ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР У ЗАДАЧАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. Прикладами задач розкрито роль і місце перетворення подібності (руху і гомотетії) в уявлювано-конструктивному, візуальному моделюванні різнохарактерних стереометричних пропозицій.

Ключові слова: профільне навчання, перетворення простору, рух, гомотетія, конструктивізм, моделювання.

Иван ЛЕНЧУК. Пространственные преобразования фигур в задачах стереометрии.

Аннотация. Примерами задач раскрыто роль и место преобразования подобия (движения и гомотетии) в мыслительно-конструктивном, визуальном моделировании разнохарактерных стереометрических предложений.

Ключевые слова: профильное обучение, преобразование пространства, движение, гомотетия, конструктивизм, моделирование.

Ivan LENCHUK. Spatial transformation figures in problems geometry.

Summary. Examples of problems solved role and place of the similarity transformation (movement and dilation) in-conceivable constructive, visual modelling different character stereo metric proposals.

Keywords: specialized education, transformation of space, movement, homothetic, constructivism, modelling.

Одним із принципів, на яких ґрунтується профільне навчання учнів старшої школи, є варіативність і альтернативність освітніх програм, технологій навчання і навчально-методичного забезпечення. Це виявляється в багаторівневості навчальних планів, змісті освіти, використанні сучасних інноваційних технологій, наданні учням можливостей вибору предметів, що вільно вивчаються, зміні видів діяльності, використанні інтегративного підходу в опануванні обов'язкових предметів. Удосконалювати знання з обраної галузі можна, вивчаючи поглиблено фахові модулі.

При побудові навчальних профілів математичного спрямування до трьох годин інваріантної частини додаються п'ять годин, які розподіляються між алгеброю та геометрією. Тож навантаження геометрією зростає до чотирьох годин на тиждень. За цих умов з'являється реальна нагода приділити більше уваги фундаментальним питанням розбудови геометрії як науки.

За Ф. Клейном: «Геометрія є наука, яка вивчає властивості фігур, що не змінюються при перетвореннях деякої групи перетворень» [5, *12*]. До того ж елементарна геометрія вивчає властивості виняткових тих фігур, котрі утворені прямими лініями і колами, а групою перетворень цієї геометрії є перетворення **подібності** (*зокрема, рухи і гомотетія*).

Отже, перетворення подібності в елементарній геометрії не лише розділ курсу, поцінований у творчому особистісному розвитку суб'єкта навчання, це — ***інструмент***, ***засіб*** розбудови найпершої з наук, ефективний ***апарат*** педагогічно і методично виваженого виконання супутніх уявлюваних операцій з її фігурами. Як результат, у багатьох випадках практичного характеру процес вирішення не простих, різнохарактерних геометричних завдань відчутно пришвидшується, оптимізується.

Проте на *практиці*, у викладанні й учінні зазначеної теми, доводячи теореми, розв'язуючи стереометричні задачі, суб'єкти освітянського процесу неспроможні професійно застосовувати перетворення.

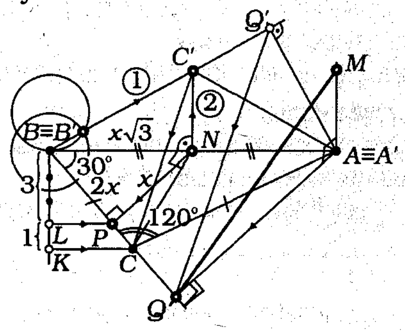
Мету цієї статті ми вбачаємо в розкритті ролі й місця подібності та її частинних випадків (руху і гомотетії) в ***уявлювано-конструктивному***, ***візуально-малюнковому*** вирішенні різноманітних стереометричних пропозицій, що буде демонстрацією одного з напрямів поглибленого вивчення учнями найпершої з наук у класах, зорієнтованих на математику.

Розглянемо кілька характерних **прикладів** педагогічно виправданого *підключення відомих просторових перетворень* до вирішення практичних пропозицій стереометрії.

Задача 1. У площині загального розташування задано рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC$) із кутом при вершині C, що дорівнює 120°. Будь-яку точку M узято на перпендикулярі до площини трикутника, проведеному у вершині A. Опустіть із точки M перпендикуляр на бічну сторону BC трикутника.

Перший спосіб розв'язання. Аналізуючи умову задачі, уважно оглядаючи малюнок-картину, акуратно виконаний до неї (мал. 1), можна сформувати наступний алгоритм розумових дій. Шуканий перпендикуляр MQ до прямої BC — це похила до площини трикутника

ABC. Отже, згідно з теоремою про три перпендикуляри, її проекція AQ теж мала б розташовуватися перпендикулярно до BC. Тож задача зводиться до проведення у площині загального розташування висоти трикутника з вершини A на протилежну їй сторону. Очевидно, що точка Q (основа висоти) лежатиме на промені BC за межами відрізка, оскільки кут C, що дорівнює 120°, — тупий.



