ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Вивчаючи інші дисципліни до ознайомлення з теорією ймовірностей, ви мали справу з такими математичними моделями явищ або експериментів, в яких умови однозначно визначають результат.

Такі моделі називають ***детермінованими***.

Разом з тим скористатись детермінованою моделлю чи побудувати її не завжди вдається, оскільки для широкого кола явищ за збереження основних умов експерименту спостерігається невизначеність результату.

Так, підкидаючи монету тим самим способом, не можна передбачити результат — випаде монета лицевим чи зворотним боком.

Результати окремих вимірювань, виконаних тим самим приладом у тих самих умовах, різні.

Деталі, виготовлені на тому самому верстаті, що працює в тому самому режимі, виявляються не зовсім однаковими.

Звичайно, є багато причин, які зумовлюють таку невизначеність результату. В останньому прикладі це може бути неоднорідність матеріалу, вібрація інструмента, коливання електроенергії тощо.

Урахувати вплив усіх цих чинників на результат неможливо, оскільки кількість їх надто велика і закони їхньої дії невідомі.

Отже, спільна дія великої кількості різноманітних чинників, кожен з яких окремо не може вплинути на результат експерименту, приводить до того, що результат експерименту не визначається однозначно.

Тож результат такого експерименту називають ***випадковим***.

Результати окремих експериментів (підкидань монети, вимірювань тощо) «поводять» себе *неправильно*.

Утім теорія ймовірностей не ставить перед собою мету передбачити результат такого окремого експерименту. Будь-яка наука безсила це зробити.

Проте у спостереженні за результатами великої кількості тотожних експериментів виявляються певні закономірності.

Саме дослідження таких закономірностей на математичних моделях випадкових явищ і є предметом теорії ймовірностей як науки.

Вивчаючи будь-яку математичну дисципліну, зміст її математичних залежностей значно легше зрозуміти з математичного аналізу і на прикладах розв'язування простих модельних задач, ніж на реальних фізичних прикладах.

Тому основні положення та методи теорії ймовірностей і математичної статистики у даному посібнику ілюструються переважно на простих модельних задачах, а не на конкретних задачах з економіки, техніки тощо.

Звичайно, у розвитку інтуїції спеціаліста ці реальні задачі відіграють дуже важливу роль. Проте автори рекомендують читачеві переходити до опрацювання наявних і до побудови своїх власних математичних моделей реальних імовірнісних об'єктів та процесів лише після набуття необхідних навичок саме на простих модельних прикладах.

І варто додати, що історія розвитку теорії ймовірностей і математичної статистики широко висвітлена в літературі, зокрема в тій, що наведена наприкінці посібника.

Розділ I

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1. НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ МНОЖИН І КОМБІНАТОРИКИ

1.1. Елементарні поняття теорії множин

Поняття ***множини*** є одним з вихідних у математиці, яке подається без означення. Інтуїтивно розуміємо, що множиною є об'єднання в одне ціле (сукупність) предметів (об'єктів) довільної природи, які можна відокремити один від одного. Ці предмети (об'єкти) називаються *елементами множини*. Множини позначатимемо великими літерами A, B, C тощо, а також за допомогою фігурних дужок, усередині яких перелічуються всі елементи множини. Наприклад, запис $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ означає, що B — така сама множина, що й множина чисел $1, 2, 3, 4, 5$.

Те, що a є елементом множини A, записують як $a \in A$. Якщо a не належить до A, то пишуть $a \notin A$. Якщо множина A містить n елементів, будемо писати $N(A) = n$. Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою* і позначають символом $\varnothing$. Отже, $N(\varnothing) = 0$.

Множини, які містять скінченну кількість елементів, називаються *скінченними*. Множина може й не бути скінченною, тоді її називають *нескінченною*.

Якщо дві множини складаються з тих самих елементів, то кажуть, що ці множини ***рівні*** і пишуть $A = B$.

Означення 1. Якщо кожен елемент множини A є одночасно і елементом множини B, то множина A називається *підмножиною* множини B. Позначається це так: $A \subset B$.

З означення підмножини випливає, що довільна множина є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$. Вважається також, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини: $\varnothing \subset A$.

Зауваження 1. Тут і далі в тексті посібника іноді будемо використовувати такі позначення: « $\wedge$ » — сполучник «і»; « $\vee$ » — сполучник « або»; « $\Rightarrow$ » — випливає; « $\Leftrightarrow$ » — «тоді і тільки тоді, коли …»; а також квантори довільності $\forall$ та існування $\exists$. Наприклад, запис $\forall x$ читається «для будь-якого x «, запис $\exists x$ — «існує таке x ».

Справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} &1)\ A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C;\\ &2)\ A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Друге співвідношення, наприклад, читається так: множини A і B рівні тоді і тільки тоді, коли A є підмножиною B і B є підмножиною A.

Це співвідношення часто використовується для доведення рівності двох множин. Геометрична ілюстрація першого співвідношення показана на рис. 1.1.

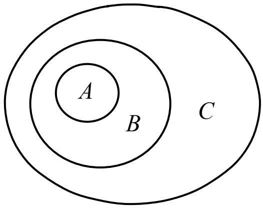


Рис. 1.1

Операції над множинами

Означення 2. *Об'єднанням* (або *сумою*) множин A і B (пишуть: $A \bigcup B$ або $A + B$) називається множина, кожен елемент якої належить хоча б до однієї з множин A або B. Отже, $x \in A \bigcup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

Приклад 1. $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, $A \bigcup B = A + B = \{1; 2; 3\}$.

Означення 3. *Перерізом* (або *добутком*) множин A і B (пишуть $A \bigcap B$ або AB) називається множина, кожен елемент якої належить як до множини A, так і до множини B. Отже, $x \in A \bigcap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

Приклад 2. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $A \bigcap B = AB = \{2\}$.

Геометрична ілюстрація об'єднання та перерізу множин A і B показана відповідно на рис. 1.2 та 1.3.

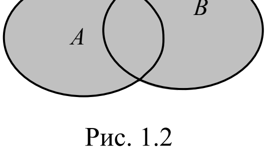


Рис. 1.2

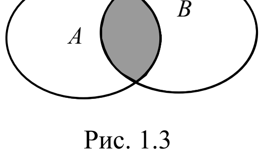


Рис. 1.3

Можна розглядати об'єднання (суму) та переріз (добуток) трьох і більше множин.

Означення 4. Під об'єднанням (сумою) та перерізом (добутком) трьох множин A, B і C розуміють множини

$$A\bigcup B\bigcup C=\left(A\bigcup B\right)\bigcup C \text{ та } A\bigcap B\bigcap C=\left(A\bigcap B\right)\bigcap C$$

$$\text{або } A+B+C=\left(A+B\right)+C \text{ та } ABC=\left(AB\right)C .$$

Для об'єднання та перерізу n множин $A_k,\, k=1,2,...n$ будемо писати

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1+A_2+...+A_n, \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1A_2...A_n .$$

Справедливі такі співвідношення:

1) $A\bigcup A = A\bigcap A = A$ $\quad(A+A=AA=A)$;

2) $A\bigcup B = B\bigcup A$ $\quad(A+B=B+A)$;

3) $A\bigcap B = B\bigcap A$ $\quad(AB=BA)$;

4) $\left(A\bigcup B\right)\bigcup C = A\bigcup\left(B\bigcup C\right)$ $\quad\left[\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)\right]$;

5) $\left(A\bigcap B\right)\bigcap C = A\bigcap\left(B\bigcap C\right)$ $\quad\left[\left(AB\right)C=A\left(BC\right)\right]$;

6) $A\bigcup\varnothing=A$ $\quad(A+\varnothing=A)$;

7) $A\bigcap\varnothing=\varnothing$ $\quad(A\varnothing=\varnothing)$;

8) $A\bigcap\left(B\bigcup C\right)=\left(A\bigcap B\right)\bigcup\left(A\bigcap C\right)$ $\quad\left[A\left(B+C\right)=AB+AC\right]$;

9) $A\bigcup\left(B\bigcap C\right)=\left(A\bigcup B\right)\bigcap\left(A\bigcup C\right)$ $\quad\left[A+BC=\left(A+B\right)\left(A+C\right)\right]$.

Доведемо 8-ме та 9-те співвідношення.

8) Скористаємось другим співвідношенням (1.1):

а) $\omega\in A\left(B+C\right)\Rightarrow \omega\in A\wedge\omega\in\left(B+C\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \omega\in A\wedge\left(\omega\in B\vee\omega\in C\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\omega\in A\wedge\omega\in B\right)\vee\left(\omega\in A\wedge\omega\in C\right)\Rightarrow\left(\omega\in AB\right)\vee\left(\omega\in AC\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\omega\in\left(AB+AC\right)\Rightarrow A\left(B+C\right)\subset AB+AC$;

б) $\omega\in\left(AB+AC\right)\Rightarrow \omega\in AB\vee\omega\in AC\Rightarrow\left(\omega\in A\wedge\omega\in B\right)\vee$

$\vee\left(\omega\in A\wedge\omega\in C\right)\Rightarrow\omega\in A\wedge\left(\omega\in B\vee\omega\in C\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\omega\in A\wedge\omega\in\left(B+C\right)\Rightarrow \omega\in A\left(B+C\right)\Rightarrow\left(AB+AC\right)\subset A\left(B+C\right)$.

Отже, $A\left(B+C\right)=AB+AC$.

9) Скористаємось доведеним щойно співвідношенням 8:

$$\left(A+B\right)\left(A+C\right)=\left(A+B\right)A+\left(A+B\right)C=$$

$$=AA+BA+AC+BC=A(A+B+C)+BC=A+BC.$$

Означення 5. *Різницею* множин A і B (пишуть: $A\setminus B$ або $A-B$) називається множина, яка містить лише ті елементи множини A, які не належать до множини B.

Отже, $x\in A\setminus B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$.

Приклад 3. $A=\left\{1,\,2\right\}$, $B=\left\{2,\,3\right\}$, $A\setminus B=\left\{1\right\}$.

Геометрична ілюстрація різниці множин показана на рис. 1.4. За означенням $A\setminus A=\varnothing$.

Розглянемо множину Ω і множини $A,B\subset\Omega$.

Означення 6. Множину $\Omega\setminus A$ називають *доповненням* до множини A відносно множини Ω і позначають $\overline{A}$, тобто $\overline{A}=\Omega\setminus A=\Omega-A$ (рис. 1.5).

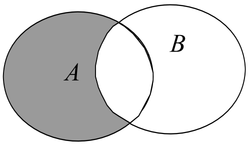


Рис. 1.4

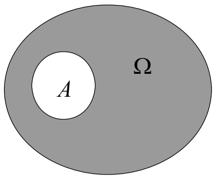


Рис. 1.5

Справедливі такі співвідношення:

1) $A\bigcup\overline{A}=\Omega$ $\left(A+\overline{A}=\Omega\right)$; 2) $A\bigcap\overline{A}=\varnothing$ $\left(A\overline{A}=\varnothing\right)$; 3) $\overline{\Omega}=\varnothing$;

4) $\overline{\overline{A}}=A$; 5) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$ $\left(\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}\right)$;

6) $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$ $\left(\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}\right)$; 7) $A\setminus B=A\bigcap\overline{B}$ $\left(A-B=A\overline{B}\right)$.

Рівності 5 і 6 називаються *законами подвійності*, або *правилами де-Моргана.*

Зчисленні множини

Означення 7. Кажуть, що між множинами A і B установлена взаємно однозначна відповідність, якщо:

1) кожному елементу множини A ставиться у відповідність один і лише один елемент множини B;

2) кожний елемент множини B поставлено у відповідність деякому елементу множини A;

3) різним елементам множини A відповідають різні елементи множини B.

На рис. 1.6 наведено ілюстрацію взаємно однозначної відповідності між точками двох відрізків.

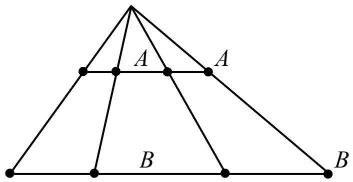


Рис. 1.6

Означення 8. Множини A та B називаються *еквівалентними* $(A \sim B)$, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Рекомендуємо довести **самостійно**, що скінченні множини A і B еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони містять однакову кількість елементів: $A \sim B \Leftrightarrow N(A) = N(B)$.

Розглянемо множину натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, ...\}$.

Означення 9. Множина A називається *зчисленною*, якщо вона еквівалентна множині натуральних чисел.

Прикладами зчисленних множин є множини натуральних та цілих чисел, множина раціональних чисел $\frac{m}{n}$. Множина дійсних чисел є нескінченною, але не є зчисленною.

Для зчисленних множин справедлива така ***властивість***: довільна нескінченна підмножина зчисленної множини є зчисленною.

Зауваження 2. Іноді під зчисленною множиною розуміють як множину, еквівалентну множині натуральних чисел (її називають ***зчисленно нескінченною***), так і множину, що містить скінченну кількість елементів. Ще кажуть, множина A — зчисленна, якщо її елементи можна занумерувати. За такого розуміння зчисленної множини довільна її підмножина є зчисленною.

Узагальнення операцій над множинами

Операції об'єднання (суми) та перерізу (добутку) узагальнюються на зчисленну кількість множин:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots; \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 A_2 \ldots A_k \ldots .$$

Для об'єднання та перерізу довільної кількості множин (у тому числі зчисленної кількості множин) іноді будемо використовувати позначення $\bigcup_k A_k$ та $\bigcap_k A_k$. Справедлива така ***властивість***: якщо $\{A_1, A_2, \ldots\}$ — скінченна або зчисленна множина зчисленних множин A_k $(k \geq 2)$, то $\bigcup_k A_k$ — зчисленна множина.

Правила де-Моргана, узагальнені на довільну кількість множин, мають вигляд:

I. $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A}_k$ — доповнення до об'єднання дорівнює перерізу доповнень.

II. $\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A}_k$ — доповнення до перерізу дорівнює об'єднанню доповнень.

Доведемо перше з цих правил:

I. а) $x \in \overline{\bigcup_k A_k} \Rightarrow x \notin \bigcup_k A_k \Rightarrow x \notin A_k \ \forall k \Rightarrow x \in \overline{A}_k \ \forall k \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \bigcap_k \overline{A}_k \Rightarrow \overline{\bigcup_k A_k} \subset \bigcap_k \overline{A}_k$.

б) $x \in \bigcap_k \overline{A}_k \Rightarrow x \in \overline{A}_k \ \forall k \ \Rightarrow \ x \notin A_k \ \forall k \Rightarrow x \notin \bigcup_k A_k \Rightarrow x \in \overline{\bigcup_k A_k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap_k \overline{A}_k \subset \overline{\bigcup_k A_k}$. Згідно з другою рівністю (1.1) $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A}_k$.

1.2. Елементи комбінаторики

У даному пункті розглядаються тільки скінченні множини. Для підрахунку кількості елементів таких множин часто користуються формулами комбінаторики.

Сформулюємо і візьмемо без доведення *основний принцип комбінаторики* (правило добутку): нехай потрібно виконати одну за одною k деяких дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після цього другу дію — n_2 способами, після першої і другої дій третю дію — n_3 способами і так до k-ї дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій разом можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Приклад 4. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожна цифра має зустрічатись у числі не більше ніж один раз?

Розв'язання

Першою цифрою може бути одна з цифр — 1, 2, 3, 4 або 5, тобто її можна вибрати п'ятьма способами (першу дію можна виконати п'ятьма способами). Якщо першу цифру вибрано, то другу цифру можна вибрати також п'ятьма способами. Отже, першу та другу цифри можна вибрати $5 \cdot 5 = 25$ способами. Якщо перші дві цифри вибрані, то для вибору третьої цифри є 4 способи. Після вибору перших трьох цифр четверту цифру можна вибрати 3 способами. Згідно з правилом добутку загальна кількість способів вибору числа дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$, тобто можна скласти 300 чисел.

Розглянемо деяку множину E, що містить n елементів: $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Довільний набір k елементів цієї множини, тобто $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right)$, де $x_{i_m} \in E$, $m = 1, 2, \ldots, k$, домовимось називати *рядком* довжиною k. Рядки довжиною k можуть відрізнятись один від одного як складом елементів, так і порядком розташування елементів у рядку. Не виключається повторення елементів рядка. Рядки довжиною k назвемо *розміщеннями з n елементів по k*, причому будемо розрізняти розміщення з повтореннями і без повторень елементів.

Розміщення без повторень. Розглядатимемо всі можливі рядки довжиною k, тобто $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right)$, які задовольняють умову: усі елементи $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ різні. Інакше кажучи, маємо справу з розміщеннями з n елементів по k (коротко: з n по k) без повторень (зазвичай слова «без повторень» пропускають і кажуть просто про розміщення з n по k). Позначимо кількість таких розміщень через

A_n^k. Перший елемент розміщення з n по k можна вибрати n способами. Якщо перший елемент вибрано, то для вибору другого елемента є $n-1$ можливість, третього — $n-2$ можливості і так далі. Вибір k-го елемента можна здійснити $n-(k-1)$ способами. Згідно з правилом добутку кількість розміщень (без повторень) з n елементів по k дорівнює

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)).$$

Позначимо через $n!$ добуток n перших натуральних чисел, тобто

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)n,$$

і назвемо цей добуток терміном «n-факторіал». За означенням покладемо, що $0!=1$. Тоді число A_n^k можна записати у вигляді

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Важливим є випадок, коли $n=k$, тобто коли в рядку містяться всі елементи множини E (кожен по одному разу). Такі рядки називають *перестановками* з n елементів. Кількість P_n усіх перестановок дорівнює

$$P_n = n!$$

Приклад 5. Скільки існує способів розмістити п’ятьох людей на п’яти стільцях?

Розв’язання

$P_n = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ (способів).

Про розміщення без повторень можна говорити як про *впорядковані підмножини* множини E, наприклад (x_1, x_2, x_3) і (x_2, x_1, x_3) — дві різні підмножини, оскільки порядок елементів у них різний.

Розміщення з повтореннями. Задача про відшукання кількості рядків довжиною k, елементи яких можуть повторюватись, допускає таку інтерпретацію. Нехай усі n елементів множини E занумеровані і містяться в урні. Будемо виймати ці елементи один за одним, записувати їхні номери і повертати назад в урну. Після того, як ми виймемо k елементів, дістанемо рядок довжиною k, причому елементи в рядку можуть повторюватись. На основі тих самих міркувань, що й у попередньому випадку, кількість $A_n^{k(\text{повт})}$ усіх можливих розміщень з повтореннями дорівнює

$$A_n^{k(\text{повт})} = n^k .$$

Пропонуємо надати відповідну інтерпретацію з урною розміщенням без повторень.

Сполучення. Якщо порядок елементів у рядку довжиною k не є важливим і рядки з однаковим набором елементів, але різним порядком, вважаються однаковими, то говорять про *сполучення* k *елементів із* n (сполучення з n по k). Сполучення також можуть бути без повторень і з повтореннями.

Сполучення без повторень. Під сполученням (зазвичай слова «без повторень» пропускають і кажуть просто «сполучення») k елементів із n елементів множини E розуміють довільну k-елементну підмножину множини $E\left(k \le n\right)$ (кажуть: сполучення з n по k). Нехай кількість C_n^k усіх k-елементних підмножин n-елементної множини E відома. Кожну з цих підмножин можна впорядкувати $k!$ (k-факторіал) способами. Дістанемо $C_n^k k!$ усіх упорядкованих k-елементних підмножин множини E. З іншого боку, кількість таких підмножин дорівнює A_n^k. Отже,

$$C_n^k k! = A_n^k \text{ або } C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.2}$$

Формула (1.2) є однією з основних у комбінаториці.

Приклад 6. Скільки існує способів розмістити 5 чоловіків і 5 жінок на 12-ти стільцях?

Розв'язання

Стільці для жінок можна вибрати C_{12}^5 способами. Після цього залишаються 7 стільців, на які можна C_7^5 способами розсадити чоловіків. Усього за правилом добутку дістаємо

$$C_{12}^5 \cdot C_7^5 = \frac{12!}{5!\cdot 7!}\cdot\frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{12!}{2\cdot 5!\cdot 5!} \text{ (способів).}$$

Сполучення з повтореннями. Розглянемо рядки довжиною k, елементи в яких можуть повторюватись; зокрема, k може бути більшим за n. Як і в попередньому випадку, розрізняємо рядки тільки за складом елементів, наприклад, рядки (x_1, x_2, x_2) і (x_2, x_1, x_2) вважаємо однаковими.

Різні склади рядка довжиною k, компоненти якого належать до n-елементної множини E, називаються *сполученнями з повтореннями* з n елементів по k. Позначимо їх кількість $C_n^{k(\text{повт})}$.

Користуючись основним принципом комбінаторики, можна показати, що ця кількість обчислюється за формулою

$$C_n^{k(\text{повт})} = C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Приклад 7. Скількома способами можна скласти набір із 3 троянд двох сортів?

Розв'язання

$C_2^{3(\text{повт})} = C_4^3 = 4$ (способами).

З викладеного раніше випливає, що всі основні положення комбінаторики є простими наслідками *основного принципу комбінаторики* (правила добутку).

► *Задачі*

1. Нехай $A = [-1; 1]$, $B = (-\infty; 0)$, $C = [0; 2)$. Знайти множини $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cup B \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $B \cap C$ та зобразити їх на координатній прямій.

2. Нехай A — множина дільників числа 15, B — множина простих чисел менших за 10, C — множина парних чисел менших за 9. Перелічити елементи цих множин та знайти $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $(A \cup C) \cap B$, $A \cap B \cap C$.

3. Навести геометричну ілюстрацію таких співвідношень між множинами: а) $A - (A - B) = AB$; б) $A - B = A\overline{B}$.

4. Довести рівність $A - B = A\overline{B}$, скориставшись другим співвідношенням (1.1).

5. Довести тотожність $(A+B)-B=A\overline{B}$, скориставшись рівністю з попередньої задачі.

6. Довести тотожності: а) $(A+B)(A+\overline{B})=A$; б) $B=AB+\overline{A}B$; в) $A+B=A+B\overline{A}$.

7. Довести друге правило де-Моргана з п. 1.1.

8. Автомобільний номер складається з двох літер та п'яти цифр. Знайти кількість усіх можливих номерів, якщо використовується 31 літера українського алфавіту.

9. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр: а) 1, 2, 3, 4, 5; б) 0, 1, 2, 3, 4 — так, щоб жодна цифра не повторювалась?

10. Нехай з пункту A в пункт B є n доріг, з A до C — m доріг, з B до D — l доріг, з C до D — k доріг, B і C між собою дорогами не сполучені. Скількома дорогами можна потрапити з A до D?

11. У філії банку працюють 15 працівників, троє з яких не мають потрібної кваліфікації. Скількома способами можна утворити групу: а) з 8 працівників; б) з 6 кваліфікованих працівників; в) з 9 працівників, двоє з яких не мають потрібної кваліфікації?

12. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох осіб для чергування, якщо: а) один з них має бути старший; б) старшого не має бути?

13. Скількома способами можна скласти набір із 2 троянд трьох сортів?

14. Скільки можна скласти шестизначних телефонних номерів?

15. Скількома способами можна розмістити 5 людей на 5 стільцях навколо круглого столу так, щоб дві конкретні людини сиділи поруч?

2. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ. ВІДНОСНА ЧАСТОТА ТА ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

2.1. Випадкові події та операції над ними

Вихідними поняттями теорії ймовірностей є такі: *випадковий* (стохастичний) *експеримент*, *випадкова подія* і *ймовірність випадкової події*.

Під випадковими (стохастичними) експериментами будемо розуміти експерименти, результати яких не можна передбачити заздалегідь. Усякий випадковий експеримент проводиться за деяких основних умов. Позначимо ці умови через S. *Будемо розглядати лише такі випадкові експерименти, які можна повторювати за збереження умов* S *будь-яку кількість разів* (*принаймні теоретично*).

Наведемо кілька простих прикладів випадкових експериментів.

1. Підкидається монета. Не можна наперед сказати, яким боком вона впаде, лицевим або зворотним.

2. Підкидається гральний кубик. Не можна заздалегідь передбачити, яка кількість очок при цьому випаде.

3. З урни, в якій є певна кількість червоних та білих кульок, виймається одна кулька. Не можна наперед сказати, якого кольору вона буде.

Можна навести безліч прикладів випадкових експериментів у техніці, фізиці, економіці та ін. Але ми й далі часто звертатимемося саме до наведених щойно прикладів, оскільки за ними найпростіше зрозуміти основні поняття і закони теорії ймовірностей без додаткової концентрації уваги на самій суті експерименту.

Той чи інший результат випадкового експерименту інтерпретуємо як ***випадкову подію***. Отже, *випадкова подія* — це така подія, яка є результатом випадкового експерименту, і тому під час проведення цього експерименту вона може як відбутися, так і не відбутися.

Оскільки наперед не можна сказати, відбудеться випадкова подія чи ні, то на перший погляд здається, що жодних закономірностей в явищах природи і суспільства, в яких існують випадкові події, бути не може. Проте численні спостереження за випадковими подіями привели до відкриття нового типу закономірностей, які називаються *ймовірнісними*, або *стохастичними* (на противагу детермінованим). Найпростішим прикладом стохастичного закону є такий: за достатньо великої кількості підкидань монети тим самим способом (тобто за виконання того самого комплексу умов S) майже в половині випадків випадає «герб». Наведемо результати трьох експериментів:

Експериментатор	Кількість підкидань	Випав «герб»	Відношення кількості випадань «герба» до кількості підкидань монети
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5069
К. Пірсон	12000	6019	0,5016
К. Пірсон	24000	12012	0,5005

Наведені дані підтверджують, що не зважаючи на непередбачуваність випадкової події за однократного проведення випадкового експерименту (може як відбутися, так і не відбутися), під час багатократного повторення цього експерименту спостерігаються певні закономірності в результатах.

В основі теорії ймовірностей як дисципліни математичної, лежить припущення, що кожен випадковий експеримент можна ототожнити з деякою множиною Ω. Елементи цієї множини мають давати найбільш повну інформацію про можливі результати даного експерименту. Множину Ω називають *множиною елементарних подій*, а її елементи — *елементарними подіями*.

Приклад 1. Проводиться експеримент: один раз підкидається монета. Множина елементарних подій цього експерименту має вигляд $\Omega = \{\text{Г}, \text{Ц}\}$, де Г — означає, що монета випала «гербом», а Ц — монета випала «цифрою». Отже, під елементарними подіями розуміють результати експерименту, які одночасно реалізовуватись не можуть.

Приклад 2. Монету підкидають двічі. Множиною елементарних подій для цього експерименту є $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГЦ}, \text{ЦГ}, \text{ЦЦ}\}$, де, наприклад, ГЦ означає, що після першого підкидання монета випала «гербом», а після другого — «цифрою».

Приклад 3. Підкидають гральний кубик, на якому вибито очки від 1 до 6. Множина елементарних подій у цьому разі складається з чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6$, тобто $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

У розглянутих прикладах множини елементарних подій є скінченними множинами, тому їхні елементи можна порахувати. Множина Ω може бути й нескінченною.

Приклад 4. Монета підкидається, доки вперше не випаде «герб». Множину елементарних подій розумно теоретично не обмежувати, а записати у вигляді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, де $\omega_n = \underbrace{\text{ЦЦ...Ц}}_{n-1}\text{Г}$ означає, що «герб» випав за n-го підкидання.

У даному прикладі Ω — нескінченна, але зчисленна множина (див. п. 1.1).

Приклад 5. У коло з радіусом R і центром у початку координат ***навмання*** кидають точку. За множину елементарних подій береться множина точок круга $\Omega = \{(x, y): \quad x^2 + y^2 \le R^2\}$. Множина Ω у даному разі є неперервною. Тут і далі слово ***навмання*** означає, що шанси відбутися для кожної з елементарних подій однакові, тобто припускається, що жодна з елементарних подій не має переваг перед іншими.

Отже, кожному випадковому експерименту ставиться у відповідність множина елементарних подій Ω. Разом з тим для кожного з таких експериментів можуть розглядатись події, які не є елементарними, але про кожну з яких можна сказати, відбулась вона у даному експерименті чи ні. Кажуть, що ці події *спостерігаються* в даному експерименті.

Нехай A — довільна подія, яка спостерігається в експерименті. Оскільки кожна елементарна подія ω дає повну інформацію про результат експерименту, то, знаючи, що результат експерименту описується елементом ω, завжди можна сказати, відбулась подія A чи ні. Стосовно до події A всю множину елементарних подій Ω можна розбити на дві підмножини A' і A'' в такий спосіб: якщо результат експерименту описується елементом ω з множини A', то подія A в цьому експерименті відбулась, якщо ж $\omega \in A''$, то не відбулась. Елементи ω з множини A' називаються *елементарними подіями*, сприятливими для події A. Кажуть, що множина A' є відображенням, або інтерпретацією, події A на множині Ω. Подія A ототожнюється з множиною A'; $A = A'$ (подібно до того, як дійсне число ототожнюється з точкою числової осі).

Отже, подія A — *це деяка підмножина множини* Ω, яка складається з усіх тих елементарних подій ω, які сприяють події A. Якщо результат експерименту описується елементом $\omega \in \Omega$ і $\omega \in A$, то кажуть, що подія A відбулась. Якщо ж $\omega \notin A$, то подія A у цьому експерименті не відбулась.

Приклад 6. Монету підкидають двічі. Нехай A — подія, яка полягає в тому, що хоча б один раз випаде «герб». Тоді

$$\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГЦ}, \text{ЦГ}, \text{ЦЦ}\}, \ A = \{\text{ГГ}, \text{ГЦ}, \text{ЦГ}\}.$$

Приклад 7. Нехай один раз підкидається гральний кубик і A — подія, яка полягає в тому, що кількість очок, які випали, ділиться на три. Тоді $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{3,6\}$.

Раніше поняття «події» було зведено до поняття множини, яка є підмножиною множини елементарних подій Ω. Над множинами можна виконувати певні операції (див. п. 1.1). Тому ті самі операції можна ввести і для подій. Розглянемо їх.

1. Насамперед уведемо поняття *вірогідної* (достовірної) події.

Вірогідна подія — це подія, яка збігається з усією множиною Ω, тобто подія, яка відбувається під час кожного проведення експерименту. Так, випадання кількості очок менше 7 є вірогідною подією випадкового експерименту з прикладу 7. Вірогідну подію також позначають літерою Ω.

2. Порожня множина $\varnothing$, тобто множина, яка не містить жодного елемента з Ω, ототожнюється з подією, яку називають ***неможливою***, тобто такою, яка в даному експерименті відбутися не може. Для кожного випадкового експерименту можна навести безліч подій, які відбутися не можуть. Такими є, наприклад, випадання кількості очок, яка ділиться на 7; випадання кількості очок, меншої від 1; випадання кубика на ребро тощо у випадковому експерименті з прикладу 7. Усі вони об'єднуються одним поняттям «неможлива подія».

3. Кажуть, що з події A ***випливає*** подія B, якщо $A \subset B$. Тобто якщо подія A відбулась, то і подія B також відбулась. За означенням береться, що $\varnothing \subset A$.

4. Події A і B називаються ***рівними*** (рівносильними), якщо рівні відповідні множини A і B, тобто $A = B$ $\left(A \subset B \text{ і } B \subset A\right)$.

5. ***Сумою*** (або об'єднанням) подій A та B називається подія $A + B$, якій відповідає множина $A \bigcup B$, тобто подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається хоча б одна з подій A або B.

Приклад 8. Кидають точку в два круги, що перетинаються. Тоді подією $A + B$ є попадання в один із кругів [зокрема, в їх спільну частину (рис. 2.1)].

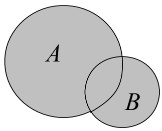


Рис. 2.1

6. ***Добутком*** (або перерізом) двох подій A та B називається подія AB, якій відповідає множина $A \bigcap B$, тобто подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли одночасно відбувається і подія A, і подія B.

У прикладі 8 подія AB — це попадання у спільну частину двох кругів.

7. Події A і B називаються ***несумісними***, якщо їх добутком є подія неможлива, тобто $AB = \varnothing$. У протилежному разі події A та B називаються ***сумісними***. Отже, події A та B несумісні в даному експерименті, якщо вони не можуть відбутись одночасно.

8. Якщо A — випадкова подія, то подія $\overline{A}$ називається подією, ***протилежною*** події A, тобто $\overline{A}$ відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається A. Отже, $A + \overline{A} = \Omega,\quad A\,\overline{A} = \varnothing$.

9. ***Різницею*** подій A та B називається подія $A - B$, якій відповідає множина $A \setminus B$, тобто подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A, але не відбувається подія B. Очевидно, що $\overline{A} = \Omega - A$.

10. Поняття суми та добутку подій поширюються на зчисленну кількість подій. Подія

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається хоча б одна з подій A_n, $\quad n = 1, 2, \ldots$.

Подія

$$A_1 A_2 \dots A_n \dots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються одночасно всі події A_n, $n = 1, 2, \dots$.

Приклад 9. Із гармати стріляють до першого влучення в ціль. Уведемо випадкову подію A_n — влучення за n-го пострілу, $n \geq 1$. Тоді випадкову подію A — зроблена парна кількість пострілів, можна подати як $A = A_2 + A_4 + \dots + A_{2n} + \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n}$.

Підкреслимо, що всі властивості операцій над множинами, розглянуті у п. 1.1, автоматично переносяться і на операції над подіями.

Означення 1. Вважатимемо, що події $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ $\left(A_k \neq \varnothing,\ k \geq 1\right)$ утворюють ***повну групу подій***, якщо вони попарно несумісні і сума цих подій є подією вірогідною, тобто

$$A_i A_j = \begin{cases} \varnothing, & i \neq j \\ A_i, & i = j \end{cases} \quad \text{і} \quad A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots = \Omega .$$

Зокрема, елементарні події в разі скінченної або зчисленної множини Ω утворюють повну групу подій.

2.2. Відносна частота та її властивості

Розглянемо деякий випадковий експеримент і подію A, що спостерігається в цьому експерименті. Повторимо експеримент n разів. Нехай $k_n(A)$ — кількість експериментів, в яких відбулась подія A. Цю кількість називають *абсолютною частотою* події A, або просто *частотою*.

Означення 2. Відношення $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{n}$ називають *відносною частотою* події A у проведеній серії з n експериментів.

Відносна частота події має такі властивості:

1) $0 \leq P_n^*(A) \leq 1$;

2) $P_n^*(\Omega) = 1$, де Ω — вірогідна подія;

3) якщо A і B — дві події, які спостерігаються у даному експерименті і є ***несумісними*** $\left(AB=\varnothing\right)$, то

$$P_n^*\left(A+B\right)=P_n^*\left(A\right)+P_n^*\left(B\right).$$

Перша властивість є наслідком того, що $k_n\left(A\right)\le n$. Друга властивість випливає з того, що вірогідна подія відбувається в кожному експерименті з даної серії. Третя властивість також очевидна, оскільки для несумісних подій A та B

$$k_n\left(A+B\right)=k_n\left(A\right)+k_n\left(B\right).$$

Відносну частоту події можна знайти лише в результаті проведення серії з n експериментів і, взагалі кажучи, вона змінюється, якщо проводиться інша серія з n експериментів або змінюється n. Проте практика підтверджує, що для достатньо великих n у більшості таких серій експериментів відносна частота зберігає майже сталу величину, причому відхилення спостерігається тим рідше, чим більше n. Наведена на с. 21 таблиця показує, що відносна частота випадань «герба» у довгих серіях експериментів мало відрізняється від $\frac{1}{2}$. Якщо для великих n відносна частота $P_n^*\left(A\right)$ події A мало відрізняється від деякого фіксованого числа p, то кажуть, що подія A *статистично стійка*, а число p є ***ймовірністю*** події A. Таке означення ймовірності дістало назву *частотного*, або *статистичного*.

***Зауваження 1*. *Статистична стійкість буде нашою основною вимогою до випадкової події*.** Теорія ймовірностей застосовна не до всіх подій, які залежать від випадку, тобто можуть відбутись або не відбутись, а лише до статистично стійких подій. Саме нерозуміння цього основного твердження є причиною багатьох помилкових висновків, які нібито обґрунтовуються методами теорії ймовірностей. Підкреслимо, що статистична стійкість випадкової події передбачає виконання нашої основної вимоги до випадкового експерименту, а саме його багатократну повторюваність за незмінних умов, теоретично — скільки завгодно разів.

Як бачимо, поняття ймовірності тісно пов’язане з властивістю стійкості відносної частоти. Наведене статистичне означення ймовірності події характеризує природничо-науковий зміст поняття ймовірності, але не є його формальним означенням. Для формалізації поняття ймовірності його наділяють властивостями відносної частоти, тобто додержуються погляду, що ймовірність події A є число, близьке до відносної частоти появи події A у довгих серіях тотожних експериментів.

2.3. Аксіоми ймовірності та їх наслідки

У п. 2.1 ми формалізували поняття випадкової події, звівши його до поняття множини. Наступним нашим кроком буде введення формального поняття ймовірності випадкової події. Насамперед виходимо з того, що ймовірність, як кількісна міра можливості появи випадкової події, об'єктивно існує (як об'єктивно існує, наприклад, маса тіла) і мовою математики «імовірність випадкової події A дорівнює деякому числу P». Інакше кажучи, імовірність — це числова функція $P(A)$, аргументом якої є випадкова подія A.

У даному пункті не розглядатимемо питання, яким саме способом випадковій події A ставиться у відповідність число $P(A)$, а сформулюємо лише ті властивості, які повинна мати задана на множині всіх подій функція $P(A)$ з тим, щоб називатись імовірністю. Ці властивості формулюються у вигляді аксіом:

Аксіома 1. Для кожної випадкової події A

$$P(A) \geq 0 .$$

Аксіома 2. Імовірність вірогідної події дорівнює одиниці:

$$P(\Omega) = 1.$$

Аксіома 3. Якщо події A та B несумісні, то ймовірність їхньої суми дорівнює сумі ймовірностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) .$$

Отже, аксіоми 1–3 введені таким чином, що ймовірність випадкової події має основні властивості відносної частоти цієї події (див. п. 2.2).

Наведемо деякі **властивості** ймовірностей, які є безпосередніми наслідками аксіом:

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

2) $P(\varnothing)=0$;

3) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

4) $P(A+B)\le P(A)+P(B)$;

5) якщо $A\subset B$, то $P\left(B-A\right)=P\left(B\right)-P\left(A\right)$;

6) якщо $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$;

7) $0\le P(A)\le 1$.

Доведемо перші три властивості:

1) оскільки $A+\overline{A}=\Omega$ і A та $\overline{A}$ — несумісні, то

$$P\left(\overline{A}\right)+P\left(A\right)=1\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right);$$

2) якщо $A=\Omega,$ то

$$\overline{A}=\varnothing\Rightarrow P\left(\varnothing\right)=1-P\left(\Omega\right)=0;$$

3) події $A+B$ та B можна записати у вигляді суми несумісних подій:

$$A+B=A+B\Omega=A+B\left(A+\overline{A}\right)=A+BA+B\overline{A}=A+B\overline{A};\ \ B=B\Omega=BA+B\overline{A}.$$

Тому

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\overline{A}\right)\ \text{ і }\ P\left(B\right)=P\left(BA\right)+P\left(B\overline{A}\right).$$

Звідси дістаємо рівність 3.

Для побудови змістовної математичної теорії аксіоми 1–3 доповнюють *розширеною аксіомою додавання*.

Аксіома 3'. Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ попарно несумісні, то

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(A_k\right).$$

З використанням аксіоми 3′ доводиться така теорема.

Теорема (*про неперервність імовірності*).

Якщо послідовність подій $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ така, що $A_{n+1}\subset A_n,\ n=1, 2, \ldots$ і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$, то $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(A_n\right)=P\left(A\right)$.

Нехай події $H_i\in F\ \ (i=1, 2, \ldots, n)$ утворюють повну групу подій. Тоді згідно з аксіомами 2 і 3 $P(H_1)+P(H_2)+\ldots+P(H_n)=1$.

Це означає, що одинична ймовірність вірогідної події розподілена на множині несумісних подій, які утворюють повну групу. У загальному випадку відповідність між подіями і ймовірностями цих подій називають *розподілом імовірностей*.

Оскільки наведені аксіоми не дають ніяких вказівок про числові значення ймовірностей тих подій, які нас цікавлять, а визначають лише загальні властивості, які повинна мати ймовірність як числова функція, то, залишаючись у межах цих аксіом, задачу про розподіл імовірностей розв'язати не можна. Вибір тих чи інших значень імовірності здійснюється на основі додаткових міркувань, що випливають із практики. Продемонструємо сказане на простому прикладі.

Приклад 10. Підкидається гральний кубик. Тоді

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ — множина елементарних подій.

Уведемо розподіл імовірностей формулою

$$P(A) = \frac{N(A)}{6}, \tag{2.1}$$

де $N(A)$ — кількість елементарних подій ω_i, які сприяють події A (наприклад, якщо A = {випала парна кількість очок}, то $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ і $N(A)$=3).

Аксіоми 1–3 виконуються. Справді, $P(A) \geq 0$, оскільки $N(A) \geq 0$; $P(\Omega) = 1$, оскільки $N(\Omega) = 6$. Нехай A та B — довільні несумісні події, тобто $AB = \varnothing$ і $N(A) = k,\ N(B) = m.$ Тоді $N(A+B) = N(A) + N(B)$ і $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Отже, функція (2.1) є ймовірністю.

Розподіл імовірностей для даного експерименту можна задати й іншим способом. Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_6$ — шість довільних невід'ємних чисел, які задовольняють умову $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + {}$ $+ p_5 + p_6 = 1$. Уведемо ймовірність елементарних подій як $P(\omega_k) = P_{\omega_k} = p_k$, а ймовірність довільної події $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, де $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — довільні числа від 1 до 6, як

$$P(A) = P_{\omega_{i_1}} + P_{\omega_{i_2}} + \ldots + P_{\omega_{i_k}}. \tag{2.2}$$

Легко показати, що для даного розподілу ймовірностей аксіоми 1–3 також виконуються. Попередній випадок дістанемо, якщо візьмемо $p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$. Отже, наведений приклад показує, що ***ймовірність не визначається однозначно системою аксіом***. Вибір розподілу ймовірностей за формулою (2.1) пов'язаний з міркуваннями «симетрії» грального кубика, коли немає жодних підстав надавати перевагу випаданню тієї чи іншої його грані. Якщо ж кубик «не симетричний», то модель розподілу ймовірностей слід шукати серед (2.2), коли є p_i відмінні від $\frac{1}{6}$.

Питання про те, які значення ймовірності приписувати тим чи іншим подіям у реальних експериментах, розв'язуються ***методами математичної статистики***. Наведене у п. 2.2 означення відносної частоти може використовуватись для наближеної оцінки ймовірності події. З іншого боку, знання ймовірності події A, що нас цікавить, дозволяє передбачити з певною точністю відносну частоту даної події під час проведення достатньо великої кількості реальних експериментів.

Подібна задача наукового прогнозування є особливо актуальною в тих випадках, коли оцінка ймовірності за частотою пов'язана з проведенням таких, що дорого коштують, або важких експериментів. *Задачі, які розв'язуються методами теорії ймовірностей, саме і полягають у тому, щоб за відомими з практики ймовірностями деяких простих подій визначати ймовірності більш складних подій, які нас цікавлять*.

► *Задачі*

У задачах **1** і **2** побудувати множину елементарних подій Ω описаних експериментів і підмножини, що відповідають даним подіям.

1. Монета підкидається тричі. Події: A — жодного разу «герб» не випав, B — «герб» випав рівно один раз; C — «герб» випав рівно два рази; D — «герб» випав рівно три рази; E — «герб» випав принаймні один раз.

2. Гральний кубик підкидається двічі. Події: A — обидва рази випала однакова кількість очок; B — жодного разу не випала «шістка», C — кількість очок за першого підкидання менша, ніж за другого.

3. Нехай A, B, C — деякі події. Записати вирази для подій, які полягають у такому:

а) настала тільки подія A;

б) настали події A і B, але подія C не настала;

в) настала принаймні одна з цих подій;

г) не настала жодна з цих подій;

ґ) настали всі три події;

д) настало не більше двох подій.

4. Підкидається гральний кубик. Подія A — випала парна кількість очок, B — випала кількість очок менша від трьох. Опишіть події: $\overline{A}, \overline{B}, AB, A+B, \overline{AB}, \overline{A}\overline{B}, \overline{A}+\overline{B}, \overline{A+B}, \overline{A}B, \overline{B}A.$

5. Нехай з події B випливає подія A. Чому дорівнює: а) їх сума? б) їх добуток?

6. З подій задачі 1 виділити повну групу подій.

7. Чи сумісні події A та B у задачі 2?

8. Відділ технічного контролю серед 100 виробів виявив 8 нестандартних. Чому дорівнює відносна частота появи нестандартних виробів?

9. Під час стрільби з гвинтівки по мішені відносна частота влучень дорівнювала 0,85. Знайти кількість влучень, якщо здійснено 20 пострілів.

10. Відносна частота стандартних радіоприймачів серед перевірених 200 дорівнює 0,9. Знайти кількість стандартних радіоприймачів.

11. Англійський математик де-Морган на початку XIX ст. провів дослід з підкиданням монети. З 4092 підкидань «герб» випав 2048 разів. Обчислити статистичну ймовірність випадання «герба».

У задачах **12–15** довести відповідну властивість імовірностей:

12. $P(A+B) \le P(A)+P(B).$

13. Якщо $A \subset B,$ то $P(B-A)=P(B)-P(A).$

14. Якщо $A \subset B,$ то $P(A) \le P(B).$

15. $0 \le P(A) \le 1.$

3. ПРИКЛАДИ ЙМОВІРНІСНИХ МОДЕЛЕЙ ВИПАДКОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

3.1. Класична ймовірнісна схема

Класичний метод зіставлення випадковій події A ***певної ймовірності*** $P(A)$ задовольняє наведені у п. 2.3 аксіоми і полягає в такому:

1) будується повна група G рівноможливих подій $E_1, E_2, \ldots, E_n$, кожній з яких ставиться у відповідність ймовірність $\frac{1}{n}$;

2) знаходиться кількість m таких подій $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_m}$ цієї групи, які в сумі дають дану подію A, $A = E_{j_1} + E_{j_2} + \ldots + E_{j_m}$;

3) імовірність події A визначається відношенням

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{3.1}$$

Кожний експеримент, для якого множина Ω є скінченною множиною рівноймовірних елементарних подій $\left(P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = \frac{1}{n} \right)$, називається *класичною схемою*.

Класична схема є математичною формалізацією експериментів, в яких елементарні події мають певну симетрію стосовно до умов проведення експерименту, так що немає жодної підстави вважати одну елементарну подію більш імовірною, ніж іншу. Таку властивість, наприклад, мають експерименти з виймання навмання певної кількості кульок з урни, в якій лежить задана кількість кульок, що не розрізняються на дотик. Тому класичну схему ще називають *схемою урн*. Означення ймовірності за формулою (3.1) дістало назву *класичного означення ймовірності*. Словесне означення класичної ймовірності: імовірність дорівнює відношенню кількості m елементарних подій, які сприяють даній події A, до загальної кількості n усіх рівноможливих елементарних подій. У сучасному викладі теорії ймовірностей формулу (3.1) слід розглядати не як означення ймовірності, а як спосіб її знаходження для подій, що зводяться до схеми урн. Цей спосіб дістав назву *безпосереднього підрахунку ймовірностей*.

Для підрахунку кількості елементарних подій, з яких складаються події в класичній схемі, користуються відомими формулами ***комбінаторики*** (див. п. 1.2).

Кожна з цих формул визначає загальну кількість елементарних подій у деякій схемі урн, тобто в ідеалізованому експерименті з вибору навмання k елементів із n елементів вихідної множини $E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. При цьому в постановці кожного такого експерименту має бути чітко обумовлено, яким способом проводиться вибір і що розуміють під різними вибірками. Існують ***дві принципово різні схеми вибору***: у *першій схемі* вибір здійснюється без повернення елементів (це означає, що відбираються або зразу всі k елементів, або послідовно по одному елементу, причому щоразу відібраний елемент вилучається з вихідної множини E). *У другій схемі* вибір здійснюється ***поелементно*** з обов'язковим поверненням відібраного елемента на кожному кроці і ретельним «перемішуванням» вихідної множини перед наступним вибором. Після того як вибір тим чи іншим способом здійснено, відібрані елементи можуть бути або впорядковані (тобто розміщені в послідовний ланцюжок), або ні. У результаті маємо такі чотири різні постановки експерименту з вибору навмання k елементів із загальної кількості n елементів множини E:

А. Схема вибору, яка приводить до сполучень

Якщо експеримент полягає у виборі k елементів без повернення і без упорядкування, то різними результатами слід вважати k-елементні підмножини множини E, які мають різний склад. Комбінації елементів, які при цьому виходять (елементарні події), є сполученнями з n елементів по k, а загальна їх кількість $N(\Omega)$ підраховується за формулою

$$N(\Omega)=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Б. Схема вибору, яка приводить до розміщень

Якщо експеримент полягає у виборі k елементів без повернення, але з упорядкуванням цих елементів у процесі вибору в послідовний ланцюжок, то різними результатами даного експерименту будуть упорядковані k-елементні підмножини множини E, які різняться або набором елементів, або порядком їх розміщення в ланцюжку. Комбінації елементів, які виходять у даному разі, тобто елементарні події, є розміщеннями з n елементів по k, а загальна їх кількість визначається формулою

$$N(\Omega) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

У разі коли $k = n$, експеримент полягає в довільному впорядкуванні множини E, тобто зводиться до випадкової перестановки елементів усієї множини. При цьому $N(\Omega) = n!$.

В. Схема вибору, яка приводить до сполучень з повтореннями

Якщо експеримент полягає в поелементному виборі з поверненням k елементів множини $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, але без наступного впорядкування, то різними результатами такого експерименту будуть довільні k-елементні набори, які різняться складом елементів. При цьому окремі набори можуть містити елементи, що повторюються. Наприклад, для $k = 4$ набори $\omega_1 = \{x_1, x_1, x_2, x_1\}$ і $\omega_2 = \{x_2, x_1, x_1, x_1\}$ не відрізняються для даного експерименту, а набір $\omega_3 = \{x_1, x_1, x_3, x_1\}$ відрізняється від кожного з попередніх. Комбінації елементів, які виходять у даному експерименті, є сполученнями з повтореннями, а загальна кількість їх визначається формулою

$$N(\Omega) = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

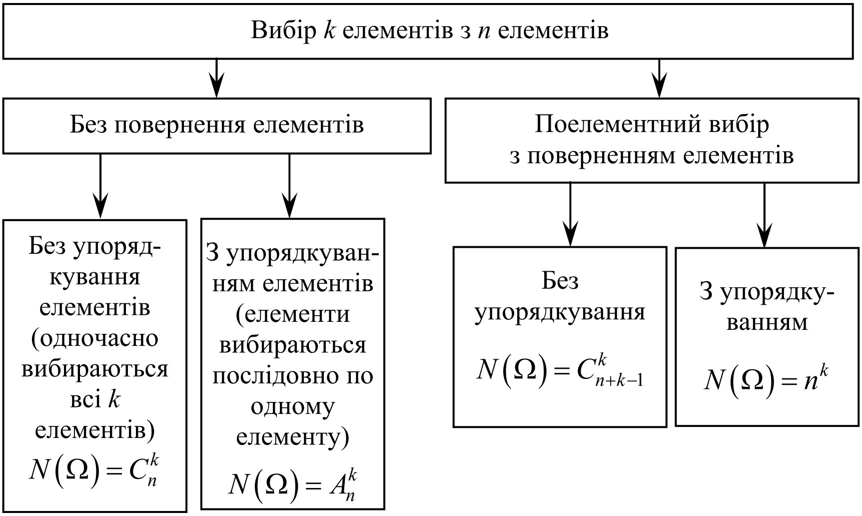
Г. Схема вибору, яка приводить до розміщень з повтореннями

Якщо поелементний вибір k елементів із множини $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ здійснюється з поверненням і з упорядкуванням їх у послідовний ланцюжок, то різними результатами будуть довільні k-елементні набори (взагалі кажучи, з повтореннями), які різняться або складом, або порядком розміщення елементів.

