ділення чисел, найбільший спільний дільник, найменше спільне кратне, прості числа.

1) **Задача Метродора** (IV ст.) у перекладі Івана Франка

Тиран острова Самос Полікрат запитав у Піфагора, скільки в того учнів. Піфагор відповів:

"Радо скажу, Полікрате.
Бачиш, учнів половина
Математику зглибляє,
А натомість четвертина
На безсмертную природу
Свої досліди звертає:
Сьома часть ніщо не робить,
Лиш заховує мовчання,
Лиш моє у душах своїх,
Знай, ховаючи навчання.
Ще додай до них три жінки,
Що встають не дуже рано, –
Серед них найвизначніша
Моя любая Теано.
Ось і всі, яких по змозі
Я по мудрості доводжу."

Скільки учнів було в школі Піфагора? [1: 65]

Історична довідка. Метродор увійшов в історію математики як автор цікавих задач, складених у віршах, які входили в рукописні збірники і в свій час були дуже поширені. Про життя Метродора нічого не відомо [2: 115].

Розв’язання автора: НСК (2, 4, 7) = 28.

Сучасний спосіб можна розглянути при вивченні звичайних дробів. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x,\ \frac{14x+7x+4x}{28}+3=x,\ \frac{25x}{28}+3=x.$ Якщо $x=28$, то $25+3=28$.

Відповідь: 28 учнів.

2) **Задача Сунь-Цзи** (китайський математик III – IV ст.).

Є невідома кількість речей. Якщо їх рахувати трійками, то буде остача 2, якщо п’ятірками, то – 3, якщо сімками, то – 2. Запитується, скільки речей? [3: 34].

Історична довідка. Сунь Цзи – китайський математик і астроном, автор трактату "Сунь Цзи Суань Цзинь" (Класична арифметика Сунь Цзи). Цей класичний трактат з математики до XVIII ст. приписувався теоретику військового мистецтва. Сформульована задача була популярною серед європейських математиків, її назва "китайська задача про остачі". Це найвизначніша задача, яка не тільки зробила імя Сунь Цзи широковідомим, але й сприймалася на заході як одне з китайських чудес. Після появи "Арифметичних досліджень" (1801) К. Гаусса вона стала частинним випадком розв'язання системи порівнянь. [4: 255]

Сунь-Цзи розв'язує свою задачу за правилом: "При діленні на 3 остача 2, тому візьміть 140. При діленні на 5 остача 3, тому візьміть 63. При діленні на 7 остача 2, тому візьміть 30. Додавши їх разом, отримаємо 233, з цього відніміть 210, і ми отримаємо відповідь".

Розв'язання. Відповідь автора можна одержати, провівши наступні міркування. Нехай N – шукане число. $N-2$ ділиться на 3 і 7, найменше спільне кратне яких дорівнює 21, тому $N-2=21k$, $N=21k+2$. Отримаємо числа 23, 44, 65, 86, 107, … Знайдемо те, яке при діленні на 5 дає остачу 3. $N=23$.

Для вчителів можна запропонувати сучасний метод розв'язування за допомогою порівнянь.

$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$, з першого порівняння маємо $x = 2+3t_1$, підставимо у друге порівняння $2+3t_1 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$, $3t_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$, $t_1 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$, $t_1 = 2+5t_2$. Тепер $x = 2+3(2+5t_2) = 8+15t_2$. Підставимо у третє порівняння $8+15t_2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$, $15t_2 \equiv -6(\mathrm{mod}\ 7)$, $t_2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$, $t_2 = 1+7t$. Маємо $x = 8+15(1+7t) = 23+105t$, тобто $x \equiv 23(\mathrm{mod}\ 105)$.

Відповідь. Шукані числа: 23, 128, 233, …

3) **Задача Фібоначчі** (бл. 1170 – після 1228).

Стара жінка йшла на базар продавати яйця. Повз неї проїхав кінь і випадково наступив на кошик, розбивши всі яйця. Вершник запропонував відшкодувати збитки і запитав у жінки, скільки яєць у неї було. Вона не пам’ятала точне число, однак зауважила, що коли вона брала їх по двоє, то одне яйце лишалось у кошику. Коли брала їх по три, по чотири, по п’ять, по шість штук, теж одне лишалось; а по сім яєць – жодного не лишалось. Яку найменшу кількість яєць могла нести жінка на базар? [4: 255]

Історична довідка. Леонардо Пізанський (Фібоначчі) – італійський математик. Він видав дві книжки: з арифметики й алгебри "Книга про абак" (1202) та з геометрії "Практична геометрія" (1220) Лонардо поклав початок розробці питань, пов’язаних з числами Фібоначчі, дав оригінальний прийом добування кубічного кореня [5: 289]

Розв’язання. Розв’язання зводиться до знаходження такого числа, яке ділиться на 7, а при діленні на 2, 3, 4, 5 і 6 дає в остачі 1. Якщо число зменшити на 1, то отримаємо число, що ділиться на 2, 3, 4, 5 і 6. Найменше спільне кратна цих чисел 60. Треба знайти таке число, що ділиться на 7 та на 1 більше за число, що ділиться на 60.