Мал. 1

Учитель, досвідчений учень звернуть передусім увагу на трикутник AQC. Адже він прямокутний ($\angle Q = 90°$), а $\angle ACQ = 180° - \angle ACB = 60°$ і $\angle CAQ = 30°$, що безсумнівно. Отже, врахувавши, що катет прямокутного трикутника CQ, який лежить проти кута 30°, у два рази менший за його гіпотенузу AC, матимемо $CQ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC$. Тож залишається лише розділити відрізок BC навпіл і від точки C впродовж нього відкласти відрізок $CQ = \frac{1}{2}BC$.

Однак у розділі «Стереометрія» часто користуються таким «неписаним» правилом: щоб змоделювати перпендикуляр із точки на пряму (чи на площину), досить обґрунтовано зобразити інший перпендикуляр *із вдало обраної точки* на ту саму пряму (чи на площину). Потім через дану точку провести пряму, паралельну побудованому перпендикуляру. Адже відомо, що пряма (площина), перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, перпендикулярна також і до другої прямої.

У нашому випадку надто зручно опустити перпендикуляр на сторону AC трикутника ABC, наприклад із точки N, яка є серединою його основи AB. Справді, $\angle A = \angle B = 30°$, а CN — медіана, бісектриса і висота даного трикутника. Скориставшись фактом, що у прямокутному трикутнику CNB ($\angle N = 90°$) кожен із його катетів є середнім геометричним між гіпотенузою і власною проекцією на гіпотенузу, одержимо: $BN^2 : NC^2 = BP : PC$. Звідки, позначивши $CN = x$, матимемо (див. мал. 2): $BC = 2x$, $BN = x\sqrt{3}$ і $BP : PC = \left(x\sqrt{3}\right)^2 : x^2 = 3 : 1$.

Завершуємо розв'язання задачі в суто конструктивному стилі. Спочатку, пославшись на узагальнену теорему про пропорційні відрізки, розділимо сторону трикутника BC точкою P у відношенні 3 : 1 (починаючи від точки B). Далі з'єднаємо точки N і P відрізком, перпендикулярним до BC. Та, врешті, через точку A паралельно до NP проведемо проекцію похилої AQ, а потім і саму шукану похилу MQ.

Зараз задачу на побудову розв'язано *графоаналітичним* методом, як-от: 1) *формально-логічно* розраховано розташування на прямій BC основи P перпендикуляра NP до неї; 2) знайдений на цьому кроці результат дозволив *графічно* змоделювати зображенням проекцію похилої AQ за вже відомим її напрямом у площині трикутника ($AQ \parallel NP$); 3) нарешті, з'єднавши точки M і Q, одержано виважено точний візуальний розв'язок задачі.

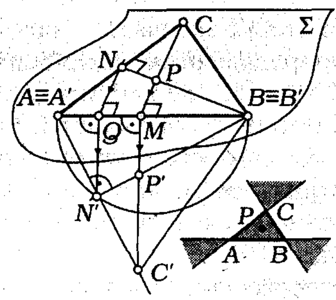
Неважко помітити, що з погляду пошуку оптимального шляху до результату, етап аналізу в цій задачі надто важливий. Однак, такі міркування звичні, традиційні для учнів.

Другий спосіб розв'язання (нетрадиційний). Тепер скористаємося *рухами* і дійдемо до результату винятково *графічним* методом.

Отож уявимо, що, тримаючи в руках трикутник ABC, ми переміщуємо його у просторі й «кладемо» на площину зображень стороною AB ($A'B' \equiv AB$). Тепер обертанням точки $C \equiv C'$ навколо прямої $A'B'$ суміщаємо останню з тією ж площиною зображень. Побудувати точку C' циркулем і лінійкою у два кроки просто, якщо взяти до уваги, що в оригіналі $\angle A' = \angle B' = 30°$ (див. мал. 1). Далі класичним площинним прийомом реально опускаємо з точки A' на пряму $B'C'$ перпендикуляр $A'Q'$. Точка Q' поділяє відрізок $B'C'$ зовнішнім чином у тому самому відношенні, в якому точка Q ділить відрізок BC (відомо, що рухи зберігають відношення відрізків на прямій). Тож відшукання точки Q здійснюємо, знову таки, скориставшись узагальненою теоремою про пропорційні відрізки. Завершуючи, сполучаємо точку Q із точками A і M й отримуємо шукані за умовою задачі похилу MQ і її проекцію AQ, перпендикулярні BC.