Наприклад, для $k = 4$ множини $\omega_1 = \{x_1, x_1, x_2, x_1,\}$, $\omega_2 = \{x_2, x_1, x_1, x_1,\}$ і $\omega_3 = \{x_1, x_1, x_3, x_1\}$ є різними елементарними подіями для даного експерименту. Комбінації, які виходять в цьому експерименті, є розміщеннями з повтореннями, а загальна їх кількість обчислюється за формулою

$$N(\Omega) = n^k .$$

Зведемо основні висновки до такої схеми:



Приклад 1. З колоди в 36 карт навмання вибирають 4 карти. Знайти ймовірності таких подій: A = {серед вибраних карт усі карти бубнової масті}, B = {серед вибраних карт буде хоча б один туз}.

Розв'язання

Ω — всі можливі комбінації з 36 карт по чотири (сполучення з 36 по 4); $N(\Omega) = C_{36}^4$, $N(A) = C_9^4$;

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C_9^4}{C_{36}^4} = \frac{9!}{4!\,5!} \cdot \frac{4!\,32!}{36!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} = \frac{2}{935} \approx 0,0021 .$$

Нехай $\overline{B}$ = {не буде жодного туза}; $N(\overline{B}) = C_{36-4}^4 = C_{32}^4$;

$$P(\overline{B}) = \frac{C_{32}^4}{C_{36}^4} = \frac{32!}{4!28!} \cdot \frac{4!32!}{36!} = \frac{29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32}{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} \approx 0,61;$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 0,39 .$$

Приклад 2. Група з 5 людей займає всі 5 місць: а) за круглим столом, б) з одного боку прямокутного столу. Знайти ймовірність того, що дві певні людини сидітимуть поруч.

Розв'язання

Ω — перестановки з 5 елементів; $N(\Omega) = 5!$

а) Одна з двох даних осіб може зайняти місце за круглим столом одним із 5 способів; після цього друга особа може зайняти місце поруч одним із 2 способів (ліворуч або праворуч). Решта троє осіб можуть зайняти 3 вільних місця 3! способами. Згідно з основним принципом комбінаторики

$$N(A) = 5 \cdot 2 \cdot 3!; \qquad P(A) = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3!}{5!} = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{1}{2}.$$

б) Пропонуємо показати **самостійно**, що в цьому разі

$$P(A) = \frac{2}{5}.$$

Приклад 3. У кондитерській є 7 видів тістечок. Покупець вибив чек на 4 тістечка. Вважаємо, що всі набори тістечок, які замовляються, є рівноможливими. Знайти ймовірності таких подій: A = {тістечка одного виду}, B = {тістечка різних видів}.

Розв'язання

Ω — сполучення з повтореннями з 7 по 4;

$$N(\Omega) = C_{7+4-1}^{4} = C_{10}^{4};$$

$$N(A) = C_7^1 = 7; \; P(A) = \frac{7}{C_{10}^4} = \frac{7 \cdot 4! \cdot 6!}{10!} = \frac{1}{30}.$$

$$N(B) = C_7^4; \qquad P(B) = \frac{C_7^4}{C_{10}^4}.$$

Приклад 4. Шість пасажирів підіймаються на ліфті семиповерхового будинку. Вважаємо, що рух ліфту розпочинається з нульового поверху і всі варіанти виходу пасажирів на поверхах рівноможливі. Знайти ймовірності таких подій:

A = {на перших трьох поверхах не вийде жоден пасажир},

B = {усі пасажири вийдуть на одному поверсі}.

Розв'язання

$$\Omega = \{(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6),\ 1 \le i_k \le 7\};$$

i_k — номер поверху, на якому виходить k-й пасажир.

$$N(\Omega) = 7^6;\ A = \{(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6),\ 4 \le i_k \le 7\};\ N(A) = 4^6;$$

$$P(A) = \frac{4^6}{7^6} = \left(\frac{4}{7}\right)^6.$$

$$B = \{(1,1,1,1,1,1),\ (2,2,2,2,2,2), \ldots, (7,7,7,7,7,7)\};$$

$$N(B) = C_7^1 = 7; \qquad P(B) = \frac{7}{7^6} = \frac{1}{7^5}.$$

Приклад 5. Симетрична монета підкидається k разів. Знайти ймовірність події $A = \{$лише за останнього підкидання випаде «герб»$\}$.

Розв'язання

$\Omega = \{$ГГ…Г, ЦГ…Г, …, ЦЦ…Ц$\}$ — усі можливі комбінації з «гербів» і «цифр» довжиною k і $N(\Omega) = 2^k$.

Події A сприяє лише одна з цих комбінацій: $A = \left\{\underbrace{\text{ЦЦ...Ц}}_{k-1}\text{Г}\right\}$.

Тому $P(A) = \dfrac{1}{2^k}$.

Не буде зайвим ще раз нагадати, що обчислена ймовірність випадкової події дозволяє прогнозувати поведінку цієї події за достатньо великої кількості спостережень за нею.

Так, обчислена у прикладі 2 *а* ймовірність $\dfrac{1}{2}$ означає, що за досить частого повторення описаної ситуації з розміщенням осіб приблизно у половині випадків дві певні особи сидітимуть поруч.

Уміння дати правильну інтерпретацію знайденій теоретично ймовірності є особливо важливим на початковій стадії вивчення теорії ймовірностей.

3.2. Дискретна ймовірнісна схема

Скінченну або зчисленну множину будемо називати *дискретною* множиною. Розглянемо випадковий експеримент з дискретною множиною елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots\}$.

Припустимо, що кожній елементарній події ω_k поставлено у відповідність число $P(\omega_k) = p_k$, причому

$$p_k \geq 0, \; k = 1, 2, \ldots; \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1. \tag{3.2}$$

Числа p_k, $k = 1, 2, \ldots$, назвемо ймовірностями елементарних подій. Імовірність довільної події $A \subset \Omega$ задамо як суму ймовірностей тих елементарних подій, з яких складається A:

$$P(A) = \sum_{\substack{k \\ (\omega_k \in A)}} p_k. \tag{3.3}$$

Неважко перевірити, що за такого розподілу ймовірностей усі аксіоми з п. 2.3 виконуються. Збіжність ряду (3.3) гарантована збіжністю ряду (3.2).

Якщо множина Ω скінченна, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, дістаємо модель випадкового експерименту зі скінченною кількістю ***нерівноможливих*** елементарних подій (див. приклад 10 п. 2.3). Зокрема, якщо $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$, дійдемо класичної схеми.

Питання вибору конкретних значень p_k у тій чи іншій моделі, взагалі кажучи, виходить за межі теорії ймовірностей. У деяких випадках їх легко знайти з додаткових міркувань.

Приклад 6. Симетрична монета підкидається до першого випадання «герба». Знайти ймовірність того, що її доведеться підкидати: а) не більше від трьох разів; б) принаймні три рази.

Розв'язання

Множиною елементарних подій є множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_k, \ldots\}$, де $\omega_k = \underbrace{\text{ЦЦ...Ц}}_{k\text{-}1}\text{Г}$ означає, що «герб» випав за k-го підкидання.

Розподіл імовірностей $P(\omega_k)$ задамо, скориставшись результатами прикладу 5:

$$P(\omega_1)=\frac{1}{2}, \quad P(\omega_2)=\frac{1}{2^2}, \; \ldots, \quad P(\omega_k)=\frac{1}{2^k}, \quad \ldots,$$

при цьому

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

як сума нескінченно спадної геометричної прогресії.

а) $A=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. За формулою (3.3)

$$P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

б) $A=\{\omega_3, \omega_4, \ldots\omega_k, \ldots\}$. За формулою (3.3)

$$P(A)=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots=\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

або

$$P(A)=1-P(\omega_1)-P(\omega_2)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

3.3. Геометрична ймовірність

Припустимо, що елементарні події випадкового експерименту є рівноможливими й утворюють нескінченну неперервну сукупність, яку можна зобразити точками деякої квадрованої області Ω на площині, а довільну випадкову подію A у цьому експерименті — точками квадрованої підмножини $A\subset\Omega$. Позначимо через $S(\Omega)$, $S(A)$ відповідні площі й уведемо розподіл імовірностей формулою

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Легко перевірити, що аксіоми теорії ймовірностей для такого розподілу задовольняються.

Аналогічні розподіли ймовірностей можна ввести для випадків, коли рівноможливі результати експерименту зображаються неперервними областями Ω на прямій чи у просторі, а події A — відповідними підмножинами $A \subset \Omega$ з довжиною $l(A)$ чи об'ємом $V(A)$:

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)}; \quad P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}. \tag{3.5}$$

Формули (3.4), (3.5) мають назву *формул геометричної ймовірності*. Усім задачам на геометричну ймовірність можна дати таке тлумачення: в області Ω навмання вибирається точка. Яка ймовірність, що ця точка належить A?

Приклад 7. На відрізку $[0, l]$ навмання вибирають два числа. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел не перевищує l.

Розв'язання

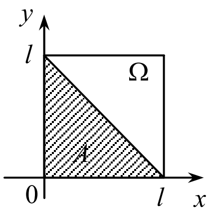


Рис. 3.1

Множину елементарних подій $\Omega = \{(x; y) : 0 \le x,\ y \le l\}$ можна зобразити на площині точками квадрата. Події $A = \{(x;\ y) : 0 \le x, y \le l,\ x + y \le l\}$ відповідає заштрихована область на рис. 3.1. Тому

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

Одержаний результат можна тлумачити так: якщо аудиторія достатньо велика і кожен із присутніх задумав два числа з відрізка $[0, l]$, то приблизно в половині випадків сума задуманих чисел не перевищуватиме l.

► *Задачі*

1. Студент знає відповіді на 40 із 50 питань програми. Одержання заліку передбачає правильні відповіді на два питання. Яка ймовірність того, що студент одержить залік?

2. Дві групи по 10 спортсменів проводять жеребкування для присвоєння номерів учасникам змагань (від 1 до 10 в кожній групі).

Два брати входять до складу різних груп. Знайти ймовірність того, що обидва брати одержать однаковий номер.

3. З колоди карт (36 штук) беруть навмання дві. Яка ймовірність того, що це десятка і туз?

4. Серед 100 лотерейних білетів є 2 виграшних. Яка ймовірність того, що серед трьох придбаних білетів рівно один виграшний?

5. У гості прийшли п’ять осіб. Розіходячись, вони вибирають свої черевики навмання. Знайти ймовірність того, що гість, який виходить першим, візьме саме свої черевики.

6. Є п’ять карток розрізної абетки з буквами А, Б, В, Г, Д. Навмання одну за одною вибирають три і розташовують у порядку появи. Яка ймовірність того, що утвориться слово «ДВА»?

7. Гральний кубик підкидається 5 разів. Яка ймовірність того, що «шістка» випаде рівно один раз?

8. Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри і, пам’ятаючи лише, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що абонент правильно набрав номер телефону.

9. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року.

10. Куб, усі грані якого пофарбовано, розрізано на тисячу однакових кубиків, які ретельно перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кубик буде мати дві пофарбовані грані.

11. Підкидають шість гральних кубиків. Яка ймовірність того, що на всіх кубиках випаде різна кількість очок?

12. За умовами лотереї «СУПЕРЛОТО» її учасник, який вгадає 3, 4, 5 або 6 номерів з відібраних у випадковому розіграші шести номерів з 49, одержує грошовий приз. Знайти ймовірність того, що учасник лотереї вгадає всі 6 номерів (джекпот).

13. Колоду із 36 карт ретельно перетасовано. Яка ймовірність того, що перші чотири карти в колоді тузи?

14. Цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6 розставлено випадковим чином. Знайти ймовірність того, що 1 і 2 стоятимуть поруч, причому в порядку зростання.

15. З урни, в якій є 10 різних куль, дістають навмання з поверненням 5 куль. Знайти ймовірність того, що серед них немає однакових.

16. Десять осіб навмання вибирають собі місце за круглим столом. Знайти ймовірність того, що певні дві особи будуть сидіти поруч.

17. До чотиристороннього перехрестя з кожної сторони під'їхало по одному автомобілю. Для кожного автомобіля однаково можливі всі чотири маневри: поїхати назад, прямо, ліворуч або праворуч. Знайти ймовірність того, що три автомобілі поїдуть по одній вулиці.

18. У ліфт на першому поверсі зайшли три особи, кожна з яких може вийти на будь-якому поверсі з другого по дев'ятий. Яка ймовірність того, що всі пасажири вийдуть на різних поверхах?

19. Десять осіб шикуються в колону в довільному порядку. Яка ймовірність того, що дві певні особи стоятимуть поруч?

20. На картках лото написано числа від 1 до 10. Знайти ймовірність того, що на трьох вибраних навмання картках написані числа менші від 6.

21. Із букв розрізної абетки складено слово «АНАНАС». Малюк розсипав ці букви і знову зібрав у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що в нього знову вийде слово «АНАНАС».

22. Для зменшення загальної кількості ігор 18 команд розбивають випадковим чином на дві групи по 9 команд. Знайти ймовірність того, що дві найсильніші команди попадуть в одну групу.

23. У чотири вагони потягу заходять 9 пасажирів. Яка ймовірність того, що в перший вагон зайде 3 пасажири?

24. Колоду із 36 карт ретельно перетасовано. Яка ймовірність того, що перша і остання карта — туз?

25. Десять осіб, серед яких є X та Y, стоять у черзі. Знайти ймовірність того, що між X та Y розміщені рівно дві особи.

26. У партії 80 виробів, з яких чотири — браковані. Партія довільним чином поділена на дві рівні частини, які відправлені двом споживачам. Яка ймовірність того, що браковані вироби дістануться обом споживачам порівну?

27. На відрізку одиничної довжини навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що відстань від цієї точки до кожного з кінців відрізка буде більшою ніж $\frac{1}{k}$, де $k > 2$.

28. Яка ймовірність того, що сума трьох навмання взятих відрізків, довжина кожного з яких не перевищує 1, буде більшою за 1?

29. У коло радіусом R вписано квадрат. Яка ймовірність того, що навмання «кинута» в коло точка не потрапить до квадрата?

30. У кулю радіусом R вписано куб. Знайти ймовірність того, що навмання «кинута» в кулю точка потрапить до куба?

4. УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛИ ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ І БАЙЄСА

4.1. Умовні ймовірності. «Теорема множення». Незалежність подій

У п. 2.3 введено поняття ймовірності як числової функції множин, що задовольняє три аксіоми. Таку ймовірність ще називають *безумовною*, підкреслюючи цим, що вона не залежить від жодних інших додаткових умов, крім фіксованого комплексу умов S, яким характеризується експеримент.

Досить часто доводиться розглядати ймовірність випадкової події A за додаткової умови, що відбулася деяка випадкова подія B. Таку ймовірність будемо називати *умовною* і позначати символом $P\left(A/B\right)$ (імовірність A за умови B).

Розглянемо *класичну схему*. Нехай можливі результати експерименту зводяться до n випадків. Припустимо, що події A сприяють m випадків, а події B — k випадків. Оскільки жодних припущень щодо сумісності чи несумісності подій A та B не робиться, то, взагалі кажучи, існують випадки, які сприяють і події A, і події B одночасно.

Позначимо кількість таких випадків через l. Тоді $P(A)=\dfrac{m}{n};\ \ P(B)=\dfrac{k}{n};\ \ P(AB)=\dfrac{l}{n}$.

Знайдемо $P\left(A/B\right)$, тобто умовну ймовірність події A за умови, що подія B відбулася. Якщо відомо, що подія B відбулася, то з раніше можливих n випадків залишаються можливими тільки ті k, які сприяють події B. При цьому подія A може відбутися лише за рахунок перерізу AB, якому сприяють l елементарних подій.

Отже, $P\left(A/B\right)=\dfrac{l}{k}$. Оскільки $\dfrac{l}{k}=\dfrac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}}$, то

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{4.1}$$

Зрозуміло, що наші міркування мають сенс лише тоді, коли $P(B) \neq 0$. Рівність (4.1) дозволяє дати загальне означення умовної ймовірності.

Означення 1. Нехай $P(B) \neq 0$. *Умовною ймовірністю* події A за умови, що відбулася подія B, називається число, яке обчислюється за формулою (4.1).

Легко перевірити, що для умовних імовірностей виконуються всі аксіоми безумовних імовірностей:

1) $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \geq 0, \quad P(B) \neq 0.$

2) $P(\Omega/B) = \dfrac{P(\Omega B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

Нехай A_1, A_2 — несумісні $\left(A_1 A_2 = \varnothing\right)$ події, тоді

3) $P[(A_1 + A_2)/B] = \dfrac{P[(A_1 + A_2)B]}{P(B)} =$

$= \dfrac{P(A_1B) + P(A_2B)}{P(B)} = P(A_1/B) + P(A_2/B).$

Очевидно, що коли $P(A) \neq 0$, події A і B у формулі (4.1) можна поміняти місцями. З формули (4.1) безпосередньо випливає так звана ***теорема множення***: якщо $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, то

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \tag{4.2}$$

Приклад 1. На підприємстві брак становить 2 % від загальної кількості виробів. Серед небракованих виробів вироби першого ґатунку становлять 95 %. Із загальної маси виготовленої продукції взято навмання один виріб. Яка ймовірність, що він першого ґатунку?

Розв'язання

Нехай подія A — взято бракований виріб, подія B — взято виріб першого ґатунку. Оскільки $AB = \varnothing$ — неможлива подія, то $B = \Omega B = \left(A + \overline{A}\right)B = AB + \overline{A}B = \overline{A}B.$

За формулою (4.2)

$$P(B) = P\left(\overline{A}B\right) = P\left(\overline{A}\right)P\left(B/\overline{A}\right) = (1 - 0{,}02) \cdot 0{,}95 = 0{,}98 \cdot 0{,}95 = 0{,}931.$$

Теорема множення узагальнюється на ***випадок довільної скінченної кількості подій***, а саме:

$$P\left(A_1A_2A_3\ldots A_n\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2/A_1\right)P\left(A_3/A_1A_2\right)\ldots P\left(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}\right). \quad (4.3)$$

Зауваження 1. Формули (4.2) і (4.3) дають можливість знаходити ймовірності подій AB та $A_1\,A_2\ldots A_n$, якщо ***умовні*** ймовірності відомі. Для знаходження останніх часто застосовують так званий ***метод допоміжного експерименту***, суть якого полягає в такому: нехай у деякому експерименті, в якому нас цікавить подія *B*, стало відомо, що відбулася подія *A*. Така ситуація приводить до необхідності зміни початкової множини елементарних подій і перегляду ймовірностей, які спочатку приписувались цим подіям. Інакше кажучи, для знаходження ймовірності $P\left(B/A\right)$ ми формуємо новий (допоміжний) експеримент, який є деякою модифікацією початкового експерименту. ***Безумовна*** ймовірність події B у цьому новому експерименті й береться за ***умовну*** ймовірність $P\left(B/A\right)$. Методом допоміжного експерименту ми скористались раніше, діставши формулу (4.1) в класичній схемі.

Приклад 2. З урни, в якій містяться 4 білих і 6 чорних кульок, навмання послідовно і без повернення виймають дві кульки. Нехай A — перша кулька біла, B — друга кулька біла. Знайти $P\left(B/A\right)$.

Розв'язання

Формуємо **допоміжний експеримент**: з урни, в якій 3 білих і 6 чорних кульок (згідно з умовою A одну білу кульку вже вийнято), навмання виймають одну кульку. Імовірність того, що вона біла, дорівнює $\frac{3}{3+6}=\frac{1}{3}$. Отже, $P\left(B/A\right)=\frac{1}{3}$. Знайдемо тепер $P\left(B/A\right)$ безпосередньо за формулою

$$P(B/A)=\frac{P(BA)}{P(A)}.$$

Маємо

$$N\left(\Omega\right)=A_{10}^2=\frac{10!}{8!}=90;\ N\left(A\right)=4\cdot 9=36,\ P\left(A\right)=\frac{36}{90}=\frac{2}{5};$$

$$N\left(AB\right)=4\cdot 3=12,\ P(BA)=P(AB)=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}.$$

Отже, $P(B/A)=\frac{1}{3}$. Дістали ту саму ймовірність. Зауважимо, що безумовна ймовірність події B дорівнює $\frac{2}{5}$. Справді, $P(B)=P[(A+\bar{A})B]=P(AB)+P(\bar{A}B)=\frac{12}{90}+\frac{24}{90}=\frac{36}{90}=\frac{2}{5}$, оскільки $N(\bar{A}B)=6\cdot 4=24$. Цікаво, що $P(B)=P(A)$.

Приклад 3. Нехай за умов прикладу 2 кульки виймаються до першої появи чорної кульки. Яка ймовірність того, що доведеться виймати четверту кульку?

Розв'язання

Нехай D — доведеться виймати четверту кульку. Тоді $D=ABC$, де A — перша кулька біла, B — друга кулька біла, C — третя кулька біла. За формулою (4.3)

$$P(D)=P(ABC)=P(A)P(B/A)P(C/AB)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{30}.$$

Означення 2. Випадкові події A і B називаються *незалежними*, якщо

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{4.4}$$

Порівнявши формулу (4.2) з означенням незалежності (4.4), для незалежних подій A та B $\left(P(A)\neq 0,\ P(B)\neq 0\right)$ дістаємо

$$P(B/A)=P(B),\ P(A/B)=P(A). \tag{4.5}$$

Отже, настання однієї з двох незалежних подій не змінює ймовірності іншої. Кожна з рівностей (4.5) гарантує незалежність подій A та B.

Зауваження 2. На практиці скористатися формулою (4.4) як критерієм незалежності подій не завжди вдається. Частіше застосовується гіпотеза про «фізичну» незалежність подій: вважаються незалежними події, які не пов'язані причинно. Наприклад, постріли з кількох гармат в ту саму мішень — незалежні.

Якщо математичну модель, що описує деякий експеримент, побудовано правильно, то «фізично» незалежним подіям реального експерименту відповідають події моделі, які незалежні і в розумінні формули (4.4).

Приклад 4. Експеримент полягає у підкиданні двох симетричних монет. Тоді $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ЦЦ}, \text{ЦГ}, \text{ГЦ}\}$. Нехай $A = \{\text{ГГ}, \text{ГЦ}\}$ — перша монета випаде «гербом»; $B = \{\text{ЦГ}, \text{ГГ}\}$ — друга монета випаде «гербом»; $AB = \{\text{ГГ}\}$ — обидві монети випадуть «гербом». Тоді $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{4}$. Отже, $P(AB) = P(A)P(B)$.

Події A та B незалежні як «фізично», так і в моделі.

Означення 3. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються *незалежними в сукупності*, якщо для довільного набору індексів $1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k \le n$ $(2 \le k \le n)$ виконується рівність

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \ldots P\left(A_{i_k}\right).$$

Зокрема, для незалежних у сукупності подій формула (4.3) набуває вигляду

$$P\left(A_1 A_2 \ldots A_n\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2\right) \ldots P\left(A_n\right). \tag{4.6}$$

Щодо формули (4.6) можна зробити те саме зауваження 2, що й щодо формули (4.4).

Приклад 5. Знайти ймовірність того, що за шести підкидань монети принаймні один раз випаде «герб».

Розв'язання

Позначимо нашу подію через A. Тоді протилежна подія $\overline{A}$ — за шести підкидань монети всі шість разів випадатиме «цифра». Нехай подія A_i — за i-го підкидання випаде «цифра». Тоді $P\left(A_i\right) = \frac{1}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Зрозуміло, що події A_i — незалежні в сукупності. Тому за формулою (4.6)

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(A_1 A_2 \ldots A_6\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2\right) \ldots P\left(A_6\right) = \frac{1}{2^6}.$$

Отже, $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{1}{2^6} = \frac{63}{64}$.

Уведемо поняття складної події.

***Означення* 4**. *Складною* подією будемо називати подію A, яка виражається через інші події, що спостерігаються, за допомогою алгебраїчних операцій над подіями.

Для знаходження ймовірностей таких подій часто використовуються вже відомі нам формули:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B);$$

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Справедлива формула для суми трьох подій:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Проте ймовірність суми трьох і більшої кількості подій зручно знаходити, переходячи до протилежної події:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n). \quad (4.7)$$

Якщо події $A_1,A_2,\ldots,A_n$ — незалежні в сукупності, то такими є й події $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$. Тому $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n)$ і ймовірність настання хоча б однієї з подій $A_1,A_2,\ldots,A_n$ дорівнює

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n)=1-q_1q_2\ldots q_n,$$

де q_k — імовірність настання події $\overline{A}_k$, $1\le k\le n$.

Якщо незалежні в сукупності події $A_1,A_2,\ldots,A_n$ мають однакову ймовірність p, то ймовірність настання хоча б однієї з них дорівнює $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-q^n$, де $q=1-p$.

Приклад 6. Фірма може одержати кредит у кожному з трьох банків з імовірностями відповідно 0,5; 0,6; 0,7. Банки надають кредити незалежно один від одного.

Знайти ймовірності таких подій:

B_0 – жодного кредиту фірма не одержить;

B_1 – фірма одержить рівно один кредит;

B_2 – фірма одержить рівно два кредити;

B_3 – фірма одержить усі три кредити;

B – фірма одержить принаймні один кредит.

Розв'язання

Уведемо допоміжні події: A_1 — перший банк надасть кредит; A_2 — другий банк надасть кредит; A_3 — третій банк надасть кредит. За умовою

$$P(A_1)=0{,}5;\ P(A_2)=0{,}6;\ P(A_3)=0{,}7.$$

Тоді

$$B_0=\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3 \text{ і } P(B_0)=P\left(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)=$$
$$=(1-0{,}5)(1-0{,}6)(1-0{,}7)=0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}06.$$

Оскільки $B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ і всі доданки є несумісними подіями, то

$$P(B_1)=P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right)=$$
$$=P(A_1)\,P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\right)P(A_2)\,P\left(\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P(A_3)=$$
$$=0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7=0{,}29.$$

Аналогічно, $B_2=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$ і

$$P(B_2)=P(A_1)\,P(A_2)\,P\left(\overline{A}_3\right)+P(A_1)\,P\left(\overline{A}_2\right)P(A_3)+P\left(\overline{A}_1\right)P(A_2)\,P(A_3)=$$
$$=0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7+0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}44.$$

Подію B_3 можна подати у вигляді $B_3=A_1\,A_2\,A_3$ і тому

$$P(B_3)=P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)=0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}21.$$

Очевидно, що $B_0+B_1+B_2+B_3=\Omega$ — вірогідна подія, і тому $P(B_0+B_1+B_2+B_3)=0{,}06+0{,}29+0{,}44+0{,}21=1$.

Подія $B=A_1+A_2+A_3$ є протилежною події $B_0=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Тому $P(B)=1-P(B_0)=1-0{,}06=0{,}94$. Тут, власне, опосередковано (через подію B_0) працює формула (4.7).

4.2. Формула повної ймовірності і формула Байєса

Розглянемо події $H_1,H_2,\ldots,H_n$, які утворюють ***повну групу подій***, тобто

$$H_i\neq\varnothing\ ,\quad H_iH_j=\varnothing\ (i\neq j),\quad H_1+H_2+\ldots+H_n=\Omega\ .$$

Нехай потрібно знайти ймовірність деякої події A. Звичайно, ця подія може відбутися разом з однією з подій повної групи $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Стосовно до події A події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ будемо називати *гіпотезами*. Позначимо через $P(H_i)$ імовірності гіпотез . Ці ймовірності ще часто називають *апріорними*.

Твердження. Імовірність події A дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з гіпотез на умовні ймовірності події A за цих гіпотез, тобто

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i). \tag{4.8}$$

Формулу (4.8) називають *формулою повної ймовірності*.

Доведення. Оскільки події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несумісні, то і події $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$ також попарно несумісні. Справді, $(AH_i)(AH_j) = (AA)(H_i H_j) = A\varnothing = \varnothing$. Подію A можна записати у вигляді

$$A = A\Omega = A\left(H_1 + H_2 + \ldots + H_n\right) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n,$$

а її ймовірність — у вигляді

$$P\left(A\right) = P\left(AH_1\right) + P\left(AH_2\right) + \ldots + P\left(AH_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i A\right).$$

Оскільки згідно з «теоремою множення»

$$P\left(H_i A\right) = P\left(H_i\right) P\left(A/H_i\right), \text{ то } P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) P\left(A/H_i\right).$$

Зауваження 1. Частинним випадком повної групи подій є протилежні події H та $\bar{H}$, у термінах яких формула (4.8) набуває вигляду

$$P\left(A\right) = P\left(H\right) P\left(A / H\right) + P\left(\bar{H}\right) P\left(A / \bar{H}\right).$$

Формула повної ймовірності (4.8) дає відповідь на питання про ймовірність події A, якщо відомі апріорні ймовірності гіпотез.

Сформулюємо тепер таку **задачу**. Нехай є повна група гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Імовірності цих гіпотез до проведення експерименту відомі і дорівнюють $P\left(H_1\right), P(H_2), \ldots , P(H_n)$. Проводиться експеримент, у результаті якого відбувається деяка подія A. Поставимо запитання — як змінюються ймовірності гіпотез після проведення експерименту, тобто після того як стає відомо, що відбулася подія A? Отже, необхідно знайти умовну ймовірність $P(H_i/A)$ для кожної гіпотези. Ці умовні ймовірності називають *апостеріорними* ймовірностями гіпотез. Відповідь на поставлене запитання дає так звана ***формула Байєса***. Виведемо її. Згідно з теоремою про добуток імовірностей

$$P(AH_i)=P(A)P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i).$$

Звідси

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Підставимо в останню рівність замість імовірності $P(A)$ її значення з формули повної ймовірності (4.8). У результаті дістанемо

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P_i(A/H)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(H_k)P(A/H_k)}. \qquad (4.9)$$

Це і є ***формула Байєса***, яка дозволяє «переоцінити» імовірність кожної гіпотези після того, як стає відомою деяка нова інформація про виконання тих чи інших подій. Особливе значення ця формула має для таких експериментів, в яких події H_i безпосередньо не спостерігаються, хоч апріорні ймовірності $P(H_i)$ і умовні ймовірності $P(A/H_i)$ відомі з додаткових експериментів. У таких випадках переоцінку ймовірностей гіпотез після проведення експерименту можна зробити на основі події A, що відбулась у результаті цього експерименту.

Приклад 7 (*на застосування формули повної ймовірності*).

У цеху на автоматичних верстатах трьох типів виготовляють ті самі деталі. Продуктивність верстатів однакова, але якість роботи різна. Відомо, що верстати першого типу виробляють 94 % деталей відмінної якості, верстати другого типу — 90 %, верстати третього типу — 85 %. Усі виготовлені в цеху за зміну деталі в нерозсортованому вигляді знесені до складу.

Знайти ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде відмінної якості, якщо відомо, що верстатів першого типу 5, другого — 3 і третього — 2.

Розв'язання

Нехай подія A — навмання вибрано деталь відмінної якості. Уведемо три гіпотези:

H_1 — вибрано деталь, яку виготовлено на верстаті першого типу;

H_2 — вибрано деталь, яку виготовлено на верстаті другого типу;

H_3 — вибрано деталь, яку виготовлено на верстаті третього типу.

Оскільки продуктивність верстатів однакова, то для гіпотез H_1, H_2, H_3 маємо такі ймовірності:

$$P(H_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad P(H_2) = \frac{3}{10}; \quad P(H_3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Умовні ймовірності події A:

$$P(A/H_1) = 0,94; \quad P(A/H_2) = 0,9; \quad P\left(A/H_3\right) = 0,85 .$$

Тому

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{2}0,94 + \frac{3}{10}0,9 + \frac{1}{5}0,85 = 0,91.$$

Приклад 8 (*на застосування формули Байєса*).

В умовах попередньої задачі знайти ймовірність того, що навмання вибрану деталь виготовлено на верстаті першого типу, якщо відомо, що ця деталь відмінної якості.

Розв'язання

За формулою (4.9)

$$P\left(H_1/A\right) = \frac{P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)}{\sum_{i=1}^{3} P\left(H_i\right)P\left(A/H_i\right)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0,94}{0,91} \approx 0,52 .$$

► *Задачі*

1. У двох партіях відповідно 75 % та 80 % доброякісних виробів. Навмання беруть по одному виробу з кожної партії. Знайти ймовірність того, що серед них: а) хоча б один бракований; б) один якісний і один бракований.

2. Імовірність виготовлення деталі першого ґатунку на першому верстаті — 0,7, на другому — 0,8. На першому верстаті виготовлено дві деталі, а на другому — три. Знайти ймовірність того, що всі деталі першого ґатунку.

3. Робітник обслуговує три верстати. Імовірність того, що протягом однієї години першому верстату знадобиться увага робітника, дорівнює 0,3, другому — 0,4 і третьому — 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години хоча б одному верстату знадобиться увага робітника.

4. З-поміж деталей, що їх виробляє робітник, у середньому 4 % бракованих. Знайти ймовірність того, що з-поміж узятих п'яти деталей не буде жодної бракованої.

5. Деталь проходить три стадії обробки. Імовірність того, що вона виявиться бракованою на першій стадії обробки, дорівнює 0,02, на другій — 0,03, на третій — 0,02. Знайти ймовірність того, що деталь не буде бракованою після трьох стадій, припускаючи, що поява браку на окремих стадіях — незалежні події.

6. Імовірність того, що необхідний матеріал є на першій базі, дорівнює 0,9, на другій — 0,8, на третій — 0,6. Знайти ймовірність того, що цей матеріал є рівно на двох базах.

7. Фірму перевіряють незалежно один від одного три аудитори. Імовірність того, що перший аудитор знайде недоліки, становить 0,5; другий — 0,7; третій — 0,4. Знайти ймовірність того, що на фірмі будуть виявлені недоліки.

8. Імовірність того, що протягом однієї зміни виникне несправність верстата, дорівнює 0,05. Знайти ймовірність того, що не виникне жодної несправності за чотири зміни.

9. Імовірність одного влучення в ціль після пострілу з двох гармат дорівнює 0,46. Знайти ймовірність влучення в ціль другою гарматою, якщо для першої гармати ця ймовірність дорівнює 0,7.

10. На підприємстві брак становить 2 % від загальної кількості виробів. Серед небракованих виробів вироби першого ґатунку становить 95 %. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб виявиться першого ґатунку, якщо виріб узято: а) із числа небракованих; б) із загальної маси виготовленої продукції.

11. У двох коробках складено по 20 деталей, з них стандартних: у першій — 14, у другій — 16. З першої коробки навмання вибрано одну деталь та перекладено в другу. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана після цього деталь з другої коробки буде стандартною.

12. Кількість вантажних автомобілів на даному підприємстві втричі перевищує кількість легкових. Дизельні двигуни мають 50 %

вантажних автомобілів та 30 % легкових. Яка ймовірність того, що навмання вибраний автомобіль матиме дизельний двигун?

13. У даний район вироби постачаються трьома фірмами у співвідношенні 5:8:7. З-поміж продукції першої фірми стандартних 90 %, другої — 80 %, третьої — 75 %. Покупець придбав один виріб. Знайти ймовірність того, що придбаний вибір стандартний.

14. З першого автомата на конвеєр потрапляє 30 %, з другого — 25 %, з третього — 20 %, з четвертого — 25 % деталей. З-поміж деталей першого автомата 1 % бракованих, другого — 2 %, третього — 1 %, четвертого — 5 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана з конвеєра деталь виявиться бракованою.

15. У коробці складено 25 деталей, виготовлених на першому заводі, 14 — на другому, 20 — на третьому. З-поміж деталей, виготовлених на першому заводі, 80 % відмінної якості, на другому — 70 %, на третьому — 90 %. Знайти ймовірність того, що навмання взята з коробки деталь виявиться відмінної якості.

16. На деякому підприємстві перша машина виробляє 15 %, друга — 45 %, третя — 40 % усіх деталей. В їхній продукції браку відповідно 8, 6, 3 %. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь небракована?

17. Деталі виготовляють на двох заводах. Обсяг продукції другого заводу вдвічі більший, ніж першого. З-поміж деталей першого заводу 5 % бракованих, другого — 3 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана деталь виявиться небракованою.

18. Виріб перевіряється на стандартність одним з двох контролерів. Імовірність того, що виріб потрапить до першого контролера, рівна 0,6, до другого — 0,4. Імовірність того, що стандартний виріб буде визнаний стандартним першим контролером, дорівнює 0,92, другим — 0,99. Знайти ймовірність того, що стандартний виріб під час перевірки буде визнано стандартним.

19. У продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 10 % телевізорів з прихованим дефектом, другого — 4 %, третього — 6 %. Знайти ймовірність придбання справного телевізора, якщо до крамниці надійшло 20 % телевізорів з першого заводу, 45 % — з другого, 35 % — з третього.

20. У коробку з трьома однаковими деталями кинуто стандартну деталь, а потім навмання вибрано одну деталь. Знайти ймовірність того, що вона стандартна, якщо однаково ймовірні всі гіпотези про початкову кількість стандартних деталей у коробці.

21. У даний район вироби постачаються трьома фірмами у співвідношенні 5:4:6. Серед продукції першої фірми стандартних виробів 80 %, другої — 90 %, третьої — 85 %. Покупець придбав один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що він поставлений першою фірмою.

22. На деякому підприємстві перша машина виробляє 15 %, друга — 45 %, третя — 40 % всіх деталей. У їхній продукції браку відповідно 8, 6, 3 %. Навмання вибрана деталь виявилась дефектною. Яка ймовірність того, що вона виготовлена другою машиною.

23. У продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 6 % телевізорів з прихованим дефектом, другого — 5 %, третього — 4 %. Крамниця одержала 20 % телевізорів з першого заводу, 45 % — з другого, 35 % — з третього. Придбаний покупцем телевізор виявився справним. Знайти ймовірність того, що його виготовлено на другому заводі.

24. Вибір перевіряється на стандартність одним з двох контролерів. Імовірність того, що виріб потрапить до першого контролера, — 0,55, до другого — 0,45. Імовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним першим контролером, рівна 0,9, другим — 0,98. Стандартний виріб під час перевірки визнано стандартним. Знайти ймовірність того, що перевірка здійснювалась другим контролером.

25. З першого автомата на конвеєр потрапляє 40 %, з другого — 20 %, з третього — 10 %, з четвертого — 30 % деталей. З-поміж деталей першого автомата 2 % бракованих, другого — 3 %, третього 4 %, четвертого — 1 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана з конвеєра деталь, яка виявилась бракованою, виготовлена третім автоматом.

26. Кількість вантажних автомобілів на даному підприємстві вдвічі перевищує кількість легкових. Дизельні двигуни мають 50 % вантажних автомобілів та 10 % легкових. Яка ймовірність того, що навмання вибраний автомобіль, який виявився з дизельним двигуном, є вантажним?

27. Серед 16 одиниць продукції першого виду 15 % браку, а з-поміж 30 одиниць другого виду 6 % браку. Навмання вибрана одиниця продукції виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона другого виду?

28. На деякому підприємстві перша машина виробляє 25 %, друга — 35 %, третя — 40 % всіх деталей. В їхній продукції браку відповідно 6, 5, та 4 %. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь, яка виявилась дефектною, виготовлена першою машиною?

29. Відомо, що 90 % продукції заводу відповідає стандарту. Спрощена схема контролю визнає придатною стандартну продукцію з імовірністю 0,98 та нестандартну — з імовірністю 0,05. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, відповідає вимогам стандарту.

30. У коробці лежить куля невідомого кольору — з однаковою ймовірністю біла або чорна. У коробку поклали одну білу кулю і після ретельного перемішування навмання дістали одну кулю. Вона виявилась білою. Знайти ймовірність того, що в коробці залишилась біла куля.

5. ПОСЛІДОВНОСТІ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ

На практиці зустрічаються задачі, в яких той самий експеримент або аналогічні експерименти повторюються велику кількість разів. У результаті кожного експерименту може відбутися або не відбутися деяка подія A, причому цікавляться не результатом кожного окремого експерименту, а загальною кількістю наставань події A у серії експериментів. Послідовні експерименти (будемо називати їх *послідовними випробуваннями*) називаються *незалежними* відносно події A, якщо ймовірність цієї події у кожному експерименті (випробуванні) не залежить від того, відбулася ця подія чи ні в інших експериментах (випробуваннях). Наприклад, кілька послідовних підкидань монети є незалежними.

5.1. Формула Бернуллі

Незалежні випробування можуть проводитися в однакових або різних умовах. У першому випадку ймовірність події A в усіх випробуваннях однакова, у другому випадку — різна. Далі розглянемо перший випадок. Розв’яжемо таку задачу: яка ймовірність $P_n(m)$ того, що в серії з n незалежних випробувань подія A настане рівно m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ разів? Очевидно, що m наставань події A у n випробуваннях є випадковою подією. Позначимо цю подію через B_m. Нехай імовірність події A у кожному випробуванні дорівнює p. Уведемо події

$$A_i = \{\text{за } i\text{-го випробування настала подія } A\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Зрозуміло, що $P(A_i) = p$, $P(\overline{A}_i) = 1 - p = q$. Однією з елементарних випадкових подій, які сприяють події B_m, є такий результат серії випробувань, коли подія A відбувається m разів підряд, а потім $(n - m)$ разів підряд не відбувається

$$A_1 A_2 \ldots A_m \overline{A}_{m+1} \overline{A}_{m+2} \ldots \overline{A}_n.$$

Оскільки випробування незалежні, то

$$P\left(A_1 A_2 \ldots A_m \overline{A}_{m+1} \overline{A}_{m+2} \ldots \overline{A}_n\right) =$$

$$= P(A_1) \ldots P(A_m) P(\overline{A}_{m+1}) \ldots P(\overline{A}_n) = p^m q^{n-m}. \tag{5.1}$$

Кожен інший варіант настання події B_m також складається з m подій A_i і $(n - m)$ подій $\overline{A}_j$ (ще кажуть: з m «успіхів» і $(n - m)$ «невдач»). Кількість таких варіантів дорівнює кількості способів, якими можна з n випробувань вибрати m, в яких подія A відбувається, тобто дорівнює C_n^m.

Імовірність кожного окремого варіанта, як і в рівнянні (5.1), дорівнює $p^m q^{n-m}$. Оскільки всі варіанти настання події B_m між собою несумісні, то

$$P(B_m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{5.2}$$

Отже, одержуємо такий *результат*: якщо проводяться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися з імовірністю p, то ймовірність настання події A рівно m разів визначається за формулою (5.2), яку називають *формулою Бернуллі*.

Приклад 1. Монета підкидається п’ять разів. Знайти ймовірність того, що: а) три рази випаде «герб»; б) «герб» випаде не менше від трьох разів.

Розв'язання

За формулою Бернуллі:

а) $P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{C_5^3}{2^5} = \frac{5}{16}$;

б) $P_5(3 \le m \le 5) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{1}{2}$, оскільки

$P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$; $P_5(4) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$;

$P_5(5) = C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$.

Зауваження 1. Якщо розглядати ймовірність $P_n(m)$ як функцію від m, то $P_n(m)$ за фіксованого n спочатку збільшується зі збільшенням m від 0 до деякого m_0, а потім зменшується зі збільшенням m від m_0 до n (m_0 називають *найбільш імовірною кількістю появи події* A).

Справді, з відношення

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-(m+1)}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}$$

маємо:

1) $P_n(m+1) > P_n(m)$, якщо $(n-m)p > (m+1)q$, тобто $m < (n+1)p - 1$;

2) $P_n(m+1) = P_n(m)$, якщо $m = (n+1)p - 1$;

3) $P_n(m+1) < P_n(m)$, якщо $m > (n+1)p - 1$. *Звідси, якщо $(n+1)p$ є цілим числом, то найбільш імовірними будуть числа $m_0 = (n+1)p$ та $m_0 - 1$; якщо ж $(n+1)p$ не є цілим числом, то $m_0 = [(n+1)p]$, тобто є цілою частиною числа $(n+1)p$.*

5.2. Формули наближених обчислень у схемі Бернуллі

Насамперед зазначимо, що події $B_m \ (m = 0, 1, 2, \ldots, n)$ з формули (5.2) попарно несумісні і в сумі дають вірогідну подію Ω. Тому має бути

$$\sum_{m=1}^{n} P(B_m) = \sum_{m=1}^{n} P_n(m) = P(\Omega) = 1.$$

Саме це маємо за формулою бінома Ньютона:

$$\sum_{m=1}^{n} P\left(B_m\right) = \sum_{m=1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = \left(p+q\right)^n = 1 \text{, оскільки } p+q=1 .$$

Формула Бернуллі описує розподіл імовірностей між можливими значеннями кількості наставань події A у n випробуваннях. Оскільки ймовірність $P_n\left(m\right)$ є членом розкладу бінома $\left(p+q\right)^n$, розподіл імовірностей такого типу називають *біномним розподілом*.

Схему незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може відбутися з однаковою ймовірністю p, ще називають *схемою Бернуллі*.

Для великих n обчислення за формулою Бернуллі стають громіздкими, тоді як для потреб практики необхідно обчислювати біномні ймовірності $P_n\left(m\right)$ або $P_n\left(m_1 \le m \le m_2\right)$ (імовірність того, що кількість «успіхів» лежить у межах від m_1 до m_2) саме для великих n. Ускладнення обчислювального характеру виникають також для малих p або q. У таких випадках часто користуються різними наближеними формулами для ймовірностей $P_n\left(m\right)$ і $P_n\left(m_1 \le m \le m_2\right)$, до розгляду яких ми й переходимо.

Теорема Пуассона. Нехай у схемі Бернуллі ймовірність «успіху» в кожному з n випробувань дорівнює $p=\dfrac{\lambda}{n}$, де $\lambda = \text{const}$, $0<\lambda<n$. Тоді $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (p\to 0)}} P_n(m) = \dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$ для будь-якого $m=0,1,2,\ldots$.

Доведення. За формулою Бернуллі

$$P_n\left(m\right) = \frac{n\left(n-1\right)\ldots\left(n-m+1\right)}{m!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Звідси для $n\to\infty$ дістаємо твердження теореми, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} .$$

На практиці теоремою Пуассона користуються у формі наближеної рівності

$$P_n\left(m\right) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad \lambda = np\,. \qquad (5.3)$$

Цією формулою зручно користуватись у разі великих n і значень p, близьких до нуля, тобто для тих подій, що трапляються рідко. Для порівняння точних [формула (5.2)] і наближених [формула (5.3)] значень імовірностей наведемо таку таблицю

	m	0	1	2	3	4	5
(5.2)	$P_{10}\left(m\right)$ $\left(p = 1/5\right)$	0,1074	0,2684	0,3020	0,2013	0,0880	0,0264
	$P_{100}\left(m\right)$ $\left(p = 1/50\right)$	0,1326	0,2707	0,2734	0,1823	0,0902	0,0353
(5.3)	$\lambda^m e^{-\lambda}/m!$ $\lambda = np = 2$	0,1353	0,2707	0,2707	0,1805	0,0902	0,0361

Бачимо, що для великих n і малих p похибка може бути досить малою. Формула (5.3) часто використовується для $n > 100$, $p < 0{,}1$ і $np < 10$.

Приклад 2. На підприємстві брак становить 1 % від загальної кількості виробів. Яка ймовірність, що з 500 навмання взятих виробів: а) жодного бракованого; б) рівно три бракованих?

Знайти ймовірність $P_{500}\left(m_0\right)$, де m_0 — найбільш імовірна кількість бракованих виробів.

Розв'язання

За умовою $p = 0{,}01,\ n = 500,\ \lambda = np = 5.$ Тому за формулою (5.3):

а) $P_{500}\left(0\right) \approx e^{-5} \approx 0{,}0067;$ б) $P_{500}\left(3\right) \approx \dfrac{5^3}{3!}e^{-5} \approx 0{,}1404.$

Оскільки $m_0 = \left[(n+1)p \right] = \left[(500+1)0,01 \right] = 5$ (див. зауваження 1), то $P_{500}(m_0) = P_{500}(5) \approx \frac{5^5}{5!} e^{-5} \approx 0,1755.$

Зауваження 2. Якщо малим є значення $q = 1 - p$, то пуассонівським наближенням користуються для кількості «невдач».

У разі, коли обидва параметри p і q помітно відрізняються від нуля, використовуються ***локальна*** та ***інтегральна теореми Муавра — Лапласа***. Ми не зупиняємося тут на точному формулюванні названих теорем, а наведемо лише ті наближені рівності, які є їх наслідками.

Уведемо функції

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Для цих функцій складені спеціальні таблиці (див. дод. 1).

Локальна теорема Муавра — Лапласа використовується на практиці для достатньо великих n у вигляді наближеної рівності

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m), \text{ де } x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{5.4}$$

Якщо значення p або q близьке до нуля, формула (5.4) може давати надто грубі наближення. У цьому разі слід користуватись формулою Пуассона (5.3).

Достатньо точні результати формула (5.4) дає для $p = q = \frac{1}{2}$.

Слід зазначити також, що m і n у формулі (5.4) не мають відрізнятись одне від одного надто сильно.

Наприклад, для $P_n(0)$ формула (5.4) дає погане наближення.

Наближена рівність, у формі якої застосовують на практиці інтегральну теорему Муавра — Лапласа, має вигляд

$$P_n\left(a \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le b \right) \approx \Phi(b) - \Phi(a). \tag{5.5}$$

Оскільки з нерівностей $m_1 \le m \le m_2$ випливають нерівності $\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, то формулу (5.5) можна записати у вигляді, зручному для обчислення ймовірності події $\{m_1 \le m \le m_2\}$, а саме

$$P_n\left(m_1 \le m \le m_2\right) \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right), \qquad (5.6)$$

де $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Якщо n не менше від кількох сотень, а p не дуже близьке до 0 або 1, то наближення (5.5), (5.6) є цілком задовільними.

Значення функцій $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$, як уже зазначалось, табульовані. Користуючись таблицями цих функцій, слід мати на увазі, що

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Доведемо другу з цих рівностей:

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \left| \begin{array}{c} \text{заміна} \\ u = -t \\ du = -dt \end{array} \right| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= 1 - \Phi(x).$$

Тут ми скористались інтегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}. \qquad (5.7)$$

Формула (5.5) дозволяє дати оцінку близькості відносної частоти та ймовірності події. Нехай p — імовірність настання події A у схемі Бернуллі, а m — загальна кількість «успіхів». Тоді $\frac{m}{n}$ є відносною частотою події A. Знайдемо ймовірність події $\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\}$, де $\varepsilon > 0$ — довільне число.

Якщо n достатньо велике, то за формулою (5.5)

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\approx$$

$$\approx\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1. \qquad (5.8)$$

Якщо перейти до границі для $n\to\infty$, то можна записати

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi(+\infty)-1=1. \qquad (5.9)$$

Тут ми знову скористались інтегралом Пуассона (5.7).

На основі рівності (5.9) можна ***стверджувати***, що яким би малим не було наперед задане число $\varepsilon>0$, за достатньо великої кількості випробувань з імовірністю як завгодно близькою до 1 відносна частота $\frac{m}{n}$ події відрізняється від імовірності p цієї події не більше ніж на ε. Сформульований результат носить назву *теореми Бернуллі*.