Розглянемо числа 61, 121, 181, 241, 301, 361, … Перше з цих чисел, що ділиться на 7 є 301. Наступні числа, що задовольняють всі умови 721, 1141, 1561, ... Кожне з цих чисел отримаємо додаванням до попереднього числа 420, що є найменшим спільним кратним 2, 3, 4, 5, 6 та 7. Але нас цікавить найменша кількість яєць, які несла жінка на базар, тобто 301.

4) **Задача з "Арифметики" Л. Магницького** (1669 – 1739).

Знайти число, яке при діленні на 2 дає в остачі 1, при діленні на 3 дає в остачі 2, при діленні на 4 дає в остачі 3, при діленні на 5 дає в остачі 4 [2: 32].

Історична довідка. Магницький Леонтій Пилипович закінчив Московську слов'яно-греко-латинську академію. Крім того, що викладав в академії, вивчав математику, голландську, німецьку й італійську мови, та інші науки. З 1701 р. працював у Московській школі математичних і навігаційних наук. Написав підручник "Арифметика" (1703), який широко використовувався в школах май же півстоліття. Прізвище Магницький він одержав за свою велику ерудицію [5:314].

Розв'язання. Позначимо шукане число як x, тоді за умовою задачі маємо: $x = 2q_1 + 1,\ \ x = 3q_2 + 2,\ \ x = 4q_3 + 3,\ \ x = 5q_4 + 4$. Додамо до обох частин кожної рівності одиницю та отримаємо рівності: $x + 1 = 2q_1 + 2 = 2(q_1 + 1)$, $x + 1 = 3q_2 + 3 = 3(q_2 + 1)$, $x + 1 = 4q_3 + 4 = 4(q_3 + 1)$, $x + 1 = 5q_4 + 5 = 5(q_4 + 1)$. Бачимо, що число $x + 1$ ділиться на 2, 3, 4, 5. Тому найменше значення $x + 1$ дорівнює найменшому спільному кратному чисел 2, 3, 4, 5, тобто 60. Звідки найменше значення x дорівнює 59. Задача має безліч розв'язків $x = 59 + 60k,\ k \in Z$.

5) **Задача Блеза Паскаля** (1623-1662).

Знайти загальну ознаку подільності на натуральне число [6:41].

Історична довідка. Блез Паскаль – французький математик, фізик і філософ. Він у віці 12 років самостійно розробив початки геометрії. З 16 років Паскаль брав участь у роботі гуртка Мерсена, на базі якого була створена Паризька Академія наук. Разом з Ферма Паскаль є засновником теорії ймовірностей. Значним є його внесок у розвиток інтегрального числення. У 1642 р. Паскаль сконструював лічильну машину для чотирьох арифметичних дій [5: 372]

Авторське розв'язання. Нехай при діленні 10 на число n отримуємо остачу r_1, при діленні $10r_1$ на n – остача r_2, при діленні $10r_2$ на n – остача r_3 і так далі. Якщо дане число, наприклад тризначне, буде мати вигляд

$\overline{abc} = c + 10b + 100a$, де a, b, c – цифри сотень, десятків, одиниць, то загальна ознака подільності цього числа на n наступна.

Якщо $c + br_1 + ar_2$ ділиться на n, то на n ділиться і число $\overline{abc}$. Доведемо. Нехай $10 = nq_1 + r_1,\ 10^2 = 10nq_1 + 10r_1,\ 10r_1 = nq_2 + r_2$.

Тоді $c + br_1 + ar_2 = c + b(10 - nq_1) + a(10r_1 - nq_2) =$

$= c + 10b + 100a - n(bq_1 + 10aq_1 + anq_2)$.

Маємо $c + br_1 + ar_2 = (c + 10b + 100a) - n(bq_1 + 10aq_1 + anq_2)$

Отже, $c + 10b + 100a$ ділиться на n.

6) **Задача Фібоначчі** (Леонардо Пізанський) (бл. 1170 – після 1228).

Для знаходження найменшого дільника d натурального числа n достатньо, щоб d^2 не перевищувало n. [4: 79].

Розв’язання. $n \vdots d,\ d - \min,\ \ n = d \cdot n_1,\ n_1 \geq d,\ n \geq d^2$.

7) **Задача Гаусса** (1777 – 1855).

Довести, що добуток двох цілих додатних чисел, з яких кожне менше простого числа p, не ділиться на p [2: 50].