Задача 2. На проекційному кресленні дано зображення трикутника ABC, причому точка P є зображенням його ортоцентра. Потрібно знайти істинну форму і розміри трикутника-оригінала, якщо $A'B' = 20$ см.

Приймаючи AB на картинній площині (мал. 2) за справжню довжину цього відрізка ($AB \equiv A'B'$, з урахуванням у майбутніх практичних замірюваннях коефіцієнта подібності k), змоделюємо оригінальну форму трикутника ($A'B'C'$) методом його *суміщення* з картинною площиною. На зображенні пари точок A і A', B і B' зливаються ($A' \equiv A$, $B' \equiv B$), а отже, нам залишається лише знайти суміщення C' третьої вершини C трикутника-зображення.



Мал. 2

Усім відомо, що задати точку в конструктивній геометрії можна або її зображенням у визначеному місці поля креслення (координатами), або ж — шляхом візуальної фіксації місця розташування на картинній площині в перетині побудованих обумовленим чином найпростіших ліній (у розумінні технології їх проведення): двох прямих, прямої і кола, двох кіл.

Таким чином, щоб установити розміщення точки C' (C) після суміщення, потрібно виважено оцінити конструктивні можливості двох первісно відомих особливих метричних параметрів уявлюваної в русі плоскої фігури $A'B'C'$та, скориставшись доречними геометричними фактами, які прямо випливають з умови, накреслити дві визначальні для точки C' лінії.

Логіка міркувань проста. Основа M висоти CM трикутника-зображення буде одночасно основою висоти трикутника-оригінала ($M \equiv M'$). Тому пряма MC', перпендикулярна до $A'B'$, є однією із двох визначальних у пошуку вказаних ліній. Крім того, навіч помічаємо, що точка C' належить ще й променю $A'N'$. Тому побудова точки C' зводиться тепер до побудови суміщення N'точки N, яка є вершиною прямого кута трикутника $A'N'B'$ (за умовою). Знайти справжню форму трикутника ANB, прямокутного в оригіналі, зовсім не складно, адже, по-перше, з точки N' його гіпотенузу $A'B'$ видно під прямим кутом і, по-друге, висота $N'Q'$ цього останнього трикутника, проведена з вершини прямого кута N' на гіпотенузу $A'B'$, паралельна висоті $C'M'$трикутника $A'B'C'$. Тобто точку N' слід шукати в перетині променя, який виходить із точки $Q \equiv Q'$ під кутом 90° до $A'B'$, та півкола, побудованого на $A'B'$ як на діаметрі. Провівши промінь $A'N'$ до перетину з MC', знайдемо точку C'.

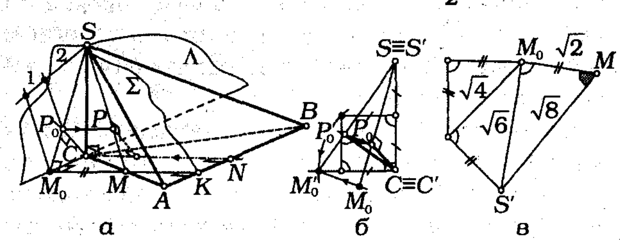
Отже, справжню форму трикутника ABC ($A'B'C'$) на картинній площині встановлює достовірно змодельований трикутник ABC', усі кути якого вимірюються в натуральну величину, а сторони — з точністю до подібності. Тут коефіцієнт подібності $k = 20 : m$, де m — акуратно заміряна в сантиметрах на малюнку 2 довжина сторони AB трикутника-зображення.

Примітка. Задача має єдиний розв'язок, причому точка P, що зображає за умовою задачі ортоцентр трикутника-оригінала, має обов'язково лежати всередині власної «області існування» (див. мал. 2).

Задача 3. Основою піраміди $SABC$ є рівнобедрений прямокутний трикутник ABC, довжина гіпотенузи якого $AB = 4\sqrt{2}$. Бічне ребро SC піраміди перпендикулярне до площини основи і дорівнює 2. Знайдіть градусну міру кута і відстань між прямими, одна з яких проходить через точку S і середину ребра AC, а друга — через точку C і середину ребра AB.

Висновок задачі неважко відразу ж переформулювати з наголосом на її конструктивне розв'язання*. Однак у нашій ситуації робити це не обов'язково, оскільки так чи інакше без дії вдалого ***внутрішнього проекціювання*** (ще одного **важливого перетворення простору**) уявити визначальні залежності між заданими і шуканими геометричними фігурами надто важко.