Теорема Бернуллі є математичним підтвердженням відомого з практики факту, що відносна частота події за великої кількості випробувань є близькою до ймовірності цієї події:

$$\frac{m}{n}\approx p. \qquad (5.10)$$

Однак тут необхідно дати певні пояснення. Насамперед зазначимо, що теорема Бернуллі не дає підстав стверджувати про існування границі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p$ у звичайному для нас розумінні, тому що не можна, наприклад, категорично заперечувати факт настання у всіх випробуваннях тільки «успіху» (у цьому разі $m=n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=1$) або тільки «невдачі» (тут $m=0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=0$). А якщо це так, то тоді виникає природне запитання, який же математичний зміст наближеної рівності (5.10)?

Відповідь на поставлене запитання саме і дає теорема Бернуллі, підкреслюючи насамперед імовірнісний характер цієї рівності і стверджуючи, що ймовірність її виконання з будь-якою наперед заданою точністю ε зі збільшенням кількості випробувань прямує до одиниці. Інакше кажучи за невеликої кількості випробувань відносна частота події є випадковою; у разі збільшення кількості випробувань вона стабілізується і наближається до невипадкового числа — імовірності події.

Наведемо кілька прикладів на використання наближених формул (5.4), (5.6) та (5.8).

Приклад 3. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться рівно 80 разів у 400 випробуваннях, якщо ймовірність її настання в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

Розв'язання

За умовою $n = 400$; $m = 80$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. Скористаємося формулою (5.4):

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \varphi(x) = \frac{1}{8}\varphi(x),$$

де

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0.$$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$ (див. дод. 1) знаходимо $\varphi(0) = 0,3989$.

Отже, $P_{400}(80) \approx \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986$. Формула Бернуллі (5.2) дає майже такий самий результат: $P_{400}(80) = 0,0498$.

Приклад 4. Імовірність випадання «герба» після кожного підкидання «неправильної» монети дорівнює $p = 0,75$. Знайти ймовірність того, що за 10 підкидань монети «герб» випаде рівно 8 разів.

Розв'язання

За умовою $n = 10$; $m = 8$; $p = 0,75$; $q = 0,25$. За наближеною формулою (5.4)

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \varphi(x) = 0,7301\, \varphi(x),$$

де

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = = \frac{8 - 10 \cdot 0,75}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0.25}} \approx 0,36 .$$

За таблицею $\varphi(0,36) = 0,3739$.

Отже,

$$P_{10}(8) \approx 0,7301 \cdot 0,3739 \approx 0,273 .$$

Формула Бернуллі (5.2) приводить до $P_{10}(8) = 0,282$. Розбіжність результатів пояснюється тим, що в даному прикладі n мале, а формула (5.4) дає добрі результати лише за достатньо великих n.

Приклад 5. Імовірність того, що деталь не буде перевірено, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей неперевірених буде від 70 до 100.

Розв'язання

За умовою $n = 400; \quad p = 0,2; \quad q = 0,8; \; m_1 = 70; \; m_2 = 100$.

Скористаємося формулою (5.6):

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25 ;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5 .$$

Отже,

$$P_{400}(70 \le m \le 100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) - 1 .$$

За таблицею (див. дод. 2) $\Phi(2,5) = 0,9938$, $\Phi(1,25) = 0,8944$.

Тому $P_{400}(70 \le m \le 100) \approx 0,8882$.

Приклад 6. Імовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що для випадково відібраних 400 деталей відносна частота нестандартних деталей буде відрізнятись від імовірності $p = 0,1$ не більше ніж на 0,03.

Розв'язання

За умовою $n = 400; \; p = 0,1; \; q = 0,9; \; \varepsilon = 0,03$. Скористаємося наближеною формулою (5.8):

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0,1\right|\le 0,03\right)\approx 2\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{400}{0,1\cdot 0,9}}\right)-1=2\Phi(2)-1 .$$

За таблицею $\Phi(2)=0,9772$. Отже, $2\Phi(2)-1=0,9544$.

Одержаний результат можна сформулювати в такій формі: якщо взяти достатньо велику кількість проб по 400 деталей у кожній, то майже в 95,44 % цих проб відхилення відносної частоти від імовірності $p=0,1$ не перевищить 0,03.

► *Задачі*

1. До магазину зайшли 8 покупців. Імовірність того, що покупець вийде з магазину з покупкою, дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що: а) три з них нічого не придбають; б) жоден із них нічого не придбає; в) хоча б один з них нічого не придбає.

2. По цілі здійснюється п'ять незалежних пострілів. Імовірність влучення в ціль за одного пострілу дорівнює 0,6. Для одержання заліку зі стрільби потрібно не менше від трьох влучень. Знайти ймовірність одержання заліку.

3. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Імовірність того, що деталь стандартна — 0,75. Знайти найбільш імовірну кількість деталей, які будуть визнані стандартними.

4. Батарея зробила 6 пострілів по об'єкту. Імовірність влучення в об'єкт за одного пострілу дорівнює 0,3. Знайти: а) найбільш імовірну кількість влучень; б) імовірність цієї кількості влучень; в) імовірність того, що об'єкт буде зруйновано, якщо для цього достатньо хоча б двох влучень.

5. Радіоапаратура складається з 1000 елементів. Імовірність відмови протягом доби для кожного елемента становить 0,003 і не залежить від стану інших елементів. Знайти ймовірність того, що відмовлять: а) рівно два елементи; б) менше від двох елементів.

6. Імовірність виготовлення виробу відмінної якості дорівнює 0,9. Виготовлено 15 виробів. Чому дорівнює найімовірніша кількість виробів відмінної якості та ймовірність такої кількості виробів?

7. Товарознавець проглядає 24 зразки товарів. Імовірність того, що кожний зі зразків буде визнано придатним до продажу, дорівнює 0,6. Знайти найімовірнішу кількість зразків, які товарознавець визнає придатними до продажу.

8. Два супротивники однакового рівня грають у шахи. Що ймовірніше виграти: а) одну партію з двох чи дві партії з чотирьох; б) не менше двох партій з чотирьох чи не менше від трьох партій з п'яти? Нічиї до уваги не беруться.

9. За якої кількості лотерейних білетів найімовірніша кількість виграшів дорівнює 16, якщо ймовірність виграшу для одного білета дорівнює 0,01?

10. Імовірність виробу виявитися бракованим дорівнює 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10 000 навмання відібраних виробів бракованих виявиться 40?

11. Імовірність проростання насіння пшениці дорівнює 95 %. Знайти ймовірність того, що з 2000 посіяних насінин кількість насіння, яке не проросте, буде між 80 та 120.

12. Імовірність випуску холодильника з дефектом дорівнює 0,08. Знайдіть імовірність того, що серед 1000 холодильників відхилення від даного відсотка браку не перевищить 0,01.

13. На привокзальній площі розташовано 10 крамничок. Імовірність бути відкритою для кожної з них дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що всі 10 крамничок будуть працювати одночасно.

14. Імовірність виграшу на білет грошово-речової лотереї дорівнює 0,1. Яка ймовірність, маючи 8 білетів, виграти хоча б на 2 білети?

15. Імовірність виготовлення бракованої деталі дорівнює 0,01. Визначте найімовірнішу кількість бракованих деталей серед 500 деталей та ймовірність такої кількості їх у партії.

16. Скільки потрібно зробити незалежних випробувань, щоб найімовірніша кількість появ певної події виявилася рівною 50, якщо ймовірність появи цієї події в одному випробуванні дорівнює 0,9?

17. Імовірність того, що вибрана навмання машина заїде на заправку, дорівнює 0,2. Знайдіть імовірність того, що серед 6 навмання вибраних машин жодна не заїде на заправку.

18. Імовірність влучення в мішень за одного пострілу дорівнює 0,4. Зроблено 6 незалежних пострілів. Знайти ймовірність хоча б одного влучення в мішень.

19. Технічна система складається з п'яти вузлів. Імовірність порушення режиму роботи кожного вузла протягом певного часу дорівнює 0,2. Система виходить з ладу, якщо порушення режиму роботи відбудуться не менше ніж у трьох вузлах. Знайдіть імовірність виходу з ладу цієї системи, якщо порушення режиму роботи для кожного вузла не залежить від стану роботи в інших вузлах.

20. Імовірність влучення в десятку за одного пострілу дорівнює 0,3. Скільки потрібно виконати незалежних пострілів, щоб імовірність хоча б одного влучення в десятку була більше 0,9?

21. Молокозавод відправив до крамниць 500 пакетів молока. Імовірність пошкодження пакета під час транспортування дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що під час транспортування буде пошкоджено пакетів: а) три; б) менше від трьох.

22. Досліджуються 400 проб руди. Імовірність відсутності промислового вмісту заліза у кожній пробі дорівнює 0,2. Знайдіть імовірність того, що кількість проб, які не мають промислового вмісту заліза, буде від 70 до 100.

23. Завод випускає 80 % продукції першого ґатунку. З імовірністю 0,9 знайти межі кількості першосортних виробів серед 2500 виготовлених.

24. В аеропорту за метеоумовами відкладається в середньому 10 % рейсів. Знайти ймовірність того, що серед 256 рейсів буде затримано не більше ніж 30 рейсів.

25. Відділ доставки піцерії одержує 80 % замовлень на фірмову піцу. Знайти ймовірність того, що серед 100 всіх замовлень на фірмову піцу буде рівно 65 замовлень.

26. Енергетична компанія обслуговує 800 споживачів електроенергії. Перебої в подаванні енергії протягом доби виникають з імовірністю 0,005. Яка ймовірність того, що протягом доби надійде не менше від чотирьох, але не більше від дев'яти повідомлень про перебої?

27. Завод випускає 75 % продукції першого ґатунку. Зі скількох виробів має складатися партія, щоб з імовірністю 0,96 можна було очікувати появу не менше ніж 285 виробів першого ґатунку?

28. У партії однотипних деталей стандартні становлять 82 %. Навмання беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних від 300 до 355?

29. Серед деталей 75 % стандартних. Навмання беруть 400 деталей. Яка ймовірність, що серед них 320 стандартних?

30. Скільки разів потрібно підкинути монету, щоб з імовірністю 0,6 можна було очікувати, що відхилення відносної частоти випадання «герба» від імовірності не перевищуватиме за абсолютним значенням 0,01?

Розділ II

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

6. ПОНЯТТЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

У проведенні більшості випадкових експериментів нас цікавить (і, як правило, реєструється) не сама елементарна подія, а деяка величина X (або ряд величин), що характеризує результат, наприклад, кількість «успіхів» у схемі Бернуллі, а не сама послідовність з «успіхів» і «невдач». Ця величина в результаті експерименту може набувати того чи іншого значення (але тільки одного), причому наперед, до експерименту, не відомо, якого саме. Подібні величини мають назву *випадкових*.

Оскільки в будь-якому разі результат випадкового експерименту визначається елементарною подією, то під випадковою величиною X природно розуміти деяку числову функцію елементарної події:

$$X = X(\omega), \quad \omega \in \Omega . \tag{6.1}$$

Випадкові величини далі позначатимемо великими літерами латинського алфавіту, тоді як їхні можливі значення — відповідними малими літерами, наприклад X, Y — випадкові величини, а x_i, y_i — їхні можливі значення.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Підкидається гральний кубик. Множиною елементарних подій є $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, де ω_i — випадання грані в i очок.

Нехай $X(\omega_i) = i$, тобто кожному підкиданню кубика ставиться у відповідність кількість очок, що випала після цього підкидання.

Приклад 2. Двічі підкидається монета. Множиною елементарних подій є $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$. Позначимо через X випадкову величину, яка дорівнює кількості випадань «герба». Тоді таблиця значень функції $X(\omega)$ матиме такий вигляд:

ω	ГГ	ГЦ	ЦГ	ЦЦ
$X(\omega)$	2	1	1	0

Приклад 3. Монета підкидається до першого випадання «герба». Тоді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, де $\omega_n = \underbrace{ЦЦ\ldots Ц}_{n-1}Г$ означає, що «герб» випав після n-го підкидання. Нехай $X(\omega_n) = n$ — кількість підкидань монети до першого випадання «герба». Можливі значення X — це всі натуральні числа.

Приклад 4. Проводиться n незалежних випробувань (схема Бернуллі). Елементарна подія — це деяка послідовність «успіхів» і «невдач» в n випробуваннях $\underbrace{УУНННУ\ldots У}_{n}$. Нехай X_n — кількість «успіхів» у серії з n випробувань. Можливими значеннями величини X_n є $0, 1, 2, \ldots, n$.

Приклад 5. У коло із центром у початку координат і радіусом R навмання кидають точку; $\Omega = \{\omega = (x, y) : x^2 + y^2 \le R^2\}$. Нехай $X(\omega) = \sqrt{x^2 + y^2}$ — відстань від точки попадання ω до центра кола. Можливі значення X — це точки відрізка $[0, R]$.

У наведених прикладах випадкова величина описана як функція елементарної події. Але задавання лише однієї функції недостатньо для повної характеристики випадкової величини. Необхідно ще мати змогу визначати ймовірності випадкових подій, пов'язаних із цією випадковою величиною, наприклад, подій:

$\{X = x\}$ — у результаті експерименту випадкова величина X набуде значення x;

$\{X < x\}$ — у результаті експерименту випадкова величина X набуде значення меншого від x;

$\{x_1 \le X < x_2\}$ — у результаті експерименту випадкова величина X набуде значення з проміжку $[x_1, x_2)$ тощо.

Тому виходимо з такого означення.

Означення 1. Довільна числова функція (6.1) називається *випадковою величиною*, якщо для неї виконується така умова:

для будь-якого дійсного числа *x* можна визначити ймовірність випадкової події $\{X < x\}$. (6.2)

Будемо позначати цю ймовірність $P\{X < x\}$.

Умова (6.2) дає змогу ввести функцію

$$F(x) = P\{X < x\}, \tag{6.3}$$

визначену на всій числовій осі.

Означення 2. Функція (6.3) називається *функцією розподілу* випадкової величини X.

Отже, в іншій інтерпретації означення 1 можна трактувати як вимогу існування для кожної випадкової величини X її функції розподілу $F(x)$.

Сформулюємо загальні ***властивості функції розподілу***:

Властивість 1. Значення функції розподілу належать відрізку $[0,1]$: $0 \le F(x) \le 1$.

Ця властивість випливає з означення функції розподілу і аксіом імовірності.

Властивість 2. $F(x)$ — неспадна функція, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$ для $x_2 > x_1$.

Справді, нехай $x_2 > x_1$. Розглянемо подію $C = \{X < x_2\}$. Її можна записати у вигляді суми двох несумісних подій, а саме $C = A + B$, де $A = \{X < x_1\}$, $B = \{x_1 \le X < x_2\}$. Тому

$$P(C) = P(A) + P(B) \text{ або } P\{X < x_2\} - P\{X < x_1\} = P\{x_1 \le X < x_2\}.$$

Згідно з означенням функції розподілу й аксіомами ймовірності

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \le X < x_2\} \ge 0.$$

Отже, $F(x_2) \ge F(x_1)$, що й потрібно було показати.

Властивість 3. Імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок $[x_1, x_2)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку:

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Ця властивість є наслідком доведення попередньої властивості.

Властивість 4. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (x_1, x_2), то $F(x) = 0$ для $x \le x_1$ і $F(x) = 1$ для $x \ge x_2$. Справді, якщо $x \le x_1$, то подія $\{X < x\}$ неможлива, і тому $F(x) = P\{X < x\} = 0$. Якщо ж $x \ge x_2$, то подія $\{X < x\}$ є вірогідною, і тому $F(x) = P\{X < x\} = 1$.

Очевидним наслідком даної властивості є така властивість.

Властивість 5.

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

З теореми про неперервність імовірності (див. п. 2.3) і властивості 3 випливає, що

$$P\{X = x\} = \lim_{n \to \infty} P\left\{x \le X < x + \frac{1}{n}\right\} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) = F(x+0) - F(x), \tag{6.4}$$

де $F(x+0)$ — права границя.

Властивість 6. $F(x)$ неперервна ліворуч, тобто

$$F(x-0) = F(x) \tag{6.5}$$

для будь-якого x, де $F(x-0)$ — ліва границя.

Доведення. Розглянемо послідовність чисел $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < x$, таку що $x_n \to x$ для $n \to \infty$.

Тоді

$$\{X < x\} = \{X < x_0\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{x_{k-1} \le X < x_k\},$$

де події $\{X < x_0\}$, $\{x_{k-1} \le X < x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — попарно несумісні.

Згідно з розширеною аксіомою додавання (див. п. 2.3) і властивістю 3 функції $F(x)$ дістаємо

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{X < x_0\} + \sum_{k=1}^{\infty} P\{x_{k-1} \le X < x_k\} =$$

$$= F(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[F(x_k) - F(x_{k-1})\right] = F(x_0) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[F(x_k) - F(x_{k-1})\right] =$$

$$= F(x_0) + \lim_{n\to\infty}\left[F(x_n) - F(x_0)\right] = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Звідси дістаємо рівність (6.5).

Отже, функція розподілу $F(x)$ випадкової величини є неспадною, неперервною ліворуч і задовольняє умови $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Виявляється, що справедливе й обернене твердження, а саме — будь-яка неспадна, неперервна ліворуч функція $F(x)$, яка задовольняє умови $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$, є функцією розподілу деякої випадкової величини.

Якщо задано функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X, то кажуть, що задано закон розподілу випадкової величини у формі функції розподілу. На практиці зустрічаються випадкові величини в основному двох типів — *дискретні* та *неперервні*, які допускають більш зручну форму закону розподілу.

6.1. Дискретні випадкові величини

Якщо множина елементарних подій Ω ***дискретна***, як у прикладах 1–4, то завжди можна сказати, з якою ймовірністю функція $X(\omega)$ набуває своїх значень. Так, у першому прикладі $P\{X = i\} = 1/6$, $i = 1, 2, \dots, 6$. У другому прикладі $P\{X = 2\} = 1/4$; $P\{X = 1\} = 1/2$; $P\{X = 0\} = 1/4$. Для третього прикладу $P\{X = n\} = \dfrac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Для четвертого прикладу $P\{X_n = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$. Зокрема, у випадку ***дис-***

кретних множин Ω завжди можна знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з деякого скінченного чи нескінченного числового проміжку, наприклад, імовірність $P\{X < x\}$, де x — довільне дійсне число. Так, у другому прикладі

$$P\{X<2\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=3/4.$$

Тому у ***випадку дискретних множин*** Ω умова (6.2) завжди виконується, і довільну числову функцію (6.1) можна назвати випадковою величиною. Очевидно, що множина можливих значень $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ такої функції — дискретна (скінченна або зчисленна). Подібні випадкові величини називаються *дискретними* і вважаються повністю описаними з імовірнісного погляду, якщо задані ймовірності їхніх можливих значень

$$P\{X = x_i\} = p_i,\ i = 1, 2, \ldots\ . \tag{6.6}$$

Оскільки події $\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ утворюють повну групу подій, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ (якщо X набуває скінченної кількості значень, ця сума містить скінченну кількість доданків).

Розподіл імовірностей (6.6) називається *законом розподілу дискретної випадкової величини* (ДВВ).

Приклад 6. З коробки, в якій M білих та $N-M$ чорних кульок, навмання виймають n кульок $\left(n \le \min\{M, N-M\}\right)$. Побудувати закон розподілу випадкової величини X — кількості білих кульок з-поміж n вийнятих.

Розв'язання

За елементарні події у даному експерименті візьмемо n-елементні набори кульок із множини, що містить N кульок. Кількість елементарних подій дорівнює C_N^n. Елементарні події, які сприяють події $\{X = m\}$ $\left(m = 0, 1, \ldots, n\right)$ — це набори з m білих та $n-m$ чорних кульок; m білих кульок можна взяти C_M^m способами, після цього $n-m$ чорних кульок — C_{N-M}^{n-m} способами. Згідно з основним принципом комбінаторики кількість елементарних подій, які сприяють події $\{X = m\}$, дорівнює $C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}$.

За формулою класичної ймовірності дістаємо

$$P\{X=m\}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m=0,1,\ldots,n.$$

Закон розподілу дискретної випадкової величини зручно подавати у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

яку ще називають *рядом розподілу*.

Приклад 7. Запишемо закон розподілу випадкової величини з прикладу 6 у вигляді ряду розподілу.

m	0	1	…	n
$P\{X=m\}$	$\frac{C_M^0\, C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1\, C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^n\, C_{N-M}^0}{C_N^n}$

Якщо ряд розподілу дискретної випадкової величини відомий, то завжди можна побудувати функцію розподілу, і навпаки, за заданою функцією розподілу завжди можна записати ряд розподілу [див. формулу (6.4)]. Нехай є ряд розподілу деякої дискретної випадкової величини. Тоді для функції розподілу можна записати $F(x)=P\{X<x\}=\sum\limits_{x_i<x} P\{X=x_i\}$, де підсумовування поширюється на ті індекси i, для яких $x_i<x$.

Приклад 8. Виконуються три незалежних постріли в ціль. Імовірність влучення в ціль від кожного пострілу дорівнює 0,4. Побудувати функцію розподілу кількості влучень у ціль.

Розв'язання

Нехай X — кількість влучень. Можливими значеннями випадкової величини X є:

$$x_1=0, \quad x_2=1, \quad x_3=2, \quad x_4=3.$$

Імовірності можливих значень знаходимо за формулою Бернуллі:

$P\{X=x_i\}=C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$, де $n=3$;

$P\{X=0\}=C_3^0 p^0 q^{3-0}=1\cdot 1\cdot (1-0,4)^3=0,216;$

$P\{X=1\}=C_3^1 p^1 q^2=3\cdot 0,4\cdot 0,6^2=0,432;$

$P\{X=2\}=C_3^2p^2q^1=3\cdot 0,4^2\cdot 0,6=0,288;$

$P\{X=3\}=C_3^3p^3q^0=1\cdot 0,4^3\cdot 1=0,064.$

Отже, маємо ряд розподілу випадкової величини:

x_i	0	1	2	3
$P\{X=x_i\}$	0,216	0,432	0,288	0,064

Побудуємо функцію розподілу $F(x)=\sum\limits_{x_i<x}P\{X=x_i\}$.

Для $x\le 0$: $F(x)=\sum\limits_{x_i<0}P\{X=x_i\}=0$.

Для $0<x\le 1$: $F(x)=\sum\limits_{x_i<1}P\{X=x_i\}=P\{X=0\}=0,216$.

Для $1<x\le 2$:

$$F(x)=\sum_{x_i<2}P\{X=x_i\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=0,216+0,432=0,648.$$

Для $1<x\le 3$:

$$F(x)=\sum_{x_i<3}P\{X=x_i\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=0,936.$$

Для $x>3$:

$$F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=1.$$

Графік функції розподілу зображено на рис. 6.1.

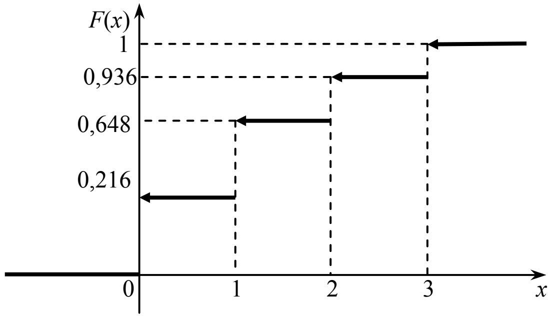


Рис. 6.1

6.2. Неперервні випадкові величини

Умова (6.2) є суттєвою у разі коли множина елементарних подій Ω випадкового експерименту неперервна (як у прикладі 5) і значення функції (6.1) неперервно заповнюють скінченний або нескінченний числовий проміжок.

Під ***неперервною випадковою величиною*** будемо розуміти таку випадкову величину, ***функція розподілу*** $F(x)$ ***якої є неперервною скрізь і диференційовною, за винятком, можливо, скінченної кількості точок***.

Із цього означення випливає, що ймовірність усякого окремого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю, тобто якщо X — неперервна випадкова величина, то $P\{X = x\} = 0$.

Справді, для неперервної випадкової величини $P\{X = x\} = F(x+0) - F(x) = 0$ [див. формулу (6.4)].

Звідси, зокрема, випливає, що для неперервних випадкових величин $P\{x_1 \le X < x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{x_1 \le X \le x_2\}$, тобто ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини у проміжок не залежить від того, відкритий цей проміжок, замкнений чи напіввідкритий.

Зазначимо, що рівність нулю ймовірності, з якою ***неперервна*** випадкова величина набуває своїх значень, зовсім не означає, що ці події є неможливими. Навпаки, саме ці події спостерігаються в експерименті. Якщо подія неможлива, то її ймовірність дорівнює нулю, це правильно. Обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне, тобто з того, що ймовірність деякої події дорівнює нулю, ще не випливає, що ця подія є неможливою. Неперервна випадкова величина, набуваючи конкретних значень під час кожного повторення експерименту, саме й реалізує події, імовірності яких дорівнюють нулю і які водночас є можливими. Ніякого парадоксу в цьому немає, якщо цікавитись не ймовірностями елементарних подій, тобто ймовірностями окремих значень неперервної випадкової величини, а *ймовірностями її попадання в окремі інтервали*. Для формування ймовірнісної моделі задаються саме ці останні ймовірності, а не ймовірності «попасти в точку».

Ураховуючи наведені раніше властивості, функцію розподілу неперервної випадкової величини можна схематично зобразити у вигляді рис. 6.2.

Розглянемо неперервну випадкову величину X з функцією розподілу $F(x)$, яку будемо вважати не тільки неперервною, але й диференційовною в точці x.

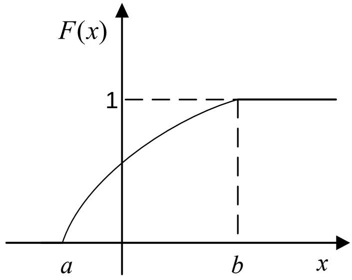


Рис. 6.2

Знайдемо ймовірність попадання величини X в інтервал $\left(x, x+\Delta x\right)$:

$$P\left\{x < X < x+\Delta x\right\} = F\left(x+\Delta x\right) - F\left(x\right).$$

Складемо відношення цієї ймовірності до довжини інтервалу Δx, тобто вираз для середньої ймовірності на інтервалі, і перейдемо до границі для $\Delta x \to 0$.

У результаті дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left\{x < X < x+\Delta x\right\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F\left(x+\Delta x\right) - F\left(x\right)}{\Delta x} = F'\left(x\right).$$

Позначимо $f\left(x\right) = F'\left(x\right)$. Функцію $f\left(x\right)$ називають *щільністю розподілу ймовірностей* неперервної випадкової величини X. Ще її називають *диференціальною функцією розподілу,* або *диференціальним законом розподілу*.

Щільність $f\left(x\right)$ є однією з найважливіших розрахункових функцій у теорії ймовірностей. Якщо за умови інтегровності функції $f\left(x\right)$ проінтегрувати рівність $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$ у межах від $-\infty$ до x, то матимемо

$$F\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(u\right)\, du. \tag{6.7}$$

Для ймовірності попадання випадкової величини у заданий інтервал $\left(x_1, x_2\right)$ можна записати

$$P\left\{x_1 < X < x_2\right\} = F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right) = \int_{x_1}^{x_2} f\left(u\right)\, du.$$

З означення функції $f\left(x\right)$ випливають такі властивості:

Властивість 1. $f\left(x\right) \geq 0$. Ця властивість є наслідком того, що функція розподілу $F\left(x\right)$ є неспадною функцією.

Властивість 2. $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\, dx = 1$. Справді,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\, dx = F\left(+\infty\right) - F\left(-\infty\right) = 1 - 0 = 1.$$

Властивість 2 має назву *умова нормування функції* $f(x)$ і є узагальненням властивості $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ для дискретного розподілу ймовірностей. Геометрично вона означає, що площа фігури, обмеженої графіком функції $f(x)$ і віссю Ox, дорівнює 1.

Приклад 9 (*рівномірний розподіл*). Випадкова величина називається *рівномірно розподіленою* на відрізку $[a,b]$, якщо щільність розподілу $f(x)$ на цьому відрізку стала, а за його межами дорівнює нулю.

Знайти функції $f(x)$ та $F(x)$ для такої випадкової величини.

Розв'язання

З умови маємо, що $f(x)=0$ для $-\infty < x < a$, $b < x < \infty$ і $f(x) = C = \text{const}$ для $a \le x \le b$. Величину C знаходимо з умови нормування $f(x)$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx = C(b-a).$$

Звідси $C = \dfrac{1}{b-a}$.

Отже, для щільності ***рівномірного розподілу*** ймовірностей маємо:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Скориставшись формулою (6.7), знаходимо функцію рівномірного розподілу (*інтегральну* функцію рівномірного розподілу)

$$F(x)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{x}0\cdot du=0, & x\le a,\\ \int\limits_{-\infty}^{x}f(u)du=\int\limits_{-\infty}^{a}0\cdot du+\int\limits_{a}^{x}Cdu=\dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ \int\limits_{-\infty}^{x}f(u)du=\int\limits_{-\infty}^{a}0\cdot du+\int\limits_{a}^{b}Cdu+\int\limits_{b}^{x}0\cdot du=\dfrac{b-a}{b-a}=1, & x>b.\end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ для рівномірного розподілу показано на рис. 6.3.

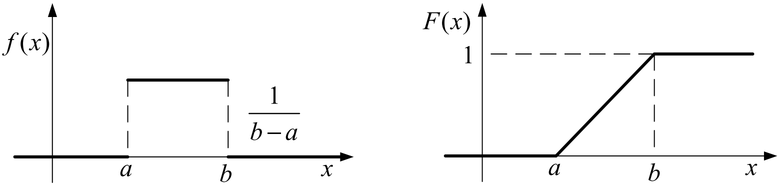


Рис. 6.3

Приклад 10. Випадкова величина X розподілена за законом

$$f(x)=\begin{cases}a\ \sin x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & x<0 \text{ або } x>\pi.\end{cases}$$

Необхідно: 1) знайти коефіцієнт a; 2) побудувати графік щільності розподілу; 3) знайти ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання

1) Коефіцієнт a знаходимо з умови нормування:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{\pi}a\sin x dx+\int\limits_{\pi}^{+\infty}0dx=-a\cos x\Big|_0^{\pi}=2a=1.$$

Отже, $a=\dfrac{1}{2}$.

2) Графік щільності розподілу показано на рис. 6.4.

3) Знаходимо ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$:

$$P\left\{0 < X < \frac{\pi}{4}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \approx 0{,}15 .$$

Ця ймовірність дорівнює площі фігури, заштрихованої на рис. 6.4.

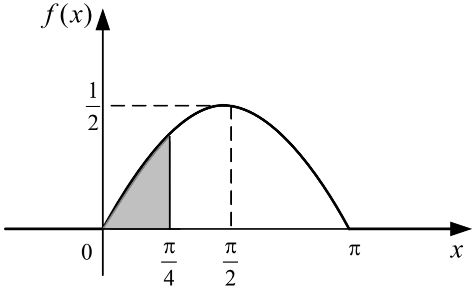


Рис. 6.4

► *Задачі*

1. Маємо n ламп, кожна з яких з імовірністю p є якісною. Лампа вгвинчується в прилад, і вмикається струм. Після вмикання струму дефектна лампа одразу виходить з ладу, після чого замінюється іншою. Розглядається випадкова величина X — кількість випробуваних ламп. Побудувати її ряд розподілу:

а) $n = 5;\ p = 0{,}9$; б) $n = 4;\ p = 0{,}7$.

2. Випробовується пристрій, який складається з трьох незалежно працюючих приладів. Імовірності відмови приладів p_1, p_2, p_3 . Розглядається випадкова величина X — кількість приладів, які вийшли з ладу. Побудувати її ряд розподілу:

а) $p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}3;$ б) $p_1 = 0{,}2; p_2 = 0{,}3; p_3 = 0{,}4$.

3. У коробці є k білих та n чорних кульок. Дві кульки навмання виймають з коробки. Розглядається випадкова величина X — кількість вийнятих білих кульок. Побудувати її ряд розподілу:

а) $k = 3; n = 5$; б) $k = 4; n = 6$.

4. Правильний гральний кубик підкидається n разів. Розглядається випадкова величина X — кількість підкидань, у кожному з яких з'являється не менше п'яти очок. Побудувати її ряд розподілу:

а) $n = 3$; б) $n = 4$.

5. Симетрична монета підкидається n разів. Розглядається випадкова величина X — кількість випадань «герба». Побудувати її ряд розподілу:

а) $n=4$; б) $n=5$.

6. Випадкова величина X має функцію розподілу $F(x)$. Знайти ймовірність попадання X в інтервал (α,β) та щільність розподілу $f(x)$. Побудувати графіки функції $F(x)$ та $f(x)$:

а) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\le 0,\\ x^2 & \text{для } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{для } x>1;\end{cases}$ $\alpha=-1;\ \beta=1.$

б) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\le 1,\\ \dfrac{x^2-x}{2} & \text{для } 1<x\le 2,\\ 1 & \text{для } x>2;\end{cases}$ $\alpha=-1;\ \beta=1,5.$

в) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\le 2,\\ \dfrac{9\left(x^2-4\right)}{5x^2} & \text{для } 2<x\le 3,\\ 1 & \text{для } x>3;\end{cases}$ $\alpha=0;\ \beta=2,5.$

г) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\le 2,\\ 2-\dfrac{4}{x} & \text{для } 2<x\le 4,\\ 1 & \text{для } x>4;\end{cases}$ $\alpha=2;\ \beta=3.$

ґ) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\le 0,\\ \sqrt{x} & \text{для } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{для } x>1;\end{cases}$ $\alpha=0;\ \beta=0,5.$

д) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{16} & \text{для } 0<x\le 4,\\ 1 & \text{для } x>4;\end{cases}$ $\alpha=0;\ \beta=1.$

е) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\le 0,\\ x^3 & \text{для } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{для } x>1;\end{cases}$ є) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\le 0,\\ \dfrac{x^2+x}{2} & \text{для } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{для } x>1;\end{cases}$

$\alpha=0,5;\ \beta=1.$ $\alpha=0,2;\ \beta=1.$

ж) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\le 0,\\ \sqrt[3]{x^2} & \text{для } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{для } x>1;\end{cases}$ з) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\le 0,\\ 3x^2+2x & \text{для } 0<x\le \dfrac{1}{3},\\ 1 & \text{для } x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

$\alpha=-1;\ \beta=0,5.$ $\alpha=-2;\ \beta=0,25.$

7. Знайти сталу k за заданим виглядом розподілу дискретної випадкової величини X:

а) $P\{X=i\}=\dfrac{k}{i+1},\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3;$ б) $P\{X=i\}=\dfrac{k}{i},\ i=1,\ 2,\ 3.$

8. Випадкову величину X задано щільністю $f(x)$. Знайти сталу a:

а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{a}{\cos^2 x}, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1;\end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{1+x^2};$ г) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ae^{-2x}, & x>0.\end{cases}$

9. Випадкову величину X задано функцією розподілу $F(x)$. Знайти сталу a:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^3, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^2, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$

10. Поточна ціна акції X (грн) є випадковою величиною з функцією розподілу $F(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $x>0$. Знайти ймовірність того, що ціна акції не перевищить 4 грн.

11. Кількість угод, укладених на фондовій біржі за квартал, є дискретною випадковою величиною X із законом розподілу

x_i	0	1	2	3
p_i	0,4	0,4	0,15	0,05

Знайти ймовірність того, що за квартал буде укладено не більше від двох угод.

7. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. НОРМАЛЬНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ

7.1. Числові характеристики випадкових величин

Для розв'язання багатьох практичних задач теорії ймовірностей буває достатньо знати лише деякі суттєві риси розподілу випадкової величини, наприклад, деяке середнє значення, навколо якого групуються можливі значення випадкової величини; деяке число, яке характеризує рівень «розсіювання» цих значень навколо середнього значення тощо. У таких випадках користуються числовими характеристиками випадкової величини.

Зупинимося на таких важливих поняттях, як початкові та центральні моменти.

Початковий момент α_r ***порядку*** r обчислюється за формулою

$$\alpha_r = \begin{cases} \sum_i x_i^r p_i & \text{— для дискретної випадкової величини,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx & \text{— для неперервної випадкової величини.} \end{cases} \quad (7.1)$$

Величина r може набувати значення 0, 1, 2, … . Підсумовування у випадку дискретної випадкової величини проводиться за всіма її значеннями. Як видно, початковий момент будь-якого порядку повністю визначається рядом розподілу (x_i, p_i) для дискретної випадкової величини і щільністю розподілу $f(x)$ — для неперервної випадкової величини, якщо сума та інтеграл у формулі (7.1) збігаються абсолютно. Остання умова може і не виконуватись. Тоді кажуть, що початкового моменту не існує.

Особливо важливе значення має початковий момент першого порядку, який називається *математичним сподіванням* і позначається $M[X]$ або m_x:

$$m_x = M[X] = \alpha_1 = \begin{cases} \sum_i x_i p_i & \text{— для дискретної випадкової величини,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{— для неперервної випадкової величини.} \end{cases} \quad (7.2)$$

Зауваження 1. Очевидно, що будь-який степінь X^r випадкової величини X сам є випадковою величиною. Нехай X — дискретна випадкова величина з рядом розподілу (x_i, p_i). Набір пар (x_i^r, p_i), взагалі кажучи, не є рядом розподілу дискретної випадкової величини X^r. Наприклад, для парних r різним можливим значенням x_i та $x_j = -x_i$ випадкової величини X відповідає те саме значення $x_i^r = x_j^r$ випадкової величини X^r, а тому ймовірності p_i та p_j мають додаватись. Проте це ніяк не впливає на суму $\sum_i x_i^r p_i$ із рівняння (7.1), яка є ні чим іншим, як математичним сподіванням випадкової величини X^r, тобто сумою добутків можливих значень цієї величини (з урахуванням їх кратності) на ймовірності цих значень. Те саме можна сказати і про інтеграл з формули (7.1), якщо замість p_i розглянути елемент імовірності $f(x)dx$, а суму замінити на інтеграл. Отже, початковий момент порядку r випадкової величини X можна ще означити як математичне сподівання випадкової величини X^r, тобто $\alpha_r[X] = M[X^r]$.

Математичне сподівання випадкової величини X пов'язане своєрідною залежністю із ***середнім арифметичним*** значенням цієї величини за великої кількості експериментів. Ця залежність такого самого типу, як і залежність між частотою та ймовірністю, а саме зі збільшенням кількості експериментів середнє арифметичне значення випадкової величини «наближається до її математичного сподівання».

Зазначимо, що математичне сподівання існує не для всіх випадкових величин; для його існування необхідно, щоб ряд та інтеграл у формулі (7.2) збігались, причому абсолютно.

Іншим типом числових характеристик випадкової величини є центральні моменти.

Центральним моментом порядку r називається число β_r, яке обраховується за формулою

$$\beta_r = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - m_x)^r p_i & \text{— для дискретної випадкової величини,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^r f(x)\,dx & \text{— для неперервної випадкової величини.} \end{cases}$$

Найбільше застосування має центральний момент другого порядку, який називається *дисперсією*. Для дисперсії вводиться спеціальне позначення $D[X]$:

$$D[X] = \beta_2 = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - m_x)^2 p_i & \text{— для дискретної випадкової величини,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx & \text{— для неперервної випадкової величини.} \end{cases}$$

Дисперсія випадкової величини є мірою «розсіювання» цієї величини навколо її математичного сподівання. Справді, якщо випадкова величина постійно дорівнює своєму математичному сподіванню (взагалі кажучи, у цьому разі величина не є випадковою), то $D[X] = 0$, оскільки $x_i = m_x$. Якщо ж випадкова величина не завжди дорівнює математичному сподіванню m_x, то вираз $\sum\limits_i (x_i - m_x)^2 p_i$ відмінний від нуля. Ця відмінність за незмінних p_i, очевидно, тим більша, чим більше відхилення x_i від m_x, тобто чим далі розміщуються одна від одної точки на числовій прямій, яким відповідають значення x_i та m_x. Отже, зі збільшенням відхилення значень x_i від m_x дисперсія зростає.

Дисперсія випадкової величини має розмірність квадрата випадкової величини. Для більшої наочності характеристики розсіювання зручніше користуватись величиною, розмірність якої збігається з розмірністю випадкової величини. Для цього з дисперсії добувають квадратний корінь. Величину, що виходить, називають *середнім квадратичним*, або *стандартним*, *відхиленням* випадкової величини X від її математичного сподівання. Позначають цю величину σ_x:

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}.$$

Уведемо випадкову величину $\overset{\circ}{X} = X - m_x$. Вона називається або *центрованою випадковою величиною*, або *відхиленням* X *від математичного сподівання*.

Існує співвідношення

$$\beta_r[X] = \alpha_r\left[\overset{\circ}{X}\right],$$

тобто центральний момент випадкової величини X дорівнює початковому моменту того самого порядку центрованої випадкової величини. Зокрема, $D[X] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right]$, тобто дисперсія випадкової величини X дорівнює математичному сподіванню квадрата відповідної центрованої випадкової величини.

Доведено, що вся сукупність початкових (або центральних) моментів цілком визначає функцію розподілу випадкової величини. Тому вся сукупність моментів повністю описує й усі властивості випадкової величини, тоді як кожен окремий момент характеризує яку-небудь одну властивість цієї величини.

Виведемо формулу, яка пов'язує значення дисперсії і математичного сподівання. Для цього введемо додаткову випадкову величину X^2. Нехай X — неперервна випадкова величина. Тоді

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-2m_x\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx+$$

$$+m_x^2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=M\left[X^2\right]-2M[X]\cdot M[X]+M^2[X]=$$

$$=M\left[X^2\right]-M^2[X].$$

Отже,

$$D[X]=M\left[X^2\right]-M^2[X]. \tag{7.3}$$

Рівність (7.3) справедлива і для дискретної випадкової величини.

Математичне сподівання та дисперсія — числові характеристики випадкової величини, які найчастіше використовуються. Вони характеризують найважливіші риси розподілу: його положення та рівень розсіювання. Для більш ґрунтовного опису розподілу застосовуються моменти вищих порядків.

Приклад 1. Фірма може одержати кредит у кожному з трьох банків з імовірностями відповідно 0,5; 0,6; 0,7. Банки надають кредити незалежно один від одного. Розглядається випадкова величина X — кількість одержаних фірмою кредитів. Побудувати її закон розподілу та знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання

Для побудови закону розподілу скористаємось результатами розв'язання прикладу 6 з п. 4.1. Дістаємо

x_i	0	1	2	3
p_i	0,06	0,29	0,44	0,21

Знаходимо математичне сподівання:

$$m_x=\sum_i x_i p_i=0\cdot 0,06+1\cdot 0,29+2\cdot 0,44+3\cdot 0,21=1,8.$$

Знаходимо дисперсію, скориставшись формулою (7.3):

$$D[X]=\sum_i x_i^2 p_i-(m_x)^2=0^2\cdot 0,06+1^2\cdot 0,29+2^2\cdot 0,44+3^2\cdot 0,21-$$

$$-(1,8)^2=0,7.$$

Для середнього квадратичного відхилення дістаємо

$$\sigma_x=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0,7}\approx 0,84.$$

Приклад 2. Випадкову величину задано щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання

Знайдемо математичне сподівання:

$$m_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xd(\sin x)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx\right]=\frac{1}{2}\left[x\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]=0;$$

$$D[X]=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos xdx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2d(\sin x)=\frac{1}{2}\left[x^2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin xdx\right]=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=\frac{\pi^2}{4}-2\text{, оскільки }\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xd(\cos x)=$$

$$=-\left[x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\right]=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2;$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2-8}.$$

7.2. Нормальний закон розподілу випадкової величини

Нормальний закон розподілу (НЗР), який ще називають *розподілом Гаусса*, відіграє вкрай важливу роль у теорії ймовірностей, посідає серед інших законів розподілу особливе місце і найчастіше зустрічається на практиці.

Щільність розподілу ймовірностей для НЗР залежить від двох параметрів m і σ і має вигляд

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty,\ \sigma>0. \tag{7.4}$$

Легко перевірити, що умова нормування виконується:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{c}\text{Зробимо заміну:}\\ \frac{x-m}{\sigma}=t;\quad dx=\sigma dt\ \left(*\right)\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1.$$

Тут ми скористались інтегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}. \tag{7.5}$$

Крива розподілу за нормальним законом має симетричний горбоподібний вигляд (*крива Гаусса*) (рис. 7.1). Цю криву ще називають *нормальною кривою*.

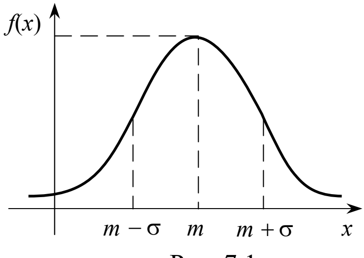


Рис. 7.1

Покажемо, що математичне сподівання для НЗР дорівнює m:

$$M\left[X\right]=m_x=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x\right)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{c}\text{Зробимо заміну }\left(*\right)\\ x=\sigma t+m\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma t+m\right)e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=m,$$

оскільки перший інтеграл дорівнює нулю, бо підінтегральна функція непарна, а другий інтеграл є інтегралом Пуассона (7.5).

Знайдемо дисперсію для НЗР:

$$D[X]=\sigma_x^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{Зробимо заміну}\\ (*)\end{array}\right|=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\,dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Інтегрування частинами:}\\ \quad t=u,\quad dt=du\\ te^{-\frac{t^2}{2}}=dv,\ \ v=-e^{-\frac{t^2}{2}}\end{array}\right|=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2 .$$

Тут ми скористались тим, що $\lim\limits_{t\to\pm\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}=0$.

Отже, дисперсія випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом з параметрами m та σ, дорівнює σ^2, тобто параметр σ є середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X:

$$\sigma_x=\sqrt{D[X]}=\sigma .$$

Якщо $m=0,\ \sigma=1$, то НЗР називається *нормованим* і позначається $N(0,1)$. Щільність розподілу (7.4) при $m=0,\ \sigma=1$ називають *нормованою* і позначають через $\varphi(x)$ (див. п. 5.2):

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Для цієї функції складені таблиці (дод. 1, табл. Д1.2). У загальному випадку нормальний розподіл з параметрами m,σ позначається $N(m,\sigma)$.

Розглянемо ***нормований*** розподіл $N(0,1)$. Функція розподілу для нього має вигляд:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (7.6)$$

Для функції $\Phi(x)$ складені таблиці (див. дод. 1, табл. Д1.1).

Через функцію (7.6) можна виразити ***функцію розподілу*** для НЗР $N(m,\sigma)$:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{matrix}\text{Заміна}\\(*)\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Знайдемо ймовірність попадання випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом $N(m,\sigma)$, в інтервал $\alpha<x<\beta$:

$$P\{\alpha<X<\beta\}=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

Функція $\Phi(x)$ (7.6) має всі властивості функції розподілу, які доведені у підрозд. 6. Нагадаємо лише, що

$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ (див. п. 5.2).

Знайдемо ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини в інтервал, симетричний відносно математичного сподівання:

$$P\{|X-m|<\varepsilon\}=P\{m-\varepsilon<X<m+\varepsilon\}=\Phi\left(\frac{m+\varepsilon-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{m-\varepsilon-m}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-1.$$

Отже,

$$P\{|X-m|<\varepsilon\}=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-1. \qquad (7.7)$$

Якщо $\varepsilon=3\sigma$, то $P\{|X-m|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0{,}997$. Звідси випливає, що подія $\{m-3\sigma<X<m+3\sigma\}$ є практично вірогідною, тобто можливі значення випадкової величини X, розподіленої за законом $N(m,\sigma)$, розміщуються майже вірогідно на відрізку $[m-3\sigma, m+3\sigma]$. Цей факт має назву *правило трьох сигм*. Це правило дає можливість за відомим середнім квадратичним відхилен-

ням і математичним сподіванням випадкової величини, розподіленої за законом $N(m, \sigma)$, зазначити інтервал її практично можливих значень. Зауважимо, що поряд з функцією $\Phi(x)$ (7.6) часто використовується функція Лапласа (інтеграл імовірностей)

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Рекомендуємо показати **самостійно**, що справедливі такі співвідношення:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x); \; F(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right);$$

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi_0\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right);$$

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x); \; P\{|X - m| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Крім того, $\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}; \quad \Phi_0(-\infty) = -\frac{1}{2}; \quad \Phi_0(0) = 0$.

Приклад 1. Прилад для вимірювання деякої величини працює без систематичних похибок (це означає, що математичне сподівання випадкової величини — похибки вимірювання — дорівнює нулю).

Відомо, що похибка вимірювання розподілена за нормальним законом. Нехай її середнє квадратичне відхилення (ще кажуть *стандартне* відхилення) дорівнює $\sigma = 10$ од. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде проведено з похибкою, яка не перевищує за абсолютною величиною: а) 10 од.; б) 20 од.; в) 30 од.

Розв'язання

За формулою (7.7):

а) $P\{|X| < 10\} = 2\Phi\left(\frac{10}{10}\right) - 1 = 2\Phi(1) - 1 = 0{,}6826$, оскільки за таблицею $\Phi(1) = 0{,}8413$;

б) $P\{|X| < 20\} = 2\Phi\left(\frac{20}{10}\right) - 1 = 2\Phi(2) - 1 = 0{,}9544$; $\Phi(2) = 0{,}9772$;

в) $P\{|X|<30\}=2\Phi\left(\frac{30}{10}\right)-1=2\Phi(3)-1=0,9974$; $\Phi(3)=0,9987$.

Приклад 2. Деталь виготовляється на верстаті. Довжина X цієї деталі є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом із середнім значенням 20 см і середнім квадратичним відхиленням 0,2 см. Знайти ймовірність того, що відхилення довжини деталі у той чи інший бік не перевищить 0,3 см.

Розв'язання

Скористаємося формулою (7.7). У нашому випадку $m=20$, $\sigma=0,2,\ \varepsilon=0,3$. Тому

$$P\{|X-20|<0,3\}=2\Phi\left(\frac{0,3}{0,2}\right)-1=2\Phi(1,5)-1=0,8664,$$

оскільки за таблицею $\Phi(1,5)=0,9332$. Отже, приблизно 87 % всіх деталей, виготовлених на верстаті, будуть мати довжину між 19,7 і 20,3 см. Інші 13 % деталей матимуть більші відхилення довжини від середнього значення.

Приклад 3. В умовах попередньої задачі знайти, яку точність довжини деталі можна гарантувати з імовірністю 0,95.

Розв'язання

Розв'яжемо рівняння

$$P\{|X-20|<\varepsilon\}=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,2}\right)-1=0,95 \text{ або } \Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,2}\right)=0,975$$

відносно ε. За таблицею знаходимо таке значення аргументу $\frac{\varepsilon}{0,2}$, для якого функція Φ набуває значення 0,975. Маємо $\frac{\varepsilon}{0,2}=1,96$ або $\varepsilon=0,392$. Отже, з імовірністю, навіть більшою ніж 0,95, можна гарантувати, що відхилення довжини деталі від номіналу не перевищують 0,4 см.

Як уже було сказано, НЗР — це закон розподілу, який найчастіше зустрічається на практиці. Нормальний розподіл мають, наприклад, такі випадкові величини, як відхилення розмірів, ваги предметів від номінальних значень; відхилення при стрільбі; ріст жінок чи чоловіків певного віку, що проживають у даній місцевості; похибки зважувань і, взагалі, похибки вимірювань будь-якого роду в різних сферах людської діяльності.

► *Задачі*

1. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X в задачах 1–5 до підрозд. 6:

а) в задачі 1, а); б) в задачі 1, б); в) в задачі 2, а); г) в задачі 2, б);

ґ) в задачі 3, а); д) в задачі 3, б); е) в задачі 4, а); є) в задачі 4, б);

ж) в задачі 5, а); з) в задачі 5, б).

2. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X за даними задачі 6 до підрозд. 6:

а) задачі 6, а); б) задачі 6, б); в) задачі 6, в); г) задачі 6, г);

ґ) задачі 6, ґ); д) задачі 6, д); е) задачі 6, е); є) задачі 6, є);

ж) задачі 6, ж); з) задачі 6, з).

3. Зріст студентів розподілений за нормальним законом з математичним сподіванням 175 см і середнім квадратичним відхиленням 6 см. Визначити ймовірність того, що хоча б один із п'яти викликаних навмання студентів матиме зріст від 170 до 180 см.

4. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $m = 20; \sigma = 10.$ Знайти ймовірність того, що відхилення величини X від математичного сподівання за абсолютною величиною менше від 3.

5. Вважається, що відхилення довжини деталей від стандарту є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Якщо стандартна довжина дорівнює $m = 40$ см, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0,4$ см, то яку точність довжини виробу можна гарантувати з імовірністю 0,8?

6. Нормально розподілена випадкова величина X у 5 % випробувань набуває значення менше від 25 і в 3 % випробувань — значення більше від 32. Знайти ймовірність того, що в результаті випробувань ця випадкова величина попаде до інтервалу (25; 30).

7. Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення її розміру, що контролюється, не перевищує 10 мм. Випадкові відхилення розміру від проектного підпорядковані нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням 5 мм та математичним сподіванням, що дорівнює 0. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат?

8. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням, рівним 10. Імовірність попадання X до інтервалу (10; 20) дорівнює 0,3. Чому дорівнює ймовірність попадання X до інтервалу (0; 10)?

9. Випадкова величина X розподілена нормально із середнім квадратичним відхиленням, рівним 5 мм. Знайти довжину інтервалу, в який з імовірністю 0,9973 попаде значення випадкової величини X у результаті випробування.

10. Коробки з шоколадом пакуються автоматично; вага коробки розподілена нормально; середня вага дорівнює 1,06 кг. Знайти величину σ, якщо 5 % коробок мають вагу меншу від 1 кг.

11. Швидкість вітру в районі аеропорту — нормально розподілена величина X з $m=16$ км/год і $\sigma=5$ км/год. Знайти ймовірність того, що швидкість вітру виявиться: а) меншою від 12 км/год; б) більшою від 25 км/год.

12. Річна виручка підприємства — нормально розподілена випадкова величина X із середнім значенням 600 млн грн і $\sigma=80$ млн грн. Знайти інтервал, в якому з імовірністю 0,9 можна очікувати розмір виручки наступного року.

8. ПРИКЛАДИ ІНШИХ РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Розглянемо ще кілька розподілів, що моделюють ті чи інші випадкові явища.

8.1. Рівномірний розподіл

Із цим розподілом ми частково познайомились у прикладі 9 п. 6.2. Випадкова величина розподілена рівномірно, якщо її значення неперервно заповнюють деякий скінченний проміжок, причому щільність розподілу ймовірностей на цьому проміжку є сталою величиною.

Рекомендуємо показати **самостійно**, що для математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$ випадкової величини X справедливі формули:

$$M[X]=\frac{b+a}{2}; \qquad \sigma_x=\sqrt{D[X]}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{8.1}$$

а для ймовірності попадання X в інтервал $(\alpha, \beta)\subset(a,b)$ — формула

$$P\{\alpha < X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}. \qquad (8.2)$$

Вираз для функції $F(x)$ наведено у прикладі 9 п. 6.2.

Випадковою величиною з рівномірним розподілом є, наприклад, положення хвилинної стрілки в момент зупинки годинника. З рівномірним розподілом мають справу у вимірювальній практиці в заокругленні результатів вимірювання до цілих поділок шкали вимірювального приладу. Похибка в результаті заокруглення результату вимірювання до найближчої цілої поділки є випадковою величиною, що рівномірно розподілена на відрізку $[-0,5;\, 0,5]$. Очевидно, що рівномірний розподіл мають похибки, які виникають у результаті заокруглення даних у розрахунках.

Приклад 1. Маса компонентів суміші вимірюється приладом з ціною поділки 1 г, і результат вимірювання заокруглюється до найближчої поділки. Знайти ймовірність того, що абсолютна похибка визначення маси в результаті такого заокруглення не перевищить середнього квадратичного відхилення цих похибок.

Розв'язання

Похибка X визначення маси в результаті заокруглення результату вимірювання до найближчої цілої поділки є випадковою величиною з рівномірним розподілом на відрізку $[-0,5;\, 0,5]$. Згідно з формулою (8.1) для її середнього квадратичного відхилення маємо $\sigma_x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (г). Шукану ймовірність обчислюємо за формулою (8.2):

$$P\left\{|X| < \frac{1}{2\sqrt{3}}\right\} = P\left\{-\frac{1}{2\sqrt{3}} < X < \frac{1}{2\sqrt{3}}\right\} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577.$$

8.2. Показниковий розподіл

Ще одним прикладом розподілу неперервної випадкової величини є ***показниковий розподіл***. Щільність розподілу ймовірностей для нього має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ якщо } x \ge 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Рекомендуємо переконатись **самостійно**, що умова нормування $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ виконується. Графік функції $f(x)$ зображено на рис. 8.1. Показниковий розподіл залежить лише від одного параметра λ. Знайдемо інтегральну функцію показникового розподілу:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \lambda \int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \text{ якщо } x \geq 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0. \end{cases} \tag{8.3}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 8.2.

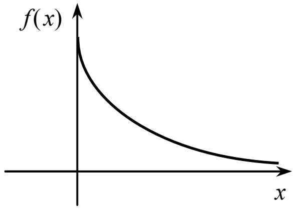


Рис. 8.1

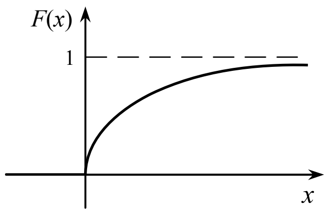


Рис. 8.2

Імовірність попадання в заданий інтервал визначається формулою

$$P\{\alpha < X < \beta\} = F(\beta) - F(\varepsilon) = e^{-\alpha\lambda} - e^{-\beta\lambda}.$$

Знайдемо математичне сподівання показникового розподілу:

$$M[X] = m_x = \int\limits_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int\limits_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Для знаходження дисперсії скористаємося вже відомою нам формулою $D[X] = M\left[X^2\right] - M^2[X]$.

Тому $D[X] = \lambda \int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$. Рекомендуємо виконати необхідні перетворення **самостійно**.

Отже, для показникового розподілу математичне сподівання дорівнює середньому квадратичному відхиленню

$$m_x = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Приклад 2. Середній час безперебійної роботи пристрою 15 год. Припустивши, що час безперебійної роботи пристрою має показниковий розподіл, знайти ймовірність того, що пристрій працюватиме безперебійно не менше від 20 год.

Розв'язання

За умовою $M\left[X\right]=\frac{1}{\lambda}=15$. Звідси $\lambda=\frac{1}{15}$. Скористаємося функцією розподілу (8.3):

$$P\left\{X\geq 20\right\}=1-P\left\{X<20\right\}=1-F\left(20\right)=1-\left(1-e^{-\frac{20}{15}}\right)=e^{-\frac{20}{15}}\approx 0{,}264\,.$$

Як приклади розподілів дискретної випадкової величини у першу чергу розглянемо ***біномний розподіл*** та ***розподіл Пуассона***.

8.3. Біномний розподіл

Як ми вже знаємо (див. п. 5.2), випадкова величина X має біномний розподіл, якщо її можливими значеннями є числа 0, 1, 2, ..., *n*, а відповідні ймовірності p_m знаходять за формулою Бернуллі

$$p_m=P\left\{X=m\right\}=C_n^m p^m q^{n-m},\ m=0,1,2,...,n,$$
$$0<p<1,\quad q=1-p.$$

Умови виникнення біномного розподілу нам уже відомі. Знайдемо основні числові характеристики цього розподілу:

$$M\left[X\right]=m_x=\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m};\ D\left[X\right]=M\left[X^2\right]-m_x^2,$$

де

$$M\left[X^2\right]=\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m}\,.$$

Для цього скористаємося виразом

$$\left(p+q\right)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}\,. \qquad (8.4)$$

Продиференціюємо ліву та праву частини (8.4) за p, а потім домножимо на p:

$$n\left(p+q\right)^{n-1}\cdot p=p\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^{m-1}q^{n-m}=\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}=m_x\,.$$

Оскільки $p+q=1$, то $m_x = np$.

Продиференціюємо вираз (8.4) двічі за p і домножимо на p^2:

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} \cdot p^2 = p^2 \cdot \sum_{m=0}^{n} m(m-1)C_n^m p^{m-2} q^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} m(m-1)C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m} - \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m} = M\left[X^2\right] - m_x.$$

Звідси $M\left[X^2\right] = m_x + n(n-1)p^2 = np + n^2p^2 - np^2$.

Для дисперсії маємо:

$$D[X] = np + n^2p^2 - np^2 - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq.$$

Отже, для випадкової величини, розподіленої за біномним законом,

$$m_x = np, \quad D_x = npq, \quad \sigma_x = \sqrt{npq}. \tag{8.5}$$

Формули (8.5) розкривають імовірнісний зміст аргументу $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ функцій $\varphi(x)$ та $\Phi(x)$, що фігурують у наближених рівностях Муавра — Лапласа (див. п. 5.2). А саме x — це відхилення кількості «успіхів» m у n незалежних випробуваннях від середнього значення, віднесене до середнього квадратичного (стандартного) відхилення.

Приклад 3. Частка бракованих деталей, що виготовляються на верстаті, становить 5 %. Нехай X — кількість бракованих деталей серед 400 виготовлених. Знайти m_x та σ_x.

Розв'язання

Випадкова величина X має біномний розподіл. За формулами (8.5), де $n = 400$, $p = 0{,}05$, $q = 0{,}95$, знаходимо:

$$m_x = np = 400 \cdot 0{,}05 = 20; \; D_x = npq = 400 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 19;$$

$$\sigma_x = \sqrt{19} \approx 4{,}36.$$

8.4. Розподіл Пуассона

Нехай дискретна випадкова величина X набуває значення 0, 1, 2, ..., m. Якщо ймовірності цих значень визначаються формулою

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (8.6)$$

то кажуть, що X має розподіл Пуассона з параметром $\lambda(\lambda > 0)$. Задання закону розподілу формулою (8.6) є коректним, тобто

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = 1.$$

Справді, $\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$.

Знайдемо математичне сподівання розподілу Пуассона:

$$M[X] = \sum_{m=0}^{\infty} m p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \lambda^{m-1}}{m!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda, \text{ де } k = m - 1.$$

Знаходимо дисперсію $D[X] = M\left[X^2\right] - M^2[X]$:

$$M\left[X^2\right] = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \left[(m-1) + 1\right] \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \left[\sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda} \right] =$$

$$= \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda; \quad D[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Отже, параметр λ розподілу Пуассона є одночасно математичним сподіванням і дисперсією цього розподілу:

$$M[X] = D[X] = \lambda.$$

Знайдемо для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона, імовірність того, що вона набуде значення не меншого за деяке число k:

$$P\{X \geq k\} = p_k + p_{k+1} + \ldots = 1 - \left(p_0 + p_1 + \ldots + p_{k-1}\right) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} p_k.$$

Зокрема, імовірність того, що X набуде ненульового значення, визначається формулою $P\{X > 0\} = 1 - p_0 = 1 - e^{-\lambda}$.

У п. 5.2 доведено теорему Пуассона, з якої випливає, що розподіл Пуассона є граничним випадком біномного розподілу за необмеженого збільшення кількості випробувань n і необмеженого зменшення ймовірності p «успіху» в кожному випробуванні, причому так, що величина $\lambda = np$ залишається сталою. Тому біномний розподіл, для якого математичне сподівання мало відрізняється від дисперсії, тобто $np \approx npq$ [див. формули (8.5)], можна замінити на розподіл Пуассона (див. приклад 2, п. 5.2). Оскільки ймовірність «успіху» p в цьому разі є малою, то розподіл Пуассона ще називають *законом рідких явищ*.

Крім наближення біномного розподілу, закон розподілу Пуассона застосовується для вивчення так званого *простого потоку подій*.

Означення 1. *Простий потік подій* — це послідовність подій A_k $\left(k = 1, 2, \ldots\right)$, які відбуваються у випадкові моменти часу $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$, тобто на осі абсцис (осі часу) випадково розподіляються точки. Припускається, що випадковий розподіл точок на осі задовольняє три умови:

1) умову ***стаціонарності***, яка полягає в тому, що ймовірність попадання тієї чи іншої кількості подій в інтервал часу довжиною t залежить лише від довжини інтервалу t і не залежить від розміщення цього інтервалу на осі. Отже, середня кількість подій, що відбуваються за одиницю часу, є сталою. Позначимо її через μ і назвемо *щільністю потоку*;

2) умову ***відсутності післядії***, яка означає, що для інтервалів часу, які не перетинаються, кількість подій, що попадають в один із цих інтервалів, не залежить від кількості подій, що попадають в інший інтервал;

3) умову ***одинарності***, яка означає, що ймовірність попадання в елементарний інтервал Δt двох чи більшої кількості подій дуже мала порівняно з імовірністю попадання однієї події, так що цією ймовірністю можна знехтувати.

Відомо, що за умов 1–3 кількість X точок (подій), які попадають у довільний інтервал довжиною t, розподіляється за законом Пуассона з математичним сподіванням $M\left[X\right] = \lambda = \mu t$. Імовірність того, що за час t відбудеться рівно m подій, дорівнює

$$P_m(t)=\frac{(\mu t)^m}{m!}e^{-\mu t}.$$

Зокрема, імовірність того, що за час t не відбудеться жодної події, дорівнює $P_0(t)=e^{-\mu t}$.

За розумної ідеалізації простим потоком подій можуть бути виклики на телефонній станції, реєстрація радіоактивних частинок, збої на автоматичній лінії, послідовність замовлень на обслуговування тощо.

Приклад 4. На автоматичну телефонну станцію надходить простий потік викликів, інтенсивність (щільність) якого $\mu=0,8$ (викликів/хв). Знайти ймовірність того, що за 2 хв: а) не надійде жодного виклику; б) надійде лише один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Розв'язання

X — випадкова величина (кількість викликів за 2 хв), яка розподілена за законом Пуассона з параметром $\mu t=0,8\cdot 2=1,6$. Маємо:

а) $P_0(2)=\frac{(\mu t)^0}{0!}e^{-\mu t}=e^{-\mu t}=e^{-1,6}\approx 0,202$;

б) $P_1(2)=\frac{(1,6)^1}{1!}e^{-1,6}\approx 0,323$;

в) $P\{X\geq 1\}=1-P\{X=0\}=1-P_0(2)\approx 0,798$.

8.5. Геометричний та гіпергеометричний розподіли

Геометричний розподіл. Кажуть, що випадкова величина X має *геометричний розподіл* з параметром $0<p<1$, якщо її можливими значеннями є числа $1, 2, \ldots, n, \ldots,$ а відповідні ймовірності обчислюються за формулою

$$p_m=P\{X=m\}=q^{m-1}p, \quad q=1-p, \quad m=1,2,\ldots,n,\ldots. \qquad (8.7)$$

Назва «геометричний» обумовлена тим, що числа (8.7)

$$p,\ pq,\ pq^2,\ldots,pq^{n-1},\ldots$$

утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію з першим членом p і знаменником q.

Коротко згадаємо про умови виникнення геометричного розподілу. Нехай у послідовності незалежних випробувань подія A може з'являтись з тією самою ймовірністю p у кожному випробуванні. Уведемо допоміжні події

$$A_i = \{\text{в } i\text{-му випробуванні з'явиться подія } A\} \ (i = 1, 2, ...)$$

і позначимо через X — кількість випробувань до першої появи події A. Оскільки події $A_1, A_2, \ldots, A_m$ незалежні в сукупності для будь-якого m і $P(A_i) = p$, $P(\overline{A}_i) = 1 - p = q$ для всіх i, то

$$P\{X = 1\} = P(A_1) = p,$$

$$P\{X = 2\} = P(\overline{A}_1 A_2) = qp,$$

$$\vdots$$

$$P\{X = m\} = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{m-1} A_m) = q^{m-1} p,$$

$$\vdots$$

З теоретичного погляду обмежувати можливі значення X не має сенсу. У результаті одержуємо розподіл випадкової величини X за законом (8.7). Оскільки події $\{X = m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ утворюють повну групу подій, то $\sum\limits_{m=1}^{\infty} P\{X = m\} = 1$. Те саме дістаємо за формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\{X = m\} = \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Нагадаємо, що з геометричним розподілом ми мали справу в прикладі 6 з п. 3.2.

Для знаходження числових характеристик геометричного розподілу скористаємось кількома допоміжними співвідношеннями. Розглянемо нескінченно спадну геометричну прогресію

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^m = q + q^2 + \ldots + q^m + \ldots = \frac{1}{1-q}. \qquad (8.8)$$

Диференціюючи ліву та праву частини (8.8) за q, дістанемо

$$\sum_{m=1}^{\infty} m q^{m-1} = \left(\frac{q}{1-q} \right)'_q = \frac{1}{(1-q)^2}. \qquad (8.9)$$

Помножимо рівність (8.9) на q :

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^m = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Останню рівність знову диференціюємо за q :

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} = \left(\frac{q}{1-q^2}\right)'_q = \frac{1+q}{(1-q)^3}. \qquad (8.10)$$

(не вдаючись до деталей, зауважимо, що почленне диференціювання рядів тут дозволено).

Скориставшись рівностями (8.9) і (8.10), дістанемо:

$$M[X] = m_x = \sum_{m=1}^{\infty} m\,q^{m-1} p = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p};$$

$$M\left[X^2\right] = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} p = \frac{(1+q)p}{(1-q)^3} = \frac{(1+q)p}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}.$$

Звідси

$$D[X] = M\left[X^2\right] - M^2[X] = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2},$$

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Отже, для геометричного розподілу

$$m_x = \frac{1}{p}, \quad D[X] = \frac{q}{p^2}, \quad \sigma_x = \frac{\sqrt{q}}{p}. \qquad (8.11)$$

На геометричний розподіл можна дивитись як на дискретний аналог показникового розподілу.

Приклад 5. Імовірність відмови пристрою за кожного ввімкнення дорівнює 0,05. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості вмикань пристрою до першої його відмови — і знайти m_x та σ_x.

Розв'язання

Випадкова величина X має геометричний розподіл з параметром $p = 0,05$:

$$P\{X=m\}=0{,}95^{m-1}\cdot 0{,}05, \qquad m=1,\,2,\,\dots\,.$$

За формулами (8.11) знаходимо:

$$m_x=\frac{1}{p}=20, \qquad \sigma_x=\frac{\sqrt{0{,}95}}{0{,}05}\approx 19{,}5.$$

Гіпергеометричний розподіл. Кажуть, що дискретна випадкова величина X має *гіпергеометричний* розподіл з параметрами N, M, n, якщо

$$P\{X=m\}=\frac{C_M^m\,C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m=0,1,\dots,n;\ \ n\le\min\{M,\,N-M\}$$

(див. приклади 6, 7 з п. 6.1). Математичне сподівання та дисперсію гіпергеометричного розподілу можна знайти за формулами

$$M[X]=n\frac{M}{N};\ \ D[X]=n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}. \qquad (8.12)$$

Гіпергеометричний розподіл використовується у практиці контролю якості продукції.

Приклад 6. У партії зі 100 виробів 6 бракованих. Для контролю вибирають навмання 4 вироби. Описати закон розподілу випадкової величини X — кількості бракованих виробів серед 4 вибраних. Знайти $M[X]$, $D[X]$ та ймовірність того, що партія буде забракована, якщо умова непридатності всієї партії — наявність хоча б одного бракованого виробу серед 4, що проходять контроль.

Розв'язання

Випадкова величина X має гіпергеометричний розподіл з параметрами $N=100$, $M=6$, $n=4$, так що

$$P\{X=m\}=\frac{C_6^m\,C_{94}^{4-m}}{C_{100}^4}, \quad m=0,\,1,\,2,\,3,\,4.$$

Числові характеристики знаходимо за формулами (8.12):

$$M[X]=4\cdot\frac{6}{100}=0{,}24; \qquad D[X]=4\cdot\frac{6}{100}\left(1-\frac{6}{100}\right)\cdot\frac{96}{99}\approx 0{,}219.$$

Нехай подія A — партія буде забракована. Тоді

$$P(A)=P\{X\ge 1\}=1-P\{X=0\}=1-\frac{C_6^0\,C_{94}^4}{C_{100}^4}\approx 0{,}222.$$

► *Задачі*

1. Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі (–10; –4). Знайти її математичне сподівання та дисперсію.

2. Усі значення рівномірно розподіленої випадкової величини X лежать на відрізку $\left[2;\,8\right]$. Знайти $M\left[X\right], D\left[X\right]$ та ймовірність попадання X у відрізок $\left[3;\,5\right]$.

3. Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі (–3; 7). Запишіть функцію розподілу та щільність розподілу, побудуйте їхні графіки.

4. Ціна поділки шкали вимірювального приладу 0,1. Показання заокруглюють до найближчої цілої поділки. Яка ймовірність того, що у відліку буде допущено похибку, що перевищує 0,02?

5. Автобуси деякого маршруту йдуть строго за розкладом з інтервалом руху 15 хв. Пасажир підходить до зупинки у деякий момент часу. Знайти ймовірність того, що цей пасажир: а) чекатиме чергового автобуса менше ніж 6 хв; б) підійшов до зупинки не раніше ніж через 1 хв після від'їзду попереднього автобуса, але не пізніше ніж за 2 хв до від'їзду наступного.

6. Випадкова величина X розподілена за показниковим законом зі щільністю $f\left(x\right)$. Знайти ймовірність попадання X в інтервал $\left(\alpha,\beta\right)$ та математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

а) $f\left(x\right)=\begin{cases}0{,}04\,e^{-0{,}04x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ б) $f\left(x\right)=\begin{cases}4\,e^{-4x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$

$\alpha=1;\ \beta=2.$ $\alpha=0{,}2;\ \beta=0{,}5.$

7. Випадкова величина T — час безвідмовної роботи системи (у годинах) має розподіл $f\left(x\right)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{1}{20}\,e^{-\lambda t}, & t\ge 0.\end{cases}$ Знайти значення λ і надійність (імовірність безвідмовної роботи системи) протягом 10 годин.

8. Час відновлення каналу зв'язку має показниковий розподіл. Середній час відновлення дорівнює 10 хв. Яка ймовірність того, що час відновлення буде в межах від 5 до 25 хв?

9. Випробовують три елементи, які працюють незалежно один від одного. Тривалість часу безвідмовної роботи елементів розподілена за показниковим законом: для першого елемента $F_1(t)=1-e^{-0,1t}$; для другого — $F_2(t)=1-e^{-0,2t}$; для третього — $F_3(t)=1-e^{-0,3t}$. Знайти ймовірність того, що в інтервалі часу (0; 5) годин відмовлять: а) лише один елемент; б) лише два елементи; в) усі три елементи.

10. Час ремонту телевізорів (у годинах), які надходять до майстерні, є випадковою величиною з функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1-e^{-t}, & t\geq 0.\end{cases}$$

Знайдіть математичне сподівання та дисперсію часу обслуговування телевізорів.

11. Імовірність влучення під час стрільби гармати $p=0,6$. Знайти математичне сподівання та дисперсію загальної кількості влучень, якщо зроблено 100 пострілів.

12. Імовірність порушення герметичності банки в партії консервів дорівнює 0,003. Перевозиться партія з 1000 банок. Обчисліть числові характеристики випадкової величини X — кількості банок з порушенням герметичності.

13. Енергетична компанія обслуговує 800 споживачів електроенергії. Перебої в подаванні енергії протягом доби виникають з імовірністю 0,005. Обчисліть числові характеристики випадкової величини X — кількості повідомлень про перебої.

14. У цеху брак становить 5 % виробів. Обчисліть числові характеристики випадкової величини X — кількості бракованих виробів серед 6 навмання взятих.

15. Гральний кубик підкинули 12 разів. Знайдіть математичне сподівання та дисперсію кількості випадань шести очок.

16. Визначте ймовірність влучення в мішень після кожного пострілу та кількість виконаних пострілів, якщо середня кількість влучень дорівнює 240, а середнє квадратичне відхилення випадкової величини X — кількості влучень дорівнює 12.

17. Скільки гральних кубиків треба підкинути для того, щоб математичне сподівання кількості кубиків, на яких випало два очка, дорівнювало шести?

18. Імовірність влучення в ціль після одного пострілу дорівнює 0,015. Зроблено 600 пострілів. Знайти $M[X]$ та $\sigma[X]$, де X — кількість влучень у ціль.

19. Під час друкування сторінки тексту (3000 символів) оператор друкує неправильний символ з імовірністю 0,001. Складіть закон розподілу випадкової величини X — кількості помилок на сторінці надрукованого тексту. Знайдіть імовірність того, що під час друкування сторінки тексту буде зроблено більше ніж три помилки.

20. На шосе встановлено контрольний пункт для перевірки технічного стану автомобілів. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини T — часу очікування чергової машини контролером, якщо потік машин простий і час (у годинах) між проходженням машин через контрольний пункт розподілено за показниковим законом $f(t) = 5e^{-5t}$, $t \geq 0$.

21. Автоматична телефонна станція обслуговує 10000 телефонних номерів. Імовірність того, що протягом однієї хвилини на АТС надійде виклик абонента, дорівнює 0,0004. Знайти $M[X]$ та $D[X]$, де X — кількість викликів, які надійшли на АТС протягом 1 хв.

22. На телефонну станцію надходить простий потік викликів з інтенсивністю $\mu = 0,6$ (викликів/хв). Знайти ймовірність, що за 3 хвилини надійде принаймні 3 виклики.

23. Гральний кубик підкидається до першого випадання цифри 6. Визначити $M[X]$, $D[X]$ та $\sigma[X]$, де X — кількість підкидань кубика.

24. Екзаменатор ставить студентові додаткові запитання. Імовірність відповіді на одне запитання дорівнює 0,9. Викладач припиняє іспит, якщо студент не відповість на чергове запитання. Знайти математичне сподівання випадкової величини X — кількості додаткових запитань студентові.

25. Знайти $M[X]$, $D[X]$, де X — кількість перевірених деталей до появи бракованої деталі. Імовірність браку для кожної деталі дорівнює 0,1.

26. Провадяться багаторазові випробування технологічної лінії на надійність до відмови лінії. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X — кількості випробувань, які треба провести. Імовірність відмови лінії в кожному випробуванні дорівнює 0,1.

27. У групі 15 студентів, серед яких 5 відмінників. Навмання вибирають трьох студентів. Знайти $M\left[X\right]$, де X — кількість відмінників серед вибраних студентів.

28. У читальному залі 6 підручників з теорії ймовірностей і 4 — з математичної статистики. Бібліотекар узяв навмання 3 підручники. Знайти математичне сподівання та дисперсію кількості взятих підручників з теорії ймовірностей.

29. В урні 7 кульок, серед яких 4 білі, а решта чорні. З урни навмання виймають 3 кульки. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості вийнятих білих куль.

9. СИСТЕМИ ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Сукупність випадкових величин $\left(X, Y\right)$, які з певних причин розглядаються одночасно, називають *системою двох випадкових величин,* або *двовимірною випадковою величиною* (ще — *двовимірним випадковим вектором*). Як і для окремо взятої випадкової величини, повною характеристикою системи випадкових величин є її ***функція розподілу***, або ще кажуть — ***функція спільного розподілу випадкових величин*** X та Y. Під цією функцією розуміють функцію двох дійсних змінних x та y, що визначається як імовірність одночасного виконання двох нерівностей $X < x$ та $Y < y$:

$$F(x,y) = P\left\{X < x, Y < y\right\}. \qquad (9.1)$$

Геометрична інтерпретація: величина $F(x,y)$ виражає ймовірність попадання випадкової точки $\left(X, Y\right)$ у внутрішню частину прямого кута з вершиною в точці (x,y) і зі сторонами, паралельними координатним осям (рис. 9.1).

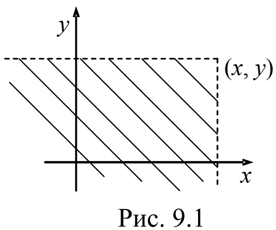


Рис. 9.1

Виходимо з того, що функція (9.1) завжди існує. Безпосередньо з означення і геометричної інтерпретації функції розподілу випливають такі її властивості:

Властивість 1. $0 \le F(x, y) \le 1$.

Властивість 2. $F(x, y)$ — неспадна функція за кожним з аргументів: $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, якщо $x_2 > x_1$; $F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$, якщо $y_2 > y_1$.

Властивість 3. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$.

Властивість 4. $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Властивість 5. Для $y \to +\infty$ функція розподілу випадкового вектора переходить у функцію розподілу випадкової величини X, а для $x \to +\infty$ — у функцію розподілу випадкової величини Y:

$$F(x, +\infty) = F_x(x);$$

$$F(+\infty, y) = F_y(y).$$

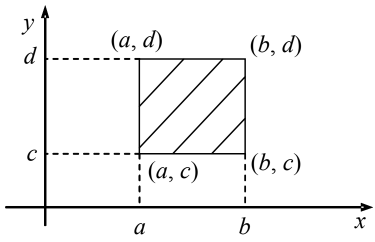


Рис. 9.2

Властивість 6. Імовірність попадання випадкової точки (X, Y) у довільний прямокутник зі сторонами, паралельними координатним осям (рис. 9.2), знаходять за формулою

$$P\{a \le X < b, c \le Y < d\} = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c). \quad (9.2)$$

9.1. Система дискретних випадкових величин

Якщо X та Y — дискретні випадкові величини з можливими значеннями x_i та y_j $(i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m)$, то закон розподілу системи (X, Y) зручніше задавати не у формі функції розподілу, а у вигляді таблиці спільного розподілу (табл. 9.1), до якої заносять імовірності $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ того, що одночасно випадкова величина X набуває значення x_i, а випадкова величина Y — значення y_j, тобто ймовірності добутку подій $\{X = x_i\}$ та $\{Y = y_j\}$ для довільних i, j. За відомим розподілом (табл. 9.1) завжди можна знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у задану область S площини. Для цього потрібно обчислити суму всіх p_{ij}, які відповідають точкам $(x_i, y_j) \in S$.

Таблиця 9.1

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\ldots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\ldots$	p_{n2}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\ldots$	p_{nm}

Усі можливі події $\{X = x_i, Y = y_j\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$ утворюють повну групу подій. Тому $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1$. Підсумувавши лише за одним з індексів j або i, дістанемо

$\sum\limits_{j} p_{ij} = \sum\limits_{j} P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{im} = P\{X = x_i\} = p_{x_i}$ — сума елементів i-го стовпчика;

$\sum\limits_{i} p_{ij} = \sum\limits_{i} P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{1j} + p_{2j} + \ldots + p_{nj} = P\{Y = y_j\} = p_{y_j}$ — сума елементів j-го рядка. (9.3)

Імовірності p_{x_i} та p_{y_j} зручно записувати у вигляді додаткових, відповідно, рядка та стовпчика (табл. 9.1).

Приклад 1. Імовірність влучення в ціль після одного пострілу дорівнює p. Виконуються три постріли. Побудувати закон розподілу системи (X, Y), де X — кількість пострілів до першого влучення (включно), Y — кількість промахів. Знайти: а) закони розподілу компонент X та Y; б) імовірність $P\{X \geq Y\}$.

Розв'язання

Іноді, як і в нашому випадку, побудову розподілу випадкового вектора зручно починати з побудови розподілів його компонент.

А. Рекомендуємо показати **самостійно**, що розподіли компонент мають вигляд:

x_i	1	2	3
p_{x_i}	p	qp	q^2

y_i	0	1	2	3
p_{y_j}	p^3	$3p^2q$	$3pq^2$	q^3

де $q = 1 - p$.

Можливі значення компонент та їх імовірності заносимо до табл. 9.2 (імовірності p_{x_i} та p_{y_j} — у вигляді додаткових рядка та стовпчика):

Таблиця 9.2

y_j \ x_i	1	2	3	p_{y_j}
0	p^3	0	0	p^3
1	$2p^2q$	p^2q	0	$3p^2q$
2	pq^2	pq^2	pq^2	$3pq^2$
3	0	0	q^3	q^3
p_{x_i}	p	qp	q^2	1

Далі зазначимо нульові ймовірності:

$P\{X=1,\ Y=3\}=0;$

$P\{X=2,\ Y=0\}=0;$

$P\{X=2,\ Y=3\}=0;$

$P\{X=3,\ Y=0\}=0;$

$P\{X=3,\ Y=1\}=0$ — як імовірності неможливих подій.

З урахуванням формул (9.3) знаходимо: $P\{X=1,\ Y=0\}=p^3;$

$$P\{X=3,\ Y=3\}=q^3;\ P\{X=3,\ Y=2\}=q^2-q^3=pq^2.$$

Введемо допоміжні події A_i — влучення в ціль після i-го пострілу (i = 1, 2, 3). Тоді $P\{X=1, Y=2\}=P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)=pq^2$. Скориставшись формулами (9.3) ще раз, знаходимо

$$P\{X=1, Y=1\}=p-pq^2-p^3=2p^2q;$$

$$P\{X=2, Y=1\}=3p^2q-2p^2q=p^2q;$$

$$P\{X=2, Y=2\}=qp-p^2q=pq^2.$$

Рекомендуємо **самостійно** з використанням подій A_i знайти всі ймовірності $P\{X=x_i, Y=y_j\}$, тобто побудувати закон розподілу випадкового вектора, а вже потім, скориставшись формулами (9.3), знайти розподіли компонент.

Б. Закон розподілу випадкового вектора (X,Y) заданий табл. 9.2. Тому

$$P\{X \ge Y\} = 1 - P\{X < Y\} = 1 - \left(P\{X=1, Y=2\} + P\{X=1, Y=3\} + \right.$$
$$\left. + P\{X=2, Y=3\}\right) = 1 - pq^2.$$

9.2. Система неперервних випадкових величин

Якщо випадкові величини X та Y — неперервні, також можлива більш зручна форма закону розподілу системи (X,Y) порівняно з функцією розподілу $F(x,y)$, а саме нехай існує скінченна границя (рис. 9.3)

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\{x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y} = f(x,y), \qquad (9.4)$$

для всіх x, y. Тоді функція $f(x,y)$ називається *щільністю розподілу системи* (X,Y) (ще кажуть — *щільністю спільного розподілу*). Очевидно, що $f(x,y) \ge 0$.

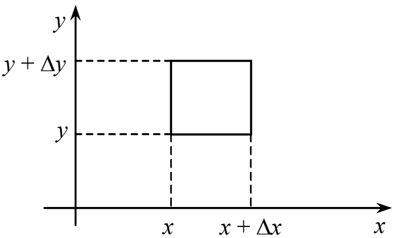


Рис. 9.3

Якщо скористатись у формулі (9.4) формулою (9.2) і припустити існування другої мішаної похідної $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, то формула (9.4) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y). \qquad (9.5)$$

Розглянемо довільну область S на площині (рис. 9.4). Розіб'ємо її на елементарні підобласті сіткою координатних ліній. Для кожного елементарного прямокутника ΔS_i, який має спільні точки з областю S, згідно з *означенням* (9.4) можна записати $P\left\{\left(X,Y\right)\in\Delta S_i\right\}\approx f(x_i,y_i)\Delta x_i\Delta y_i$. Тоді

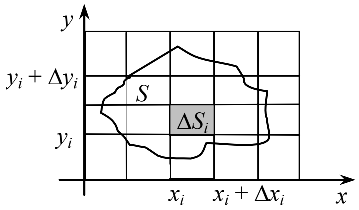


Рис. 9.4

$$P\left\{\left(X,Y\right)\in S\right\}\approx P\{(X,Y)\in\sum_i\Delta S_i\}=\sum_i P\{(X,Y)\in\Delta S_i\}\approx\sum_i f\left(x_i,y_i\right)\Delta x_i\Delta y_i. \quad (9.6)$$

У граничному випадку, коли $\Delta x_i\to 0$, $\Delta y_i\to 0$, з формули (9.6) дістаємо (тут ми вважаємо функцію $f\left(x,y\right)$ інтегровною)

$$P\{\left(X,Y\right)\in S\}=\iint_S f(x,y)dxdy\,. \quad (9.7)$$

Якщо скористатись формулою (9.7) для області на рис. 9.1, дістанемо

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy\,. \quad (9.8)$$

Формули (9.5) і (9.8) рівносильні. З формули (9.8) і ***властивості 5*** для функції $F(x,y)$ випливають рівності

$$F_x(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy\,;\quad F_y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy\,, \quad (9.9)$$

а з останніх — рівності

$$f_x(x)=\frac{dF_x(x)}{dx}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy;\;\; f_y(y)=\frac{dF_y(y)}{dy}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\,. \quad (9.10)$$

З формули (9.8) і ***властивості 4*** для $F(x,y)$ дістаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1\,.$$

Приклад 2. Закон розподілу випадкового вектора $\left(X,Y\right)$ задано у вигляді функції розподілу

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le -1 \quad \text{або} \quad y\le 1; \\ \frac{1}{3}(x+1)(y-1), & \text{якщо} \quad -1\le x\le 2, \quad 1\le y\le 2; \\ \frac{1}{3}(x+1), & \text{якщо} \quad -1\le x\le 2, \quad y>2; \\ y-1, & \text{якщо} \quad x>2, \quad 1\le y\le 2; \\ 1, & \text{якщо} \quad x>2, \quad y>2. \end{cases}$$

Знайти:

а) щільність розподілу $f(x,y)$;

б) імовірність $P\{(X,Y)\in S\}$, де $S=\{(x,y): x^2+(y-1,5)^2\le 0,25\}$;

в) щільності розподілу компонент $f_x(x)$ та $f_y(y)$.

Розв'язання

а) Щільність розподілу випадкового вектора знаходимо, скориставшись формулою (9.5):

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{якщо } -1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2 \\ 0 & \text{– в інших випадках.} \end{cases}$$

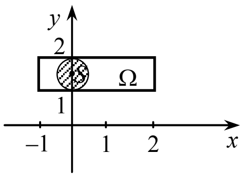


Рис. 9.5

б) На рис. 9.5 область S заштриховано. Скористаємось формулою (9.7):

$$P\{(X,Y)\in S\}=\iint_S \frac{1}{3}dx\,dy=\frac{1}{3}\iint_S dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot 0,25=\frac{\pi}{12}.$$

в) Нехай $-1\le x\le 2$. Тоді за першою формулою (9.10)

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_1^2 \frac{1}{3}dy=\frac{1}{3}\int_1^2 dy=\frac{1}{3}.$$

Отже, $f_x(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \frac{1}{3}, & -1\le x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$

Нехай $1 \le y \le 2.$ Тоді за другою формулою (9.10)

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} dx = 1.$$

Отже, $f_y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ 1, & 1 \le y \le 2, \\ 0, & y > 2. \end{cases}$

Якщо щільність розподілу системи (X, Y) стала в деякій квадрованій області Ω і дорівнює нулю поза межами цієї області, то ця система називається *рівномірно розподіленою* в області Ω. Система з прикладу 2 рівномірно розподілена у прямокутнику $\Omega = \{(x, y):\ -1 \le x \le 2; 1 \le y \le 2\}$. Формула (9.7) для рівномірно розподіленої системи (X, Y) вироджується у формулу геометричної ймовірності для подій $\{(X, Y) \in S\}$, де S — квадровані підобласті області Ω.

9.3. Незалежні випадкові величини

З формул (9.3), (9.9), (9.10) випливає, що за відомим законом розподілу системи (X, Y) [табл. 9.1, функція $F(x, y)$ або $f(x, y)$] завжди можна знайти закони розподілу окремо взятих компонент X та Y. Обернене твердження справедливе лише у випадку незалежних випадкових величин.

Означення 1. Випадкові величини X та Y називаються *незалежними*, якщо

$$F(x, y) = F_x(x)F_y(y).$$

для довільних x, y.

У протилежному разі випадкові величини X та Y називаються *залежними*.

Означення 1 носить загальний характер. Для неперервних і дискретних випадкових величин зручніше користуватись такими рівносильними умовами незалежності: неперервні випадкові величини зі щільностями $f_x(x)$, $f_y(y)$ незалежні тоді і тільки тоді, коли

$$f(x,y) = f_x(x) f_y(y) \qquad (9.11)$$

для всіх x, y.

Дискретні випадкові величини X та Y незалежні тоді і тільки тоді, коли

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} = p_{x_i} p_{y_j} \qquad (9.12)$$

для всіх i, j.

Приклад 3. а) Випадкові величини X та Y з прикладу 1 залежні, оскільки, наприклад, $P\{X = 2,\ Y = 2\} = pq^2$, тоді як $P\{X = 2\} P\{Y = 2\} = 3p^2q^3$ і умова (9.12) не виконується для всіх можливих p і q $(q = 1 - p)$. Подумайте, чому?

б) Випадкові величини X та Y з прикладу 2 незалежні, оскільки виконується умова (9.11).

Приклад 4. Нехай випадкові величини X та Y незалежні і розподілені за тим самим нормальним законом $N(0, \sigma)$. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у коло з центром у початку координат і радіусом 3σ.

Розв'язання

Випадкові величини X та Y мають щільності відповідно

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < x < \infty \ \text{ та}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < y < \infty.$$

За умовою X та Y незалежні, тому згідно з формулою (9.11)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

Шукану ймовірність знаходимо за формулою (9.7), де

$$S = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 9\sigma^2\right\}:$$

$$P\left\{(X, Y) \in S\right\} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_S e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx\, dy =$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{3\sigma} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\,\rho d\varphi=\frac{1}{2\pi\sigma^2}2\pi\int_0^{3\sigma} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\rho=\int_0^{3\sigma} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)=$$

$$=-e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{3\sigma}=-e^{-4,5}+1\approx 0,989.$$

9.4. Числові характеристики системи випадкових величин

Зауваження 1. Як відомо, математичне сподівання випадкової величини X^r повністю визначається законом розподілу випадкової величини X. Можна ввести поняття добутку двох випадкових величин XY як випадкової величини з можливими значеннями xy, а також добутку будь-яких степенів цих величин X^rY^s, можливими значеннями якого є числа x^ry^s. Можна довести, хоч це і видається очевидним, що математичне сподівання випадкової величини X^rY^s повністю визначається таблицею спільного розподілу $\|p_{ij}\|$ випадкового вектора (X,Y), якщо X та Y — дискретні випадкові величини, або ж щільністю спільного розподілу $f(x,y)$, якщо X та Y — неперервні випадкові величини. Випадкові величини X^r, X^rY^s — це приклади функцій випадкової величини чи випадкових величин. До поняття функції випадкових величин ми ще повернемось.

Перейдемо до числових характеристик системи випадкових величин (X,Y), якими є початкові та центральні моменти різних порядків.

Початкові моменти α_{rs} визначаються формулою

$$\alpha_{rs}=M[X^rY^s]=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j x_i^r y_j^s p_{ij};\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f(x,y)dxdy,\end{cases}$$

а ***центральні моменти*** β_{rs} — формулою

$$\beta_{rs}=M[\overset{\circ}{X}{}^r\,\overset{\circ}{Y}{}^s]=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j (x_i-m_x)^r(y_j-m_y)^s p_{ij},\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^r(y-m_y)^s f(x,y)dx\,dy.\end{cases}\qquad(9.13)$$

Сума $r+s \quad (r,s=0,1,2,\ldots)$ називається *порядком* моменту. Нагадаємо, що $\overset{\circ}{X}=X-m_x$, $\overset{\circ}{Y}=Y-m_y$ — центровані випадкові величини. Найширше застосування мають моменти першого та другого порядку. Моменти α_{10} та α_{01} є математичними сподіваннями випадкових величини X та Y відповідно:

$$\alpha_{10}=M\left[X^1Y^0\right]=M\left[X\right]=m_x,\ \alpha_{01}=M\left[X^0Y^1\right]=M\left[Y\right]=m_y.$$

Точку (m_x,m_y) на площині xOy називають *центром розсіювання* випадкової точки (X,Y).

З формули (9.13) випливає, що центральні моменти 1-го порядку дорівнюють нулю: $\beta_{10}=\beta_{01}=0$, крім того $\beta_{00}=1$.

Для ***початкових моментів 2-го порядку*** можна записати:

$$\alpha_{20}=M[X^2Y^0]=M[X^2];\quad \alpha_{02}=M[X^0Y^2]=M[Y^2];$$

$$\alpha_{11}=M[X^1Y^1]=M[XY].$$

Центральні моменти 2-го порядку β_{20} і β_{02} є *дисперсіями*:

$$\beta_{20}=M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\,\overset{\circ}{Y}{}^0\right]=M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right]=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]=D_x=\sigma_x^2.$$

$$\beta_{02}=M[\overset{\circ}{X}{}^0\,\overset{\circ}{Y}{}^2]=M[\overset{\circ}{Y}{}^2]=M[(Y-m_y)^2]=D[Y]=D_y=\sigma_y^2.$$

Особливу роль відіграє мішаний центральний момент другого порядку β_{11}, який називається ***коваріацією*** (або кореляційним моментом) випадкових величин X та Y і позначається K_{xy}:

$$K_{xy}=\beta_{11}=M[\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ}{Y}]=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j\left(x_i-m_x\right)\left(y_j-m_y\right)p_{ij},\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_x\right)\left(y-m_y\right)f\left(x,y\right)dx\,dy.\end{cases}\qquad(9.14)$$

Очевидно, що $K_{xy}=K_{yx}$ Крім того,

$$K_{xx}=M\left[\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ}{X}\right]=M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right]=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]=D_x,$$

тобто дисперсія є коваріацією випадкової величини X самої з собою. Аналогічно, $D_y=K_{yy}$.

На практиці, обчислюючи коваріацію, зручніше користуватись не формулами (9.14), а рівносильними їм формулами

$$K_{xy} = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - m_x m_y; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)\, dx\, dy - m_x m_y, \end{cases} \tag{9.15}$$

що об'єднуються в єдиному записі

$$K_{xy} = M[XY] - M[X]M[Y].$$

Означення 2. Якщо коваріація K_{xy} випадкових величин X та Y дорівнює нулю, то ці величини називаються *некорельованими*, а якщо ні, то — *корельованими*.

Розписавши вирази для m_x та m_y, формули (9.15) можна перетворити до вигляду

$$K_{xy} = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j \left[P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\} - P\left\{X = x_i\right\} P\left\{Y = y_j\right\} \right], \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\left[f(x, y) - f_x(x) f_y(y) \right] dxdy. \end{cases}$$

Якщо вираз у квадратних дужках під знаком суми (для всіх i, j) чи інтеграла (для всіх x, y) дорівнює нулю [див. формули (9.11), (9.12], то й $K_{xy} = 0.$ Якщо ж сума чи інтеграл дорівнює нулю (тобто $K_{xy} = 0$), то звідси не випливає, що вираз у квадратних дужках (для всіх i, j — для суми і всіх x, y — для інтеграла) дорівнює нулю.

Отже, якщо випадкові величини X, Y незалежні, то вони некорельовані. Обернене твердження неправильне. Звідси випливає, що корельованість випадкових величин є ознакою їх залежності, тобто коли ми обчислили коваріацію K_{xy} і вона виявилась відмінною від нуля, то ми робимо висновок, що випадкові величини X та Y залежні. Однак якщо $K_{xy} = 0$, висновок про незалежність X та Y, взагалі кажучи, зробити не можна.

Приклад 5. Обчислити коваріацію компонент випадкового вектора з прикладу 1 п. 9.1.

Розв'язання

За наведеними у прикладі 1 п. 9.1 таблицями розподілів компонент X та Y знаходимо:

$m_x = p + 2qp + 3q^2;$

$m_y = 3p^2q + 6pq^2 + 3q^3 = 3q\left(p^2 + 2pq + q^2\right) = 3q\left(p+q\right)^2 = 3q.$

За табл. 9.2 п. 9.1 і формулою (9.15) дістаємо:

$$K_{xy} = 1\cdot 0\cdot p^3 + 2\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 2p^2q + 2\cdot 1\cdot p^2q + 3\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot pq^2 +$$

$$+2\cdot 2\cdot pq^2 + 3\cdot 2\cdot pq^2 + 1\cdot 3\cdot 0 + 2\cdot 3\cdot 0 + 3\cdot 3\cdot q^3 - \left(p + 2qp + 3q^2\right)3q =$$

$$= 4p^2q + 12pq^2 + 9q^3 - 3pq - 6pq^2 - 9q^3 = 4p^2q + 6pq^2 - 3pq =$$

$$= pq\left(4p + 6q - 3\right) = pq\left(4\left(1-q\right) + 6q - 3\right) = pq\left(1 + 2q\right).$$

Оскільки $K_{xy} \neq 0,$ випадкові величини X та Y корельовані, а, отже, і залежні.

Як видно з формули (9.14), коваріація K_{xy} характеризує не тільки залежність випадкових величин X та Y, а і їх розсіювання навколо точки $\left(m_x, m_y\right)$. Для характеристики лише залежності, а не розсіювання, вводять величину

$$k_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_xD_y}}, \tag{9.16}$$

яку називають *коефіцієнтом кореляції* випадкових величин X та Y.

Зауваження 2. Зазначимо, що коефіцієнт кореляції заведено позначати літерою r. Проте далі нам буде зручніше користуватись саме позначенням (9.16).

На відміну від коваріації K_{xy}, розмірність якої дорівнює добутку розмірностей випадкових величин X та Y, коефіцієнт кореляції k_{xy} є безрозмірною величиною, що також надає перевагу його використанню. Далі під основними числовими характеристиками системи $\left(X, Y\right)$ будемо розуміти числа m_x, m_y, σ_x, σ_y, k_{xy}.

Означення 3. Кажуть, що система неперервних випадкових величин $\left(X, Y\right)$ розподілена за ***нормальним законом***, якщо щільність спільного розподілу має вигляд

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-k_{xy}^2}}e^{-\frac{1}{2\left(1-k_{xy}^2\right)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2k_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]}. \quad (9.17)$$

Інтегруванням функції $f\left(x,y\right)$ дістають щільності розподілу випадкових величин X та Y:

$$f_x\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dy=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}}; \quad (9.18)$$

$$f_y\left(y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dx=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(y-m_y\right)^2}{2\sigma_y^2}}. \quad (9.19)$$

З формул (9.18) і (9.19) видно, що параметри $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$ у формулі (9.17) є математичними сподіваннями та середніми квадратичними відхиленнями випадкових величин X та Y. Можна показати, що параметр k_{xy} є коефіцієнтом кореляції цих величин.

Отже, нормальний розподіл системи $\left(X,Y\right)$ повністю визначається завданням характеристик $\left(m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, k_{xy}\right)$. З формул (9.17), (9.18), (9.19), зокрема, випливає, що для нормального розподілу системи $\left(X,Y\right)$ терміни «незалежність випадкових величин» та «некорельованість випадкових величин» еквівалентні.

9.5. Числові характеристики функцій випадкових величин

Якщо на множині можливих значень x випадкової величини X задати функцію $y=f\left(x\right)$, то в результаті дістанемо випадкову величину Y з можливими значеннями y. Кажуть, що випадкова величина Y є функцією випадкової величини X, і пишуть $Y = \varphi\ (X)$. Аналогічно $Z = \varphi\ (X, Y)$ — випадкова величина, що є функцією двох випадкових величин (аргументів) X та Y. Із прикладами функцій випадкових величин ми вже зустрічалися — це X^2, XY, $X^r\,Y^s$.

Числові характеристики функцій випадкових величин завжди можна знайти, якщо відомі закони розподілу аргументів. У ряді випадків їх можна знайти, знаючи лише числові характеристики аргументів. Для цього використовують такі властивості математичного сподівання та дисперсії:

1. $M[c] = c$, де $c = \text{const}$.

