(Киевский политехнический институт)

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР, ОГРАНИЧЕННЫХ КРИВЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Формулы для определения площади произвольного треугольника, одна из сторон которого — дуга кривой второго порядка, предложенные в [1], имеют сравнительно громоздкий вид. Поэтому для практического их использования удобнее центральную кривую второго порядка (эллипс или гиперболу) задавать не в функциональной зависимости от эксцентриситета и параметра кривой, а в каноническом виде. Если при этом центр кривой имеет координаты $x=a$ и $y=b$, то, воспользовавшись формулами перехода, получим:

а) формулу площади произвольного треугольника, одна из сторон которого — дуга эллипса,

$$S = \Bigg| \frac{a^2n^2 - b^2m^2}{2} \cdot \frac{|\operatorname{tg}\varphi|}{H} - \frac{abn^2}{H} + \frac{mn}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{m}{n}|\operatorname{tg}\varphi|\right) \pm \pm \frac{mn}{2}\left(F \cdot \frac{\sqrt{H-F^2}}{H} + \operatorname{arctg}\frac{F}{\sqrt{H-F^2}}\right)\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} H = n^2 + m^2\operatorname{tg}^2\varphi, \\ F = a|\operatorname{tg}\varphi| - b, \\ m \text{ и } n \text{ — полуоси эллипса;} \end{cases} \tag{1}$$

б) формулу площади произвольного треугольника, одна из сторон которого — дуга гиперболы,

$$S = \Bigg| \frac{a^2n^2 + b^2m^2}{2} \cdot \frac{|\operatorname{tg}\varphi|}{H} - \frac{abn^2}{H} + \frac{mn}{4} \cdot \ln\left|\frac{n + m|\operatorname{tg}\varphi|}{n - m|\operatorname{tg}\varphi|}\right| \pm \pm \frac{mn}{2}\left(F \cdot \frac{\sqrt{H+F^2}}{H} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{H+F^2}+F}{\sqrt{H+F^2}-F}\right|\right)\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}, \tag{2}$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} H = n^2 - m^2\operatorname{tg}^2\varphi, \\ F = a|\operatorname{tg}\varphi| - b, \\ m \text{ и } n \text{ — полуоси гиперболы.} \end{cases}$$

в) формула площади произвольного треугольника, одна из сторон которого — дуга параболы (кривая нецентральная),

$$S = \Bigg| \frac{(b - p|\operatorname{ctg}\varphi|)^3}{3p} + \frac{b^2 - 2ap}{2}|\operatorname{ctg}\varphi| \pm \pm \frac{\sqrt{[(b - p|\operatorname{ctg}\varphi|)^2 - (b^2 - 2ap)]^3}}{3p}\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}, \tag{3}$$

где p — параметр параболы; a и b — координаты ее вершины.

2. Пусть полюс полярной системы координат (точка O) лежит вне дуги кривой второго порядка. Из этой точки к кривой можно построить две касательные *. Эти касательные будут занимать предельные положения секущих при $\psi_1=\psi_{min}$ и $\psi_2=\psi_{max}$; очевидно, при этом $r_1=r_2$. Воспользовавшись последним, находим

$$[2kp - k^2(1-\varepsilon^2)]\operatorname{tg}^2\varphi + 2l[k(1-\varepsilon^2) - p]|\operatorname{tg}\varphi| + [p^2 - (1-\varepsilon^2)l^2] = 0$$

или с учетом формул перехода получаем:

* Для того, чтобы из произвольной внешней точки можно было провести две касательные к одной и той же ветви гиперболы, необходимо расположить ее в пределах асимптотического угла, охватывающего эту ветвь.

$$\left.\begin{aligned}(m^2-a^2)\,\mathrm{tg}^2\,\varphi+2ab\,|\,\mathrm{tg}\,\varphi\,|+(n^2-b^2)=0 &— \text{для эллипса;}\\ (a^2-m^2)\,\mathrm{tg}^2\,\varphi-2ab\,|\,\mathrm{tg}\,\varphi\,|+(n^2+b^2)=0 &— \text{для гиперболы;}\\ 2a\,\mathrm{tg}^2\,\varphi-2b\,|\,\mathrm{tg}\,\varphi\,|+p=0 &— \text{для параболы.}\end{aligned}\right\}\quad (4)$$