Отож нехай SM і CN — задана пара мимобіжних прямих (мал. 3). Відстань між ними визначається, як відомо, перпендикуляром, опущеним із будь-якої точки прямої CN на площину Σ, яка паралельна до CN і містить SM. Площину Σ доцільно задати перетином прямих SM і MK, де $MK \parallel CN$, адже цим перетином визначається ще й шуканий кут між мимобіжними прямими SM і CN. У ролі площини проекцій *внутрішнього ортогональне проекціювання* за напрямом $N \to C$ зумисне виберемо (творчий момент) площину Λ, яка проходить через бічне ребро піраміди SC паралельно до ребра її основи AB. Тоді точка C буде слід-проекцією прямої NC, пряма ж SM_0 — слід-проекцією площини Σ (SMK), а шуканий спільний перпендикуляр PQ заданих прямих спроекціюється на вибрану площину проекцій Λ у натуральну величину як висота CP_0 прямокутного трикутника SCM_0, проведена з вершини прямого кута C на гіпотенузу SM_0. У цьому трикутнику $SC = 2$, а $CM_0 = \sqrt{2}$ ($CM_0 = NK$, оскільки CM_0KN — прямокутник). Тому $SM_0 = \sqrt{6}$, $CP_0 = PQ = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. У свою чергу помічаємо, що трикутник SM_0M теж прямокутний ($\angle M_0 = 90°$). У нього $M_0M = \frac{1}{2}CN = \sqrt{2}$.



Мал. 3

Нарешті, маємо: $\operatorname{tg}\angle M_0MS = \sqrt{3}$ і $\angle M_0MS = 60°$.

* **Побудуйте** спільний перпендикуляр мимобіжних прямих, **знайдіть** *формально-логічно та графічно* градусну міру кута і відстань між ними. **Оцініть** точність побудов.

Задачу на обчислення розв'язано. Проте на вже пройденому нами шляху виконано «левову частину» побудовних операцій, щоб швидко і якісно завершити її розв'язання конструктивно. Зокрема, точка P_0 на відрізку SM_0 однозначно визначається відношенням: $\frac{SC^2}{CM_0^2}=\frac{SP_0}{P_0M_0}=\frac{2}{1}$, що легко можна обґрунтувати. Завершення *графоаналітичного* дійства для точки P_0 очевидне.

Якщо ж точка P_0 побудована, то зображення відрізка PQ встановлюється оберненим проекціюванням за напрямом $C \to N$, де $PQ \parallel P_0C$ і $PQ = P_0C$.

Цього самого результату (за відомою вже схемою) можна також досягти суто *графічно* — **суміщенням** із площиною зображень прямокутного трикутника SCM_0, обравши як оригінальну вісь **обертання** ребро піраміди $SC \equiv S'C'$ (див. мал. 3, *б*) і маючи на увазі, що $S'C' = 2$, $C'M_0' = \sqrt{2}$, $C'P_0' \perp S'M_0'$.

Далі, подібний оригіналу трикутник $S'M_0M$ найкраще відтворити поруч із основним малюнком на так званому «*виносному кресленні*» шляхом **обертання** навколо осі M_0M і **суміщення** із площиною дошки (зошита) його зображення — трикутника SM_0M. У трикутнику $S'M_0M$ $\angle M_0 = 90°$, катети M_0M і M_0S' дорівнюють, відповідно, $\sqrt{2}$ і $\sqrt{6}$, а $\angle M = 60°$. Шуканий результат при належному викреслюванні можна навіть заміряти лінійкою і транспортиром і порівняти з попередніми формально-логічними (числовими) обрахунками. Думається, що їх майже абсолютне злиття безсумнівно принесе чималеньке моральне задоволення учневі.

На завершення, хоча б одним прикладом продемонструємо діяльнісне використання *гомотетії* в конструктивній стереометрії.

Задача 4. Виконати навчальне креслення правильної піраміди, описаної навколо кулі, якщо висота піраміди у два рази більша за діаметр кулі.

Тут, щонайперше, суть важливо зрозуміти, що число вершин в основі правильної піраміди аніяк не впливатиме на структуру конструйованого нами алгоритму, а домовленість стосовно співвідношення в розмірах висоти піраміди і діаметра кулі є лише формальним метричним параметром чіткої визначеності графічної моделі даної комбінації.

Якщо навіть учень, який моделює, малодосвідчений чи завдання досить складні, що трапляється об'єктивно, та все ж він володіє певними вміннями і навичками у виконанні чітких проекційних креслень Г. Монжа, то ключем до правильного і наочного малюнка може слугувати виконане «від руки» зображення пари тіл куля-піраміда на двокартинному кресленні (тут $i \perp H$, мал. 4). Якраз за ним значно спрощується **аналіз** ситуації — відстеження та системне упорядкування потрібних побудов. Учень, який «бачить» цю комбінацію, без зусиль розробляє алгоритм обчислювальних дій через чітке встановлення всіх ***визначальних спільних геометричних елементів*** поверхонь тіл, обов'язкових і у процесі грамотного розв'язання метричної задачі.