2. $M[cX] = cM[X]$.

3. $D[c] = 0$.

4. $D[cX] = c^2 D[X]$.

5. $M[X+Y] = M[X] + M[Y]$.

6. $M[XY] = M[X]M[Y] + K_{xy}$.

Якщо X, Y — незалежні, то $K_{xy} = 0$ і $M[XY] = M[X]M[Y]$.

7. $D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}$.

Для незалежних випадкових величин X, Y

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y].$$

8. $D[c_0 + c_1 X + c_2 Y] = c_1^2 D[X] + c_2^2 D[Y] + 2c_1 c_2 K_{xy}$,

де c_0, c_1, c_2 — const.

Рекомендуємо довести наведені властивості **самостійно**.

Приклад 6. Знайдемо коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y, якщо $Y = aX + b$, де a і b — невипадкові величини, причому $a \neq 0$.

Знаходимо коваріацію

$$K_{xy} = M\big[\big(X - M[X]\big)\big(Y - M[Y]\big)\big] = M\big[\big(X - m_x\big)\big(aX + b - am_x - b\big)\big] =$$

$$= M\Big[a\big(X - m_x\big)^2\Big] = aD[X] = a\sigma_x^2.$$

Далі, $D[Y] = \sigma_y^2 = a^2 D[X]$. Звідси $\sigma_y = |a|\sigma_x$. Отже,

$$k_{xy} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x |a| \sigma_x} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} -1, & \text{якщо } a < 0, \\ 1, & \text{якщо } a > 0. \end{cases}$$

Маємо такий результат: коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y, пов'язаних лінійною залежністю $Y = aX + b$, дорівнює 1, якщо $a > 0$, та -1, якщо $a < 0$.

Приклад 7. Покажемо, що для довільних випадкових величин X та Y коефіцієнт кореляції за модулем не перевищує 1; $\left|k_{xy}\right| \le 1$. Для цього знайдемо дисперсію випадкової величини $Z = \sigma_y X \pm \sigma_x Y$, де $\sigma_y = \sqrt{D[Y]}$, $\sigma_x = \sqrt{D[X]}$.

Маємо:

$$D[Z] = \sigma_y^2 D[X] + \sigma_x^2 D[Y] \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy} =$$

$$= 2\sigma_x^2 \sigma_y^2 \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy} = 2\sigma_x \sigma_y \left(\sigma_x \sigma_y \pm K_{xy}\right).$$

Оскільки дисперсія невід'ємна, то $\sigma_x \sigma_y \pm K_{xy} \ge 0$. Отже, $\left|K_{xy}\right| \le \sigma_x \sigma_y$ і $\left|k_{xy}\right| = \left|\dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\right| \le 1$.

З розглянутих прикладів випливає, що коефіцієнт кореляції k_{xy} характеризує рівень *лінійної* залежності між випадковими величинами X і Y. Якщо $k_{xy} = 0$, то такої залежності не існує. Якщо між X і Y існує функціональна залежність $Y = aX + b$, то $k_{xy} = 1$ або $k_{xy} = -1$. Якщо $0 < k_{xy} < 1$, кажуть, що між X і Y існує додатна кореляція. У цьому разі за зростання однієї випадкової величини інша має тенденцію також зростати. Коли $-1 < k_{xy} < 0$, між випадковими величинами існує від'ємна кореляція. У цьому разі за зростання однієї з них інша має тенденцію спадати.

Слід зазначити, що для $k_{xy} = 0$ немає лінійної залежності між випадковими величинами. При цьому ці випадкові величини можуть бути пов'язані іншим типом залежності (нелінійної!).

Справедливе ***твердження***:

Якщо випадкові величини X і Y мають нормальні розподіли і незалежні, то будь-яка лінійна комбінація $aX + bY + c$, де a, b, c — довільні числа, також має нормальний розподіл.

Приклад 8. Випадкові величини X та Y незалежні і мають розподіли відповідно $N(0, 1)$ та $N(-1, 1)$. Записати щільність розподілу випадкової величини $Z = 3X + 2Y + 1$.

Розв'язання

Випадкова величина Z має нормальний розподіл з параметрами

$$m_z = M[3X + 2Y + 1] = 3M[X] + 2M[Y] + 1 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 1 = -1,$$

$$\sigma_z = \sqrt{D[3X + 2Y + 1]} = \sqrt{3^2 \cdot D[X] + 2^2 \cdot D[Y]} = \sqrt{9 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^2} = \sqrt{13}.$$

Тому

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{26\pi}} e^{-\frac{(z+1)^2}{26}}.$$

Зауваження 3. Розглянуті раніше питання про закони розподілу і числові характеристики системи двох випадкових величин (двовимірного випадкового вектора) узагальнюються на системи довільної кількості випадкових величин (випадкові вектори довільної розмірності) $(X_1, X_2, ..., X_n)$: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}$ — функція розподілу; $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \dfrac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$ — щільність спільного розподілу; $K_{x_i x_j} = K_{ij} = M\left[\left(X_i - m_{x_i}\right)\left(X_j - m_{xj}\right)\right]$ — коваріація випадкових величин X_i, X_j; $k_{x_i x_j} = k_{ij} = \dfrac{K_{ij}}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}}$ — коефіцієнт кореляції випадкових величин X_i та X_j. Якщо $K_{ij} = 0$ (або $k_{ij} = 0$) для всіх $i \neq j$, то кажуть, що випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *некорельовані,* тобто поняття некорельованості і попарної некорельованості тотожні. Випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ називаються *незалежними*, якщо

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{x_1}(x_1)\ F_{x_2}(x_2)\ \ldots\ F_{x_n}(x_n).$$

Для неперервних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ умова незалежності набуває вигляду

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n).$$

Якщо незалежними є дискретні величини, то

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\} P\{X_2 = x_2\} \ldots P\{X_n = x_n\}$$

для довільних значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ незалежні, то незалежними є випадкові величини $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ для довільного набору індексів $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ $(2 \le k \le n)$, зокрема, незалежні будь-які дві випадкові величини X_i та X_j $(i \ne j)$. Отже, з незалежності випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (ще кажуть, незалежності у сукупності) випливає їх попарна незалежність. Обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне, тобто з попарної незалежності випадкових величин у системі $X_1, X_2, \ldots, X_n$ не випливає їх незалежність у розумінні означення, наведеного раніше. Для довільних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right].$$

Для незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$M\left[X_1 \ X_2 \ \ldots \ X_n\right] = M\left[X_1\right] M\left[X_2\right] \ldots M\left[X_n\right],$$

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right].$$

Справедливе твердження: *закон розподілу лінійної функції* $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$, *де* $X_i \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ *незалежні і нормально розподілені випадкові величини, є нормальним.*

► *Задачі*

У задачах **1—5**:

а) побудувати закон розподілу системи (X, Y) і закони розподілу її компонент;

б) обчислити коефіцієнт кореляції k_{xy};

в) з'ясувати, залежні чи ні випадкові величини X та Y;

г) знайти ймовірність $P\{X \ge Y\}$.

1. Імовірність влучення в ціль після одного пострілу дорівнює p. Виконуються два постріли. X — кількість пострілів до першого влучення (включно), Y — кількість промахів.

а) $p = \dfrac{1}{2}$; б) $p = \dfrac{2}{3}$.

2. Число X вибирається випадковим способом із множини цілих чисел $\{1, 2, 3\}$. Потім з тієї ж множини вибирається число Y, яке:

а) менше або дорівнює X; б) більше або дорівнює X.

3. Авіакомпанія виконує два рейси за добу. Імовірність затримки першого рейса за метеоумовами дорівнює p_1, другого — p_2. X — кількість затримок першого рейса, Y — сумарна кількість затримок двох рейсів:

а) $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}05$; б) $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}1$.

4. Імовірність високоякісного виробу з першої партії виробів дорівнює p_1, а з другої партії — p_2. З першої партії беруть 2 вироби, а з другої — 1. X — кількість високоякісних виробів, узятих з першої партії, Y — з другої:

а) $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}4$; б) $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}3$.

5. Три прилади випробовують на надійність. Імовірність того, що окремо взятий прилад витримає режим випробування, дорівнює p. X — кількість приладів, які витримають випробування, а Y — кількість приладів, які не витримають їх:

а) $p = 0{,}8$; б) $p = 0{,}6$.

6. Підкидаються два гральних кубики. Подія A — сума очок, що випали, парна; подія B — добуток очок, що випали, парний. Знайти коефіцієнт кореляції індикаторів X та Y цих подій (*індикатор події A — це така випадкова величина X, яка набуває двох можливих значень, а саме*:

$$X = 1, \text{ якщо подія } A \text{ відбувається,}$$
$$X = 0, \text{ якщо не відбувається.}$$

Очевидно, що $P\{X = 1\} = P(A)$, $P\{X = 0\} = P(\overline{A})$. *Аналогічно для індикатора Y події B*.

7. Серед загальної кількості однотипних виробів брак унаслідок дефекту A становить α %, а внаслідок дефекту B — β %. Небраковані вироби становлять γ %. Знайти коефіцієнт кореляції дефектів A та B:

а) $\alpha = 3$; $\beta = 7$; $\gamma = 91$; б) $\alpha = 3$; $\beta = 4{,}5$; $\gamma = 95$.

8. У результаті незалежного тестування, проведеного у деякому регіоні, з’ясувалось, що α % одинадцятикласників не склали тест з математики і $\beta\,\%$ — з української мови. Обидва тести склали $\gamma\,\%$ школярів. Знайти коефіцієнт кореляції між школярами, які не склали тест з математики, і школярами, які не склали тест з української мови:

а) $\alpha = 25; \beta = 15; \gamma = 70;$ б) $\alpha = 20; \beta = 10; \gamma = 80.$

Вказівка. *Для розв'язання задач **7** і **8** слід увести відповідні індикаторні випадкові величини (див. задачу **6**), описати закон спільного розподілу цих величин і знайти коефіцієнт їх кореляції.*

9. Задана щільність спільного розподілу системи (X, Y). Знайти сталу a і центр розсіювання (m_x, m_y):

а) $f(x,y) = \begin{cases} a, -2 \le x \le 4,\ -3 \le y \le 5, \\ 0 \quad \text{у решті випадків;} \end{cases}$

б) $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ або } y < 0, \\ ae^{-2x-3y}, & x \ge 0,\ y \ge 0; \end{cases}$

в) $f(x,y) = \begin{cases} a \cos\frac{\pi}{2}x \cos\frac{\pi}{2}y,\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0 \ \text{ у решті випадків;} \end{cases}$

г) $f(x,y) = \begin{cases} a(x+y),\ 0 \le y \le x \le 1, \\ 0 \text{ у решті випадків.} \end{cases}$

10. Розподіл системи (X, Y) задано щільністю $f(x, y)$. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y:

а) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+y),\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \ \text{ у решті випадків;} \end{cases}$

б) $f(x,y) = \begin{cases} x+y,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \text{ у решті випадків.} \end{cases}$

11. Задано щільність розподілу двовимірної випадкової величини

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{72}, \text{ якщо } -4 \le x \le 5,\ -3 \le y \le 5, \\ 0 \ \text{ у решті випадків.} \end{cases}$$

Обчислити $P\{-1 < x < 4,\ -2 < y < 3\}$.

12. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x, y) = \{(1 - e^{-4x})(1 - e^{-5y}),\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Знайти $f(x,\ y)$.

13. Функція розподілу двовимірної випадкової величини задана формулою

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}),\ x \geq 0, y \geq 0, \\ 0,\ x < 0 \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

Знайти функції розподілу $F_x(x), F_y(y)$ компонент X та Y.

14. Випадкові величини X та Y незалежні і розподілені за тим самим законом $N(0, 1)$. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{2}$.

15. Випадкові величини X та Y незалежні і мають розподіли відповідно $N(m_x, \sigma_x)$ та $N(m_y, \sigma_y)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = \varphi(X, Y)$:

а) $m_x = 3;\ \sigma_x = 1;\ m_y = 2;\ \sigma_y = 2;\ Z = 4X - 2Y$;

б) $m_x = 0;\ \sigma_x = 1;\ m_y = 2;\ \sigma_y = 1;\ Z = X - Y$;

в) $m_x = 0;\ \sigma_x = 1;\ m_y = -1;\ \sigma_y = 1;\ Z = 3X + 2Y$;

г) $m_x = 0;\ \sigma_x = 1;\ m_y = -2;\ \sigma_y = 2;\ Z = 2X - 4Y$;

ґ) $m_x = -1;\ \sigma_x = 2;\ m_y = 1;\ \sigma_y = 2;\ Z = X - 2Y$.

10. УМОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА УМОВНІ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ. РЕГРЕСІЯ

10.1. Умовні закони розподілу

Для того щоб дати вичерпну характеристику системі випадкових величин, потрібно мати інформацію про залежність між величинами, що входять до системи. Ця залежність характеризується так званими *умовними законами розподілу*.

Умовним законом розподілу випадкової величини X, що входить до системи (X,Y), називається її закон розподілу, знайдений за умови, що інша випадкова величина (величина Y) набуває певного значення y. Аналогічно для випадкової величини Y.

Умовні закони (ряди) розподілу дискретних випадкових величин X та Y знаходять за формулами:

$$P\left\{X = x_i / Y = y_j\right\} = \frac{P\left\{X = x_{i,}\ Y = y_j\right\}}{P\left\{Y = y_j\right\}}; \tag{10.1}$$

$$P\left\{Y = y_j / X = x_i\right\} = \frac{P\left\{X = x_{i,}\ Y = y_j\right\}}{P\left\{X = x_i\right\}},$$

а *умовні щільності* неперервних випадкових величин X та Y — за формулами:

$$f\left(x/y\right) = \frac{f\left(x, y\right)}{f_y\left(y\right)}; \quad f\left(y/x\right) = \frac{f\left(x, y\right)}{f_x\left(x\right)} \tag{10.2}$$

(читається: $f\left(x/y\right)$ — умовна щільність випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y набула значення y. Аналогічно для $f\left(y/x\right)$).

Умовні ряди та щільності мають властивості звичайних рядів та щільностей розподілу.

Для незалежних випадкових величин X та Y:

$$f\left(x/y\right) = f_x\left(x\right),\ f\left(y/x\right) = f_y\left(y\right);\ P\left\{X = x_i / Y = y_j\right\} =$$

$$= P\left\{X = x_i\right\};\ P\left\{Y = y_j / X = x_i\right\} = P\left\{Y = y_j\right\}.$$

Приклад 1. Знайти умовні ряди розподілів $P\{X = x_i / Y = 2\}$ та $P\{Y = y_j / X = 1\}$ випадкових величин з прикладу 1 п. 9.1.

Розв'язання

За першою формулою (10.1) і табл. 9.2 з прикладу 1 п. 9.1 дістаємо

$$P\{X = x_i / Y = 2\} = \frac{P\{X = x_i, Y = 2\}}{P\{Y = 2\}} = \frac{pq^2}{3pq^2} = \frac{1}{3} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Отже, розподіл кількості пострілів до першого влучення за умови двох промахів має вигляд

x_i	1	2	3
$P\{X = x_i / Y = 2\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

За другою формулою (10.1) та табл. 9.2 з прикладу 1 п. 9.1 дістаємо

$$P\{Y = y_i / X = 1\} = \frac{P\{X = 1, Y = y_j\}}{P\{X = 1\}} = \frac{P\{X = 1, Y = y_j\}}{p} \text{ або}$$

$$P\{Y = 0 / X = 1\} = \frac{p^3}{p} = p^2; \qquad P\{Y = 1 / X = 1\} = \frac{2p^2q}{p} = 2pq;$$

$$P\{Y = 2 / X = 1\} = \frac{pq^2}{p} = q^2; \qquad P\{Y = 3 / X = 1\} = \frac{0}{p} = 0.$$

Отже, розподіл кількості промахів за умови влучення з першого пострілу має вигляд

y_i	0	1	2	3
$P\{Y = y_j / X = 1\}$	p^2	$2pq$	q^2	0

Приклад 2. Знайти умовні щільності компонент випадкового вектора (X, Y), рівномірно розподіленого у крузі $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le r^2\}$ (рис. 10.1).

Розв'язання

За умовою

$$f(x, y) = \begin{cases} C & \text{для} \quad x^2 + y^2 \le r^2, \\ 0 & \text{для} \quad x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Стала C визначається умовою нормування:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1 \Rightarrow C\iint\limits_{\Omega} dxdy = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\pi r^2}.$$

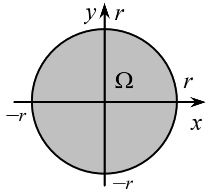


Рис. 10.1

Знаходимо щільності компонент X та Y (безумовні щільності).

Нехай $-r \le x \le r$. Тоді

$$f_x(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}.$$

Отже,

$$f_x(x) = \begin{cases} 0, & x < -r, \\ \dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & -r \le x \le r, \\ 0, & x > r. \end{cases}$$

Нехай $-r \le y \le r$. Тоді

$$f_y(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx = \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}.$$

Отже,

$$f_y(y) = \begin{cases} 0, & y < -r, \\ \dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & -r \le y \le r, \\ 0, & y > r \end{cases}$$

(зауважимо, що, на відміну від щільностей з прикладу 2 п. 9.2, щільності $f_x(x)$ та $f_y(y)$ не є щільностями рівномірних розподілів).

Умовні щільності знаходимо за формулами (10.2).

Для $-r < y < r$:

$$f\left(x/y\right)=\begin{cases}0, & x<-\sqrt{r^2-y^2},\\ \dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & -\sqrt{r^2-y^2}\le x\le\sqrt{r^2-y^2},\\ 0, & x>\sqrt{r^2-y^2}.\end{cases}$$

Для $-r<x<r$:

$$f\left(y/x\right)=\begin{cases}0, & y<-\sqrt{r^2-x^2},\\ \dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & -\sqrt{r^2-x^2}< y<\sqrt{r^2-x^2},\\ 0, & y>\sqrt{r^2-x^2}.\end{cases}$$

10.2. Умовні числові характеристики

Поряд з основними характеристиками m_x, m_y, σ_x, σ_y, k_{xy} системи $\left(X,Y\right)$ використовуються так звані *умовні числові характеристики*.

Означення 1. *Умовним математичним сподіванням* випадкової величини X, яка входить до системи $\left(X,Y\right)$, називається її математичне сподівання, знайдене за умови, що інша випадкова величина (величина Y) набуває певного значення y. Аналогічно для умовного математичного сподівання випадкової величини Y.

Умовні математичні сподівання знаходять на основі умовних законів розподілу:

$$M[X/Y=y_j]=\sum_i x_i p_{x_i/y_j};\qquad M[Y/X=x_i]=\sum_j y_j p_{y_j/x_i}.\quad (10.3)$$

(читається: $M[X/Y=y_j]$ — умовне математичне сподівання випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y набуває значення y_j; аналогічно, для $M[Y/X=x_i]$).

Тут $p_{x_i/y_j}=P\left\{X=x_i/Y=y_j\right\}$, $p_{y_j/x_i}=P\left\{Y=y_j/X=x_i\right\}$ — умовні ймовірності значень випадкових величин X та Y відповідно за умови, що інша величина набуває певного значення.

Приклад 3. Знайти умовні математичні сподівання $M\left[X / Y=2\right]$ та $M\left[Y / X=1\right]$, де *X, Y* — випадкові величини з прикладу 1 п. 9.1.

Розв'язання

Скористаємось умовними рядами розподілів випадкових величин X та Y, побудованими у прикладі 1, і формулами (10.3):

$M\left[X / Y=2\right]=1 \cdot \frac{1}{3}+2 \cdot \frac{1}{3}+3 \cdot \frac{1}{3}=2$ — математичне сподівання кількості пострілів до першого влучення за умови двох промахів;

$M\left[Y / X=1\right]=0 \cdot p^2+1 \cdot 2 p q+2 \cdot q^2+3 \cdot 0=2 q(p+q)=2 q$ — математичне сподівання кількості промахів за умови влучення з першого пострілу.

Використовуючи умовні щільності розподілу, можна записати вирази для умовних математичних сподівань у випадку неперервних випадкових величин X та Y:

$$
\begin{aligned}
&M\left[X / Y=y\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x / y) d x ; \\
&M\left[Y / X=x\right]=\int_{-\infty}^{\infty} y f(y / x) d y .
\end{aligned} \tag{10.4}
$$

Приклад 4. Показати, що умовні математичні сподівання компонент випадкового вектора (X, Y), рівномірно розподіленого в крузі $\Omega=\left\{(x, y): x^2+y^2 \leq r^2\right\}$, дорівнюють нулю.

Розв'язання

Скористаємось умовними щільностями компонент, знайденими у прикладі 2, та формулами (10.4):

$$
M\left[X / Y=y\right]=\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} x \cdot \frac{1}{2 \sqrt{r^2-y^2}} d x=\left.\frac{1}{4 \sqrt{r^2-y^2}} x^2\right|_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}=0 .
$$

Аналогічно $M\left[Y / X=x\right]=0$.

Усі властивості математичного сподівання залишаються справедливими й для умовного математичного сподівання.

Поряд з умовними математичними сподіваннями, користуються умовними дисперсіями та умовними середніми квадратичними відхиленнями.

Позначимо

$$M\left[X/Y=y\right]=m_{x/y}, \qquad M\left[Y/X=x\right]=m_{y/x}.$$

Тоді

$$D\left[X/Y=y_j\right]=\sum_i\left(x_i-m_{x/y_j}\right)^2 p_{x_i/y_j}=\sum_i x_i^2 p_{x_i/y_j}-m_{x/y_j}^2,$$

$$D\left[Y/X=x_i\right]=\sum_j\left(y_j-m_{y/x_i}\right)^2 p_{y_j/x_i}=\sum_j y_j^2 p_{y_j/x_i}-m_{y/x_i}^2,$$

$$D\left[X/Y=y\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_{x/y}\right)^2 f\left(x/y\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f\left(x/y\right)dx-m_{x/y}^2,$$

$$D\left[Y/X=x\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(y-m_{y/x}\right)^2 f\left(y/x\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty}y^2 f\left(y/x\right)dy-m_{y/x}^2.$$

$$\sigma_{x/y}=\sqrt{D\left[X/Y=y\right]}, \quad \sigma_{y/x}=\sqrt{D\left[Y/X=x\right]}.$$

10.3. Регресія і прогноз

Означення 2. Умовне математичне сподівання $M\left[Y/X=x\right]=$ $=m_{y/x}$, як функція *x*, називається *регресією* Y на X. Аналогічно $M\left[X/Y=y\right]=m_{x/y}$, як функція y — регресія X на Y. Графік залежності $m_{y/x}$ від x називається *лінією регресії* (або кривою регресії) Y на X. Аналогічно, графік залежності $m_{x/y}$ від y називається *лінією регресії* X *на* Y (рис. 10.2).

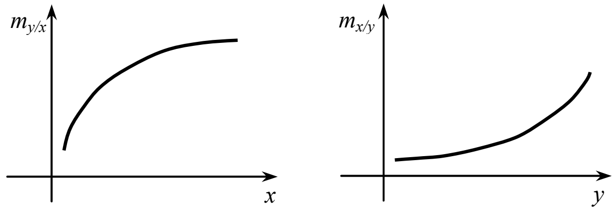


Рис. 10.2

Для незалежних випадкових величин X та Y лінії регресії паралельні координатним осям, оскільки математичне сподівання кожної з цих величин не залежить від того, якого значення набирає інша.

Лінії регресії можуть бути паралельні координатним осям і в разі залежних випадкових величин, зокрема, збігатися з координатними осями (див. приклад 4).

Нехай існує деяка залежність випадкової величини Y від випадкової величини X, причому величину X ми можемо спостерігати, тоді як величина Y з тих чи інших причин безпосередньому спостереженню на даний момент не піддається, а скажімо, може спостерігатись лише в майбутньому. У зв'язку з цим постає задача оцінювання чи прогнозування величини Y за інформацією, яку дають спостереження над величиною X.

Математично можливість такого прогнозування реалізується за допомогою відшукання невипадкової функції $\varphi(x)$, визначеної на множині можливих значень випадкової величини X і такої, щоб випадкова величина $\varphi(X)$ за деякою мірою була «близькою» до випадкової величини Y. Такою мірою в математичному прогнозуванні є зазвичай середньоквадратична похибка. Пояснимо це, увівши кілька понять.

Нехай $\varphi(x)$ — довільна функція, визначена на множині можливих значень X. Випадкову величину $\varphi(X)$ назвемо *прогнозом* випадкової величини Y, а число

$$\Delta = M\left[\left(Y - \varphi(X)\right)^2\right]$$

середньоквадратичною похибкою цього прогнозу.

Прогноз $\varphi^*(X)$ назвемо *оптимальним у середньоквадратичному,* якщо він має найменшу середньоквадратичну похибку серед усіх можливих прогнозів.

Доведено, що оптимальний прогноз $\varphi^*(X)$ існує і має вигляд

$$\varphi^*(X) = m(X),$$

де випадкова величина $m(X)$ визначається функцією

$$m(x) = M\left[Y/X = x\right].$$

Тому регресію Y та X можна трактувати як функцію, що визначає оптимальний у середньоквадратичному прогноз випадкової величини Y за значеннями випадкової величини X.

Мінімальна середньоквадратична похибка

$$\Delta_{\min} = M\left[\left(Y - m(X)\right)^2\right] \tag{10.5}$$

дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли

$$Y = m(X).$$

Остання рівність означає, що Y є деякою функцією X.

10.4. Лінійна регресія

У загальному випадку функцію $m(x) = M[Y / X = x]$ можна знайти лише тоді, коли відомий закон розподілу системи (X, Y). Для знаходження оптимального прогнозу серед прогнозів обмеженого класу достатньо знати лише деякі моменти цього розподілу.

Обмежимося класом лінійних прогнозів, тобто класом випадкових величин вигляду

$$\varphi(X) = \beta_0 + \beta_1 X. \tag{10.6}$$

Припустимо, що для системи випадкових величин X та Y відомі характеристики:

$$M[X] = m_x,\ M[Y] = m_y,\ D[X] = \sigma_x^2,\ D[Y] = \sigma_y^2,\ k_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Теорема. Оптимальний у середньоквадратичному прогноз $\varphi * (X)$ серед прогнозів (10.6) існує і має вигляд

$$\varphi * (X) = m_y + k_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - m_x). \tag{10.7}$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(\beta_0, \beta_1) = M\left[\left(Y - \beta_0 - \beta_1 X\right)^2\right]$$

і знайдемо такі β_0 і β_1, за яких ця функція досягає мінімуму.

Спочатку виконаємо тотожні перетворення:

$$\begin{aligned} F(\beta_0, \beta_1) &= M\left[\left(\left(Y - m_y\right) - \beta_1 (X - m_x) + m_y - \beta_1 m_x - \beta_0\right)^2\right] = \\ &= \sigma_y^2 + \beta_1^2 \sigma_x^2 - 2\beta_1 K_{xy} + \left(m_y - \beta_1 m_x - \beta_0\right)^2. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Числа β_0, β_1 знаходимо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F\left(\beta_0, \beta_1\right)}{\partial \beta_0} = -2\left(m_y - \beta_1 m_x - \beta_0\right) = 0, \\ \dfrac{\partial F\left(\beta_0, \beta_1\right)}{\partial \beta_1} = 2\beta_1 \sigma_x^2 - 2K_{xy} - 2m_x\left(m_y - \beta_1 m_x - \beta_0\right) = 0. \end{cases}$$

Як результат маємо

$$\beta_1 = \frac{K_{xy}}{\sigma_x^2} = k_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \beta_0 = m_y - \beta_1 m_x = m_y - k_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} m_x. \qquad (10.9)$$

Рекомендуємо переконатись *самостійно,* що знайдені числа справді перетворюють функцію $F\left(\beta_{0,} \beta_1\right)$ у мінімум.

Підставивши вирази (10.9) у формулу (10.6), дістанемо формулу (10.7). Теорему доведено.

Знайдемо мінімальну середньоквадратичну похибку для лінійних прогнозів, підставивши числа з формул (10.9) у формулу (10.8):

$$\min_{\beta_0, \beta_1} M\left[\left(Y - \beta_0 - \beta_1 X\right)^2\right] = \sigma_y^2\left(1 - k_{xy}^2\right). \qquad (10.10)$$

Отже, користуючись лінійним наближенням регресії Y на X

$$M\left[Y / X = x\right] \approx m_y + k_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - m_x\right),$$

ми втрачаємо в точності, що можна виразити нерівністю

$$\frac{\sigma_y^2\left(1 - k_{xy}^2\right)}{\Delta_{\min}} \geq 1. \qquad (10.11)$$

Якщо регресія насправді є *лінійною*

$$M\left[Y / X = x\right] = \beta_0 - \beta_1 x, \qquad (10.12)$$

то, переходячи до лінійних прогнозів, ми нічого не втрачаємо.

Справді, оскільки оптимальний прогноз серед усіх прогнозів лінійний, то він має збігатися з оптимальним лінійним прогнозом. Тому коефіцієнти лінійної регресії (10.12) мають вигляд (10.9), мінімальна середньоквадратична похибка (10.5) (серед усіх прогнозів) збігається з формулою (10.10), нерівність (10.11) перетворюється у рівність. Регресія (10.12) набуває вигляду

$$m(x) = M[Y/X = x] = m_y + k_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x). \qquad (10.13)$$

10.5. Нормальна регресія

Нехай система (X, Y) має нормальний розподіл. Регресію Y на X (чи X на Y) у цьому разі називають *нормальною*. Зі співвідношень (9.17), (9.18) для умовної щільності $f(y/x) = f(x, y)/f_x(x)$ дістаємо:

$$f(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-k_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-k_{xy}^2)}\left[y - \left(m_y + k_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)\right)\right]^2}.$$

Видно, що $f(y/x)$ є щільністю нормального закону з математичним сподіванням (10.13) та дисперсією $D[Y/X = x] = \sigma_y^2(1 - k_{xy}^2)$. Отже, нормальна регресія Y на X завжди лінійна. Те саме стосується і нормальної регресії X на Y:

$$M[X/Y = y] = m_x + k_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y), \; D[X/Y = y] = \sigma_x^2(1 - k_{xy}^2).$$

Лініями нормальної регресії є прямі лінії.

Зауваження 1. Якщо регресія нормальна, то вона лінійна. Обернене твердження неправильне. Наведемо приклад, у якому розподіл системи (X, Y) відмінний від нормального, проте регресія Y на X лінійна.

Приклад 5. Нехай незалежні випробування проводяться до першої появи позитивного результату. Імовірність позитивного результату для кожного випробування однакова і дорівнює p. Витрати на проведення одного випробування є випадковою величиною із середнім m.

Уведемо випадкові величини: X — кількість випробувань до першої появи позитивного результату (розподіл X слід вважати геометричним); X_k — витрати на проведення k-го випробування, $k = 1, 2, ...$; Y — загальні витрати на момент появи позитивного результату.

Тоді $Y = \sum_{k=1}^{X} X_k$. Оскільки за умовою $M[X_k] = m$, то

$$M[Y/X = x] = M\left[\sum_{k=1}^{x} X_k\right] = \sum_{k=1}^{x} m = mx.$$

► *Задачі*

1. За даним розподілом системи (X,Y) знайти умовні математичні сподівання:

y_j \ x_i	0	2
–1	1/12	1/12
0	1/2	1/6
1	1/12	1/12

а) $M[X/Y=-1]$; б) $M[X/Y=0]$;
в) $M[X/Y=1]$; г) $M[Y/X=0]$;
д) $M[Y/X=2]$.

2. Знайти умовне математичне сподівання $M[X/Y=2]$ за даними задач до підрозд. 9:

а) задачі 1 *а*; б) задачі 1 *б*; в) задачі 2 *а*; г) задачі 2 *б*.

3. Знайти умовні щільності $f(y/x)$ та $f(x/y)$ за даними задач до підрозд. 9:

а) задачі 9 *а* (сталу a визначити); б) задачі 11.

4. Знайти умовні математичні сподівання:

а) $M[Y/X=x]$ за даними задачі 10 *а* підрозд. 9;

б) $M[X/Y=y]$ за даними задачі 10 *а* підрозд. 9;

в) $M[Y/X=x]$ за даними задачі 10 *б* підрозд. 9;

г) $M[X/Y=y]$ за даними задачі 10 *б* підрозд. 9.

5. За даним розподілом дискретної системи (X,Y) побудувати лінійне наближення регресії (пряму регресії):

y_j \ x_i	1	2	4
0	0,1	0	0,1
2	0	0,3	0,3
5	0,2	0	0

а) Y на X;
б) X на Y.

6. За даним розподілом дискретної системи (X,Y) побудувати лінійне наближення регресії (пряму регресії):

y_j \ x_i	0	1
–1	0,1	0,15
0	0,15	0,25
1	0,2	0,15

а) Y на X;
б) X на Y.

7. Розподіл системи (X,Y) задано щільністю

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0 & \text{у решті випадків.}\end{cases}$$

Побудувати лінійне наближення регресії (пряму регресії):

а) Y на X; б) X на Y.

8. Побудувати лінійне наближення регресії (пряму регресії):

а) Y на X; б) X на Y

за щільністю розподілу системи (X,Y) із задачі 10 *а* підрозд. 9;

в) Y на X; г) X на Y

за щільністю розподілу системи (X,Y) із задачі 10 *б* підрозд. 9.

9. Відомо, що система (X,Y) має нормальний розподіл з параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y, k_{xy}. Безпосередньому спостереженню у даний момент піддається лише випадкова величина X, яка набула значення x. Спрогнозуйте значення випадкової величини Y так, щоб середньоквадратична похибка цього прогнозу була мінімальна. У відповідь запишіть це прогнозоване значення і величину середньоквадратичної похибки:

а) $m_x=1;\ m_y=2;\ \sigma_x=1;\ \sigma_y=0,5;\ k_{xy}=0,7;\ x=2;$

б) $m_x=1,5;\ m_y=2;\ \sigma_x=0,5;\ \sigma_y=1;\ k_{xy}=0,8;\ x=2;$

в) $m_x=2;\ m_y=1,5;\ \sigma_x=0,4;\ \sigma_y=0,6;\ k_{xy}=0,7;\ x=2,5;$

г) $m_x=1;\ m_y=2,5;\ \sigma_x=0,6;\ \sigma_y=0,4;\ k_{xy}=0,8;\ x=2;$

д) $m_x=1,5;\ m_y=2;\ \sigma_x=1;\ \sigma_y=1;\ k_{xy}=0,85;\ x=2.$

11. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ТА ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

11.1. Закон великих чисел

У теорії ймовірностей під законом великих чисел розуміють низку математичних теорем, у кожній з яких за тих чи інших умов установлюється факт наближення середніх характеристик великої кількості випадкових експериментів до деяких невипадкових сталих. Доведення всіх цих теорем ґрунтуються на нерівності Чебишова.

Нехай є випадкова величина X з математичним сподіванням $M[X]=m_x$ і дисперсією $D[X]=D_x$.

Нерівність Чебишова. Яке б не було додатне число ε, імовірність того, що величина X відхилиться від свого математичного сподівання не менше ніж на ε, обмежена зверху величиною $\frac{D_x}{\varepsilon^2}$:

$$P\left\{\left|X-m_x\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D_x}{\varepsilon^2}. \qquad (11.1)$$

Доведення. 1) Нехай X — дискретна випадкова величина з рядом розподілу $P\{X=x_i\}=p_i$. Запишемо вираз для дисперсії: $D[X]=D_x=(x_1-m_x)^2p_1+(x_2-m_x)^2p_2+\ldots+(x_n-m_x)^2p_n+\ldots$. Відкинемо у правій частині цього виразу ті доданки, для яких $|x_i-m_x|<\varepsilon.$ Нехай це перші k доданків. У доданках, що залишаються, замінимо $(x_j-m_x)^2$ на ε^2. Очевидно, що тоді можна записати $D_x\ge\varepsilon^2(p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots+p_n+\ldots).$

Оскільки

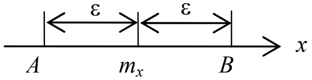
$$p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots+p_n+\ldots=1-(p_1+p_2+\ldots+p_k)=$$
$$=1-P\left\{\left|X-m_x\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{\left|X-m_x\right|\ge\varepsilon\right\},$$

то

$$D_x\ge\varepsilon^2P\left\{\left|X-m_x\right|\ge\varepsilon\right\} \text{ або } P\left\{\left|X-m_x\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D_x}{\varepsilon^2}.$$

2) Нехай тепер X — неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу $f(x)$.

Тоді $D_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2f(x)\,dx.$ Проведемо очевидні оцінки:



$$D_x\ge\int\limits_{-\infty}^{A}(x-m_x)^2f(x)\,dx+\int\limits_{B}^{\infty}(x-m_x)^2f(x)\,dx\ge\varepsilon^2\left(\int\limits_{-\infty}^{A}f(x)\,dx+\int\limits_{B}^{\infty}f(x)\,dx\right)=$$
$$=\varepsilon^2\int\limits_{|x-m_x|\ge\varepsilon}f(x)\,dx=\varepsilon^2P\left\{\left|X-m_x\right|\ge\varepsilon\right\}.$$

Звідси $P\left\{\left|X-m_x\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{D_x}{\varepsilon^2}$. Отже, нерівність (11.1) доведено.

Приклад 1. Випадкова величина X має характеристики $m_x=1$ і $\sigma_x=0,2.$ Скориставшись нерівністю Чебишова (11.1), оцінити знизу ймовірності таких подій:

а) $A=\left\{0,5<X<1,5\right\}$,

б) $B=\left\{0,75<X<1,35\right\}$,

в) $C=\left\{X<2\right\}$.

Розв'язання

а) $P\left(A\right)=P\left\{0,5<X<1,5\right\}=P\left\{\left|X-1\right|<0,5\right\}=$

$$=1-P\left\{\left|X-1\right|\geq0,5\right\}\geq1-\frac{\left(0,2\right)^2}{\left(0,5\right)^2}=0,84.$$ Отже, $P\left(A\right)\geq0,84$.

б) Скористаємось тим, що звуження інтервалу не може привести до збільшення ймовірності:

$$P\left(B\right)=P\left\{0,75<X<1,35\right\}\geq P\left\{0,75<X<1,25\right\}=P\left\{\left|X-1\right|<0,25\right\}=$$

$$=1-P\left\{\left|X-1\right|\geq0,25\right\}\geq1-\frac{0,04}{\left(0,25\right)^2}=0,36.$$ Отже, $P\left(B\right)\geq0,36$.

в) $P\left(C\right)=P\left\{X<2\right\}=1-P\left\{X\geq2\right\}=1-P\left\{X-1\geq1\right\}\geq1-P\left\{\left|X-1\right|\geq1\right\}\geq$

$$\geq1-\frac{0,04}{1^2}=0,96.$$ Отже, $P\left(C\right)\geq0,96$.

Приклад 2. Оцінити зверху ймовірність того, що випадкова величина X з математичним сподіванням m_x і дисперсією σ_x^2 відхилиться від m_x не менше, ніж на $3\sigma_x$.

Розв'язання

Покладаючи в нерівності Чебишова $\varepsilon=3\sigma_x$, дістаємо $P\left\{\left|X-m_x\right|\geq3\sigma_x\right\}\leq\frac{D_x}{9\sigma_x^2}=\frac{1}{9}$. Нерівність Чебишова дає верхню оцінку ймовірності даного відхилення для будь-якого закону розподілу випадкової величини X. На практиці у більшості випадків імовірність того, що X набере значення поза інтервалом $\left(m_x - 3\sigma_x,\ m_x + 3\sigma_x\right)$, значно менша, ніж $\frac{1}{9}$. Наприклад, для нормального закону ця ймовірність наближено дорівнює 0,003. Тому нерівність Чебишова має обмежене практичне застосування, тоді як теоретичне значення цієї нерівності переоцінити важко.

Нехай над випадковою величиною X виконуються n незалежних експериментів (спостережень) і X_1 — значення, якого може набути випадкова величина X у першому експерименті, X_2 — у другому експерименті, … , X_n — у n-му експерименті. Очевидно, що сукупність величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ є сукупністю *n незалежних* випадкових величин, кожна з яких розподілена за тим самим законом, що й сама величина X (тут ми звичайно припускаємо, що умови проведення експериментів однакові).

Розглянемо середнє арифметичне

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{11.2}$$

Випадкова величина Y_n є лінійною функцією *незалежних* випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ураховуючи, що $M\left[X_i\right] = m_x$, $D\left[X_i\right] = D_x$, знаходимо

$$\begin{aligned}
M\left[Y_n\right] &= \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right] = \frac{1}{n} n m_x = m_x, \\
D\left[Y_n\right] &= \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right] = \frac{1}{n^2} n D_x = \frac{D_x}{n}.
\end{aligned} \tag{11.3}$$

Дисперсія величини Y_n необмежено спадає зі збільшенням кількості експериментів і для достатньо великого n може бути як завгодно малою. Тому середнє арифметичне результатів великої кількості експериментів (спостережень) поводить себе майже як невипадкова величина. Саме в цьому й полягає одна із форм закону великих чисел. Ми не зупиняємось на точному формулюванні теореми (***теореми Чебишова***), яка встановлює у строгій математичній формі цю властивість стійкості середнього арифметичного, а обмежимось лише нерівностями, у вигляді яких ця теорема використовується на практиці. Ці нерівності є безпосередніми наслідками нерівності Чебишова (11.1).

Застосувавши нерівність (11.1) до випадкової величини (11.2) з урахуванням (11.3), дістанемо

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - m_x\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D_x}{n\varepsilon^2}. \qquad (11.4)$$

Нерівність (11.4) рівносильна нерівності

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - m_x\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D_x}{n\varepsilon^2}. \qquad (11.5)$$

Приклад 3. Скориставшись нерівністю (11.5), оцінити знизу ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного 100 навмання вибраних чисел з відрізка $[a,\ b]$ від середини цього відрізка буде меншим за $\frac{b-a}{20}$.

Розв'язання

Можливі числа $X_i\ \left(i=\overline{1,100}\right)$ розглядаємо як незалежні випадкові величини, кожна з яких рівномірно розподілена на відрізку $[a,\ b]$. Тому

$$M[X_i] = m_x = \frac{a+b}{2},\ \ D[X_i] = D_x = \frac{(b-a)^2}{12}\ \ \left(i=\overline{1,\,100}\right) \text{ і}$$

$$P\left\{\left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{20}\right\} \geq 1 - \frac{(b-a)^2\cdot(20)^2}{12\cdot 100\cdot(b-a)^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Інша форма закону великих чисел відома як теорема Бернуллі. Нехай виконуються n незалежних експериментів, у кожному з яких може відбутися (з імовірністю p) чи не відбутися (з імовірністю $q = 1 - p$) деяка подія A. Позначимо через m загальну кількість наставань події A у серії з n експериментів. Тоді $p_n^* = \frac{m}{n}$ — відносна частота цієї події в n експериментах. Оскільки m у кожній серії з n експериментів може бути різним, то p_n^* — випадкова величина.

Уведемо незалежні випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ — *індикатори* події A. Кожна з величин X_i набуває значення 1, якщо подія A в i-му експерименті відбувається, та 0, якщо не відбувається, причому

$$P\{X_i = 1\} = p;\ P\{X_i = 0\} = q;\ M[X_i] = p;\ D[X_i] = pq \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Очевидно, що відносна частота події p_n^* — це середнє арифметичне величин $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$p_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \left(M\left[p_n^*\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right] = \frac{np}{n} = p \right).$$

Якщо p відоме, то на практиці ***теоремою Бернуллі*** користуються у вигляді рівносильних нерівностей

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} \quad \text{та} \quad P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \qquad (11.6)$$

які є наслідками нерівностей (11.4) та (11.5) або одержуються безпосереднім застосуванням нерівності Чебишова (11.1) до випадкової величини $p_n^* = \dfrac{m}{n}$.

За невідомого p можна скористатись обмеженістю зверху добутку pq:

$$pq = p(1-p) = -p^2 + p = -(p - 0,5)^2 + 0,25 \leq 0,25$$

і дістати з нерівності (11.6) слабші оцінки

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{0,25}{n\varepsilon^2} \quad \text{та} \quad P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{0,25}{n\varepsilon^2}. \qquad (11.7)$$

Приклад 4. Скільки разів потрібно підкинути:

а) симетричну (несиметричну) монету;

б) правильний (неправильний) кубик, щоб з імовірністю не меншою від 0,975 гарантувати виконання нерівності $\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < 0,1$?

Тут n — кількість підкидань монети (кубика); m — кількість випадань «герба» («шістки»).

Розв'язання

а) Для симетричної монети $p=\dfrac{1}{2}$ і згідно з другою нерівністю (11.6) та умовою задачі

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}1\right\}\geq 1-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n\cdot(0{,}1)^2}=1-\frac{25}{n}\geq 0{,}975\,.\text{ Звідси } n\geq 1000.$$

Для несиметричної монети з невідомою ймовірністю p згідно з другою нерівністю (11.7) дістаємо те саме $n\geq 1000$.

б) Для правильного кубика $p=\dfrac{1}{6}$. Тому

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}1\right\}\geq 1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n(0{,}1)^2}=1-\frac{125}{9n}\geq 0{,}975\,.$$

Звідси $n\geq\dfrac{5}{9}\cdot 10^3$ або $n\geq 556$.

Для неправильного кубика з невідомою ймовірністю p

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}1\right\}\geq 1-\frac{0{,}25}{n(0{,}1)^2}\geq 0{,}975 \quad \text{і} \quad n\geq 1000.$$

Розбіжність результатів у випадку кубика викликана нерівносильністю оцінок (11.6) та (11.7).

Перейдемо до випадку, коли умови проведення експериментів не можна вважати сталими і характеристики випадкової величини, що спостерігається, можуть змінюватися від експерименту до експерименту, а саме нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — незалежні випадкові величини з математичними сподіваннями $m_1, m_2, \ldots, m_n$ і дисперсіями $D[X_1], D[X_2], \ldots, D[X_n]$ і всі дисперсії обмежені зверху тим самим числом L: $D[X_i]\leq L$ ($i=1, 2, \ldots, n$).

Цей випадок розглядається ***узагальненою теоремою Чебишова***, якою на практиці користуються у вигляді нерівностей

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{L}{n\varepsilon^2};\quad P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{L}{n\varepsilon^2}. \quad (11.8)$$

Приклад 5. Нехай є 100 незалежно працюючих однотипних пристроїв. Позначимо через X_i тривалість (у годинах) безперебійної роботи i-го пристрою $\left(i=\overline{1,100}\right)$. Технологія виготовлення пристроїв та умови їх експлуатації не дозволяють вважати рівними як математичні сподівання $M\left[X_i\right]=m_i$ (середні тривалості безперебійної роботи пристроїв), так і дисперсії $D\left[X_i\right]$. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ від свого математичного сподівання $M\left[\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i\right]=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} m_i$ (середньої тривалості безперебійної роботи пристроїв даного типу) буде меншим за 2 год, якщо всі середні квадратичні відхилення $\sqrt{D\left[X_i\right]}$ не перевищують 10 год.

Розв'язання

Згідно з другою нерівністю (11.8)

$$P\left\{\left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i-\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} m_i\right|<2\right\}\geq 1-\frac{100}{100\cdot 2^2}=\frac{3}{4}=0,75.$$

Зауваження 1. Розглянемо окремий випадок, коли $m_1=m_2=...=m_n=a$. Цим випадком обґрунтовується правило середнього арифметичного, яким широко послуговуються у практиці вимірювань. Нехай вимірюється деяка невипадкова величина a і випадкові величини $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ — можливі результати вимірювань. Тоді зміст рівностей $M\left[X_i\right]=a$ $\left(i=1,\ 2,\ ...,\ n\right)$ полягає в тому, що всі n вимірювань позбавлені систематичної похибки, а вимога $D\left[X_i\right]\leq L$ $\left(i=1,\ 2,\ ...,\ n\right)$ означає, що всі вимірювання здійснюються з деякою гарантованою точністю.

Приклад 6. Нехай деяка фізична величина з невідомим точним значенням a вимірюється n разів. Випадкові величини $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ — можливі результати вимірювань, закони розподілу яких уважаємо невідомими. Вимірювання позбавлені систематичних похибок $\left(M\left[X_i\right]=a,\ i=1,\ 2,\ ...,\ n\right)$ і середня квадратична похибка кожного вимірювання не перевищує σ (це означає, що

$D[X_i] \le \sigma^2$ для всіх i). Для зменшення випадкової похибки за кінцевий результат вимірювань береться середнє арифметичне $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Побудувати аналітичні оцінки для:

а) імовірності виконання нерівності

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon, \tag{11.9}$$

де n та $\varepsilon > 0$ — задані числа;

б) числа вимірювань n, яке гарантує виконання нерівності (11.9) з імовірністю не меншою від заданого значення p;

в) найменшого значення ε у нерівності (11.9), яке можна гарантувати для заданого n з імовірністю не меншою від заданого p.

Розв'язання

а) $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$;

б) шукану кількість вимірювань знаходимо з нерівності

$$1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \ge p,$$

розв'язавши яку відносно n, дістаємо

$$n \ge \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\frac{1}{1-p}; \tag{11.10}$$

в) з нерівності (11.10) маємо

$$\varepsilon^2 \ge \frac{\sigma^2}{n}\frac{1}{1-p} \quad \text{або} \quad \varepsilon \ge \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{1-p}},$$

звідки

$$\varepsilon_{\min} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{1-p}}.$$

Нерівностями (11.6), (11.7) встановлюється стійкість відносної частоти події за незмінних умов проведення серії експериментів. Але ця властивість частоти справедлива й у більш загальному випадку, коли умови проведення експерименту змінюються від експерименту до експерименту, так що ймовірності $p_1, p_2, ..., p_n$ появи події A у цих експериментах різні. Цей факт установлює ***теорема Пуассона***, якою за відомих $p_i \left(i = 1,\ 2,\ ...,\ n\right)$ користуються на практиці у вигляді рівносильних нерівностей

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i}{n^2 \varepsilon^2} \quad \text{та} \quad P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i}{n^2 \varepsilon^2}. \quad (11.11)$$

За невідомих p_i можна скористатись нерівністю $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i \leq 0,25n$ і дістати з нерівностей (11.11) слабші оцінки

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{0,25}{n\varepsilon^2} \quad \text{та} \quad P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{0,25}{n\varepsilon^2}.$$

Приклад 7. Однакові деталі виготовляються на двох верстатах. Продуктивність другого верстата вдвічі більша, ніж першого. Серед деталей першого верстата 6 % бракованих, другого — 9 %. Протягом зміни виготовляється 900 деталей. Оцінити кількість бракованих протягом зміни деталей, яку можна чекати з імовірністю не меншою від 0,95.

Розв'язання

Виготовлення кожної деталі розглядаємо як окремий експеримент. Усього виконується $n = 900$ експериментів. У кожному з них може відбутися чи ні подія A — виготовлено браковану деталь. Імовірність цієї події може змінюватись від експерименту до експерименту залежно від того, на якому верстаті деталь виготовляється. Нехай m — кількість бракованих протягом зміни деталей. Скористаємося другою нерівністю (11.11). Оскільки згідно з умовою задачі першим верстатом виготовляється 300 деталей і ймовірність браку кожної з них $p_i = 0,06$, а другим верстатом — 600 деталей і, відповідно, $p_i = 0,09$, то для середньої ймовірності $\frac{1}{900}\sum\limits_{i=1}^{900} p_i$ виготовлення бракованої деталі дістаємо

$$\frac{1}{900}\sum_{i=1}^{900} p_i = \frac{1}{900}\left(0,06 \cdot 300 + 0,09 \cdot 600\right) = 0,08$$

(зазначимо, що знайдена середня ймовірність — це ймовірність вибору навмання бракованої деталі, і її можна знайти як повну ймовірність за формулою повної ймовірності).