Решая каждое из этих уравнений относительно $|\mathrm{tg}\varphi|$, соответственно получаем:

$$\left.\begin{aligned}|\,\mathrm{tg}\,\varphi_{1,\,2}\,| &= \frac{-ab\pm\sqrt{a^2n^2+b^2m^2-m^2n^2}}{m^2-a^2};\\ |\,\mathrm{tg}\,\varphi_{1,\,2}\,| &= \frac{ab\pm\sqrt{m^2n^2-a^2n^2+b^2m^2}}{a^2-m^2};\\ |\,\mathrm{tg}\,\varphi_{1,\,2}\,| &= \frac{b\pm\sqrt{b^2-2ap}}{2a}, \text{ или } |\,\mathrm{ctg}\,\varphi_{1,\,2}\,| = \frac{b\pm\sqrt{b^2-2ap}}{p}.\end{aligned}\right|\quad (5)$$

Полученные формулы дают возможность аналитически определить углы наклона касательных к кривой второго порядка (относительно ранее выбранной полярной оси), проведенных из произвольной внешней точки, не лежащей на кривой.

Примечание. Если полюс полярной системы координат лежит в полуплоскости «от дуги параболы», то для (3)—(5) a под квадратным корнем меняет знак и $|\mathrm{ctg}\,|\varphi_{1,\,2}| = \dfrac{b\pm\sqrt{b^2+2ap}}{p}$.

3. Рассмотрим случай, когда полюс полярной системы координат лежит на дуге кривой второго порядка. Так как координаты точки на кривой удовлетворяют уравнению кривой, то:

для эллипса — $a^2n^2+b^2m^2=m^2n^2$ и $r=2\,\dfrac{a^2n^2\,|\cos\varphi\,|+b^2m^2\,|\sin\varphi\,|}{n^2\cos^2\varphi+m^2\sin^2\varphi}$;

для гиперболы — $a^2n^2-b^2m^2=m^2n^2$ и $r=2\,\dfrac{a^2n^2\,|\cos\varphi\,|-b^2m^2\,|\sin\varphi\,|}{n^2\cos^2\varphi-m^2\sin^2\varphi}$;

для параболы — $b^2=2ap$ и $r=2\,\dfrac{b\,|\sin\varphi\,|-p\,|\cos\varphi\,|}{\sin^2\varphi}$.

Соответственно формула площади двухугольника (сегмента), одна из сторон которого — дуга кривой второго порядка, а другая — хорда, стягивающая эту дугу; будет для каждого отдельного случая иметь вид (рис. 1):

$$S_э=\left.\frac{(a^2n^2-b^2m^2)\,|\,\mathrm{tg}\,\varphi\,|-2abn^2}{n^2+m^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}+\frac{a^2n^2+b^2m^2}{mn}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{m}{n}\,|\,\mathrm{tg}\,\varphi\,|\right)\right|_{\varphi_1}^{\varphi_2},\quad (6)$$

где $|\,\mathrm{tg}\,\varphi_1\,|=-\dfrac{ab}{m^2-a^2}$ (см. (5) — (1));

$$S_г=\left.\frac{(a^2n^2+b^2m^2)\,|\,\mathrm{tg}\,\varphi\,|-2abn^2}{n^2-m^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}+\frac{a^2n^2-b^2m^2}{2mn}\cdot\ln\left|\frac{n+m\,|\,\mathrm{tg}\,\varphi\,|}{n-m\,|\,\mathrm{tg}\,\varphi\,|}\right|\right|_{\varphi_1}^{\varphi_2},\quad (7)$$

где $|\,\mathrm{tg}\,\varphi_1\,|=\dfrac{ab}{a^2-m^2}$ (см. (5) — (2));

$$S_п=\frac{2}{3}\left|\frac{(b-p\,|\,\mathrm{ctg}\,\varphi\,|)^3}{p}\right|_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

где $|\operatorname{ctg}\varphi_1| = \dfrac{b}{p}$ (см. (5) — (3)), или $S_п = \dfrac{2}{3p}\,|(b - p\,|\operatorname{ctg}\varphi_2|)^3|$. (8)

4. Предположим, что в формулах (1), (6) $m=n=R$. При этом площадь произвольного треугольника, одна из сторон которого является дугой окружности, будет определяться по формуле

$$S = \frac{1}{2}\Bigg|(a^2 - b^2)\,|\sin\varphi\cos\varphi| - 2ab\cos^2\varphi + R^2 \operatorname{arctg}|\operatorname{tg}\varphi| \pm$$

$$\pm\left(F\sqrt{R^2 - F^2} + R^2 \operatorname{arctg}\frac{F}{\sqrt{R^2 - F^2}}\right)\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}, \qquad (9)$$

где $F = a\,|\sin\varphi| - b\,|\cos\varphi|$.