Для просторової визначеності комбінації тіл кулі-піраміда, а також зручності в гіпотетично допустимому звертанні до комп'ютерів і сучасних ППЗН, наочне зображення будемо моделювати у приведеній (збільшеній) прямокутній диметрії.

1. *Побудова зображення кулі:*

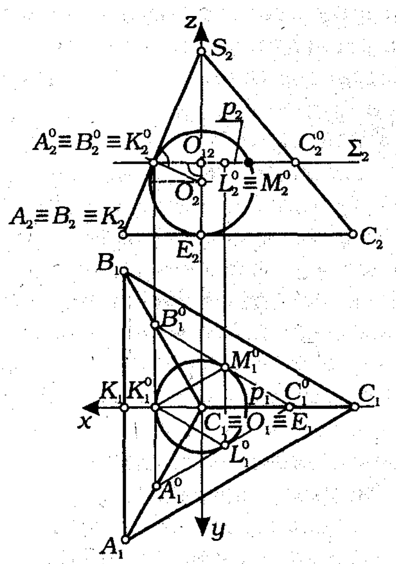
а) точку перетину двох взаємно перпендикулярних прямих (мал. 5), одна з яких розташована горизонтально, а інша — вертикально, вибираємо за центр кулі O; б) з урахування габаритів картини, довільно взятий на вертикальній прямій відрізок OY приймаємо за малу піввісь еліпса, в який проекціюється екватор кулі. У прямокутній диметрії його велика піввісь $OX = 3 \cdot OY$. Із центром у точці O радіусом OX проводимо коло — обрис кулі; в) через точку Y ведемо горизонтальну пряму до перетину з обрисом у точці Z; г) на вертикальній прямій вверх і вниз від точки O відкладемо відрізки OE і OF, що дорівнюють відрізку YZ. Точки E і F, як відомо, зображають, відповідно, північний і південний полюси кулі (див. детально [2], р. III, §§ 1, 3).

2. *Побудова зображення паралелі, яка містить точки дотику сфери і бічних граней піраміди:*

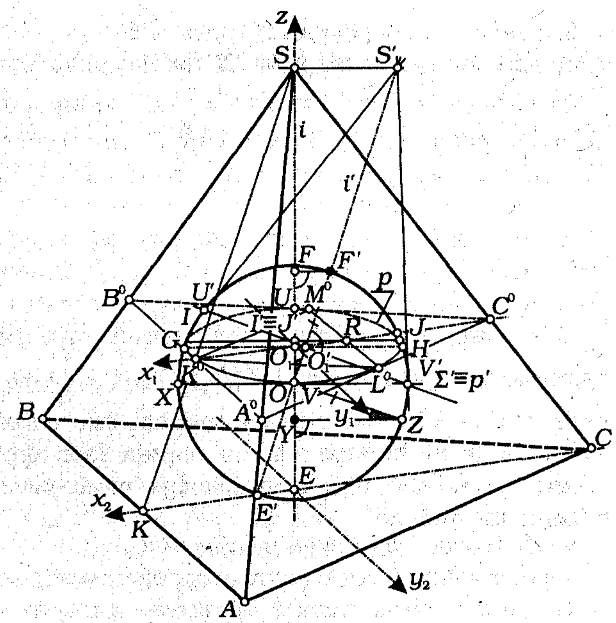
а) від точки E на вертикальній прямій (осі i) відкладемо відрізок $ES = 2 \cdot EF$, чим визначимо на зображенні вершину піраміди S; б) сумістимо фронтально проекціювальну (профільну) площину перерізу комбінації двох тіл, у якій лежить вісь обертання кулі EF, із площиною малюнка. Цим **рухом**, що є насправді ***уявним обертанням*** на кут 90° навколо горизонтально проекціювальної осі кулі її перерізу, реально перейдемо до розгляду комбінації тіл на комплексному кресленні Г. Монжа в системі двох взаємно перпендикулярних площин проекцій, де тепер уже фронтальна площина збігається із площиною аркуша паперу (дошки), а профільна – накладається на неї (тут i нахилена до площини H під кутом $\alpha \neq 90°$). У такому перетворенні кожна точка (крім центра кулі) описує чвертьдугу кола у власній горизонтальній площині. Останні ж вироджуються на екрані в горизонтальні прямі лінії. Тому точки E', F', S' одержимо як суміщення точок E, F, S відповідно на цих прямих після повороту. Площина Σ шуканої паралелі p перпендикулярна до діаметра кулі EF, тому профільною проекцією паралелі є відрізок $UV' \perp E'F'$ (UV' — натуральна величина діаметра паралелі). Тут U' і V' знаходимо як точки дотику дотичних, проведених із точки S' до обрису кулі (для кращого уявлення їх зручно вважати твірними конуса з вершиною S', описаного навколо кулі та вписаного в шукану піраміду); в) фіксуємо центр паралелі (O_1, O'_1) і, відклавши від точки O_1 на горизонтальній прямій відрізки O_1H і O_1G, рівні половині діаметра паралелі $U'V'$, одержимо кінці великої осі еліпса, яким зображується паралель p. Малу вісь UV знайдемо оберненим проекціюванням $U'V'$ на EF; г) у площині перерізу (симетрії) пари куля-конус шукаємо точки I і J видимості, в яких еліпс дотикається до обрису кулі; д) за великою GH і малою UV осями будуємо еліпс, що буде зображенням паралелі дотику, яка разом з обрисом кулі дасть наочне зображення останньої.