Отже,

$$P\left\{\left|\frac{m}{900}-0,08\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\left(0,06\cdot 0,94\cdot 300+0,09\cdot 0,91\cdot 600\right)\Big/\left(900\right)^2\varepsilon^2=$$

$$=1-\frac{66,06}{\left(900\right)^2\varepsilon^2},$$ і за умовою

$$1-\frac{66,06}{\left(900\right)^2\varepsilon^2}=0,95 \text{ або } \frac{66,06}{\left(900\right)^2\varepsilon^2}=0,05.$$

Звідси $\varepsilon\approx 0,04037$. З імовірністю не меншою від $0,95$ виконується нерівність $\left|\frac{m}{900}-0,08\right|<\varepsilon<0,0404$. Тому

$$0,08-0,0404<\frac{m}{900}<0,08+0,0404 \quad \text{або} \quad 35,64<m<108,36.$$

Ураховуючи, що m — ціле, остаточно дістаємо кількість бракованих деталей у межах $36\leq m\leq 108$.

Імовірність цієї оцінки не менша від $0,95$.

11.2. Центральна гранична теорема

У жодній із форм закону великих чисел не йшлося про закони розподілу випадкових величин. Граничні закони розподілу є предметом іншої групи теорем, що об'єднуються під єдиною назвою *центральної граничної теореми*.

Усі форми центральної граничної теореми присвячені встановленню умов, за яких виникає нормальний закон розподілу. Оскільки ці умови на практиці досить часто виконуються, нормальний закон є найпоширенішим законом розподілу. Він виникає в усіх випадках, коли випадкову величину можна подати у вигляді суми достатньо великої кількості незалежних елементарних доданків, кожен з яких окремо порівняно мало впливає на суму.

Теорема 1 (***центральна гранична теорема для однаково розподілених доданків***). Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — незалежні випадкові величини, що мають той самий закон розподілу з математичним сподіванням m і дисперсією σ^2, то за необмеженого збільшення n закон розподілу суми $\sum_{i=1}^{n} X_i$ необмежено наближається до нормального.

У переважній більшості випадків кількість доданків n, починаючи з якої суму $\sum_{i=1}^{n} X_i$ із задовільною для практики точністю можна вважати нормально розподіленою, порівняно невелика (у межах кількох десятків, а то навіть і десятка).

Приклад 8. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного 100 навмання вибраних чисел з відрізка $[a, b]$ від середини цього відрізка буде меншим за $\frac{b-a}{20}$, скориставшись теоремою 1 (див. задачу з прикладу 3).

Розв'язання

Як і в прикладі 3, можливі числа X_i $(i = \overline{1, 100})$ розглянемо як $n = 100$ незалежних рівномірно розподілених на відрізку $[a, b]$ випадкових величин:

$$M[X_i] = \frac{a+b}{2}, \quad D[X_i] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Оскільки множення на число не впливає на характер закону розподілу, середнє арифметичне $X = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ згідно з теоремою 1 вважаємо нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами

$$m_x = M[X] = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} M[X_i] = \frac{a+b}{2},$$

$$D[X] = \frac{1}{(100)^2}\sum_{i=1}^{100} D[X_i] = \frac{(b-a)^2}{1200} \quad \text{або} \quad \sigma_x = \sqrt{D[X]} = \frac{b-a}{20\sqrt{3}}.$$

Скористаємось формулою для ймовірності попадання нормально розподіленої випадкової величини в інтервал, симетричний відносно математичного сподівання (див. п. 7.2)

$$P\left\{\left|X - m_x\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) - 1. \qquad (11.12)$$

У нашому випадку $\varepsilon = \dfrac{b-a}{20}$, і за формулою (11.12)

$$P\left\{\left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{20}\right\} = 2\Phi\left(\sqrt{3}\right) - 1 \approx 2\Phi\left(1,73\right) - 1 \approx$$

$$\approx 2 \cdot 0,9582 - 1 = 0,9164$$

(значення $\Phi\left(1,73\right) = 0,9582$ знаходимо за табл. Д2.1, дод. 2).

Бачимо, що дана оцінка уточнює оцінку тієї самої ймовірності з прикладу 3, одержану на основі нерівності Чебишова.

Наслідки теореми 1 (*інтегральна та локальна формули Муавра — Лапласа*).

Нехай $X = m$ — кількість «успіхів» у схемі Бернуллі з n випробувань. Як ми вже знаємо, випадкова величина X має біномний розподіл з характеристиками $M\left[X\right] = np$, $D\left[X\right] = npq$, де p — імовірність «успіху» в кожному випробуванні, $q = 1 - p$. Крім того,

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad (11.13)$$

де X_i — індикатор «успіху» в i-му випробуванні (X_i набуває значення 1, якщо в i-му випробуванні спостерігається «успіх», та 0, якщо — «невдача»). Випадкові величини $X_i \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ є незалежними й однаково розподіленими з математичним сподіванням $M\left[X_i\right] = p$ і дисперсією $D\left[X_i\right] = pq$. Отже, зі збільшенням n розподіл нормованої суми (11.13) $\overset{*}{X} = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ наближається до нормованого нормального розподілу $N(0,1)$. Тому для достатньо великих n справедлива наближена рівність (див. п. 7.2)

$$P\left\{a \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \approx \Phi(b) - \Phi(a), \qquad (11.14)$$

де $\Phi(x)$ — функція розподілу нормального закону $N(0,1)$ (нагадаємо, що для нормально розподіленої випадкової величини, як і будь-якої іншої неперервної випадкової величини, імовірність попадання в інтервал $(a,\ b)$ чи відрізок $[a,\ b]$ однакова).

Наближена рівність (11.14) — це вже відома нам рівність (див. п. 5.2), що виражає собою суть інтегральної теореми Муавра — Лапласа.

Приклад 9. Оцінити кількість n підкидань симетричної монети, яка гарантує виконання нерівності $\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\right|\le 0{,}1$ (m — кількість випадань «герба») з імовірністю не меншою від 0,975.

Розв'язання

Скористаємось формулою

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1, \qquad (11.15)$$

яка є наслідком формули (11.14) (див. п. 5.2).

Для нашого випадку

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\right|\le 0{,}1\right\}\approx 2\Phi\left(0{,}2\sqrt{n}\right)-1\ge 0{,}975.$$

Звідси $\Phi\left(0{,}2\sqrt{n}\right)\ge 0{,}9875.$ За таблицею значень функції $\Phi(x)$ дістаємо $0{,}2\sqrt{n}\ge 2{,}24$ і $n\ge 126.$

Отже, монету потрібно підкинути не менше ніж 126 разів (за оцінкою на основі нерівності Чебишова потрібно не менше ніж 1000 підкидань, див. приклад 4).

Зауваження 2. Для несиметричної монети з невідомою ймовірністю p можна скористатись оцінкою

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1\ge 2\Phi\left(2\varepsilon\sqrt{n}\right)-1, \qquad (11.16)$$

оскільки $pq\le 0{,}25$, а функція $\Phi(x)$ — неспадна.

Отримаємо те ж саме $n\ge 126$.

Рекомендуємо **самостійно**, скориставшись оцінками (11.15), (11.16), розв'язати задачу для кубика з прикладу 4.

Обґрунтувати локальну формулу Муавра — Лапласа як наслідок теореми 1 пропонуємо **самостійно**.

Центральна гранична теорема для достатньо широкого комплексу умов справедлива й у разі неоднаково розподілених незалежних випадкових величин $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$.

Усі ці умови, грубо кажучи, зводяться до того, що вплив кожного доданка на утворення суми $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ має бути малим.

Теорема 2 (**теорема Ляпунова**). Нехай $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ — *незалежні* випадкові величини з *довільними* розподілами, кожна з яких має скінченні математичне сподівання, дисперсію і третій абсолютний центральний момент. Якщо для $n \to \infty$ виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} M\left[\left|X_i - M\left[X_i\right]\right|^3\right]}{\left(\sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right]\right)^{\frac{3}{2}}} = 0, \qquad (11.17)$$

то розподіл випадкової величини $\overset{*}{Y}_n = \dfrac{Y_n - M\left[Y_n\right]}{\sqrt{D\left[Y_n\right]}}$, де $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, зі збільшенням *n* необмежено наближається до нормального розподілу з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією, тобто до нормального закону зі щільністю $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$. Очевидно, що розподіл суми $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ також наближається до нормального.

У практичних задачах центральну граничну теорему часто застосовують для знаходження ймовірності того, що сума кількох випадкових величин попаде в заданий інтервал. Нехай $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ — незалежні випадкові величини з математичними сподіваннями $m_1, m_2, \ldots, m_n$ і дисперсіями $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Нехай умови центральної граничної теореми виконуються і кількість доданків *n* є достатньою для того, щоб закон розподілу величини $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ можна було вважати наближено нормальним. Тоді ймовірність того, що випадкова величина *Y* попаде в інтервал $(\alpha,\ \beta)$, можна наближено знайти за формулою

$$P\{\alpha < Y < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_y}{\sigma_y}\right),$$

де m_y, σ_y — математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення величини Y, а $\Phi(x)$ — функція розподілу нормального закону $N(0,1)$.

Зокрема, імовірність попадання випадкової величини Y в інтервал, симетричний відносно математичного сподівання m_y, наближено обчислюється за формулою

$$P\{|Y - m_y| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_y}\right) - 1. \qquad (11.18)$$

Величини m_y, σ_y знаходять за відомими m_i, D_i:

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} m_i, \qquad \sigma_y = \sqrt{D[Y]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D[X_i]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}.$$

Отже, для того щоб наближено знайти ймовірність попадання суми великої кількості незалежних випадкових величин у заданий інтервал, не обов'язково знати закони розподілу цих величин, достатньо знати лише їхні числові характеристики. Звичайно, мається на увазі, що виконується основна умова центральної граничної теореми — ***рівномірно малий вплив доданків на розсіювання суми*** (у цьому полягає фізичний зміст умови (11.17) у теоремі Ляпунова).

Приклад 10. Розв'язати задачу з прикладу 5, користуючись центральною граничною теоремою.

Розв'язання

На основі центральної граничної теореми випадкову величину $Y = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ вважаємо нормально розподіленою (множник $\frac{1}{100}$ не впливає на вид розподілу) з параметрами

$$m_y = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} m_i, \qquad \sigma_y = \sqrt{D[Y]} = \frac{1}{100}\sqrt{\sum_{i=1}^{100} D[X_i]}.$$

Оскільки за умовою $D[X_i] \le 100$ для всіх $i = \overline{1, 100}$, то

$$\sigma_y \le \frac{1}{100}\sqrt{\sum_{i=1}^{100} 100} = 1.$$

Скористаємось формулою (11.18):

$$p = P\left\{\left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} m_i\right| < 2\right\} = 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma_y}\right) - 1 \ge$$

$$\ge 2\Phi\left(\frac{2}{1}\right) - 1 = 2\Phi(2) - 1 = 2\cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544.$$

Тут ми знову врахували те, що функція $\Phi(x)$ — неспадна.

Оцінка на основі нерівності Чебишова дає значно меншу ймовірність $p \ge 0{,}75$.

Зауваження 3. Користуючись центральною граничною теоремою у прикладі 10, ми не обумовлювали можливість її використання у розумінні умови (11.17), а керувались лише кількістю доданків (вона досить велика) і передбачали рівномірно малий вплив доданків на суму. На практиці зазвичай так і роблять.

11.3. Про наближену нормальність результатів вимірювань

У прикладі 6 вважалось, що закон розподілу випадкової величини X_i — можливого результату вимірювання деякої фізичної величини a — невідомий. Насправді це не зовсім так. Результат будь-якого вимірювання супроводжується похибкою. При цьому похибки можуть бути як систематичні, так і випадкові. Якщо систематичних похибок можна завжди позбутися, то випадкової похибки — ніколи. Випадкова похибка у вимірюванні — це сума великої кількості «елементарних» похибок, кожна з яких породжується тим чи іншим випадковим фактором, що сам по собі мало впливає на результат вимірювання. А тому внесок кожної «елементарної» випадкової похибки в сумарну випадкову похибку, як правило, незначний. Отже, за теоремою Ляпунова випадкова похибка вимірювання повинна мати наближено нормальний закон розподілу. Як показує практика, це справді так. Якщо вимірюється деяка фізична величина з точним значенням a, то результат вимірювання X є випадковою величиною вигляду $X = a + \Delta X$, де ΔX — похибка вимірювання. Якщо $M[X]=a$ (вимірювання позбавлене систематичної похибки), то $M[\Delta X]=0$ і тому ΔX є випадковою похибкою, закон розподілу якої згідно з теоремою Ляпунова близький до нормального закону зі щільністю $f_{\Delta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, де σ — середнє квадратичне відхилення випадкової величини ΔX (середня квадратична похибка вимірювань). А тому й результат вимірювання X має наближено нормальний закон розподілу зі щільністю

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нехай виконуються n незалежних вимірювань без систематичних похибок тієї самої величини, точне значення якої a. Результат i-го $\left(i=\overline{1, n}\right)$ вимірювання згідно з зазначеним розглядаємо як нормально розподілену випадкову величину X_i з математичним сподіванням $M[X_i]=a.$ Оскільки довільна лінійна функція незалежних випадкових величин з нормальними розподілами залишається розподіленою нормально, то середнє арифметичне

$$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{11.19}$$

результатів вимірювань є випадковою величиною, розподіленою нормально для будь-якого n.

Отже, на відміну від загального випадку, нормальність середнього арифметичного випадкових величин X_i — результатів незалежних вимірювань не пов'язується безпосередньо із центральною граничною теоремою (її використано на рівні обґрунтування нормальності доданків X_i). У такому разі будь-які обмеження центральної граничної теореми, як-от кількість доданків, рівномірно малий їх вплив на суму, знімаються. Наприклад, незалежно від того, проводяться вимірювання одним приладом в однакових умовах (середня квадратична похибка вимірювання $\sigma_i=\sqrt{D[X_i]}=\sigma$ — та сама для кожного вимірювання) чи різними приладами (σ_i — різні, причому можуть сильно відрізнятися одна від одної), середній результат вимірювань (11.19) залишається нормальним.

Імовірність попадання середнього арифметичного (11.19) результатів вимірювань в інтервал, симетричний відносно математичного сподівання a, обчислюється за формулою

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_y}\right) - 1,$$

де

$$\sigma_y = \sqrt{D[Y]} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}.$$

Якщо $\sigma_i = \sigma$ для всіх $i = \overline{1, n}$, то

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1.$$

Якщо ж усі середні квадратичні похибки обмежені деяким σ, тобто $\sigma_i \le \sigma$ для всіх $i = \overline{1, n}$, то

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} \ge 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1, \qquad (11.20)$$

оскільки функція $\Phi(x)$ — неспадна.

Уведемо поняття *квантиля* неперервного розподілу, яке будемо далі використовувати.

Означення 1. *Квантилем порядку* p розподілу неперервної випадкової величини X називається невипадкове число x_p, для якого

$$P\{X < x_p\} = F(x_p) = p,$$

де $F(x)$ — функція розподілу.

Якщо щільність розподілу $f(x)$ симетрична відносно осі ординат, то для квантилів порядку p та $1-p$ виконується рівність

$$x_{1-p} = -x_p.$$

Рекомендуємо довести цю рівність **самостійно.**

Для квантиля порядку p нормованого нормального розподілу $N(0,\ 1)$ використовується спеціальне позначення u_p (рис. 11.1, 11.2). Заштрихована площа на рис. 11.2 дорівнює p.

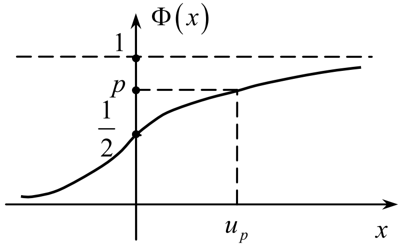


Рис. 11.1

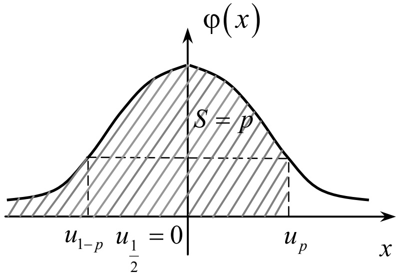


Рис. 11.2

Значення u_p для різних p табульовані (див. дод. 1, табл. Д1.3). Користуючись таблицею, слід пам'ятати рівність

$$u_{1-p} = -u_p.$$

Приклад 11. Побудувати аналітичні оцінки величин із прикладу 6, скориставшись нормальністю результатів вимірювань $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Розв'язання

а) оцінка ймовірності дається співвідношенням (11.20);

б) оцінку кількості вимірювань n знаходимо з нерівності

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 \geq p,$$

скориставшись поняттям квантиля:

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq \frac{1+p}{2} = \Phi\left(u_{\frac{1+p}{2}}\right) \quad \text{або} \quad \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \geq u_{\frac{1+p}{2}}, \qquad (11.21)$$

звідки

$$n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} u^2_{\frac{1+p}{2}}; \qquad (11.22)$$

в) розв'язавши нерівність (11.21) відносно ε, дістаємо

$\varepsilon \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{1+p}{2}}$, звідки

$$\varepsilon_{\min} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{1+p}{2}}. \tag{11.23}$$

Приклад 12. Показати, що оцінки (11.20), (11.22), (11.23) уточнюють відповідні оцінки з прикладу 6.

Розв'язання

Нехай випадкова величина X має розподіл $N(0, 1)$. Тоді для $x > 0$

$$\Phi(x) = P\{X < x\} = 1 - P\{X \geq x\} = 1 - \frac{1}{2} P\{|X| \geq x\} \geq 1 - \frac{1}{2x^2}. \tag{11.24}$$

Тут ми скористались рівністю

$$P\{X \geq x\} = \frac{1}{2} P\{|X| \geq x\},$$

яка враховує симетричність щільності $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ розподілу $N(0, 1)$ відносно осі ординат (рис. 11.2), та нерівністю Чебишова.

Візьмемо у нерівності (11.24) $x = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$. Тоді

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{2\varepsilon^2 n} \quad \text{або} \quad 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}. \tag{11.25}$$

Крім того, для квантиля $u_{\frac{1+p}{2}}$ з нерівності (11.24) дістаємо

$$\frac{1+p}{2} = \Phi\left(u_{\frac{1+p}{2}}\right) \geq 1 - \frac{1}{2u^2_{\frac{1+p}{2}}},$$

звідки

$$u^2_{\frac{1+p}{2}} \leq \frac{1}{1-p} \quad \text{або} \quad u_{\frac{1+p}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-p}}. \tag{11.26}$$

Порівняння оцінок (11.20), (11.22), (11.23) з відповідними оцінками з прикладу 6 на основі нерівностей (11.25) та (11.26) розв'язує задачу.

► *Задачі*

1. Дано: $P\left\{\left|X - M\left[X\right]\right| < \varepsilon\right\} \geq 0{,}9$ і $D\left[X\right] = 0{,}009$.

Використовуючи нерівність Чебишова, знайти ε.

2. Імовірність появи події в кожному незалежному випробуванні дорівнює 0,25. Використовуючи нерівність Чебишова, оцініть імовірність того, що число X — кількість появ події міститься в межах від 150 до 250, якщо зроблено 800 випробувань.

3. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

x_i	0,1	0,4	0,6
p_i	0,2	0,3	0,5

Користуючись нерівністю Чебишова, оцініть імовірність того, що $\left|X - M\left[X\right]\right| < \sqrt{0,4}.$

4. Здійснюється випадкове обстеження партії електроламп для визначення тривалості їх горіння. Скільки треба перевірити електролампочок, щоб з імовірністю не меншою за 0,9876 можна було стверджувати, що середня тривалість горіння лампочки для всіх *n* штук перевірених відхиляється від математичного сподівання тривалості горіння лампочки менше ніж на 10 год, якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампочок дорівнює 80 год?

5. Випадкова величина $\overline{X}$ — середнє арифметичне 10 000 незалежних випадкових величин, що мають той самий закон розподілу. Середнє квадратичне відхилення кожної з них дорівнює 2. Яке максимальне відхилення величини $\overline{X}$ від її математичного сподівання можна очікувати з імовірністю 0,9544?

6. В освітлювальну мережу паралельно ввімкнуто 20 лампочок. Імовірність того, що за час T лампочка буде ввімкнена, дорівнює 0,8. Користуючись нерівністю Чебишова, оцініть імовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю ввімкнених ламп та середньою кількістю (математичним сподіванням) увімкнених ламп за час T буде: а) менше ніж 3; б) не менше ніж 3.

7. Дисперсія кожної з 800 незалежних величин не перевищує 9. Якою має бути верхня межа абсолютної величини відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань, щоб імовірність такого відхилення перевищувала 0,997?

8. Правильний гральний кубик кидають 10 000 разів. Оцініть імовірність відхилення відносної частоти появи 6 очок від імовірності появи 6 очок менше ніж на 0,01.

9. Добова потреба в електроенергії деякого населеного пункту є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 2 000 кВт/год, а дисперсія — 20 000. Оцініть імовірність того, що найближчої доби витрата електроенергії в цьому населеному пункті буде в межах від 1 500 до 2 500 кВт/год.

10. Дисперсія кожної з 3 500 незалежних випадкових величин дорівнює 5. Оцініть імовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань буде менше ніж 0,25.

11. Імовірність настання події A у кожному випробуванні дорівнює 0,4. Визначте ймовірність того, що в 20 000 випробувань відхилення відносної частоти події A від імовірності її настання буде меншою за абсолютною величиною 0,01.

12. Скільки слід перевірити деталей, щоб з імовірністю, не меншою за 0,95 можна було стверджувати, що абсолютна величина відхилення відносної частоти придатних деталей від імовірності того, що деталь придатна, яка дорівнює 0,9, буде менша за 0,01?

13. Розподіл випадкової величини X задається такою таблицею:

x_i	—1	0	2	4	6
p_i	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Чому дорівнює ймовірність того, що $\left| X - M\left[X\right] \right| < 5$? Оцініть цю ймовірність, використовуючи нерівність Чебишова.

14. Середнє значення довжини деталі 50 см, а дисперсія — 0,1. Користуючись нерівністю Чебишова, оцініть імовірність того, що випадково взята деталь виявиться завдовжки не менше ніж 49,5 см і не більше ніж 50,5 см.

15. Оцініть імовірність того, що відхилення будь-якої випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною буде менше від трьох середніх квадратичних відхилень (правило трьох сигм).

16. Для визначення середньої врожайності поля в 5 000 га пропонується взяти на вибірку по 1 м^2 з кожного гектара і точно підрахувати врожайність із цих квадратних метрів. Оцініть імовірність того, що середня вибіркова врожайність буде відрізнятися від справжньої середньої врожайності на всьому полі менше ніж на 0,2 ц/га, якщо вважати, що середнє квадратичне відхилення врожайності на кожному гектарі не перевищує 5 ц/га.

17. За значення деякої величини беруть середнє арифметичне достатньо великої кількості її вимірювань. Уважаючи, що середнє квадратичне відхилення можливих результатів кожного вимірювання не перевищує 1 см, оцініть імовірність того, що за 1 000 вимірювань невідомої величини відхилення взятого значення від справжнього за абсолютною величиною буде менше ніж 0,1 см.

18. Відомо, що дисперсія кожної з даних незалежних випадкових величин не перевищує 4. Визначте таку кількість цих величин, за якої ймовірність відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань менше ніж на 0,25 перевищить 0,99.

19. Скільки виробів даного підприємства потрібно обстежити, щоб з імовірністю не меншою від 0,95 стверджувати, що відносна частота появи бракованого виробу серед n обстежуваних відрізняється за абсолютною величиною від імовірності браку $p = 0{,}02$ менше ніж на 0,01?

20. Імовірність народження дівчинки 0,485. Оцініть знизу ймовірність того, що кількість дівчат серед 3 000 новонароджених відрізнятиметься від математичного сподівання цього числа за абсолютною величиною менше ніж на 50.

21. Яке значення має бути у величини ε в нерівності Чебишова, щоб $P\left\{\left| X - M\left[X\right] \right| < \varepsilon\right\} \geq 0{,}99$, якщо відомо, що $D(X) = 4$?

22. Імовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,86. Оцініть імовірність того, що в результаті перевірки 1 000 деталей відносна частота нестандартних деталей відхилиться від імовірності нестандартної деталі за абсолютною величиною менше ніж на 0,04.

23. Імовірність виготовлення нестандартної мікросхеми дорівнює 0,04. Яку найменшу кількість мікросхем слід узяти, щоб з імовірністю 0,88 можна було стверджувати, що частка серед них нестандартних буде відрізнятися від імовірності виготовлення нестандартної мікросхеми за абсолютною величиною менше ніж на 0,02?

24. З 5 000 виконаних випробувань у 2 000 імовірність появи події A дорівнює 0,2, у 1400 — 0,5 та в 1600 — 0,6. Знайдіть межі, в яких має бути відносна частота події A, якщо це потрібно гарантувати з імовірністю 0,95.

25. Виконано 500 незалежних випробувань; у 200 з них імовірність появи події A дорівнює 0,4, у 180 — 0,5 та в 120 — 0,6. Оцініть знизу ймовірність того, що відхилення відносної частоти від середньої ймовірності буде менше за абсолютною величиною 0,05.

26. Вибірково слід визначити середній зріст чоловіків двадцяти років. У скількох чоловіків, відібраних випадковим чином, потрібно виміряти зріст, аби з імовірністю, яка перевищує 0,98, можна було стверджувати, що середній зріст у відібраної групи буде відрізнятися від середнього зросту всіх двадцятирічних чоловіків за абсолютною величиною менше ніж на 1 см? Відомо, що середнє квадратичне відхилення зросту для кожного чоловіка у відібраній групі не перевищує 5 см.

27. Імовірність того, що день буде сонячним для даної місцевості, дорівнює 0,6. Оцініть знизу ймовірність того, що протягом 600 днів від 340 до 380 буде сонячних днів.

28. Розв’язати задачу 17, скориставшись як теоремою Чебишова, так і нормальністю результатів вимірювань [див. формулу (11.20)].

29. Розв’язати задачу 8 як на основі нерівності Чебишова, так і на основі інтегральної теореми Муавра — Лапласа [див. формулу (11.15)].

30. Дисперсія кожної зі 100 незалежних випадкових величин не перевищує 100. Оцініть імовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань буде меншим від 2. Скористайтесь: а) узагальненою теоремою Чебишова; б) центральною граничною теоремою [див. формулу (11.18)].

Розділ III

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

12. ТОЧКОВІ ОЦІНКИ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТА ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ВИБІРКИ

12.1. Поняття вибірки та методи її опису

Методи, які дають змогу за результатами експериментів (спостережень) робити обґрунтовані висновки про параметри, вигляд розподілу та інші властивості випадкових величин, є предметом вивчення ***математичної статистики***.

Зауваження 1. Формулюючи предмет математичної статистики, ми одночасно акцентуємо увагу на тому, що основним об'єктом дослідження на основі експериментальних даних вибираємо випадкову величину. Що стосується, наприклад, невідомої ймовірності випадкової події A, то питання про її знаходження завжди можна звести до питання про розподіл індикатора цієї події, тобто випадкової величини, яка набуває значення 1, якщо подія A відбувається, та 0, якщо не відбувається.

У математичній статистиці використовуються всі основні поняття теорії ймовірностей. Разом з тим вихідним поняттям математичної статистики є поняття вибірки. Тут вибірку ми розумітимемо так. Нехай вивчається деяка неперервна чи дискретна випадкова величина X. З цією метою над нею проводяться *n незалежних* експериментів (спостережень), при цьому умови проведення експериментів уважаємо незмінними. Нехай x_i — значення, якого набула випадкова величина X в i-му експерименті $(i = 1, 2, ..., n)$. Набір чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назвемо *вибіркою* обсягу n. Іноді будемо вживати термін *вибіркова сукупність* обсягу n. При цьому множину всіх можливих значень випадкової величини X назвемо *генеральною сукупністю*, а закон розподілу випадкової величини X — *розподілом генеральної сукупності.*

Послідовність елементів вибірки, записаних у зростаючому порядку, називають *варіаційним рядом*. Різницю між найбільшим та найменшим значеннями варіаційного ряду називають *розмахом* вибірки.

Серед чисел x_i можуть бути однакові. У першу чергу це буває, коли вивчається дискретна випадкова величина. Тому розглянемо спочатку цей випадок. Перш за все зі статистичного ряду виписують значення x_1 і кількість спостережень n_1 цього значення, потім x_2 і кількість спостережень n_2 і так далі, аж до x_k і кількості спостережень n_k. Очевидно, що $\sum_{i=1}^{k} n_i = n,$ де n — обсяг вибірки. Числа x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ називають *варіантами*. Послідовність варіант записують у зростаючому порядку. Нехай x_1 — найменша, а x_k — найбільша варіанти. Тоді $R = x_k - x_1$ — розмах вибірки. Кількість спостережень n_i називають *частотою*, а його відношення до обсягу вибірки n, тобто $\frac{n_i}{n} = w_i$ — *відносною частотою*. Очевидно, що $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$.

Статистичним розподілом вибірки (статистичним рядом) називають перелік варіант, записаних у зростаючому порядку, і відповідних їм частот або відносних частот.

За статистичним розподілом вибірки можна знайти ***емпіричну функцію розподілу*** $F^*(x)$:

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n} , \tag{12.1}$$

де підсумовування поширюється на всі x_i, які менші за x.

З метою більшої наочності будують різні графічні зображення вибірки, зокрема ***полігон*** частот.

Полігоном частот називають ламану з вершинами у точках (x_i, n_i). *Полігоном відносних частот* називають ламану з вершинами у точках (x_i, w_i), де $w_i = \frac{n_i}{n}$.

У разі *неперервної* випадкової величини X елементи вибірки зазвичай об'єднують у групи і подають результати спостережень у вигляді ***інтервального варіаційного ряду***.

Для цього інтервал, який містить усі елементи вибірки, розбивають на k часткових інтервалів, що не перетинаються. Здебільшого ці інтервали вибирають однакової довжини $b \approx \frac{R}{k}$, де R — розмах вибірки. Після того як часткові інтервали вибрано, визначають груповані частоти n_i^* — кількість елементів вибірки, що попали в i-й інтервал. Очевидно, що $\sum_{i=1}^{k} n_i^* = n$, де n — обсяг вибірки. Якщо елемент вибірки збігається з верхньою межею часткового інтервалу, то його відносять до наступного інтервалу.

Приклад 1. У результаті дослідження 50 одиниць продукту одержано такі дані про наявність (у грамах) шкідливих домішок:

1,1	3,1	5,0	5,1	1,3	6,4	5,5	3,4	2,0	8,7
6,1	1,2	6,6	3,6	2,5	8,5	7,5	3,2	8,9	9,1
10,5	1,4	3,3	3,9	7,8	5,4	6,0	9,7	5,8	8,6
2,9	9,5	6,2	6,7	5,3	6,5	5,7	10,1	8,0	6,8
6,9	3,0	5,6	3,7	6,3	7,2	3,5	5,2	3,8	5,9

Побудувати інтервальний варіаційний ряд, узявши 5 часткових інтервалів.

Розв'язання

Найбільший та найменший елементи вибірки дорівнюють відповідно 10,5 та 1,1. Тому розмах вибірки $R = 10,5 - 1,1 = 9,4$. Для довжини часткового інтервалу дістаємо $b = \frac{9,4}{5} \approx 2$. Перший інтервал зручно взяти від 1 до 3. Результати (ще кажуть — результати групування вибірки) подамо у вигляді таблиці

$a_i - a_{i+1}$	1–3	3–5	5–7	7–9	9–11
n_i^*	7	10	20	8	5

За формулою (12.1) будується емпірична функція розподілу й у випадку інтервального варіаційного ряду. Для цього x_i слід замінити на середини часткових інтервалів x_i^* (у прикладі 1 це відповідно числа $x_1^* = 2,\ \ x_2^* = 4,\ \ x_3^* = 6,\ \ x_4^* = 8,\ \ x_5^* = 10$), а частоти n_i — на груповані частоти n_i^*.

Емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ будь-якої випадкової величини X (дискретної чи неперервної) можна ще означати як $F^*(x) = P^*\{X < x\}$, де $P^*\{X < x\}$ — відносна частота події $\{X < x\}$. Тому за теоремою Бернуллі (див. п. 5.2) емпірична функція розподілу $F^*(x)$ зі збільшенням числа експериментів n «стає близькою» до справжньої функції розподілу $F(x) = P\{X < x\}$ випадкової величини X (функції розподілу генеральної сукупності), а саме для будь-якого дійсного числа x

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|F^*(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

де ε — як завгодно мале число.

Для більшої наочності за даними інтервального варіаційного ряду будують гістограму частот.

Гістограмою частот називають східчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною b, а висоти дорівнюють щільностям частот $\frac{n_i^*}{b}$. Площа гістограми дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вибірки:

$$\sum_i b\frac{n_i^*}{b} = \sum_i n_i^* = n.$$

Аналогічно будують *гістограму відносних частот* — східчасту фігуру, що складається з прямокутників, в основі яких лежать часткові інтервали довжиною b, а висоти дорівнюють щільностям відносних частот $\frac{w_i}{b}$, де $w_i = \frac{n_i^*}{n}$ — відносна частота. Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці: $\sum_i b\frac{w_i}{b} = \sum_i w_i = \sum_i \frac{n_i^*}{n} = 1$. Якщо точки гістограми відносних частот з'єднати плавною лінією, то ця лінія у першому наближенні буде зображати графік щільності $f(x)$ розподілу ймовірностей випадкової величини.

Приклад 2. Побудувати гістограму відносних частот за даними інтервального варіаційного ряду з прикладу 1.

Розв'язання

Знайдемо відносні частоти:

$$w_1 = \frac{7}{50} = 0{,}14;\ w_2 = \frac{10}{50} = 0{,}2;\ w_3 = \frac{20}{50} = 0{,}4;\ w_4 = \frac{8}{50} = 0{,}16;$$

$$w_5 = \frac{5}{50} = 0{,}1.$$

Знайдемо щільності відносних частот, ураховуючи, що довжина часткового інтервалу $b = 2$:

$$\frac{w_1}{b} = 0{,}07;\ \frac{w_2}{b} = 0{,}1;\ \frac{w_3}{b} = 0{,}2;\ \frac{w_4}{b} = 0{,}08;\ \frac{w_5}{b} = 0{,}05.$$

Будуємо гістограму частот (рис. 12.1).

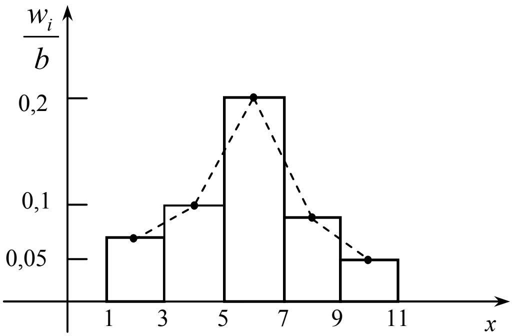


Рис. 12.1

Зауважимо, що за даними інтервального варіаційного ряду можна побудувати і полігон частот як ламану з вершинами у точках $\left(x_i^*, n_i^*\right)$, де x_i^* — середина i-го часткового інтервалу. Аналогічно будується полігон відносних частот (ламана з вершинами у точках $\left(x_i^*, w_i\right)$, $w_i = \frac{n_i^*}{n}$).

Особливе значення має ламана з вершинами у точках $\left(x_i^*, \frac{w_i}{b}\right)$, яка є наближенням графіка щільності розподілу ймовірностей випадкової величини (рис. 12.1).

Користуючись поданням експериментальних даних у вигляді інтервального варіаційного ряду, слід пам'ятати, що воно вносить певну похибку в дальші обчислення. Ця похибка зростає зі зменшенням кількості часткових інтервалів.

12.2. Числові характеристики вибірки

У викладанні матеріалу, не пов'язаного з конкретними обчисленнями, вибірку ліпше розглядати в найбільш загальному випадку, не звертаючись до того чи іншого способу її обробки.

Нехай задано вибірку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обсягу n з генеральної сукупності X. Цю вибірку зручно розглянути як деяку умовну дискретну випадкову величину X^*, що набуває значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з однаковими ймовірностями $p_1 = \frac{1}{n},\ p_2 = \frac{1}{n}, \ldots, p_n = \frac{1}{n}.$ Тоді емпірична функція розподілу $F^*(x)$ (ще — функція розподілу вибірки) уводиться як функція розподілу цієї умовної дискретної випадкової величини X^*, а математичне сподівання та дисперсія останньої:

$$M\left[X^*\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = m^*,$$

$$D\left[X^*\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m^*\right)^2 p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m^*\right)^2$$

беруться за відповідні ***числові характеристики вибірки***:

$\overline{x} = m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ — ***вибіркове середнє*** (тут і нижче для вибіркового середнього використовується традиційне позначення $\overline{x}$),

$$D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \text{ — } \textbf{\textit{вибіркова дисперсія}}.$$

Аналогічно, з використанням співвідношень

$$\alpha_r^* = M\left[\left(X^*\right)^r\right], \qquad \beta_r^* = M\left[\left(X^* - m^*\right)^r\right]$$

вводяться вибіркові початкові α_r^* та центральні β_r^* моменти

$$\alpha_r^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r, \quad \beta_r^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^r$$

довільного порядку r.

Нехай досліджується двовимірна випадкова величина (X, Y) (двовимірна генеральна сукупність) і в результаті n незалежних спостережень над цією величиною одержано значення $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ — ***двовимірну вибірку*** обсягу n.

Розподілом двовимірної вибірки називають розподіл системи двох дискретних випадкових величин, яка набуває значень (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ з однаковими ймовірностями $\dfrac{1}{n}$. Вибіркові числові характеристики двовимірної вибірки обчислюються як відповідні числові характеристики цієї системи.

Основні вибіркові характеристики двовимірної вибірки такі:

$\overline{x} = m_x^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = m_y^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ — вибіркові середні;

$D_x^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$, $D_y^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2$ — вибіркові дисперсії;

$K_{xy}^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ — вибіркова коваріація або

$k_{xy}^* = \dfrac{K_{xy}^*}{\sqrt{D_x^*}\sqrt{D_y^*}}$ — вибірковий коефіцієнт кореляції.

12.3. Точкові оцінки та їх властивості

Нехай у результаті n незалежних експериментів отримано вибірку $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Виникає питання — як на основі цієї вибірки оцінити невідомий параметр a розподілу випадкової величини X? Оцінку параметра будемо позначати $\tilde{a}$. Міркуємо так: припустимо, що експерименти ще не проведені і їх результати нам не відомі, тобто є випадковими. Позначимо через X_i значення, якого набуде випадкова величина X в i-му експерименті. Тоді вибірку $x_1, x_2, \dots, x_n$ можна розглядати як конкретну реалізацію випадкового вектора з n незалежними компонентами $X_1, X_2, \dots, X_n$, кожна з яких має розподіл генеральної сукупності, тобто самої випадкової величини X, що спостерігається. Вектор $\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right)$ називають ***вибірковим вектором***. Оцінкою $\tilde{a}$ параметра a завжди є деяка функція (комбінація) елементів вибірки, які випадковим чином змінюються від вибірки до вибірки. Тому цю оцінку можна розглядати як функцію n випадкових величин X_i (вибіркового вектора), тобто вважати випадковою величиною

$$\tilde{a} = \tilde{a}(X_1, X_2, \dots, X_n). \tag{12.2}$$

Невипадкова функція (12.2) випадкових аргументів X_i, які є можливими значеннями елементів вибірки, називається *статистикою*. Наприклад, $\tilde{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \tilde{m}\right)^2$ — статистики.

Отже, оцінка $\tilde{a}$ параметра a розглядається як випадкова величина. Закон розподілу цієї величини залежить від закону розподілу випадкової величини X, що спостерігається, вигляду функції (12.2), а тому й від кількості експериментів n. Для того щоб оцінка $\tilde{a}$ була «доброякісною», до неї висуваються певні вимоги:

1. По-перше, ця оцінка має бути *змістовною*. Математично це означає виконання рівності

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\tilde{a} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1 \text{ для будь-якого } \varepsilon > 0. \tag{12.3}$$

2. По-друге, потрібно вимагати, щоб виконувалась умова

$$M\left[\tilde{a}\right] = a. \tag{12.4}$$

Якщо умова (12.4) виконується, то оцінка $\tilde{a}$ називається *незміщеною*. Якщо не виконується, то вона називається *зміщеною*.

Приклад 3. Нехай $\tilde{a}$ — незміщена оцінка параметра a і її дисперсія $D\left[\tilde{a}\right]$ прямує до нуля зі збільшенням кількості експериментів n. Показати, що оцінка $\tilde{a}$ — змістовна.

Розв'язання

З нерівності Чебишова

$$P\left\{\left|\tilde{a}-a\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{D\left[\tilde{a}\right]}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\left\{\left|\tilde{a}-a\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{D\left[\tilde{a}\right]}{\varepsilon^2}$$

при $n\to\infty$ дістаємо рівність (12.3).

3. Припустимо, що для оцінки того самого невідомого параметра a запропоновано дві змістовні і незміщені оцінки $\tilde{a}_1$ та $\tilde{a}_2$, дисперсії яких дорівнюють відповідно $D\left[\tilde{a}_1\right]$ та $D\left[\tilde{a}_2\right]$. З нерівності Чебишова випливає, що бажано використовувати ту оцінку, дисперсія якої менша (чим менша дисперсія оцінки, тим менша ймовірність грубої похибки при визначенні параметра a). Якщо $D\left[\tilde{a}_1\right]<D\left[\tilde{a}_2\right]$, то кажуть, що оцінка $\tilde{a}_1$ є більш ефективною, ніж оцінка $\tilde{a}_2$.

Зауваження 2. Поняття ефективності оцінки вводиться в такий спосіб. Припустимо, що дисперсія $D\left[\tilde{a}_e\right]$ оцінки $\tilde{a}_e$ є найменшою серед дисперсій $D\left[\tilde{a}\right]$ всіх можливих змістовних і незміщених оцінок $\tilde{a}$ параметра a, які обчислюються за вибіркою того самого обсягу n. Така оцінка $\tilde{a}_e$ називається *ефективною.* Ефективність довільної оцінки $\tilde{a}$ визначається співвідношенням

$$e=\frac{D\left[\tilde{a}_e\right]}{D\left[\tilde{a}\right]}.$$

Очевидно, що $0\leq e\leq 1$. Чим ближче e до 1, тим ефективнішою є оцінка $\tilde{a}$.

Зауваження 3. Бажано, щоб оцінки невідомих параметрів задовольняли всі три вимоги: змістовності, незміщеності та ефективності. Проте на практиці це не завжди вдається. Часто доводиться користуватись *асимптотично ефективними* оцінками, для яких $e\to 1$ при $n\to\infty$, або оцінками з *асимптотичною незміщеністю*, коли $M\left[\tilde{a}\right]\to a$ при $n\to\infty$. Що стосується змістовності оцінки, то ця вимога повинна задовольнятись завжди, оскільки незмістовні оцінки втрачають будь-який практичний зміст.

Якщо параметр a водночас є і числовою характеристикою випадкової величини X, наприклад, математичним сподіванням або дисперсією, то за оцінку цього параметра природно взяти відповідну вибіркову числову характеристику. Проте такий спосіб оцінювання не завжди приводить до найліпшиих оцінок у розумінні сформульованих до них вище вимог. Нехай математичне сподівання $M\left[X\right]=m$ та дисперсія $D\left[X\right]$ випадкової величини X невідомі. За оцінку математичного сподівання візьмемо вибіркове середнє, розглядаючи його як випадкову величину

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i. \tag{12.5}$$

Оскільки $M\left[\overline{X}\right]=m,\ D\left[\overline{X}\right]=\dfrac{D\left[X\right]}{n}$ [див. формули (11.3)], оцінка (12.5) є незміщеною і змістовною (див. приклад 3).

Ефективність чи неефективність оцінки (12.5) залежать від закону розподілу випадкової величини X. Доведено, що для нормально розподіленої випадкової величини X оцінка (12.5) є ефективною.

Розглянемо як випадкову величину вибіркову дисперсію

$$D^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2. \tag{12.6}$$

Можна показати, що (12.6) є змістовною оцінкою дисперсії $D\left[X\right]$, проте $M\left[D^*\right]=\dfrac{n-1}{n}D\left[X\right]$. Тому, користуючись оцінкою (12.6) замість $D\left[X\right]$, ми будемо робити систематичну похибку в бік заниження величини $D\left[X\right]$, оскільки $\dfrac{n-1}{n}<1$ (обчислення вибіркової дисперсії D^* за різними вибірками обсягу n у середньому дають значення менше за $D\left[X\right]$). Проте $\dfrac{n-1}{n}\to 1$ і $M\left[D^*\right]\to D\left[X\right]$ при $n\to\infty$. Тому оцінка (12.6) є асимптотично незміщеною і може використовуватись за великих обсягів вибірки. Незміщену оцінку дисперсії дістанемо, якщо помножимо D^* на $\dfrac{n}{n-1}$:

$$S^2=D^*\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2. \tag{12.7}$$

Оцінку (12.7) називають *виправленою вибірковою дисперсією*.

Зауваження 4. Якщо математичне сподівання $M[X]=m$ випадкової величини X відоме, то змістовною і незміщеною оцінкою дисперсії є вибіркова дисперсія, яку для цього випадку позначимо S_0^2:

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - m\right)^2 . \qquad (12.8)$$

Для нормально розподіленої випадкової величини X (нормально розподіленої генеральної сукупності) доведено, що саме оцінка (12.8) є ефективною. Проте математичне сподівання m частіше за все невідоме, і доводиться користуватись оцінкою (12.7), яка для нормально розподіленої випадкової величини X є асимптотично ефективною.

Нехай у результаті n експериментів одержано конкретну вибірку $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тепер нас уже не цікавить, що результати експериментів випадкові. На основі викладеного раніше за наближені значення математичного сподівання та дисперсії випадкової величини ми беремо значення:

$$M[X] \approx \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad D[X] \approx s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \qquad (12.9)$$

(зазначимо, що конкретні реалізації випадкових величин $\overline{X}$ та S^2 позначено відповідними малими літерами).

У розрахунках другу з формул (12.9) зручніше використовувати у вигляді

$$D[X] \approx s^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \overline{x}^2\right). \qquad (12.10)$$

Нехай вибірку оброблено і записано у вигляді статистичного ряду.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Тоді оцінки (12.9) та (12.10) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} M[X] \approx \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \quad D[X] \approx s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2 = \\ = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2} - \overline{x}^2\right), \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i. \end{aligned} \qquad (12.11)$$

Якщо $m = M\left[X\right]$ — відоме, то $D\left[X\right] \approx s_0^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (x_i - m)^2.$

У разі групованої вибірки у формулах (12.11) під x_i слід розуміти середини інтервалів, а під n_i — груповані частоти (у позначеннях п. 12.1 це x_i^* та n_i^*).

Нехай досліджується двовимірна випадкова величина $\left(X, Y\right)$ (двовимірна генеральна сукупність). Також припустимо, що експерименти ще не проведені і їх результати нам не відомі, тобто є випадковими. Позначимо через X_i та Y_i значення, яких набудуть відповідно випадкові величини X та Y в i-му експерименті. Тоді можливі результати n незалежних експериментів запишуться у вигляді

$$\left(X_1, Y_1\right), \left(X_2, Y_2\right), ..., \left(X_n, Y_n\right).$$

Доведено, що вибіркова коваріація як випадкова величина

$$K_{xy}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right),$$

де

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\ ,$$

є змістовною, проте зміщеною оцінкою коваріації K_{xy} (ще кажуть — генеральної коваріації K_{xy}).

Незміщеною оцінкою коваріації K_{xy} є

$$S_{xy} = \frac{n}{n-1} K_{xy}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right).$$

З того, що $\dfrac{n}{n-1} \to 1$ при $n \to \infty$, випливає, що ця оцінка також *змістовна.*

Як *змістовною* оцінкою коефіцієнта кореляції k_{xy} випадкових величин X та Y користуються вибірковим коефіцієнтом кореляції

$$k_{xy}^* = \frac{K_{xy}^*}{\sqrt{D_x^*}\sqrt{D_y^*}} = \frac{S_{xy}}{S_x\,S_y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}}, \qquad (12.12)$$

Метод максимальної правдоподібності

Нехай X — неперервна зі щільністю розподілу $f(x;a)$ або дискретна з розподілом $P\{X=x\}=p(x;a)$ випадкова величина, причому параметр a — довільний, тобто не обов'язково є математичним сподіванням, дисперсією чи іншою числовою характеристикою випадкової величини. Найпоширенішим загальним методом знаходження оцінки $\tilde{a}$ параметра a є ***метод максимальної правдоподібності***.

Означення 1. Функцію

$$L=L(x_1,x_2,\ldots,x_n;a)=f(x_1;a)f(x_2;a)\ldots f(x_n;a) \qquad (12.13)$$

у разі неперервної випадкової величини або функцію

$$L=L(x_1,x_2,\ldots,x_n;a)=p(x_1;a)p(x_2;a)\ldots p(x_n;a) \qquad (12.14)$$

у разі дискретної випадкової величини називають *функцією правдоподібності*.

Означення 2. *Оцінкою максимальної правдоподібності* $\tilde{a}$ називають таке значення параметра a, при якому функція правдоподібності для фіксованих $x_1,x_2,\ldots,x_n$ досягає максимуму: $L(\tilde{a})=\max L(a)$.

Оскільки точки максимальних значень для функцій $L(a)$ і $\ln L(a)$ збігаються, зручніше знаходити оцінку максимальної правдоподібності з умови

$$\frac{d\ln L(a)}{da}=0\,. \qquad (12.15)$$

Саму функцію $\ln L(a)$ називають *логарифмічною функцією правдоподібності*.

Якщо невідомих параметрів розподілу кілька, тобто $a=(a_1,a_2,\ldots,a_s)$, то оцінки $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_s$ цих параметрів знаходять серед розв'язків системи рівнянь

$$\frac{\partial\ln L(a_1,a_2,\ldots,a_s)}{\partial a_k}=0\,,\ k=1,2,\ldots,s\,. \qquad (12.16)$$

Оцінки, одержані методом максимальної правдоподібності для широкого класу розподілів, є змістовними і мають найменшу дисперсію порівняно з іншими можливими оцінками тих самих параметрів. Іноді оцінка максимальної правдоподібності може бути зміщеною.

Приклад 4. Знайти оцінку максимальної правдоподібності для ймовірності p випадкової події A.

Розв'язання

Нехай проведено n випробувань Бернуллі і в m з них спостерігалася подія A. Розглянемо випадкову величину X — індикатор події A в окремому випробуванні. Маємо розподіл $P\{X=0\}=1-p$; $P\{X=1\}=p$ з невідомим параметром p. Довільна вибірка (вибірковий вектор) $(X_1,\ldots,X_n)$ з даного розподілу — це послідовність чисел 0 і 1. Конкретною реалізацією є вибірка, в якій 1 зустрічається m разів, 0 — $(n-m)$ разів.

Запишемо функцію правдоподібності (12.14):

$$L(x_1,\ldots,x_n;p)=p^m(1-p)^{n-m}.$$

Тоді рівняння (12.15) набуває вигляду

$$\frac{d\ln L}{dp}=\frac{m}{p}-\frac{n-m}{1-p}=0.$$

Звідси знаходимо єдиний розв'язок

$$\tilde{p}=\frac{m}{n}.$$

З використанням другої похідної легко переконатись, що цей розв'язок є точкою максимуму функції $\ln L$. Отже, оцінкою максимальної правдоподібності ймовірності події є відносна частота цієї події в послідовності випробувань Бернуллі.