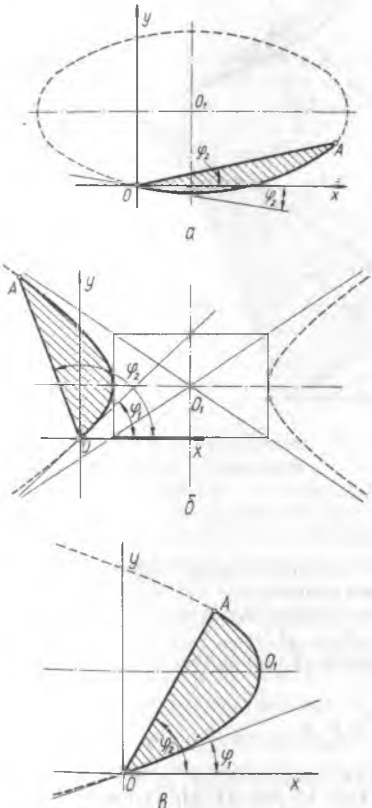

Рис. 1.

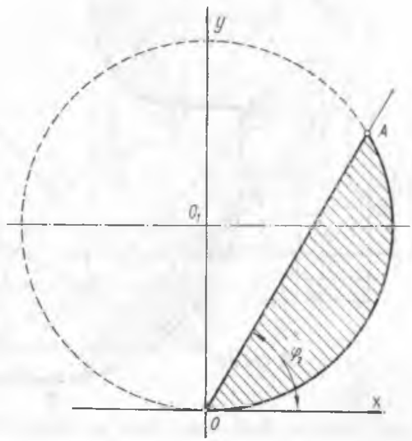

Рис. 2.

Формула площади сегмента окружности соответственно примет вид

$$S_0 = \left|\frac{(a^2 - b^2)\,|\operatorname{tg}\varphi| - 2ab}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} + R^2 \operatorname{arctg}|\operatorname{tg}\varphi|\right|_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

$$\text{где } |\operatorname{tg}\varphi_1| = -\frac{ab}{R^2 - a^2} = -\frac{a}{b}$$

или, если положить $a=0$ и $b=R$, т. е. принять направление касательной к окружности за полярную ось, а точку касания за полюс, то получим $(\operatorname{tg}\varphi_1)=0$ (рис. 2) и

$$S_0 = R^2 (\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_2). \tag{10}$$

Для определения площади произвольного обвода, составленного из прямых и дуг кривых второго порядка (рис. 3), предлагается следующая методика:

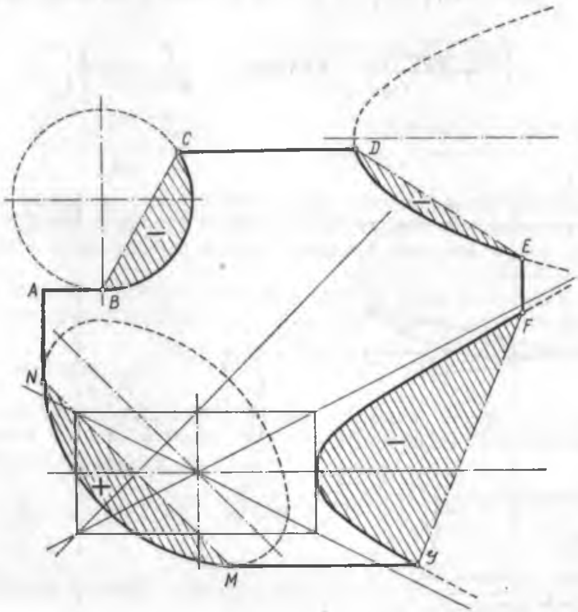

Рис. 3.

а) дополняем обвод до прямолинейного многоугольника, как показано на рисунке, и методом триангуляции находим его площадь;

б) находим площади сегментов, одна из сторон которых является дугой кривой второго порядка, по формулам (6)—(8) и (10);

в) вычисляем алгебраическую сумму найденных площадей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ленчук И. Г. Определение площади треугольника, одна из сторон которого — дуга кривой второго порядка. Сб. «Прикладная геометрия и инженерная графика». Кишинев, «Штиинца», 1976.

2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1970.