3. *Побудова зображення піраміди:*

а) у перетині паралелі p із додатним напрямом осі O_1x_1 ортогональної диметрії знайдемо точку K^0 дотику сфери і лівої грані трикутної піраміди (див. мал. 4, 5). Точки L^0 і M^0, в яких дотикаються відповідно до сфери дві інші бічні грані піраміди, відшукаємо як вершини правильного трикутника, вписаного в паралель, третьою вершиною якого є точка K^0. Для цього радіус, що доповнює O_1K^0 до діаметра, поділимо навпіл і через одержану точку проведемо пряму, паралельну осі O_1y_1. У перетині останньої з p одержимо точки L^0 і M^0; б) опишемо навколо паралелі правильний трикутник $A^0B^0C^0$, в якого сторона $A^0B^0 \parallel O_1y_1$ і дотикається p у точці K^0; точка C^0 належить осі абсцис O_1x_1 і $O_1C^0 = 2 \cdot O_1K^0$. Крім цього, A^0C^0 містить точку L^0, а B^0C^0 — точку M^0; в) точку K, що є серединою сторони AB трикутника ABC в основі піраміди, знайдемо в перетині апофеми SK^0 її лівої грані з віссю Ex_2; г) ***у гомотетії H_S*** із коефіцієнтом $k = SK : SK^0 = SE : SO_1$ будуємо трикутник ABC, ***гомотетичний*** трикутнику $A^0B^0C^0$; д) проводимо з вершини S бічні ребра піраміди. Побудову завершено.



Мал. 4



Мал. 5

У студента чи учня (а можливо, й у вчителя) можуть з'явитися сумніви щодо такого способу стереометричного моделювання, адже він не простий і потребує чимало часу для його реалізації у кожному випадку. Проте якщо учень зрозумів, засвоїв усе, про що йшлося, і в нього бракує часу ретельно і графічно точно виконати аналогічну побудову (на уроці чи при вирішенні домашніх завдань), то обґрунтовано ввівши *умовності* можна спростити і значно прискорити цей процес. Як це зробити?

В умові задачі на побудову висота піраміди у два рази більша за діаметр кулі: $SE = 2 \cdot FE$. З урахуванням цього факту розглянемо прямокутний трикутник SK^0O (див. мал. 4). Тут $\angle SK^0O$ ($\angle S_2K^0_2O_2$)=90°, оскільки SK^0 — дотична до головного меридіана поверхні. Очевидно, що гіпотенуза SO трикутника рівна трьом радіусам великого кола кулі ($SO = 3R$), а катет K^0O – радіусу ($K^0O = R$). У прямокутному трикутнику, як уже відомо, $(K^0O)^2 = OO_1 \cdot SO$. Або $R^2 = OO_1 \cdot 3R$. Звідси $OO_1 = \frac{R}{3}$. Отже, центр паралелі, яка містить точки дотику бічних граней піраміди до поверхні сфери, ділить радіус кулі OF у відношенні 1 : 2, рахуючи від точки O. Введення (винятково для практичних цілей) таких елементарних *умовних співвідношень* вважатимемо ще одним (останнім) кроком на шляху до створення спрощеного алгоритму побудов «від руки» (див. мал. 5).

1. *Побудова зображення кулі:*

а) проводимо пару взаємно перпендикулярних прямих і, з центром у точці їх перетину, довільним радіусом проводимо коло — обрис кулі; б) «на око» на вертикальній прямій у зримо допустимому розташуванні задаємо зображення її полюсів: $OF = OE$.