Приклад 5. Знайти оцінки максимальної правдоподібності для математичного сподівання m і дисперсії σ^2 нормально розподіленої випадкової величини.

Розв'язання

Щільність розподілу має вигляд

$$f(x;m,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$ де m і σ^2 — невідомі параметри.

Знаходимо функцію правдоподібності (12.13):

$$L(x_1,\ldots,x_n;m,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для логарифмічної функції правдоподібності можна записати

$$\ln L(x_1,\ldots,x_n;m,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{2\sigma^2}.$$

Система (12.16) набуває вигляду

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L}{\partial m}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)=0,\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=0.\end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо $\tilde{m}=\overline{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$. Підставивши це значення в друге рівняння, дістанемо

$$\tilde{\sigma}^2=D^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

Отже, шуканими оцінками є вибіркове середнє та вибіркова дисперсія. Остання, як ми вже знаємо, є зміщеною оцінкою дисперсії.

►*Задачі*

1. Дано вибірку. Потрібно:

1) побудувати варіаційний ряд;

2) побудувати статистичний розподіл вибірки;

3) побудувати полігон відносних частот;

4) знайти вибіркове середнє $\overline{x}$ та виправлену вибіркову дисперсію s^2:

а) 2, 6, 5, 6, 7, 6, 5, 6, 9, 2, 7, 6, 5, 6, 5, 7, 6, 2, 6, 5, 9, 7, 6, 5, 6;

б) 1, 5, 3, 5, 6, 5, 8, 5, 1, 5, 3, 5, 6, 5, 3, 5, 5, 6, 3, 5;

в) 5, 3, 5, 5, 4, 5, 5, 7, 5, 9, 5, 4, 5, 7, 5, 9, 5, 4, 5, 7, 5, 7, 5, 5, 5;

г) 5, 1, 2, 5, 8, 2, 5, 10, 1, 5, 2, 5, 8, 2, 5, 2, 5, 8, 2, 5;

ґ) 5, 4, 2, 3, 4, 5, 4, 8, 4, 2, 3, 4, 5, 8, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 4, 5, 4;

д) 7, 5, 7, 6, 7, 9, 7, 10, 7, 6, 7, 7, 9, 7, 10, 6, 7, 9, 7, 10, 6, 7, 9, 6, 7;

е) 1, 2, 4, 7, 8, 1, 2, 4, 7, 8, 1, 2, 4, 7, 8, 1, 2, 4, 7, 2, 4, 7, 2, 4, 4;
є) 3, 5, 6, 8, 10, 3, 5, 6, 8, 10, 5, 6, 8, 10, 5, 6, 8, 6, 8, 6;
ж) 3, 1, 3, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 4, 3, 5, 2, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3;
з) 5, 2, 5, 4, 5, 7, 5, 8, 5, 4, 5, 7, 5, 8, 4, 5, 7, 5, 7, 5.

2. Дано інтервальний варіаційний ряд (у першому рядку вказано часткові інтервали $a_{i-1} \div a_i$, у другому — відповідні їм частоти n_i). Потрібно:

1) побудувати гістограму відносних частот;

2) знайти вибіркове середнє $\overline{x}$ та виправлену вибіркову дисперсію s^2:

а)

$a_{i-1} \div a_i$	$2 \div 6$	$6 \div 10$	$10 \div 14$	$14 \div 18$	$18 \div 22$	$22 \div 26$
n_i	10	16	32	24	12	6

б)

$a_{i-1} \div a_i$	$1 \div 4$	$4 \div 7$	$7 \div 10$	$10 \div 13$	$13 \div 16$	$16 \div 19$
n_i	6	15	27	33	12	7

в)

$a_{i-1} \div a_i$	$4 \div 6$	$6 \div 8$	$8 \div 10$	$10 \div 12$	$12 \div 14$	$14 \div 16$
n_i	8	25	30	20	10	7

г)

$a_{i-1} \div a_i$	$3 \div 7$	$7 \div 11$	$11 \div 15$	$15 \div 19$	$19 \div 23$	$23 \div 27$
n_i	9	13	25	32	13	8

ґ)

$a_{i-1} \div a_i$	$1 \div 3$	$3 \div 5$	$5 \div 7$	$7 \div 9$	$9 \div 11$	$11 \div 13$
n_i	7	14	28	34	18	12

д)

$a_{i-1} \div a_i$	$5 \div 10$	$10 \div 15$	$15 \div 20$	$20 \div 25$	$25 \div 30$	$30 \div 35$
n_i	5	12	25	30	18	10

е)

$a_{i-1} \div a_i$	$2 \div 7$	$7 \div 12$	$12 \div 17$	$17 \div 22$	$22 \div 27$	$27 \div 32$
n_i	9	24	30	19	10	8

є)

$a_{i-1} \div a_i$	$3 \div 5$	$5 \div 7$	$7 \div 9$	$9 \div 11$	$11 \div 13$	$13 \div 15$
n_i	15	32	25	12	10	6

ж)

$a_{i-1} \div a_i$	$1 \div 5$	$5 \div 9$	$9 \div 13$	$13 \div 17$	$17 \div 21$	$21 \div 25$
n_i	8	10	14	8	6	4

з)

$a_{i-1} \div a_i$	$6 \div 9$	$9 \div 12$	$12 \div 15$	$15 \div 18$	$18 \div 21$	$21 \div 24$
n_i	6	12	21	10	7	4

3. Знайти незміщені оцінки математичного сподівання та дисперсії за вибіркою

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

4. Знайти незміщені оцінки математичного сподівання та дисперсії розподілу врожайності цукрових буряків (у ц/га) за такими даними:

Урожайність	$200 \div 250$	$250 \div 300$	$300 \div 350$	$350 \div 400$	$400 \div 450$	$450 \div 500$
Площа ділянки	10	30	20	20	10	10

5. Для визначення точності вимірювального приладу, що працює без систематичної похибки, здійснено п'ять незалежних вимірювань, результати яких такі: 2781; 2836; 2801; 2763; 2858. Визначте незміщену оцінку дисперсії похибки вимірювання, якщо значення вимірюваної величини: а) відоме і дорівнює 2800; б) невідоме.

6. За вибіркою $x_1, x_2, ..., x_n$ обсягу n знайти точкові оцінки параметрів вказаних розподілів, користуючись методом максимальної правдоподібності:

а) показникового розподілу;

б) нормального розподілу $N(m,1)$;

в) нормального розподілу $N(0,\sigma)$;

г) розподілу зі щільністю $f(x) = \dfrac{\theta^x}{(\theta+1)^{x+1}}$, $\theta > 0$;

ґ) розподілу зі щільністю $f(x) = \dfrac{(\theta-1)^x}{\theta^{x+1}}$, $\theta > 1$;

д) розподілу Пуассона;

е) геометричного розподілу.

13. ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ

Оцінки, з якими ми ознайомились у попередньому підрозділі, називаються *точковими оцінками*. Такі оцінки визначаються одним числом, тобто вказують на точку числової осі, в якій має бути значення невідомого параметра.

У більшості задач необхідно не тільки знайти відповідне числове значення параметра a, а й оцінити точність і надійність цього значення. Такого роду задачі дуже важливі для малої кількості спостережень (малого обсягу вибірки), оскільки точкова оцінка $\tilde{a}$ значною мірою є випадковою, і заміна a на $\tilde{a}$ може призвести до грубих помилок.

Для визначення точності оцінки $\tilde{a}$ у математичній статистиці користуються ***довірчими інтервалами***, а для визначення надійності — ***довірчими ймовірностями***.

Познайомимось спочатку з розподілами χ^2 («хі»-квадрат) та Стьюдента, котрі, як і нормальний розподіл випадкової величини, відіграють важливу роль у математичній статистиці.

13.1. Необхідні відомості про розподіли χ^2 та Стьюдента

Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — незалежні нормально розподілені за законом $N(0, 1)$ випадкові величини.

Означення 1. Розподіл випадкової величини

$$\chi^2 = X_1{}^2 + X_2{}^2 + \ldots + X_n{}^2 \tag{13.1}$$

називається *розподілом* χ^2 («хі»-квадрат) з n ступенями вільності і позначається $\chi^2(n)$.

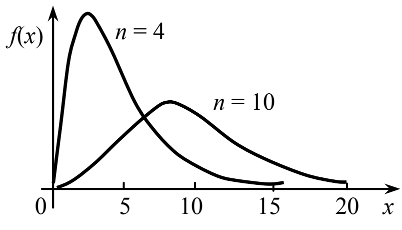


Рис. 13.1

На рис. 13.1 наведено криві розподілу $\chi^2(n)$ для $n = 4$ та $n = 10$. Для всіх n крива $f(x)$ — це одновершинна асиметрична крива, що асимптотично наближається до осі Ox. Зі збільшенням n вершина кривої $f(x)$ зсувається праворуч від початку координат і розподіл $\chi^2(n)$ прямує до нормального розподілу. При $n > 30$ розподіл $\chi^2(n)$ з достатньою для практичних цілей точністю апроксимується нормальним розподілом. Математичне сподівання та дисперсія розподілу $\chi^2(n)$ відповідно дорівнюють: $M\left[\chi^2(n)\right] = n,\ D\left[\chi^2(n)\right] = 2n.$

Означення 2. *Розподілом Стьюдента* з *n* ступенями вільності називається розподіл випадкової величини $T(n)$, що дорівнює відношенню двох незалежних випадкових величин *X* та $\sqrt{\dfrac{\chi^2(n)}{n}}$, тобто

$$T(n) = \frac{X}{\sqrt{\chi^2(n)/n}} = \frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2(n)}}, \qquad (13.2)$$

де випадкова величина *X* має нормальний розподіл $N(0,1)$.

Щільність розподілу Стьюдента симетрична відносно осі *Oy* (рис. 13.2), а тому $t_{1-p}(n) = -t_p(n)$, де $t_p(n)$ — квантиль розподілу Стьюдента порядку *p*. Зі збільшенням числа ступенів вільності *n* розподіл $T(n)$ наближається до нормального розподілу швидше, ніж розподіл $\chi^2(n)$.

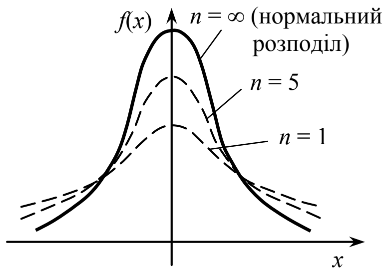


Рис. 13.2

При $n > 30$ можна користуватись наближеною рівністю $t_p(n) \approx u_p$ для квантилів. Математичне сподівання та дисперсія розподілу $T(n)$ дорівнюють:

$$M\left[T(n)\right] = 0,\ D\left[T(n)\right] = \frac{n}{n-2},\ n > 2.$$

Для квантилів розподілів $\chi^2(n)$ та $T(n)$ складені таблиці (дод. 1, табл. Д1.4, Д1.5).

Дальший виклад матеріалу ґрунтується на використанні такої теореми.

Теорема. Нехай $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ — вибірковий вектор з нормально розподіленої генеральної сукупності $N(m, \sigma)$.

Тоді вибіркове середнє $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ та виправлена вибіркова дисперсія $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ є незалежними випадковими величинами, причому статистика $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2$ має розподіл $\chi^2(n-1)$.

Розглянемо кілька прикладів на використання цієї теореми.

Приклад 1. Нехай за вибіркою з нормально розподіленої генеральної сукупності $N(m, \sigma)$ розглядається статистика

$$Y = \frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}}, \tag{13.3}$$

де $\bar{X}$ та $S = \sqrt{S^2}$ — величини, що фігурують у наведеній теоремі. Показати, що статистика Y має розподіл $T(n-1)$.

Розв'язання

Випадкова величина $U = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ розподілена за законом $N(0, 1)$, оскільки $M\left[\bar{X}\right] = m$, а $D\left[\bar{X}\right] = \frac{\sigma^2}{n}$. Випадкова величина $V = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2$ згідно з теоремою має розподіл $\chi^2(n-1)$.

Отже, ураховуючи означення (13.2), дістанемо для статистики $\frac{U}{\sqrt{V}}\sqrt{n-1} = \frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}} = Y$ розподіл Стьюдента з $n-1$ ступенями вільності.

Приклад 2. Нехай в умовах попереднього прикладу розглядається статистика $D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ (вибіркова дисперсія). Рекомендуємо показати **самостійно**, що статистики $\frac{n}{\sigma^2}D^*$ та

$\dfrac{\bar{X}-m}{\sqrt{D^*}/\sqrt{n-1}}$ мають розподіли відповідно $\chi^2(n-1)$ та $T(n-1)$.

Розглянемо приклад, який безпосередньо не стосується сформульованої раніше теореми, проте, буде використовуватись далі.

Приклад 3. За вибіркою з генеральної сукупності з розподілом $N(m, \sigma)$ розглядається статистика $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$. Показати, що статистика

$$Y = \frac{nS_0^{\,2}}{\sigma^2} \tag{13.4}$$

розподілена за законом $\chi^2(n)$.

Розв'язання

Запишемо очевидну рівність

$$\frac{nS_0^{\,2}}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}U_i^{\,2}. \tag{13.5}$$

Оскільки випадкові величини $U_i = \dfrac{X_i - m}{\sigma}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ розподілені за законом $N(0,1)$ і незалежні, то згідно з означенням (13.1) випадкова величина (13.5) має розподіл $\chi^2(n)$.

13.2. Приклади на побудову довірчих інтервалів

Дамо загальне означення.

Означення 3. *Довірчим інтервалом* для параметра a називається випадковий інтервал $\left(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\right)$, який покриває невідоме точне значення a із заданою ймовірністю (надійністю) β, тобто

$$P\left\{\tilde{a}_1 < a < \tilde{a}_2\right\} = \beta.$$

Випадкові величини $\tilde{a}_1$ та $\tilde{a}_2$, які є функціями вибіркового вектора $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$, називаються відповідно *нижньою* та *верхньою межами* довірчого інтервалу; імовірність β ще називають *довірчою ймовірністю*.

Точність оцінювання параметра a характеризується довжиною довірчого інтервалу $\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1$ і залежить від обсягу вибірки n та надійності β.

На практиці надійність оцінки β беруть такою, щоб подію з імовірністю β можна було вважати практично вірогідною, наприклад, $\beta = 0{,}95;\ 0{,}99;\ 0{,}999$. Часто величину β записують у вигляді $\beta = 1 - \alpha$. Мале число α називається *рівнем значущості* оцінки.

Нехай $y_{\frac{\alpha}{2}}$ та $y_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантилі розподілу деякої *неперервної* випадкової величини Y порядку $\frac{\alpha}{2}$ та $1-\frac{\alpha}{2}$. Очевидно, що тоді

$$P\left\{ y_{\frac{\alpha}{2}} < Y < y_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = F\left(y_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) - F\left(y_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha. \quad (13.6)$$

Познайомимось із одним з можливих методів побудови довірчих інтервалів. Нехай $\tilde{a}$ — незміщена оцінка параметра a розподілу деякої випадкової величини X. Припустимо, що існує статистика $Y = Y(\tilde{a}, a)$, для якої:

1) закон розподілу відомий і не залежить від a;

2) функція $Y = Y(\tilde{a}, a)$ неперервна і строго монотонна відносно a.

Нехай $\beta = 1 - \alpha$ — задана довірча ймовірність, а $y_{\frac{\alpha}{2}}$ та $y_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантилі розподілу статистики Y. Тоді на підставі рівності (13.6) з імовірністю $\beta = 1 - \alpha$ виконуються нерівності

$$y_{\frac{\alpha}{2}} < Y < y_{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (13.7)$$

Довірчий інтервал для параметра a можна побудувати, розв'язавши нерівності (13.7) відносно a.

Розглянемо кілька прикладів.

Довірчий інтервал для математичного сподівання *m* нормально розподіленої генеральної сукупності за відомої дисперсії σ^2.

Нехай надійність $\beta = 1 - \alpha$ задано.

Розглянемо статистику Y:

$$Y = \frac{\overline{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}}, \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Раніше вже зазначалось, що вона розподілена за законом $N(0,1)$ і крім того, задовольняє сформульовані раніше вимоги.

Отже,

$$u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \tag{13.8}$$

де u_p — квантиль порядку p розподілу $N(0,1)$.

Розв'язуючи нерівності (13.8), дістанемо

$$\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Ураховуючи рівність $u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, довірчий інтервал запишемо у вигляді

$$\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} < m < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{13.9}$$

Довірчий інтервал для математичного сподівання *m* нормально розподіленої генеральної сукупності за невідомої дисперсії σ^2.

Скористаємось статистикою (13.3). Отже,

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X} - m}{S / \sqrt{n}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1). \tag{13.10}$$

Розв'язавши нерівності (13.10) відносно m і врахувавши рівність квантилів $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, дістанемо довірчий інтервал

$$\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < m < \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1). \tag{13.11}$$

Нагадаємо, що тут $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

Якщо порівняти довірчі інтервали (13.9) та (13.11), то можна помітити, що при заміні дисперсії σ^2 її оцінкою S^2 нормальний розподіл слід замінити на розподіл Стьюдента.

Довірчий інтервал для дисперсії σ^2 нормально розподіленої генеральної сукупності за відомого математичного сподівання *m*.

Скористаємось статистикою (13.4). Згідно з формулою (13.7) маємо

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) < \frac{nS_0^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n), \qquad (13.12)$$

де $\chi^2_p(n)$ — квантиль розподілу χ^2 з n ступенями вільності.

Розв'язавши нерівності (13.12) відносно σ^2, дістанемо довірчий інтервал

$$\frac{nS_0^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} < \sigma^2 < \frac{nS_0^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}. \qquad (13.13)$$

Тут $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$.

Довірчий інтервал для дисперсії σ^2 нормально розподіленої генеральної сукупності за невідомого математичного сподівання *m*.

Згідно з теоремою, наведеною в п. 13.1, скористаємося статистикою $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2$. Тоді

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

і для довірчого інтервалу дістанемо

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}. \qquad (13.14)$$

На відміну від довірчих інтервалів (13.9) та (13.11) для математичного сподівання, довірчі інтервали (13.13) та (13.14) для дисперсії не є симетричними відносно точкових оцінок. Це викликано несиметричністю розподілу χ^2.

Довірчий інтервал для математичного сподівання генеральної сукупності, розподіл якої не є нормальним (*за вибірками великого обсягу*).

Статистика

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

з точністю до невипадкового множника $\frac{1}{n}$ є сумою n незалежних та однаково розподілених випадкових величин X_i. Тому, яким би не був закон розподілу генеральної сукупності X, для достатньо великих n закон розподілу цієї статистики згідно з центральною граничною теоремою близький до нормального з математичним сподіванням $M\left[\overline{X}\right]=m$ та дисперсією $D\left[\overline{X}\right]=\frac{\sigma^2}{n}$, а отже, середнім квадратичним відхиленням $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Тут m та σ — характеристики генеральної сукупності X.

Отже, статистика

$$Y=\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

для достатньо великих n має розподіл, близький до розподілу $N(0,1)$. Тому можна побудувати довірчий інтервал

$$\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}<m<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \tag{13.15}$$

який за виглядом цілком збігається з довірчим інтервалом (13.9), проте, на відміну від останнього, має наближений характер, а саме виконується з імовірністю, близькою до $\beta=1-\alpha$.

На практиці величина σ зазвичай невідома. У загальному випадку (наприклад, за невідомого виду розподілу генеральної сукупності X) її замінюють у нерівностях (13.15) оцінкою $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$. Якщо n достатньо велике, така заміна мало впливає на точність довірчого інтервалу та його надійність (часто задовільна точність досягається, якщо n порядка кількох десятків).

У результаті дістаємо наближений довірчий інтервал

$$\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}<m<\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}. \qquad (13.16)$$

Довірча ймовірність при цьому близька до $\beta=1-\alpha$.

Довірчий інтервал для ймовірності «успіху» у схемі Бернуллі (*для великої кількості випробувань*).

Задача ставиться так: нехай у n випробуваннях Бернуллі «успіх» з'явився X разів. Необхідно побудувати довірчий інтервал для ймовірності p «успіху» в одному випробуванні. Випадкова величина X має біномний розподіл. Разом з тим, якщо припустити, що n — достатньо велике, а ймовірність p — не надто велика і не надто мала [за цих умов величина $np(1-p)$ має залишатись достатньо великою порівняно з 1], то згідно з інтегральною теоремою Муавра — Лапласа розподіл випадкової величини

$$Y=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}=\frac{X/n-p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}}=\frac{p^{*}-p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}} \qquad (13.17)$$

близький до нормального розподілу $N(0,1)$.

Тут уведено відносну частоту «успіху» $p^{*}=X/n$.

Рекомендуємо показати **самостійно**, що статистика (13.17) є строго монотонною функцією p.

Отже, дістаємо нерівності

$$u_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{p^{*}-p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}}<u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

які після елементарних перетворень набувають вигляду

$$p^{*}-\sqrt{\frac{pq}{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}<p<p^{*}+\sqrt{\frac{pq}{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}. \qquad (13.18)$$

Ці нерівності виконуються з імовірністю, що наближено дорівнює заданій надійності $\beta=1-\alpha$.

Далі замінимо у нерівностях (13.18) значення p та q під коренем їх оцінками відповідно p^{*} та $1-p^{*}$. У результаті дістаємо такий наближений довірчий інтервал для ймовірності «успіху» у схемі Бернуллі:

$$p^* - \sqrt{\frac{p^*\left(1-p^*\right)}{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}} < p < p^* + \sqrt{\frac{p^*\left(1-p^*\right)}{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}. \qquad (13.19)$$

Якщо n має порядок сотень, а спостережне значення відносної частоти p^* помітно відрізняється від 0 та 1, довірчий інтервал (13.19) дає задовільні результати.

У всіх побудованих раніше довірчих інтервалах точкові оцінки параметрів фігурують як випадкові величини.

На практиці ці оцінки конкретизуються за результатами експериментів.

Розглянемо кілька прикладів на використання побудованих у даному пункті довірчих інтервалів.

Приклад 4. Досліджується випадкова величина X — тривалість (у годинах) виготовлення одиниці продукції. У результаті 20 спостережень одержані такі дані:

10,9; 10,8; 11,0; 10,7; 10,9; 10,5; 10,8; 11,2; 10,9; 10,4;
10,6; 11,3; 10,5; 10,7; 10,8; 10,6; 10,9; 11,0; 10,3; 10,8.

Потрібно знайти оцінки для математичного сподівання (середньої тривалості виготовлення одиниці продукції) та дисперсії випадкової величини X і побудувати з надійністю $\beta = 0,9$ відповідні довірчі інтервали у припущенні, що X має нормальний розподіл.

Розв'язання

У результаті обчислень дістаємо незміщені оцінки

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = 10,78; \qquad s^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^{\,2}\right) =$$

$$= \frac{20}{19}\left(\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \left(10,78\right)^2\right) = 0,064.$$

Довірчий інтервал для математичного сподівання будуємо згідно з нерівностями (13.11). Оскільки $\beta = 0,9$, то $\alpha = 1-\beta = 0,1$ і $1-\frac{\alpha}{2} = 0,95.$ За таблицею квантилів розподілу Стьюдента (дод. 1, табл. Д1.5) знаходимо

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right) = t_{0,95}\left(19\right) = 1,729.$$

Тому $\frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \frac{\sqrt{0,064}}{\sqrt{20}} 1,729 = 0,0975$. Підставивши це значення і значення вибіркового середнього $\overline{x} = 10,78$ у нерівності (13.11), дістанемо довірчий інтервал для математичного сподівання у вигляді $10,682 < m < 10,877$ або у вигляді (10,682; 10,877).

Довірчий інтервал для дисперсії будуємо, скориставшись нерівностями (13.14). Для цього знаходимо квантилі розподілу χ^2 (дод. 1, табл. Д1.4):

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0,95}(19) = 30,1; \quad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0,05}(19) = 10,1.$$

Отже, $\frac{19 \cdot 0,064}{30,1} < \sigma^2 < \frac{19 \cdot 0,064}{10,1}$ або $0,0404 < \sigma^2 < 0,1204$. Для середнього квадратичного відхилення σ дістаємо $0,201 < \sigma < 0,347$.

Приклад 5. Побудувати з надійністю $\beta = 0,9$ довірчий інтервал для математичного сподівання випадкової величини X із прикладу 4, не користуючись припущенням про нормальність розподілу.

Розв'язання

Скористаємось наближеним довірчим інтервалом (13.16). Для цього за таблицею квантилів розподілу $N(0, 1)$ (дод. 1, табл. Д1.3) знаходимо $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,95} = 1,645$. Тому $\frac{s}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{0,064}}{\sqrt{20}} 1,645 = 0,0928$.

Підставивши останнє значення і значення вибіркового середнього $\overline{x} = 10,78$ у нерівності (13.16), дістанемо наближений довірчий інтервал для математичного сподівання у вигляді $10,687 < m < 10,873$ або у вигляді (10,687; 10,873). Бачимо, що з точністю до двох знаків після коми наближений довірчий інтервал збігається з точним, побудованим у прикладі 4.

Приклад 6. Нехай при 600 підкиданнях дефектної (несиметричної) монети «герб» випав 240 разів. За даною інформацією необхідно: а) побудувати 95 % наближений довірчий інтервал для ймовірності p появи «герба» при одному підкиданні; б) наближено оцінити, яку мінімальну кількість підкидань монети необхідно зробити, щоб з надійністю 95 % можна було стверджувати, що відносна частота появи «герба» відхиляється від імовірності p не більше ніж на 1 %.

Розв'язання

а) Відносна частота за даними досліду дорівнює $p^* = \dfrac{240}{600} = 0,4$; надійність $\beta = 1 - \alpha = 0,95$. За таблицею квантилів нормального розподілу $N(0,1)$ знаходимо $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$. Тоді згідно з нерівностями (13.19) наближений довірчий інтервал для p має вигляд $0,36 < p < 0,44$.

б) Довірчий інтервал (13.19) запишемо у вигляді

$$\left|p^* - p\right| < \sqrt{\frac{p^*\left(1 - p^*\right)}{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Остання нерівність виконується з імовірністю, близькою до $\beta = 1 - \alpha = 0,95$. За умовою $\left|p^* - p\right| \le 0,01$, а тому для знаходження n дістаємо нерівність

$$\sqrt{\frac{p^*\left(1 - p^*\right)}{n}}u_{0,975} = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{n}}1,96 \le 0,01.$$

Отже, $n \ge \left(196\right)^2 \cdot 0,24 = 9219,84$. Тому мінімальна кількість підкидань $n = 9220$.

Розглянутий приклад показує, яку велику кількість випробувань необхідно здійснити, щоб із задовільною точністю оцінити ймовірність події за її відносною частотою. На практиці зазвичай використовують значно меншу кількість випробувань. Тому слід пам'ятати, що точність наближеної рівності $p^* \approx p$, як правило, невелика.

► *Задачі*

1. З нормально розподіленої генеральної сукупності X узято вибірку обсягу n і за нею знайдено вибіркове середнє $\overline{x}$. Потрібно з надійністю β побудувати:

1) довірчий інтервал для математичного сподівання за умови, що середнє квадратичне відхилення дорівнює σ;

2) довірчий інтервал для математичного сподівання, коли дисперсія невідома і за вибіркою знайдена виправлена вибіркова дисперсія s^2;

3) довірчий інтервал для невідомої дисперсії:

	n	$\overline{x}$	β	σ	s^2
а)	30	31	0,9	2,3	5,5
б)	31	18	0,99	6	25
в)	25	45	0,95	0,15	0,2
г)	30	14,4	0,9	2,7	5,7
ґ)	25	47	0,99	3,1	8,2
д)	27	14,7	0,9	2,3	4,3
е)	24	17,7	0,95	2,1	3,8
є)	23	6,3	0,95	2,8	4,4
ж)	21	93	0,99	4	16,2
з)	20	68,1	0,95	15	30,2

	n	$\overline{x}$	β	σ	s^2
и)	17	2,3	0,9	0,2	0,24
і)	16	24	0,95	5	19
ї)	17	5,8	0,95	1,8	2,3
й)	22	28,5	0,9	2,4	3,5
к)	9	17	0,9	4	15
л)	21	58,3	0,99	0,4	0,15
м)	14	2,3	0,99	1,6	1,5
н)	16	3	0,99	4	12
о)	22	21,7	0,99	2,9	7,7
п)	15	32	0,95	2,5	5,3

2. З генеральної сукупності X, розподіл якої не є нормальним, взято вибірку обсягу n і за нею знайдено вибіркове середнє $\overline{x}$. Потрібно з надійністю β побудувати наближений довірчий інтервал для математичного сподівання:

1) за умови, що середнє квадратичне відхилення відоме і дорівнює σ;

2) дисперсія невідома і за вибіркою знайдена виправлена вибіркова дисперсія s^2:

а) скористатись даними задачі 1*а*;

б) скористатись даними задачі 2*б*;

в) скористатись даними задачі 3*в*;

г) скористатись даними задачі 4*г*;

д) скористатись даними задачі 5*д*.

3. Перевірка n деталей із великої партії виявила k бракованих. Побудувати з надійністю β довірчий інтервал для частки бракованих деталей усієї партії. Яку мінімальну кількість деталей слід перевірити, щоб з імовірністю β стверджувати про відхилення частки бракованих деталей всієї партії від частки бракованих деталей серед перевірених не більше ніж на α %?

	n	k	β	α
а)	200	15	0,95	1
б)	100	10	0,9	2
в)	150	15	0,95	1
г)	250	20	0,9	2
ґ)	300	25	0,95	1

14. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ ПРО ЧИСЛОВІ ЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ

14.1. Основні принципи перевірки параметричних гіпотез

У природознавстві, техніці, економіці досить часто під час вивчення того чи іншого випадкового явища використовують різного роду припущення (гіпотези), які можна перевірити статистично, тобто спираючись на результати спостережень у вигляді випадкової вибірки. Таким, наприклад, є припущення, що розподіл продуктивності праці робітників, які працюють в однакових організаційно-технічних умовах, описується нормальним законом, або припущення, що середні розміри деталей, які виготовляються на однотипних верстатах, що працюють паралельно, не різняться між собою.

Під ***статистичною гіпотезою*** далі будемо розуміти довільне припущення щодо вигляду невідомих розподілів випадкових величин або щодо параметрів відомих розподілів. В останньому випадку гіпотеза називається *параметричною*.

Статистична гіпотеза називається *простою*, якщо вона однозначно визначає розподіл випадкової величини. А якщо ні, то гіпотеза називається *складною*.

До простих гіпотез належать, наприклад, такі припущення:

1. Параметр λ показникового розподілу дорівнює деякому фіксованому числу λ_0.

2. Математичне сподівання нормального розподілу дорівнює 2 (середнє квадратичне відхилення σ при цьому відоме).

Якщо у другому припущенні σ — невідоме, то гіпотеза є складною.

Гіпотезу, яку перевіряють, називають *нульовою,* або *основною,* гіпотезою і позначають H_0. Для параметричної нульової гіпотези H_0 розглядають одну з ***альтернативних*** (конкурентних) гіпотез H_1. Наприклад, якщо перевіряють гіпотезу про рівність параметра a деякому фіксованому значенню a_0 (будемо писати $H_0: a = a_0$), то альтернативною може бути одна з таких гіпотез: $H_1: a > a_0$; $H_1: a < a_0$; $H_1: a \neq a_0$, зокрема, проста альтернативна гіпотеза

$H_1 : a = a_1$, де a_1 — фіксоване число, $a_1 \neq a_0$. Або, наприклад, перевіряється гіпотеза $H_0 : m_1 = m_2$ про рівність математичних сподівань m_1 та m_2 двох розподілів. Тоді альтернативною може бути одна з трьох гіпотез $H_1 : m_1 < m_2$, $H_1 : m_1 > m_2$ або $H_1 : m_1 \neq m_2$.

Зауваження 1. Математична статистика не дає жодних рекомендацій щодо вибору нульової та альтернативної гіпотез. Цей вибір повністю визначається дослідником і залежить від конкретної задачі. Математична статистика пропонує методи перевірки статистичних гіпотез, при застосуванні яких можна приймати лише одну з гіпотез H_0 або H_1, одночасно відхиляючи іншу (наведені раніше як приклади нульові гіпотези $H_0 : a = a_0$, $H_0 : m_1 = m_2$ можна записати й так: $H_0 : a - a_0 = 0$, $H_0 : m_1 - m_2 = 0$. З подібних записів, власне, і походить назва «нульова гіпотеза». Гіпотезу H_0 іноді інтерпретують як «гіпотезу про схожість», а гіпотезу H_1 — як «гіпотезу про відмінність»).

Статистична гіпотеза перевіряться за допомогою деякої одновимірної випадкової величини (статистики) $Z = Z\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ з відомим за умови справедливості гіпотези H_0 розподілом. Множина *V* можливих значень цієї статистики певним чином розбивається на підмножини V_k та $\overline{V}_k = V \setminus V_k$.

Висновок про відхилення чи прийняття гіпотези H_0 робиться з використанням вибіркового значення $z_в$ статистики *Z*, обчисленого за результатами конкретної вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а саме: відхилити гіпотезу H_0, якщо $z_в \in V_k$; прийняти гіпотезу H_0, якщо $z_в \in \overline{V}_k$.

Множину V_k називають *критичною областю*, а множину $\overline{V}_k$ — *областю прийняття гіпотези*.

Саму статистику *Z* називають *статистичним критерієм* (або просто критерієм).

Іноді поняття «статистичний критерій» наділяють більш широким зміст, розуміючи під ним у цілому все правило, згідно з яким приймається рішення про прийняття чи відхилення гіпотези H_0. Статистику *Z* у цьому випадку називають *статистикою критерію*, а область V_k — *критичною областю критерію.*

Принципи, якими слід керуватись при побудові області V_k, щоб вона була найбільш «слушною» для перевірки гіпотези H_0 з використанням статистики Z, сформульовані відомими математиками Нейманом та Пірсоном. Насамперед, при побудові критичної області V_k слід мати на увазі, що приймаючи чи відхиляючи гіпотезу H_0, можна припуститись помилки двоякого роду.

Означення 1. Помилка, яка полягає в тому, що гіпотеза H_0 відхиляється, коли насправді вона справедлива, називається *помилкою першого роду*.

Означення 2. Помилка, яка полягає в тому, що гіпотеза H_0 приймається, коли насправді вона несправедлива, називається *помилкою другого роду*.

Побудувати критичну область V_k так, щоб уникнути зазначених помилок, у принципі неможливо. Справді, якою б не була критична область $V_k \neq \varnothing$, вибіркове значення $z_в$ через випадковість вибірки може потрапити за справедливої гіпотези H_0 до V_k, що призведе до помилки першого роду. У разі несправедливої гіпотези H_0 значення $z_в$ може не потрапити до V_k, що призведе до помилки другого роду.

Помилки першого та другого родів є випадковими. Проте вибрати критичну область V_k такою, щоб імовірності обох помилок були мінімальними, не можна. Доводиться контролювати одну з цих ймовірностей. Зазвичай це ймовірність помилки першого роду, яку позначають α і для якої можна записати

$$P\{Z \in V_k / H_0\} = \alpha. \tag{14.1}$$

Імовірність (14.1) є ймовірністю потрапляння статистики Z до критичної області V_k, яка обчислюється за справедливої гіпотези H_0 і не має нічого спільного з умовною ймовірністю.

Означення 3. Імовірність α помилки першого роду ще називають ***рівнем значущості критерію***.

Усе сказане означає, що перед аналізом вибірки фіксується деяке мале число α і вибирається критична область V_k з умови, що задовольняється рівність (14.1). Наскільки малим потрібно брати α, залежить від серйозності «наслідків» помилки першого роду.

Зазвичай вибирають одне зі стандартних значень α, таких як 0,005, 0,01, 0,05, 0,1. Ця стандартизація має ту перевагу, що дозволяє скоротити обсяг таблиць, що їх використовує статистик у роботі. Ніякої іншої спеціальної причини для вибору саме цих значень немає. Якщо, наприклад, $\alpha = 0{,}01$, то це означає, що в одному випадку зі 100 є ризик припуститися помилки першого роду (відхилити гіпотезу H_0, коли вона справедлива).

Рівністю (14.1) при малих α реалізується так званий принцип практичної неможливості здійснитися малоймовірній випадковій події за однієї спроби. Якщо вибіркове значення $z_в$ статистики Z потрапляє до критичної області, а це подія малоймовірна і вона все-таки здійснилася, то нульова гіпотеза H_0 відхиляється. У протилежному разі — приймається. Зауважимо, що прийняття гіпотези зовсім не означає її доведення. Тому за прийняття гіпотези правильніше було б говорити, що експериментальні дані (вибірка) не суперечать основній гіпотезі і тому не дають підстав для її відхилення.

Далі під статистикою Z будемо розуміти *неперервну випадкову величину,* щільність розподілу якої за справедливої гіпотези H_0 позначимо $f\left(z/H_0\right)$. Зрозуміло, що на множині значень цієї статистики можна вибрати скільки завгодно критичних областей V_k для заданого рівня значущості α.

Так, на рис. 14. 1, наприклад, зображені три області $V_k^{(1)}$, $V_k^{(2)}$, $V_k^{(3)}$ на числовій осі, в які статистика Z потрапляє з однаковою ймовірністю α (площі заштрихованих областей дорівнюють α). Проте ймовірності помилок другого роду для всіх цих областей, взагалі кажучи, різні.

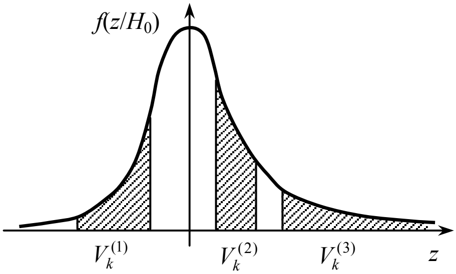


Рис. 14.1

Означення 4. *Найліпшою критичною областю* (НКО) називають таку критичну область, яка для заданого рівня значущості α забезпечує мінімальну ймовірність помилки другого роду.

Точну відповідь на питання про НКО для заданого рівня значущості α дає теорема Неймана — Пірсона, з якою можна познайомитися у повних курсах математичної статистики. Ми лише зазначимо, що для тих критеріїв перевірки гіпотез, які будемо розглядати далі, НКО згідно з цією теоремою розміщується на «хвостах» розподілів статистик даних критеріїв, як-от, наприклад, область $V_k^{(3)}$ на рис. 14.1. При цьому положення критичної області V_k на множині значень статистики Z залежить від вигляду альтернативної гіпотези H_1. Якщо, наприклад, перевіряється гіпотеза $H_0: a = a_0$, а альтернативною гіпотезою є гіпотеза $H_1: a < a_0$, то критична область розміщується на лівому «хвості» розподілу статистики Z (рис. 14.2). Ураховуючи рівність (14.1) і пригадавши означення квантиля, цю область можна подати у вигляді нерівності $Z \le z_\alpha$, де z_α — квантиль порядку α розподілу статистики Z за умови справедливості гіпотези H_0 (нагадаємо, що для неперервної випадкової величини $P\{Z \le z_\alpha\} = P\{Z < z_\alpha\} = \alpha$). Якщо альтернативною гіпотезою є гіпотеза $H_1: a > a_0$, то критична область розміщується на правому «хвості» розподілу статистики Z (рис. 14.3) і має вигляд $Z \ge z_{1-\alpha}$.

У розглянутих випадках критерій називається *однобічним*, відповідно *лівобічним* та *правобічним*.

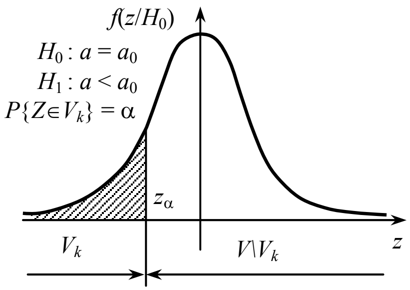


Рис. 14.2

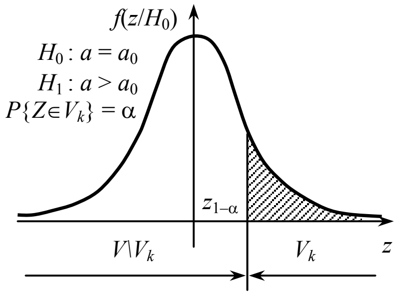


Рис. 14.3

Якщо альтернативна гіпотеза формулюється як $H_1 : a \neq a_0$, то критична область розміщується на двох «хвостах» розподілу статистики Z (рис. 14.4) і визначається системою нерівностей $Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$ і $Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Критерій у цьому разі називається *двобічним*.

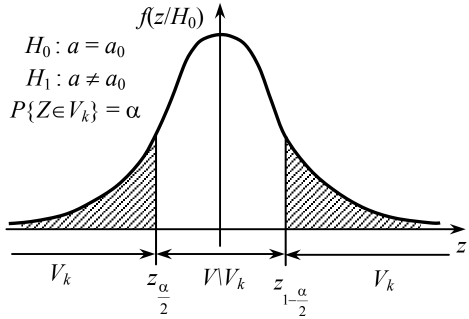


Рис. 14.4

На рис. 14.2–14.4 щільність розподілу статистики критерію зображена симетричною відносно осі $z = 0$. У ряді критеріїв використовуватимуться статистики з несиметричними щільностями. При цьому спосіб зображення критичних областей з використанням квантилів залишається тим самим.

Підсумовуючи, зазначимо, що, будуючи статистику Z для перевірки параметричної гіпотези $H_0 : a = a_0$, виходять з точкової оцінки $\tilde{a} = \tilde{a}(X_1, X_2, ..., X_n)$ параметра a. Зазвичай Z — та сама статистика, що й при побудові довірчого інтервалу для параметра a (у п. 13.2 такі статистики ми позначали буквою Y).

14.2. Перевірка гіпотез про числові значення параметрів нормального розподілу

З урахуванням викладеного вище перевірка параметричної статистичної гіпотези зводиться до таких етапів:

1) формулюються основна H_0 та альтернативна H_1 гіпотези;

2) вибирається рівень значущості α;

3) вибирається статистика критерію Z і знаходиться її розподіл за умови, що справедлива гіпотеза H_0 (нагадаємо, що розглядається випадок, коли Z — неперервна випадкова величина);

4) залежно від вигляду альтернативної гіпотези визначається критична область V_k однією з нерівностей $Z \le z_{\alpha}$, $Z \ge z_{1-\alpha}$ або системою нерівностей $Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}$ і $Z \ge z_{1-\frac{\alpha}{2}}$;

5) отримується вибірка спостережень і обчислюється вибіркове значення $z_{\text{в}}$ статистики критерію;

6) приймається статистичне рішення: якщо $z_{\text{в}} \in V_k$, то гіпотеза H_0 відхиляється; якщо $z_{\text{в}} \notin V_k$, то — приймається.

Як правило, на етапах 3–6 використовується статистика, для якої значення квантилів табульовані: статистика з нормальним розподілом $N(0,1)$, статистика Стьюдента, статистика χ^2 — «хі»-квадрат та статистика Фішера, з якою ми познайомимося далі.

Приклад 1. З нормально розподіленої генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 2$ і невідомим математичним сподіванням m одержана вибірка обсягу $n = 25$. За результатами цієї вибірки знайдено вибіркове середнє $\overline{x} = 9{,}3$. Необхідно для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити основну гіпотезу $H_0 : m = 10$ за альтернативної гіпотези $H_1 : m < 10$.

Розв'язання

1) основна та альтернативна гіпотези сформульовані в умові задачі: $H_0 : m = 10$, $H_1 : m < 10$;

2) рівень значущості задано: $\alpha = 0{,}05$;

3) скористаємося оцінкою математичного сподівання — вибірковим середнім $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Оскільки вибірка одержується з нормально розподіленої генеральної сукупності, статистика $\overline{X}$ також має нормальний розподіл з дисперсією $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{25}$. За умови, що гіпотеза H_0 справедлива, математичне сподівання статистики $\overline{X}$ дорівнює 10. За статистику критерію візьмемо нормовану статистику $U = \frac{\overline{X} - 10}{\sqrt{4/25}}$. Очевидно, що вона має розподіл $N(0,1)$;

4) ураховуючи вигляд альтернативної гіпотези, критичну область задаємо нерівністю $U \le u_\alpha$. За таблицею квантилів розподілу $N(0,1)$ знаходимо $u_\alpha = u_{0,05} = -u_{0,95} = -1,645$;

5) вибіркове значення статистики критерію дорівнює $u_в = \dfrac{9,3-10}{\sqrt{4/25}} = -1,75$;

6) приймаємо статистичне рішення: оскільки $u_в < -1,645$, тобто $u_в \in V_k$, гіпотеза H_0 відхиляється.

Зауваження 2. Задачу з прикладу 1 та інші задачі у подібному формулюванні слід сприймати як математичні моделі деяких реальних задач із практики. Розглянемо одну з таких задач стосовно до прикладу 1. За старою технологією виготовлення одиниці продукції триває в середньому 10 год. З упровадженням нової технології очікується, що цей час зменшиться. Для перевірки за новою технологією виготовлено 25 одиниць продукції. При цьому вибіркове середнє затрат часу становило 9,3 год. Припускаючи, що вибірка затрат часу одержана з нормально розподіленої генеральної сукупності з математичним сподіванням m і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 2$ год, перевірити на рівні значущості $\alpha = 0,05$ гіпотезу про те, що впровадження нової технології не вплине на тривалість виготовлення одиниці продукції.

Відхилення гіпотези H_0 у прикладі 1 на користь альтернативної гіпотези H_1 в інтерпретації сформульованої задачі означає, що треба вважати нову технологію такою, яка приведе до зменшення затрат часу на виготовлення одиниці продукції.

Приклад 2. Показати **самостійно**, що в умовах прикладу 1 гіпотезу $H_0 : m = 10$ за альтернативної гіпотези $H_1 :\ m \ne 10$ слід прийняти.

Перевірку параметричної гіпотези $H_0 : a = a_0$ за альтернативної гіпотези $H_1 : a \ne a_0$ можна провести з використанням довірчого інтервалу для параметра a. Справді, для статистики Z критерію з імовірністю $1-\alpha$ виконується нерівність

$$z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \tag{14.2}$$

яка описує область прийняття гіпотези H_0 (саме цією нерівністю ми користувались при побудові довірчих інтервалів у п. 13.2).

Розв'язавши нерівності (14.2) відносно значення a_0 параметра a, дістанемо довірчий інтервал, який з надійністю $1-\alpha$ покриває це значення. Отже, щоб для рівня значущості α перевірити гіпотезу $H_0 : a = a_0$ за альтернативної гіпотези $H_1 : a \neq a_0$, потрібно з надійністю $1-\alpha$ побудувати довірчий інтервал для параметра a. Якщо значення a_0 покривається цим довірчим інтервалом, гіпотеза H_0 приймається, якщо ні — відхиляється.

Приклад 3. В умовах прикладу 1 перевірити гіпотезу $H_0 : m = 10$ за альтернативної гіпотези $H_1 : m \neq 10$, скориставшись довірчим інтервалом для m.

Розв'язання

У нашому випадку довірчий інтервал для m має вигляд $\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ [див. формулу (13.9)].

Підставляючи $\bar{X} = 9{,}3;\ \sigma = 2;\ n = 25;\ u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{0{,}05}{2}} = u_{0{,}975} = 1{,}96$, дістаємо $8{,}516 < m < 10{,}084$. Оскільки знайдений довірчий інтервал покриває значення $m = 10$, гіпотезу H_0 слід прийняти.

Зауваження 3. Критерієм перевірки гіпотези $H_0 : m = m_0$ (за відомої дисперсії σ^2) з використанням статистики

$$Z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} \tag{14.3}$$

можна користуватись для довільного розподілу генеральної сукупності за умови, що обсяг вибірки n достатньо великий. Тоді статистика $\bar{X}$ згідно з центральною граничною теоремою розподілена наближено за нормальним законом $N\left(m_0, \sigma/\sqrt{n}\right)$, а статистика (14.3) — за законом $N(0, 1)$.

У разі невідомого σ розглядатимемо генеральну сукупність виключно нормального розподілу.

Приклад 4. За вибіркою обсягу $n = 20$, одержаною з нормально розподіленої генеральної сукупності з невідомими математичним сподіванням m та дисперсією σ^2, знайдені вибіркове середнє $\bar{x} = 16$ і виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення

$s = 4,5$. Необхідно для рівня значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу $H_0: m = m_0 = 15$ за: 1) альтернативної гіпотези $H_1: m > 15$; 2) альтернативної гіпотези $H_1: m \neq 15$.

Розв'язання рекомендуємо виконати **самостійно**, скориставшись як статистикою критерію статистикою Стьюдента (13.3)

$$Z = T(n-1) = \frac{\overline{X} - m_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Приклад 5. Перевірити нульову гіпотезу H_0 з попереднього прикладу за альтернативної гіпотези 2, скориставшись довірчим інтервалом для m.

Розв'язання виконайте **самостійно** [див. формулу (13.11)].

Приклад 6. За даними прикладу 4 п. 13.2 перевірити на рівні значущості $\alpha = 0,1$ гіпотезу, що дисперсія σ^2 тривалості виготовлення одиниці продукції дорівнює 0,11 год^2, за альтернативної гіпотези $\sigma^2 < 0,11$ год^2.

Розв'язання

Обсяг вибірки n, вибіркове середнє $\overline{x}$ та виправлена вибіркова дисперсія s^2 дорівнюють

$$n = 20, \quad \overline{x} = 10,78, \quad s^2 = 0,064;$$

1) перевіряється гіпотеза $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,11$ за альтернативної гіпотези $H_1: \sigma^2 < 0,11$;

2) рівень значущості задано: $\alpha = 0,1$;

3) за статистику критерію з урахуванням припущення, що гіпотеза H_0 справедлива, візьмемо статистику

$$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)S^2}{0,11}$$

з розподілом $\chi^2(n-1)$ (див. теорему п. 13.1);

4) критична область задається нерівністю

$$Z \le z_\alpha = \chi^2_\alpha(n-1) = \chi^2_{0,1}(19) = 11,7$$

[квантиль $\chi^2_{0,1}(19)$ знайдено за табл. Д1.4, дод. 1];

5) вибіркове значення статистики критерію дорівнює

$$z_в = \frac{19 \cdot 0,064}{0,11} = 11,05;$$

6) приймаємо статистичне рішення: оскільки $z_в < \chi^2_{0,1}(19)$, гіпотеза H_0 відхиляється. Отже, слід вважати дисперсію тривалості виготовлення одиниці продукції меншою за 0,11 год^2.

Приклад 7. За умов попереднього прикладу перевірити гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = 0,11$, якщо альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1 : \sigma^2 \neq 0,11$.

Розв'язання

Довірчий інтервал

$$0,0404 < \sigma^2 < 0,1204,$$

побудований у прикладі 4 п. 13.2, покриває значення $\sigma_0^2 = 0,11$, і тому відхиляти гіпотезу H_0 немає підстав.

14.3. Перевірка гіпотези про числове значення ймовірності «успіху» у схемі Бернуллі

Нехай у n випробуваннях Бернуллі «успіх» настав X разів. Потрібно перевірити гіпотезу $H_0 : p = p_0$, де p — імовірність «успіху» в окремому випробуванні. Критерій цієї перевірки природно будувати на порівнянні заданого числа p_0 з відносною частотою «успіху» $p^* = \frac{X}{n}$. Якщо n — достатньо велике, а p_0 помітно відрізняється від 0 та 1, підходящою статистикою для цього є статистика

$$Z = \frac{p^* - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)} \big/ \sqrt{n}}. \qquad (14.4)$$

За справедливої гіпотези $H_0 : p = p_0$ ця статистика має розподіл, близький до нормального розподілу $N(0, 1)$ [див. формулу (13.17)].