Історична довідка. Карл Фрідріх Гаусс – німецький математик, астроном, фізик. Ще навчаючись в університеті підготував твір "Арифметичні дослідження" (1801). Завідував кафедрою математики й астрономії в Геттінгенському університеті. Характерною для досліджень Гаусса була їх різнобічність (вища алгебра, теорія чисел,диференціальна геометрія, класичні теорії електрики та магнетизму, геодезія, теоретична астрономія). Про велич Гаусса свідчить напис на медалі, викарбуваній на його честь – "король математиків" [5: 121].

Розв’язання. Нехай $a < p, b < p$, де p – просте число. Для доведення використаємо твердження, вперше доведене Евклідом: якщо добуток кількох натуральних чисел ділиться на просте число p, то принаймні один із співмножників ділиться на p. Припустимо, що $ab \vdots p$, де p – просте число, то $a \vdots p$ або $b \vdots p$, але $a < p, b < p$, що неможливо.

8) **Задача Ферма** (1601 – 1665).

Для довільного цілого невід'ємного числа n число $F_n = 2^{2^n} + 1$ – просте [4: 82].

Історична довідка. П'єр Ферма – французький юрист і математик, працював радником парламенту в Тулузі. На дозвіллі займався дослідженнями в галузі теорії чисел, геометрії, алгебри, теорії ймовірностей. Ферма поряд з Декартом є основоположником аналітичної геометрії. З його ім'ям пов’язана знаменита велика теорема Ферма, яка була доведена у 1996 р. американським математиком Ендрю Вайлсом [5: 482].

Розв’язання. Дійсно, простими є: $F_0 = 2^1 + 1 = 3$, $F_1 = 2^2 + 1 = 5$, $F_2 = 2^4 + 1 = 17$, $F_3 = 2^8 + 1 = 257$, $F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$, але $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$ – складене. У 1732 році Ейлер спростував твердження Ферма і довів, що $F_5 \,\vdots\, 641$.

9) **Задача з підручника С.Банаха, В.Серпінського, В. Сожека "Арифметика"** 1933 року видання для 1 гімназійного класу.

Вирази, названі іменами видатних математиків, при підстановці в них замість змінних цілих чисел із вказаних проміжків, даватимуть прості числа:

а) вираз Лежандра $2x^2 + 29$ для чисел x від 0 до 28;

б) вираз Ейлера $x^2 + x + 41$ для чисел x від 0 до 39;

в) вираз Скотта $x^2 - 79x + 1601$ для чисел x від 0 до 79.

Обчисліть значення цих виразів при кількох значеннях змінної з вказаних проміжків і переконайтеся, що ці значення справді є простими числами. Чи можна вважати ці вирази формулами простих чисел? [7: 25]

Історична довідка. Стефан Банах (1892 – 1945) – польський математик, один із засновників сучасного функціонального аналізу. З 1922 року працював у Львівському університеті. Під час другої світової війни над ним проводилися досліди у Львівському бактеріологічному інституті. [5: 33].

Вацлав Серпінський (1882 – 1969) – польський математик. З 1918 року був професором Варшавського університету. У роки другої світової війни викладав у підпільному університеті. Зробив внесок у розвиток теорії множин та її застосування в топології, теорії функцій дійсної змінної. Наукова спадщина Серпінського становить понад 700 назв, його вважають батьком польської школи математиків [5: 434].

Розв'язання.

а) $2\cdot 0^2+29=29,\ 2\cdot 1^2+29=31;$ але при x=29 вираз ділиться на 29, тому значення виразу – складене число.

б) $1^2+1+41=43,\ 2^2+2+41=47;$ але при x=40 вираз ділиться на 41 $40^2+40+41=\ 40(40+1)+41=\ =41(40+1)=41^2$, тобто це складене число.

в) $0^2-79\cdot 0+1601=1601,\ 1^1-79\cdot 1+1601=1523;$ але при x=80 маємо складене число:

$$80^2-79\cdot 80+1601=\ =80(80-79)+1601=80+1601=1681=41^2.$$

Історичні задачі дарують людині красу розумової діяльності. Ми наводимо методи розв’язання задач авторами, а також пропонуємо інші методи. Історичні довідки знайомлять з іменами та біографіями видатних вчених. Рекомендована література дає можливість учителям та учням докладніше ознайомитися з питаннями, висвітленими в задачах. Розв'язування запропонованих задач дозволить учням зробити своє перше відкриття.

Література

1. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі. – К.: Рад. шк. , 1981. – 189 с.
2. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математики. – Минск: Высшая шк., 1978. – 270 с.
3. Бевз В. Г. Практикум з історії математики. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
4. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Алгебра і теорія чисел. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – Ч. 1. – 400 с.
5. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: Вища шк. , 1973. – 552 с.
6. Баврин И.И., Фрибус Е.А. Старинные задачи. – М.; Просвещение, 1994. – 128 с.
7. Тадеєв В.О. Неформальна математика. 6 – 9 кл. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 288 с.