2. *Побудова зображення паралелі:*

а) «на око» ділимо відрізок OF на три рівні частини і точку O_1 таку, що $OO_1=\frac{1}{3}OF$, обираємо центром паралелі; б) через точку O_1 проводимо горизонтальну пряму і на ній, у внутрішній області обрису «досить близько» від нього, фіксуємо точки G і H — кінці великої осі еліпса, яким зображується паралель кулі; в) приблизно третину великої півосі відкладемо від точки O_1 в обох напрямах вертикальної прямої, чим визначимо малу вісь еліпса UV ($O_1U=O_1V=\frac{1}{3}GO_1$); г) за двома осями «від руки» зображаємо еліпс; точки видимості паралелі на обрисі кулі фіксуємо інтуїтивно при акуратному, вивіреному наведенні кривої.

3. *Побудова зображення піраміди:*

Завершальний етап доцільно провести за схемою, описаною в пункті третьому алгоритму розв'язання цієї самої задачі креслярськими інструментами. Відмінність дій полягає лише в тому, що тут всі вони акуратно виконуються «від руки» і «на око», з гідним відчуттям міри та відповідальності.

У підсумку зробимо три посутні зауваження. *По-перше*, змодельована метрична задача на комбінацію куля-піраміда є у своєму класі типова. Тому розуміння викладених закономірностей гарантує кваліфіковане виконання переважної більшості зображень за участю кулі, які трапляються в курсі стереометрії. *По-друге*, процес візуального подання таких побудов завжди чітко диференціюється і, після серйозного аналізу, реалізується на екрані моделлю у три етапи: 1) за кмітливим, розсудливим вибором виконавця **будують** *зображення* поверхні *одного із заданих тіл*; 2) на ній **«шукають»** *спільні елементи* обох поверхонь — *точки (лінії) дотику*; 3) **будують** *зображення іншого тіла* обов'язково з урахуванням факту, *що знайдені точки (лінії) дотику належать і його поверхні. По-третє*, досвід засвідчує, що для кращої *наочності* моделі доцільно *описану поверхню* комбінації вважати *прозорою по відношенню до вписаної в неї поверхні* та *кожну з них — непрозорою по відношенню до себе.* При цьому видимість обох поверхонь на зображенні встановлюють незалежно одна від одної.

У стереометрії, як правило, задача на обчислення, доведення чи побудову зводиться до кількох планіметричних задач. Якщо, наприклад, у будь-якому завданні потрібно провести з точки пряму, перпендикулярну до іншої прямої, то рекомендується віднести їх до деякої плоскої фігури визначеної форми, а потім виконати *виносне креслення* цієї фігури з дотриманням її істинної форми. Інколи кажуть: «треба покласти обрану фігуру на картинну площину», де вже зручно здійснювати метричні операції за алгоритмами планіметрії. ***Креслення**, на якому будується фігура, подібна до заданої, і на якому опісля виконуються точні потрібні метричні побудови, називають **виносним**.* Таким чином, на виносному кресленні будуються фігури, обов'язково подібні до оригінальних (подібні фігури ті, які мають однакову форму).

Тепер очевидно, що будь-яке виносне креслення виконується з чітким дотриманням закономірностей, властивих двом перетворенням: *подібності* та *обертання навколо прямої.* Причому бажано, щоб вісь обертання була лінією **нульового** рівня — «лежала» на картинній площині. Перетворення обертання в його реальному дійстві ще також називають *суміщенням.*

У моделюванні стереометричних ситуацій можуть брати активну участь «хаотичні», не строго узаконені просторові рухи. Коли говорять: «Уявіть, що піраміду $SABC$ із ребром-висотою SC (задача 3) ми тримаємо в руках і переміщуємо її доти, поки SC не «ляже» на дошку (лист паперу)», то мають на увазі реальне перетворення багатогранника рухом, проте вираженим *не явно.* Діючи так, вельми зручно суміщати прямокутний трикутник SCM_0 із площиною зображень, адже форма і розміри фігури не змінилися, а один із катетів уже гарантовано змодельований оригінальним.

У контексті статті залишається лише переконливо засвідчити актуальність *конструктивного підходу* в навчанні геометрії, наголосити на ролі й місці *бінарних моделей* у курсі евклідової геометрії, зокрема в його специфічному, найбільш трудомісткому, незручному з погляду сприйняття та розуміння учнями розділі — стереометрії.

Сьогодні педагогічна психологія як наука висуває на одну з перших за значимістю позицій проблему формування і розвитку в суб'єктів освітянського процесу *образного мислення*, ефективного використання в навчанні *наочності.* Це передусім актуально в опануванні геометрії, яка базується на абстрактних фігурах і поняттях. Усяке абстрактне поняття, перш ніж воно буде сформоване особистістю, слід уявити чи представити в живому спогляданні.

Позитиви наочності й образності представлення навчальної інформації стають ще більш зрозумілими у світлі з'ясованої вченими функціональної асиметрії півкуль головного мозку. В абсолютної більшості людей права півкуля відповідає за цілісне, образне сприйняття нової інформації, вона включається в роботу першою. В частини молоді спостерігається природна латералізація правої півкулі. Для успішного засвоєння ними знань потрібне підсилення наочно-образної складової геометричного матеріалу, що подається як альтернатива чи надто важливий додаток до традиційно привілейованої абстрактно-логічної компоненти. Психофізіологічні дослідження проблеми унаочнення свідчать про визначну роль образності — необхідної складової мислення при формуванні задатків творчості засобами геометрії.

Ще в 40-х роках минулого століття проф. Четверухін М. Ф. наголошував: «Недоліком сучасного викладання є *надлишкова штамповка вимірювальних задач*, переважання у виборі таких задач, в яких розв'язання зводиться до підстановки в завчену формулу числових даних і до підрахунку результату. Схожі задачі мало дають учням у розумінні їх геометричного розвитку. Тож ці задачі, швидше за все, варто вважати арифметичними. *Отже, в області вимірювальної геометрії потрібно переглянути питання про підбір задач для того, щоб підсилити їх геометричний зміст*» [4, *11*].

Прикро зізнаватися, однак «шило в мішку не сховати» — позитивних зрушень у проблемі «геометризації й унаочнення геометрії» в ЗОШ немає й сьогодні, а недосконалість методології навчання диво-науки залишається незмінною і злободенною. Насущна потреба становлення належного рівня просторового й логічного мислення, уявлень і уяви, їх інтенсивного розвитку як для успішного засвоєння геометрії й інших дисциплін, так і для здобуття вищої професійної освіти, доведена дослідженнями багатьох педагогів і психологів. Водночас, це одне з найскладніших завдань навчання. Адже ніхто не заперечує, що чим кращий рівень уявлень й наочно-образного мислення студентів (учнів), тим простіше навчити їх геометрії, тим цікавіші та змістовніші задачі можна ставити перед ними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Єршова А. П. Геометрія. 11 клас. Академічний рівень. Профільний рівень: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. — Х.: Вид-во «Ранок», 2011. — 304 с.
2. Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навчальний посібник / І. Г. Ленчук. — Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. — 368 с.
3. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10 — 11 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 128 с.
4. Четверухин Н. Ф. О научных принципах преподавания геометрии в советской школе / Н. Ф. Четверухин. — М.: Известия АПН РСФСР, 1951. — Вып. 31. — С. 5 — 12.
5. Яглом И. М. Геометрические преобразования / И. М. Яглом. — Ч. II. — М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1956. — 612 с.

РОЗВИТОК УМІНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ ВИКОНУВАТИ ПРОСТОРОВІ ЗОБРАЖЕННЯ: МНОГОГРАННІ КУТИ, МНОГОГРАННИКИ

Людмила ШВЕЦЬ — аспірант кафедри математики і теорії та методики навчання математики Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова

Анотація. У статті запропоновано технологію вироблення та розвитку вмінь старшокласників виконувати просторові зображення многогранних кутів та многогранників, з урахуванням принципу поетапного формування часткових умінь.
Ключові слова: технологія вироблення вмінь, просторові зображення, многогранні кути, многогранники.

Людмила ШВЕЦ. Развитие умений старшеклассников строить пространственные изображения: многогранные углы, многогранники.
Аннотация. В статье предложена технология формирования и развития умений старшеклассников строить пространственные изображения многогранных улов и многогранников, учитывая принципы поэтапного формирования частичных умений.
Ключевые слова: технология формирования умений, пространственные изображения, многогранные углы, многогранники.

Lyudmila SHVETS. The development of students' skills to draw spatial representations (pictures): polyhedral angles, polyhedrons.
Summary. In this article there is the technology of formation and development of students' skills to draw spatial representations (pictures) of polyhedral angles and polyhedrons taking into account the principle of step-by-step development of partial skills.
Keywords: technology of skills' formation, spatial pictures, polyhedral angles, polyhedrons.

Двогранні, тригранні та многогранні кути. Традиційно шкільний курс стереометрії в 11 класі починається з вивчення двогранних, тригранних та многогранних кутів. Вивчення цих кутів є останнім кроком у підготовці до вивчення многогранників, зокрема призм та пірамід. Сформувати в учнів уявлення про двогранний та тригранний кути після вивчення перпендикулярних площин, паралельного та