Критична область для рівня значущості α вибирається залежно від вигляду альтернативної гіпотези H_1 :

$$z_в \le u_\alpha - \text{для } H_1 : p < p_0;$$
$$z_в \ge u_{1-\alpha} - \text{для } H_1 : p > p_0;$$
$$|z_в| \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}} - \text{для } H_1 : p \ne p_0,$$

де $z_в$ — вибіркове значення статистики (14.4). Відповідний квантиль u_p розподілу $N(0,1)$ знаходимо за табл. Д1.3, дод. 1.

Гіпотезу $H_0 : p = p_0$ за альтернативної гіпотези $H_1 : p \ne p_0$ можна перевірити з використанням довірчого інтервалу [див. формулу (13.18)], який з урахуванням заданого значення p_0 запишемо у вигляді

$$\left(p^* - \varepsilon,\ p^* + \varepsilon\right), \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\, u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Якщо значення p_0 покривається цим інтервалом, гіпотеза H_0 приймається, якщо ні — відхиляється.

Приклад 8. Гральний кубик підкидається 120 разів, при цьому «шістка» випала 40 разів. Чи є підстави вважати на рівні значущості 0,05 кубик «правильним»?

Розв'язання

Перевіримо на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ гіпотезу $H_0 : p = \frac{1}{6}$ за альтернативної гіпотези $H_1 : p \ne \frac{1}{6}$.

Для вибіркового значення статистики (14.4) дістанемо

$$z_в = \frac{\frac{40}{120} - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)} \Big/ \sqrt{120}} = 4{,}898,$$

а для відповідного квантиля — $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1{,}960.$

Оскільки $|z_в| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Отже, результати підкидань кубика не дають підстав уважати його «правильним».

Приклад 9. Перевірка показала, що ймовірність виготовлення на даному верстаті бракованої деталі дорівнює 0,15 (бракована продукція верстата становить 15 %). Після модернізації верстата очікується зменшення цієї ймовірності (відсотка браку в продукції верстата). Зі 100 відібраних навмання деталей, виготовлених на модернізованому верстаті, 10 виявились бракованими. Перевірити на рівні значущості 0,05 гіпотезу про те, що модернізація не вплинула на ймовірність виготовлення верстатом бракованої деталі (на відсоток браку в продукції верстата), за альтернативної гіпотези, що вплинула.

Розв'язання

На рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевіряється гіпотеза $H_0 : p = 0,15$ за альтернативної гіпотези $H_1 : p < 0,15$.

Для вибіркового значення статистики (14.4) дістаємо

$$z_{\text{в}} = \frac{\dfrac{10}{100} - 0,15}{\sqrt{0,15(1-0,15)} \big/ \sqrt{100}} \approx -1,4.$$

Відповідний квантиль дорівнює

$$u_\alpha = u_{0,05} = -u_{0,95} = -1,645.$$

Оскільки $z_{\text{в}} > u_\alpha$, гіпотеза H_0 приймається. Це означає, що немає підстав уважати модернізацію верстата ефективною.

► *Задачі*

1. З нормально розподіленої генеральної сукупності X взято вибірку обсягу n і за нею знайдено вибіркове середнє $\overline{x}$. Потрібно на рівні значущості $\alpha = 1 - \beta$ перевірити нульову гіпотезу:

1) $H_0 : m = m_0$ за альтернативної гіпотези $H_1 : m \neq m_0$, якщо середнє квадратичне відхилення відоме і дорівнює σ;

2) $H_0 : m = m_0$ за альтернативної гіпотези $H_1 : m > m_0$, якщо дисперсія σ^2 невідома і за вибіркою знайдена виправлена вибіркова дисперсія s^2;

3) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ за альтернативної гіпотези $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$:

	а)	б)	в)	г)	ґ)	д)	е)	є)	ж)	з)	и)	і)	ї)
m_0	28	15	41	12,5	42	11,5	15,2	5,7	88	65	2,0	20	4,2
σ_0^2	7,3	42	0,26	7,5	10	5,8	5,2	6,1	19	41	0,28	27	4,1

	й)	к)	л)	м)	н)	о)	п)
m_0	23,8	15	54,2	1,8	2	18,5	35
σ_0^2	6,7	19	0,2	3,0	14	9,3	7,5

Значення величин $n, \overline{x}, \beta, \sigma, s^2$ узяти з відповідних задач підрозд. 13.

2. З нормально розподіленої генеральної сукупності X з невідомими математичним сподіванням m і дисперсією σ^2 взято вибірку обсягу n і за нею знайдені вибіркове середнє $\overline{x}$ і виправлена вибіркова дисперсія s^2. Потрібно на рівні значущості $\alpha = 1 - \beta$ перевірити нульові гіпотези:

а) $H_0 : m = m_0$ за альтернативної гіпотези $H_1 : m \neq m_0$;

б) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ за альтернативної гіпотези $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ з використанням довірчих інтервалів для m і σ^2.

Значення величин $n, \overline{x}, s^2, \beta, m_0, \sigma_0^2$ узяти відповідно із задач 1*а*—1*ґ*.

3. Монета підкидається n разів, при цьому «герб» випав k разів:

1) чи є підстави вважати на рівні значущості 0,05 монету правильною?

2) чи можна на рівні значущості 0,01 стверджувати, що ймовірність появи «герба» менша від $\frac{1}{2}$?

	а)	б)	в)	г)	ґ)
n	100	200	300	50	150
k	20	80	100	20	70

15. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ ПРО РІВНІСТЬ ПАРАМЕТРІВ

15.1. Перевірка гіпотези про рівність математичних сподівань двох нормальних розподілів, дисперсії яких відомі

Розглянемо дві випадкові величини X та Y з розподілами відповідно $N(m_x, \sigma_x)$ та $N(m_y, \sigma_y)$. За умовою σ_x та σ_y — відомі. Потрібно за двома незалежними вибірками з обсягами n_1 та n_2, одержаними відповідно з генеральних сукупностей X та Y, перевірити гіпотезу $H_0: m_x = m_y$. Скористаємося тим, що вибіркові середні $\overline{X}$ та $\overline{Y}$ мають розподіли відповідно $N\left(m_x, \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n_1}}\right)$ та $N\left(m_y, \dfrac{\sigma_y}{\sqrt{n_2}}\right)$. Оскільки вибірки незалежні, то $\overline{X}$ та $\overline{Y}$ також незалежні і різниця $\overline{X} - \overline{Y}$ має нормальний розподіл, причому

$$D\left[\overline{X} - \overline{Y}\right] = D\left[\overline{X}\right] + D\left[\overline{Y}\right] = \frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}.$$

Якщо гіпотеза $H_0: m_x = m_y$ справедлива, то $M\left[\overline{X} - \overline{Y}\right] = m_x - m_y = 0$ і статистика

$$Z = U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2 / n_1 + \sigma_y^2 / n_2}} \tag{15.1}$$

є випадковою величиною з розподілом $N(0,1)$.

Статистика (15.1) використовується як статистика критерію перевірки нульової гіпотези. Критична область для заданого рівня значущості α будується залежно від вигляду альтернативної гіпотези (див. п. 14.1). Для двобічного критерію, наприклад, критичну область можна подати у вигляді

$$\frac{\left|\overline{x} - \overline{y}\right|}{\sqrt{\sigma_x^2 / n_1 + \sigma_y^2 / n_2}} \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

де $\bar{x}$ та $\bar{y}$ — вибіркові значення середніх $\bar{X}$ та $\bar{Y}$, а $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль розподілу $N(0,1)$.

Зауваження 1. Вибіркові середні $\bar{x}$ та $\bar{y}$ зазвичай не дорівнюють одне одному. Якщо в результаті перевірки гіпотеза $H_0: m_x = m_y$ приймається, то відмінність значень $\bar{x}$ та $\bar{y}$ називають *незначущою* (випадковою). Ця відмінність пояснюється випадковими причинами, зокрема, випадковістю вибірок. Якщо ж гіпотеза $H_0: m_x = m_y$ відхиляється, то відмінність вибіркових середніх $\bar{x}$ та $\bar{y}$ називають *значущою* (невипадковою). Це означає, що її не можна пояснити випадковими причинами, оскільки самі математичні сподівання m_x і m_y (ще кажуть — генеральні середні) різні внаслідок деяких закономірних факторів.

Сказане стосується всіх інших параметричних гіпотез, зокрема, гіпотез про числові значення параметрів розподілу з підрозд. 14. Наприклад, якщо гіпотеза $H_0: m = m_0$ про рівність математичного сподівання фіксованому значенню m_0 приймається, то відмінність між вибірковим середнім $\bar{x}$ та m_0 незначуща, у разі відхилення гіпотези $H_0 -$ значуща (якщо випадкова величина $X -$ результат вимірювання деякої величини з відомим точним значенням m_0, то значуще відхилення $\bar{x}$ від m_0 свідчить про наявність систематичної похибки). Критерії перевірки параметричних гіпотез ще називають критеріями *значущості.*

Приклад 1. У результаті двох серій вимірювань з кількістю вимірювань $n_1 = 25$ та $n_2 = 50$ одержані такі середні значення досліджуваної величини: $\bar{x} = 9,79$ і $\bar{y} = 9,60$. Чи можна з надійністю $0,99$ (на рівні значущості $\alpha = 0,01$) пояснити таку розбіжність значень випадковими причинами, якщо відомо, що середні квадратичні відхилення в обох серіях вимірювань $\sigma_x = \sigma_y = 0,3$?

Розв'язання

Знайдемо вибіркове значення статистики критерію (15.1): $|z_{\text{в}}| = \dfrac{|9,79 - 9,60|}{0,3\sqrt{1/25 + 1/50}} = 2,59$. Квантиль $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,995} = 2,576$. Оскільки $|z_{\text{в}}| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, то з надійністю 0,99 слід уважати розбіжність середніх невипадковою (значущою).

Зауваження 2. Описаним критерієм перевірки гіпотези $H_0: m_x = m_y$ можна користуватись і в разі довільних розподілів випадкових величин X та Y, якщо обсяги вибірок n_1 та n_2 достатньо великі. У цьому разі згідно з центральною граничною теоремою вибіркові середні $\overline{X}$ та $\overline{Y}$ також мають (хоч і наближено) нормальні розподіли — відповідно $N\left(m_x, \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n_1}}\right)$ та $N\left(m_y, \dfrac{\sigma_y}{\sqrt{n_2}}\right)$.

15.2. Розподіл Фішера і перевірка гіпотези про рівність дисперсій двох нормальних розподілів

На практиці часто виникає потреба у порівнянні точності приладів, інструментів, самих методів вимірювань тощо. Очевидно, що ліпшим є той прилад, інструмент і метод, який забезпечує найменше розсіювання результатів вимірювань. Якщо говорити мовою математичної статистики, то порівняння точності означає порівняння дисперсій випадкових величин. Статистикою критерію перевірки гіпотези про рівність дисперсій двох нормально розподілених випадкових величин є статистика Фішера. Тому познайомимося спочатку з ***розподілом Фішера.***

Означення 1. Розподілом Фішера з n_1 і n_2 ступенями вільності називається розподіл випадкової величини $F(n_1, n_2)$, яка дорівнює відношенню двох незалежних випадкових величин $\chi^2(n_1)/n_1$ та $\chi^2(n_2)/n_2$, тобто

$$F(n_1, n_2) = \frac{\chi^2(n_1)/n_1}{\chi^2(n_2)/n_2}.$$

Нагадаємо, що $\chi^2(n)$ — випадкова величина, що має «хі»-квадрат розподіл з n ступенями вільності. Розподіл Фішера залежить лише від чисел ступенів вільності і не залежить від інших параметрів. Вираз для щільності $f(x)$ (рис. 15.1) розподілу Фішера можна знайти у спеціальній літературі. Далі сам розподіл Фішера, як і випадкову величину, що має цей розподіл, позначатимемо також $F(n_1, n_2)$. Квантилі розподілу $F(n_1, n_2)$ табульовані і наведені в табл. Д1.6, дод. 1.

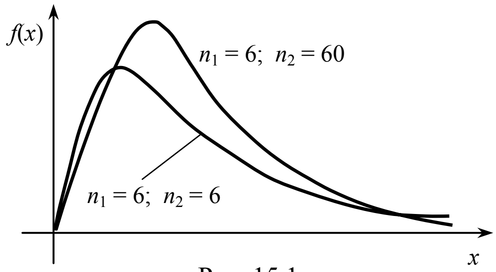


Рис. 15.1

Для квантилів розподілу Фішера порядків p і $1-p$ справедлива формула

$$F_{1-p}\left(n_1, n_2\right) = \frac{1}{F_p\left(n_2, n_1\right)}. \qquad (15.2)$$

Нехай випадкові величини X та Y розподілені за законами відповідно $N\left(m_x, \sigma_x\right)$ та $N\left(m_y, \sigma_y\right)$. Параметри цих розподілів нам невідомі. З генеральної сукупності X одержується вибірка обсягу n_1, а з генеральної сукупності Y — вибірка обсягу n_2. Вибірки незалежні. За цими вибірками необхідно перевірити гіпотезу про рівність дисперсій генеральних сукупностей X та Y, тобто гіпотезу $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

В основі перевірки цієї гіпотези лежить відношення $\dfrac{S_x^2}{S_y^2}$ виправлених вибіркових дисперсій

$$S_x^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 \text{ та } S_y^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2. \qquad (15.3)$$

Якщо це відношення «значно» відрізняється від 1, то гіпотезу H_0 природно відхилити. А якщо ні, то гіпотезу H_0 природно не відхиляти.

Знайдемо розподіл випадкової величини $Z = S_x^2 \big/ S_y^2$, скориставшись теоремою з п. 13.1. Згідно з цією теоремою випадкові величини $\dfrac{n_1 - 1}{\sigma_x^2} S_x^2$ та $\dfrac{n_2 - 1}{\sigma_y^2} S_y^2$ мають «хі»-квадрат розподіли відповідно

$\chi^2(n_1-1)$ та $\chi^2(n_2-1)$, тобто $\frac{n_1-1}{\sigma_x^2}S_x^2=\chi^2(n_1-1)$, а $\frac{n_2-1}{\sigma_y^2}S_y^2=\chi^2(n_2-1)$. Звідси $Z=S_x^2\big/S_y^2=\frac{\chi^2(n_1-1)/(n_1-1)}{\chi^2(n_2-1)/(n_2-1)}\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$.

Якщо гіпотеза $H_0:\sigma_x^2=\sigma_y^2$ справедлива, то згідно з означенням розподілу Фішера

$$Z=S_x^2\big/S_y^2=F(n_1-1,n_2-1). \tag{15.4}$$

Отже, за умови справедливості гіпотези $H_0:\sigma_x^2=\sigma_y^2$ відношення виправлених вибіркових дисперсій має розподіл Фішера з n_1-1 та n_2-1 ступенями вільності.

Вибираємо статистику (15.4) за статистику критерію перевірки нульової гіпотези. Критична область для заданого рівня значущості α будується залежно від вигляду альтернативної гіпотези H_1.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1:\sigma_x^2>\sigma_y^2$. Найліпша критична область у цьому разі визначається нерівністю $Z\ge z_{1-\alpha}$ (див. п. 14.1) або

$$\frac{S_x^2}{S_y^2}=F(n_1-1,n_2-1)\ge F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1).$$

Позначимо через s_x^2 та s_y^2 виправлені вибіркові дисперсії, обчислені за результатами конкретних вибірок $x_1,x_2,\ldots,x_{n_1}$ та $y_1,y_2,\ldots,y_{n_2}$.

Тоді, якщо $s_x^2/s_y^2\ge F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$, гіпотеза $H_0:\sigma_x^2=\sigma_y^2$ відхиляється; а якщо ні, відхиляти її немає підстав.

Випадок 2. Альтернативна гіпотеза має вигляд $H_1:\sigma_x^2\ne\sigma_y^2$. Для зручності скористаємося нерівністю $z_{\frac{\alpha}{2}}<Z<z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ для області прийняття гіпотези H_0, яку з урахуванням властивості (15.2) подамо у вигляді

$$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_2-1, n_1-1\right)} < \frac{S_x^2}{S_y^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1, n_2-1\right). \qquad (15.5)$$

Отже, якщо вибіркове відношення $s_x^2 \big/ s_y^2$ задовольняє нерівності (15.5), гіпотеза $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ приймається; а якщо ні — відхиляється.

Положення критичної області у разі альтернативної гіпотези $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ показано на рис. 15.2.

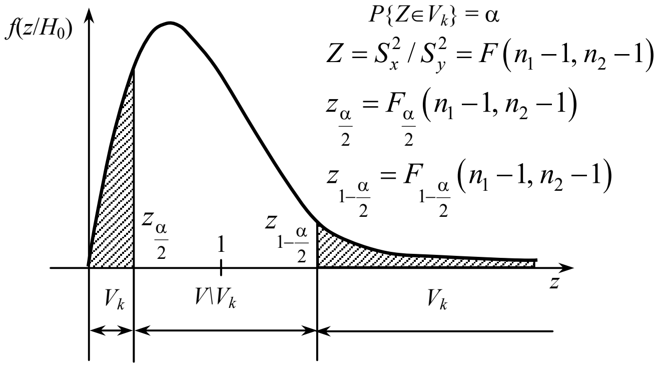


Рис. 15.2

Приклад 2. Деяка величина вимірюється двома приладами: А та Б. Нижче наведено вибірки значень цієї величини, одержані даними приладами.

Прилад А: 1,32; 1,35; 1,32; 1,35; 1,30; 1,30; 1,37; 1,31; 1,39; 1,39.

Прилад Б: 1,35; 1,31; 1,31; 1,41; 1,39; 1,37; 1,32; 1,34.

З'ясувати, чи можна на рівні значущості $\alpha = 0,02$ вважати точність вимірювання приладами А та Б однаковою?

Розв'язання

У термінах перевірки статистичних гіпотез цю задачу можна сформулювати так. Маємо дві реалізації незалежних вибірок з нормальних розподілів $N\left(m_x, \sigma_x\right)$, $N\left(m_y, \sigma_y\right)$. Нехай для визначеності $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ — вибірка, одержана приладом А; $y_1, y_2, \ldots, y_8$ — приладом Б. Висувається гіпотеза про однакову точність вимірювань. Це означає, що необхідно перевірити гіпотезу $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$. За альтернативну природно розглянути гіпотезу $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$. Проведемо необхідні обчислення. У нас

$$n_1 = 10,\ n_2 = 8,\ \ \bar{x} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i = 1{,}34,\ \ \bar{y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} y_i = 1{,}35,$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2 = 12{,}1 \cdot 10^{-4},$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^2 = 14{,}0 \cdot 10^{-4},\quad \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{12{,}1 \cdot 10^{-4}}{14{,}0 \cdot 10^{-4}} = 0{,}86,$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right) = F_{0{,}99}\left(9, 7\right) = 6{,}72,$$

$$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_2 - 1, n_1 - 1\right)} = \frac{1}{F_{0{,}99}\left(7, 9\right)} = \frac{1}{5{,}61} = 0{,}18.$$

Оскільки значення $\frac{s_x^2}{s_y^2} = 0{,}86$ належить проміжку $\left(0{,}18; 6{,}72\right)$, то на 2 %-му рівні значущості гіпотеза $H_0:\ \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ приймається. Для приладів А та Б це означає, що гіпотеза про однакову точність вимірювань цими приладами не суперечить експериментальним даним.

Зауваження 3. Застосування описаного критерію перевірки гіпотези $H_0:\ \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ не залежать від того, більше чи менше за 1 вибіркове відношення $\frac{s_x^2}{s_y^2}$. У більшості публікацій нашим позначенням $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ відповідає вибірка з більшою виправленою дисперсією s_x^2, тобто $s_x^2 > s_y^2$. Тоді вибіркове відношення $\frac{s_x^2}{s_y^2} > 1$, і зникає потреба у використанні лівої нерівності (15.5). Так, якщо у прикладі 2 згідно зі сказаним перепозначити

$$n_1 = 8;\ n_2 = 10;\ \bar{x} = 1{,}35;\ \ \bar{y} = 1{,}34;\ \ s_x^2 = 14{,}0 \cdot 10^{-4};\ \ s_y^2 = 12{,}1 \cdot 10^{-4},$$

то вибіркове відношення $\frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{14,0 \cdot 10^{-4}}{12,1 \cdot 10^{-4}} = 1,16$ порівнюється з квантилем $F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1 - 1,\, n_2 - 1\right) = F_{0,99}\left(7,\ 9\right) = 5,61$. Оскільки $\frac{s_x^2}{s_y^2} < F_{0,99}\left(7,\ 9\right)$, то гіпотеза $H_0:\ \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ приймається.

15.3. Перевірка гіпотези про рівність математичних сподівань двох нормальних розподілів з невідомими дисперсіями

Розглядаються дві випадкові величини X та Y з розподілами $N\left(m_x, \sigma_x\right)$ та $N\left(m_y, \sigma_y\right)$. Параметри обох розподілів невідомі. Потрібно за двома незалежними вибірками з обсягами n_1 та n_2, одержаними відповідно з генеральних сукупностей X та Y, перевірити гіпотезу $H_0:\ m_x = m_y$.

Якщо *дисперсії* σ_x^2 і σ_y^2 — *невідомі*, але *рівні* $\left(\sigma_x^2 = \sigma_y^2\right)$, для перевірки гіпотези H_0 користуються статистикою

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad \text{де} \quad S = \sqrt{\frac{\left(n_1 - 1\right)S_x^2 + \left(n_2 - 1\right)S_y^2}{n_1 + n_2 - 2}}, \qquad (15.6)$$

а S_x^2, S_y^2 — виправлені вибіркові дисперсії (15.3).

Доведено, що статистика Z має розподіл Стьюдента з $n_1 + n_2 - 2$ ступенями вільності. Тому якщо дисперсії σ_x^2 і σ_y^2 — невідомі, проте є підстави вважати їх однаковими, перевірка гіпотези $H_0: m_x = m_y$ зводиться до обчислення вибіркового значення статистики (15.6)

$$z_{\text{в}} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad (15.7)$$

і порівняння цього значення з відповідним квантилем розподілу Стьюдента.

При цьому гіпотеза $H_0: m_x = m_y$ для заданого рівня значущості α приймається, якщо

$$\begin{aligned} |z_в| &< t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) \text{ — для } H_1: m_x \neq m_y; \\ z_в &< t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2) \text{ — для } H_1: m_x > m_y; \\ z_в &> t_{\alpha}(n_1+n_2-2) \text{ — для } H_1: m_x < m_y. \end{aligned} \tag{15.8}$$

Якщо ж явних підстав уважати невідомі дисперсії σ_x^2 *і* σ_y^2 *однаковими немає, слід попередньо перевірити гіпотезу про рівність дисперсій, скориставшись критерієм Фішера з попереднього пункту. У разі прийняття цієї гіпотези застосовується один із критеріїв (15.8).*

Приклад 3. Розв'язати задачу з прикладу 1 за умови, що середні квадратичні відхилення в обох серіях вимірювань невідомі, але рівні (наприклад, вимірювання проводились тим самим приладом з невідомою точністю), а вибіркове значення величини S з формули (15.6) дорівнює $s = 0,3$.

Розв'язання

Для вибіркового значення (15.7) дістаємо

$|z_в| = \dfrac{|9,79-9,60|}{0,3\sqrt{\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{50}}} = 2,59.$ З табл. Д1.5 дод. 1 видно, що квантиль

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) = t_{0,995}(73) > 2,617.$$

Оскільки $|z_в| < t_{0,995}(73)$, то з надійністю 0,99 слід уважати розбіжність середніх випадковою (незначущою).

Приклад 4. Показати, що розбіжність середніх $\bar{x}$ та $\bar{y}$ з прикладу 2 незначуща.

Розв'язання

Потрібно перевірити гіпотезу $H_0: m_x = m_y$ за альтернативної гіпотези $H_1: m_x \neq m_y$. Оскільки дисперсії σ_x^2 та σ_y^2 невідомі, слід попередньо перевірити гіпотезу $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

За результатами розв'язання прикладу 2 відхиляти цю гіпотезу немає підстав. Скористаємось першим із критеріїв (15.8). Для вибіркового значення величини S з формули (15.6) дістаємо

$$s=\sqrt{\frac{(10-1)\cdot 12{,}1\cdot 10^{-4}+(8-1)\cdot 14{,}0\cdot 10^{-4}}{10+8-2}}=\sqrt{12{,}93\cdot 10^{-4}},$$

а для вибіркового значення (15.7) —

$$|z_{\text{в}}|=\frac{|1{,}34-1{,}35|}{\sqrt{12{,}93\cdot 10^{-4}}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}}=0{,}586.$$

Знаходимо квантиль

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=t_{0{,}99}(16)=2{,}583.$$

Оскільки $|z_{\text{в}}|<2{,}583,$ гіпотеза $H_0: m_x=m_y$ приймається, тобто розбіжність середніх незначуща.

Вище ми розглянули кілька прикладів перевірки гіпотез про параметри двох нормальних розподілів. Зрозуміло, що цими прикладами не вичерпуються всі можливі гіпотези такого роду. У табл. Д2.1, Д2.2, дод. 2 наведено розглянуті нами та інші можливі гіпотези про дисперсії та математичні сподівання нормальних генеральних сукупностей, описані статистики критеріїв, їх розподіли, а також області прийняття нульової гіпотези для різних альтернативних гіпотез.

Приклад 5 (*перевірка гіпотези $H_0:\ m_x=m_y$ за невідомих і різних дисперсій σ_x^2 та σ_y^2*). Далі наведені вибірки врожайності жита двох сортів (ц/га) з 5 навмання взятих ділянок кожного поля:

сорт X: 14,7; 13,7; 10,1; 14,1; 14,0,

сорт Y: 14,1; 14,5; 13,7; 12,7; 14,0.

Чи можна на рівні значущості $\alpha=0{,}1$ вважати, що сорт жита не вплинув на його середню врожайність, припускаючи, що вибірки одержані з нормально розподілених генеральних сукупностей?

Розв'язання

Задача зводиться до перевірки гіпотези $H_0:\ m_x=m_y$ за альтернативної гіпотези $H_1:\ m_x\neq m_y$.

Проведемо необхідні обчислення:

$$n_1 = 5;\ n_2 = 5;\ \overline{x} = 13,32;\ \overline{y} = 13,80;\ s_x^2 \approx 3,37;\ s_y^2 = 0,46.$$

Оскільки σ_x^2 та σ_y^2 невідомі, перевіримо попередньо гіпотезу $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ (див. дод. 2, табл. Д2.1) за альтернативної гіпотези $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$:

$$\frac{s_x^2}{s_y^2} \approx \frac{3,37}{0,46} \approx 7,33; \qquad F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1 - 1,\ n_2 - 1\right) = F_{0,95}\left(4,4\right) = 6,39\ .$$

Отже, $\dfrac{s_x^2}{s_y^2} > F_{0,95}\left(4,4\right)$, і гіпотеза про рівність дисперсій відхиляється (див. зауваження 3). Тому скористаємось останнім із критеріїв табл. Д2.2 дод. 2. Для цього обчислимо вибіркове значення статистики критерію:

$$z_{\text{в}} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{n_1} + \dfrac{s_y^2}{n_2}}} = \frac{13,32 - 13,80}{\sqrt{\dfrac{3,37}{5} + \dfrac{0,46}{5}}} \approx -0,55.$$

Знаходимо наближене значення числа ступенів вільності:

$$k \approx \frac{\left(\dfrac{3,37}{5} + \dfrac{0,46}{5}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{3,37}{5}\right)^2}{4} + \dfrac{\left(\dfrac{0,46}{5}\right)^2}{4}} \approx 5.$$

Знаходимо квантиль розподілу Стьюдента:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(k\right) = t_{0,95}\left(5\right) = 2,015.$$

Оскільки $\left|z_{\text{в}}\right| < t_{0,95}\left(5\right)$, гіпотеза $H_0 :\ m_x = m_y$ приймається.

Отже, результати вибірок не суперечать припущенню про те, що сорт жита не вплинув на його середню врожайність.

15.4. Перевірка гіпотези про рівність імовірностей «успіху» у двох схемах Бернуллі (за великої кількості випробувань)

Розглянемо незалежно одну від одної дві послідовності випробувань Бернуллі. Нехай у n_1 випробуваннях першої послідовності подія A з'являється X_1 разів, а в n_2 випробуваннях другої послідовності — X_2 разів. Позначимо через p_1 та p_2 імовірності настання події A («успіху») в окремому випробуванні відповідно першої та другої послідовностей. Потрібно перевірити гіпотезу $H_0 : p_1 = p_2$. Критерій цієї перевірки природно будувати на порівнянні відносних частот «успіху» $p_1^* = \dfrac{X_1}{n_1}$ та $p_2^* = \dfrac{X_2}{n_2}$. Для достатньо великих n_1 та n_2 відносні частоти p_1^* та p_2^* (як випадкові величини) мають розподіли, близькі до нормальних розподілів відповідно

$$N\left(p_1, \frac{\sqrt{p_1 q_1}}{\sqrt{n_1}}\right) \text{ та } N\left(p_2, \frac{\sqrt{p_2 q_2}}{\sqrt{n_2}}\right),$$

де $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$ [це випливає, зокрема, з викладеного щодо розподілу статистики (13.17)].

Тому різниця $p_1^* - p_2^*$ також розподілена нормально і за справедливої гіпотези $H_0 : p_1 = p_2$ має математичне сподівання $M\left[p_1^* - p_2^*\right] = 0$ і дисперсію

$$D\left[p_1^* - p_2^*\right] = D\left[p_1^*\right] + D\left[p_2^*\right] = p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right),$$

де $p = p_1 = p_2$.

Звідси випливає, що за справедливої гіпотези $H_0 : p_1 = p_2 = p$ розподіл статистики

$$Z = \frac{p_1^* - p_2^*}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \qquad (15.9)$$

близький до нормального розподілу $N(0, 1)$.

Крім того, якщо гіпотеза $H_0: p_1 = p_2$ справедлива, то розглядувані послідовності випробувань Бернуллі слід об'єднати в одну. Тому в обчисленні вибіркового значення $z_в$ статистики (15.9) за невідомий параметр p беруть його найліпшу оцінку

$$p^* = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}, \tag{15.10}$$

де m_1 та m_2 — вибіркові значення величин X_1 та X_2 відповідно.

Оцінка p^* є відносною частотою «успіху» в такій «об'єднаній» послідовності.

Критична область визначається нерівностями:

$z_в \le u_\alpha$ — для альтернативної гіпотези $H_1: p_1 < p_2$;

$z_в \ge u_{1-\alpha}$ — для альтернативної гіпотези $H_1: p_1 > p_2$;

$|z_в| \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — для альтернативної гіпотези $H_1: p_1 \ne p_2$.

Приклад 6. На двох верстатах виготовляються однотипні деталі. Зі 100 навмання взятих деталей, виготовлених першим верстатом, виявилось 8 бракованих, а з 300 деталей, виготовлених другим верстатом, — 13 бракованих. Чи можна вважати відсоток браку однаковим для двох верстатів? Узяти $\alpha = 0,05$.

Розв'язання

Потрібно перевірити гіпотезу $H_0: p_1 = p_2$, де p_1 та p_2 — імовірності виготовлення бракованої деталі відповідно на першому та другому верстатах. За альтернативну гіпотезу візьмемо $H_1: p_1 \ne p_2$. У нашому випадку $n_1 = 100,\ m_1 = 8,\ \ n_2 = 300,\ m_2 = 13$. Вибіркові значення відносних частот $p_1^*,\ p_2^*$ та оцінка (15.10) дорівнюють

$$p_1^* = \frac{8}{100} = 0,08;\ \ p_2^* = \frac{13}{300} = 0,043;\ \ p^* = \frac{21}{400} \approx 0,052.$$

Отже, для вибіркового значення статистики дістаємо

$$z_в = \frac{0,08 - 0,043}{\sqrt{0,052(1 - 0,052)}\sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{300}}} \approx 1,44.$$

Знаходимо квантиль:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,960.$$

Оскільки $|z_{\text{в}}| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, відхиляти гіпотезу $H_0 : p_1 = p_2$ немає підстав, тобто слід вважати відсоток браку для обох верстатів однаковим.

► ***Задачі***

1. Генеральні сукупності X та Y мають розподіли $N(m_x, \sigma_x)$ та $N(m_y, \sigma_y)$. Параметри цих розподілів не відомі. З X та Y взято незалежні вибірки обсягами n_1 та n_2 відповідно і за ними знайдено вибіркові середні $\bar{x}$ та $\bar{y}$ і виправлені вибіркові дисперсії s_x^2 та s_y^2. Потрібно на рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ за альтернативної гіпотези $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ та нульову гіпотезу $H_0 : m_x = m_y$ за альтернативної гіпотези $H_1 : m_x > m_y$:

	а)	б)	в)	г)	ґ)	д)	е)	є)	ж)	з)
n_1	5	11	10	10	7	5	7	4	10	16
n_2	6	16	16	10	9	6	9	9	10	25
$\bar{x}$	20,1	31,2	12,7	14,3	150	3,3	68,1	70,5	16,1	37,5
$\bar{y}$	19,8	29,2	12,0	12,2	142	2,48	67,6	70,2	15,3	36,8
s_x^2	2,3	0,84	9,7	22	22,8	0,25	30,2	2	0,2	1,21
s_y^2	2,8	0,4	10,3	18	22,2	0,108	29,2	2,7	0,15	1,44
α	0,1	0,01	0,01	0,1	0,01	0,05	0,05	0,01	0,05	0,1

	и)	і)	ї)	й)	к)	л)	м)	н)	о)	п)
n_1	11	8	16	6	16	10	8	6	10	6
n_2	11	7	13	6	21	9	9	6	8	8
$\bar{x}$	3,53	37,5	8,5	17,8	10,57	17,4	16,2	35,5	145,3	201,7
$\bar{y}$	2,067	32,4	6,2	17,08	9,62	14,5	13,9	31,4	142,3	193,6
s_x^2	19	0,016	4,2	10	2,7	14	9,5	46,97	2,7	19,36
s_y^2	23	0,087	4,2	16	3,2	19	6,3	23,2	3,2	16,25
α	0,1	0,05	0,01	0,01	0,1	0,05	0,1	0,01	0,05	0,05

2. Далі наведені дані обстежень за тестом інтелекту дванадцяти навмання відібраних осіб першої категорії досліджуваних і десяти — другої (в IQ). Припускається, що розподіл рівня інтелекту є нормальним.

Категорія 1	100	82	96	120	92	120	102	84	124	108	84	92
Категорія 2	76	80	94	102	126	100	126	114	118	102	—	—

Чи є підстави стверджувати, що рівень інтелекту цих категорій осіб різний? Узяти $\alpha = 0{,}1$.

3. Після змагань 7 випадково відібраних спортсменів проходили реабілітацію за методикою А і 8 — за методикою Б. Тривалість реабілітації (у годинах) кожного спортсмена занесена до таблиці.

А	50	38,5	66,5	61	54	40	39	–
Б	60	42	53	41	40,5	54	69	63,5

Припускається, що час реабілітації в обох випадках розподілений нормально. Чи можна на рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ вважати методику А ефективнішою?

4. Передбачається, що впровадження нової технології призведе до зменшення частки бракованих виробів. Результати контролю двох партій виробів обсягами n_1 та n_2, виготовлених відповідно за старою та новою технологіями, такі: у першій партії m_1 бракованих виробів, у другій — m_2. Чи підтверджують ці результати на рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ припущення про зменшення частки бракованих виробів?

а) $n_1 = 150,\ m_1 = 10,\ n_2 = 200,\ m_2 = 15;$

б) $n_1 = 100,\ m_1 = 8,\ n_2 = 200,\ m_2 = 15;$

в) $n_1 = 200,\ m_1 = 16,\ n_2 = 250,\ m_2 = 20;$

г) $n_1 = 150,\ m_1 = 10,\ n_2 = 200,\ m_2 = 13.$

5. Перший гральний кубик підкидався n_1 разів, при цьому «шістка» випала m_1 разів. Другий кубик підкидався n_2 рази і m_2 разів випала «шістка». Чи можна вважати, що ймовірність випадання «шістки» для обох кубиків однакова? Узяти $\alpha = 0{,}01$:

а) $n_1 = 120,\ m_1 = 24,\ n_2 = 125,\ m_2 = 26;$

б) $n_1 = 200,\ m_1 = 35,\ n_2 = 200,\ m_2 = 50.$

6. Для дослідження профілактичної дії ліків обстежено дві групи людей. Результати такі:

Уживали ліки		Не вживали ліків	
захворіли	не захворіли	захворіли	не захворіли
m_1	k_1	m_2	k_2

Чи свідчать ці результати про ефективність ліків на рівні значущості $\alpha = 0,05$?

а) $m_1 = 3,\ k_1 = 172,\ m_2 = 32,\ k_2 = 168;$

б) $m_1 = 10,\ k_1 = 150,\ m_2 = 20,\ k_2 = 180.$

16. КРИТЕРІЙ χ^2 ПІРСОНА

16.1. Перевірка гіпотези про вигляд розподілу випадкової величини

Нехай X — випадкова величина, розподіл якої невідомий. Досить часто на основі аналізу вибірки і деяких додаткових міркувань можна висунути щодо цього розподілу певну гіпотезу. Найбільш простою і водночас найбільш сильною гіпотезою подібного роду є гіпотеза, що функція розподілу випадкової величини має повністю визначений вигляд $F(x)$. Виникає питання, чи не спростовують експериментальні дані цю гіпотезу?

Отже, якщо розподіл випадкової величини X невідомий, але є підстави припустити, що він має певний вигляд $F(x)$, то перевіряється нульова гіпотеза H_0: генеральна сукупність X має розподіл $F(x)$. Будемо писати $H_0 : F_x(x) = F(x)$.

Незалежно від того, справедлива гіпотеза H_0 чи ні, за вибіркою завжди можна знайти емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$.

Гіпотезу H_0 приймають, якщо «відхилення» емпіричного розподілу $F^*(x)$ від гіпотетичного $F(x)$ мале. А якщо ні, то гіпотезу H_0 відхиляють. Міру такого «відхилення» можна визначити багатьма способами, відповідно до яких отримуються різні критерії для перевірки нульової гіпотези. Ці критерії мають назву *критерії згоди*. Найширше застосування має критерій згоди χ^2 («хі»-квадрат) Пірсона.

Розіб'ємо область значень випадкової величини X на скінченне число l множин $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_l$, які не перетинаються. Якщо X — неперервна випадкова величина, то це l проміжків (рис. 16.1), причому для визначеності вважаємо, що правий кінець вилучається з відповідної множини, а лівий їй належить. Якщо X — дискретна випадкова величина, то $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_l$ — це групи, що містять окремі значення цієї випадкової величини.

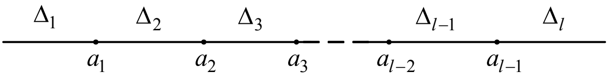


Рис. 16.1

Далі припускаємо, що гіпотеза $H_0 : F_x(x) = F(x)$ справедлива. За функцією розподілу $F(x)$ знаходимо ймовірності потрапляння випадкової величини у множини розбиття, тобто ймовірності $p_k = P\{X \in \Delta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Очевидно, що $\sum_{k=1}^{l} p_k = 1$. У позначеннях рис. 16.1, наприклад,

$$p_k = F(a_k) - F(a_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots, l,\ a_0 = -\infty,\ a_l = \infty .$$

Множини Δ_k вибираються таким чином, що всі $p_k > 0$.

Позначимо через ν_k кількість елементів вибірки $X_1, X_2, \ldots, X_n$, які потрапляють до множини Δ_k, $k = 1, 2, \ldots, l$. Тоді $\frac{\nu_k}{n}$ — відносна частота потрапляння випадкової величини X до множини Δ_k при n спостереженнях над нею.

Очевидно, що $\sum_{k=1}^{l} \nu_k = n$, $\sum_{k=1}^{l} \frac{\nu_k}{n} = 1$.

Зауваження 1. Поки що вибірку розглядаємо як випадковий вектор. Тому ν_k — випадкова величина, що має біномний розподіл з математичним сподіванням np_k та дисперсією $np_k q_k$ $\left(q_k = 1 - p_k\right)$. Справді, кожна компонента цього випадкового вектора є тією самою випадковою величиною X, і вибірку можна інтерпретувати як n-кратне повторення того самого експерименту з імовірністю «успіху» p_k у кожному експерименті.

Повернемося до величин p_k та $\dfrac{\nu_k}{n}$, що є відповідно ймовірностями та відносними частотами подій $\left\{X \in \Delta_k\right\}$. Згідно з теоремою Бернуллі за справедливої гіпотези H_0 і достатньо великого n ці величини повинні відрізнятися мало. Якщо це не так, то гіпотезу H_0 природно відхилити.

Гіпотетичний розподіл характеризується величинами p_k, а емпіричний (розподіл вибірки) — величинами $\dfrac{\nu_k}{n}$. Тому міру відхилення цих розподілів будемо шукати як міру відхилення величин p_k та $\dfrac{\nu_k}{n}$. За таку міру природно взяти величину $\sum\limits_{k=1}^{l} c_k \left(\dfrac{\nu_k}{n} - p_k\right)^2$, де коефіцієнти c_k можуть бути більш-менш довільними. Проте, як показав Пірсон, міра відхилення з найпростішими властивостями одержується тоді, коли $c_k = \dfrac{n}{p_k}$. Отже, будемо користуватися величиною

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{l} \frac{\left(\nu_k - np_k\right)^2}{np_k}, \qquad (16.1)$$

що досить просто виражається через величини ν_k та np_k. Останні іноді називають відповідно *частотами*, *що спостерігаються*, та *частотами, на які сподіваються*.

Якби розподіл величини χ_n^2 був відомий, то для заданого рівня значущості α можна було б побудувати критичну область і область прийняття гіпотези H_0. Проте на практиці розподіл величини χ_n^2 для кожного значення *n*, як правило, не знаходять, а користуються граничним (при $n \to \infty$) розподілом цієї величини.

Пірсон довів таку теорему.

Теорема (Пірсона). При $n \to \infty$ розподіл випадкової величини (16.1) збігається до розподілу χ^2 з $l-1$ ступенями вільності.

Користуючись цією теоремою, сформулюємо критерій згоди χ^2 для перевірки гіпотези H_0 : $F_x(x) = F(x)$.

Нехай $x_1, \ldots, x_n$ — конкретна вибірка, отримана в результаті експериментів (спостережень) над випадковою величною X і n — достатньо велике. Тоді, провівши описану раніше процедуру розбиття множини значень X і знайшовши величини p_k і ν_k, обчислюємо вибіркове значення статистики критерію χ^2 за формулою (16.1):

$$\chi^2_{\text{в}} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\left(\nu_k - np_k\right)^2}{np_k}. \tag{16.2}$$

Величина (16.2) не має бути надто великою. У протилежному разі гіпотезу H_0 слід відхилити.

Нехай $\chi^2_{1-\alpha}(l-1)$ — квантиль розподілу χ^2 порядку $1-\alpha$. Тоді гіпотеза H_0 на рівні значущості α відхиляється, якщо $\chi^2_{\text{в}} \ge \chi^2_{1-\alpha}(l-1)$. Якщо ж $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{1-\alpha}(l-1)$, то гіпотеза вважається такою, що не суперечить експериментальним даним (приймається).

На практиці гіпотетичний розподіл має чітко визначений вигляд $F(x)$ не так часто. Більш уживаним є випадок, коли гіпотетичний розподіл містить один чи кілька невідомих параметрів. Тоді гіпотеза H_0 формулюється так: функція розподілу випадкової величини X дорівнює $F(x;\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ при деяких значеннях параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$.

За значення невідомих параметрів природно взяти їх точкові оцінки $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s$, побудовані за вибіркою. Тоді гіпотетичний розподіл конкретизується: $F(x;\, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s) = F(x)$ і можна згідно з описаним раніше побудувати величину χ^2_n з формули (16.1).

Фішер показав (за досить загальних умов), що й у цьому разі статистика χ^2_n при $n \to \infty$ має χ^2 — розподіл, але з $l-s-1$ ступенями вільності. Тому вибіркове значення статистики $\chi^2_{\text{в}}$ (16.2) має порівнюватись із квантилем $\chi^2_{1-\alpha}(l-s-1)$.

Отже, щоб скористатись критерієм згоди χ^2 у випадку, коли гіпотетичний розподіл містить s невідомих параметрів, потрібно замінити ці параметри їх точковими оцінками і зменшити число ступенів вільності χ^2-розподілу на s.

Зауваження 2. У зв'язку з тим, що у критерії χ^2 використовується граничний розподіл випадкової величини (16.1) при $n \to \infty$, величини np_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ мають обмежуватись знизу деякими мінімально можливими значеннями. Універсального вирішення цього питання для всіх можливих застосувань критерію χ^2 не існує. Тому необхідну умову використання критерію χ^2 різні автори формулюють по-різному. Це і $np_k \geq 5,$ і $np_k \geq 8,$ і $np_k \geq 10$ тощо. Якщо вибрана (у вигляді однієї з наведених нерівностей) умова для деяких множин Δ_k не виконується, то ці множини об'єднують із сусідніми множинами. При цьому початкове число l множин Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ відповідним чином зменшується. Тут ми користуємось умовою $np_k \geq 5.$

Приклад 1 (***перевірка гіпотези про нормальний розподіл***). У результаті спостережень над випадковою величиною X одержано вибірку обсягом $n = 55.$

Вибірку групували; результати групування наведені у другому і третьому стовпцях табл. 16.1. Знайдено оцінки математичного сподівання і дисперсії, які дорівнюють

$$\tilde{m} = \overline{x} \approx 17,84; \quad \tilde{\sigma}^2 = s^2 \approx 8,53.$$

Перевірити на рівні значущості $\alpha = 0,1$ гіпотезу H_0: випадкова величина X має нормальний розподіл.

Розв'язання

Знаходимо ймовірності p_k (четвертий стовпчик табл. 16.1) потрапляння випадкової величини в інтервали Δ_k за формулою

$$p_k = P\{X \in \Delta_k\} = \Phi\left(\frac{b_k - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_k - \overline{x}}{s}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, 7,$$

де a_k і b_k — відповідно нижня та верхня межі інтервалу. $\Phi(x)$ — функція розподілу $N(0, 1)$, значення якої наведені в табл. Д1.1 дод. 1.

У п'ятому стовпці наведені частоти np_k, на які сподіваються, а у шостому — значення np_k після об'єднання перших двох і останніх двох інтервалів.

Таблиця 16.1

Номер інтервалу, k	Межі інтервалу, Δx	Кількість елементів вибірки в інтервалі, ν_k	Імовірність потрапляння в інтервал, p_k	Очікувана частота, np_k	np_k	$\nu_k - np_k$	$\dfrac{(\nu_k - np_k)^2}{np_k}$
1	$-\infty-12$	2	0,0228	1,254	5,274	0,725	0,010
2	12–14	4	0,0731	4,020			
3	14–16	8	0,1686	9,273	9,273	–1,273	0,175
4	16–18	12	0,2576	14,168	14,168	–2,168	0,332
5	18–20	16	0,2484	13,662	13,662	2,338	0,400
6	20–22	10	0,1519	8,354	12,633	0,366	0,011
7	$22-+\infty$	3	0,0778	4,279			
	Сума	55	1,0001	55	55	–	0,928

Оскільки після об'єднання залишилось $l = 5$ інтервалів, а за вибіркою оцінено $s = 2$ параметри, то число ступенів вільності $l - s - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$.

За таблицею квантилів знаходимо $\chi^2_{0,9}(2) = 4,61$.

Вибіркове значення статистики критерію $\chi^2_{\text{в}} = 0,928$.

Отже, $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{0,9}(2)$ і тому гіпотеза про нормальний розподіл приймається.

16.2. Критерій χ^2 як критерій перевірки гіпотези про числове значення ймовірності випадкової події

Розглянемо випадкову величину $X = \{0;1\}$ — індикатор випадкової події A (X набуває значення 1, якщо подія A під час проведення експерименту відбувається, та 0, якщо не відбувається).

Сформулюємо гіпотезу H_0: випадкова величина X має розподіл $P\{X=1\}=p_0$, $P\{X=0\}=1-p_0=q_0$, де p_0 — фіксоване число, $0<p_0<1$. Іншими словами, сформульовано гіпотезу H_0: імовірність події A дорівнює p_0. Нехай для перевірки гіпотези H_0 проведено n незалежних експериментів, у результаті яких подія A настала m разів. Стосовно до випадкової величини X результати експериментів подамо у вигляді:

0	1
$v_1=n-m$	$v_2=m$

Область можливих значень X розбита на $l=2$ множини: $\Delta_1=\{0\}$, $\Delta_2=\{1\}$. За умови, що гіпотеза H_0 справедлива, $p_1=P\{X\in\Delta_1\}=1-p_0=q_0$, $p_2=P\{X\in\Delta_2\}=p_0$. Отже, вибіркове значення статистики критерію χ^2 набуває вигляду

$$\chi^2_{\text{в}}=\frac{(n-m-nq_0)^2}{nq_0}+\frac{(m-np_0)^2}{np_0}=\frac{(m-np_0)^2}{np_0q_0}. \qquad (16.3)$$

Це значення порівнюється з квантилем $\chi^2_{1-\alpha}(l-1)=\chi^2_{1-\alpha}(1)$, і приймається відповідне рішення.

Приклад 2. При 120 підкиданнях грального кубика «шістка» випала 40 разів. Чи узгоджується цей результат з припущенням на рівні значущості $\alpha=0,05$, що кубик «правильний»?

Розв'язання

Перевіримо з використанням критерію χ^2 гіпотезу H_0: імовірність випадання «шістки» при одному підкиданні кубика дорівнює $\frac{1}{6}$. Підставивши у формулу (16.3) $n=120$, $m=40$, $p_0=\frac{1}{6}$, $q_0=\frac{5}{6}$, дістанемо $\chi^2_{\text{в}}=\frac{(40-120\cdot 1/6)^2}{120\cdot 1/6\cdot 5/6}=24.$

За таблицею квантилів $\chi^2_{1-\alpha}(1)=\chi^2_{0,95}(1)=3,84.$ Отже, $\chi^2_{\text{в}}>\chi^2_{0,95}(1)$. Тому гіпотеза H_0 відхиляється. Оскільки експериментальні дані спростовують гіпотезу, що ймовірність появи «шістки» при одному підкиданні кубика дорівнює $\frac{1}{6}$, то тим самим вони спростовують і припущення, що кубик «правильний».

Зауваження 3. Приклад з кубиком ми розглядали раніше у п. 14.3, де отримано той самий результат. У загальному випадку критерій перевірки гіпотези про числове значення ймовірності випадкової події з використанням співвідношення (16.3) рівносильний двобічному критерію перевірки цієї самої гіпотези з п. 14.3. Інакше кажучи, перевіряючи з використанням критерію χ^2 гіпотезу $H_0 : P(A) = p_0$, альтернативною гіпотезою слід уважати гіпотезу $H_1 : P(A) \neq p_0$.

16.3. Критерій χ^2 як критерій незалежності випадкових величин

Нехай у результаті експерименту спостерігаються дві дискретні випадкові величини X та Y з можливими значеннями $x_1, x_2, \ldots, x_k$ та $y_1, y_2, \ldots, y_l$. Виникає питання: чи залежні ці випадкові величини? Розглянемо випадок, коли ані розподіл $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ системи (X, Y), ані розподіли $p_{x_i} = P\{X = x_i\}$, $p_{y_j} = P\{Y = y_j\}$ її компонент нам невідомі. Стосовно розподілу системи (X, Y) висувається гіпотеза про незалежність її компонент, тобто гіпотеза $H_0 : p_{ij} = p_{x_i} p_{y_j}$. Для перевірки гіпотези H_0 виконуються n експериментів, результати яких можна подати у вигляді табл. 16.2.

Таблиця 16.2

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
y_1	ν_{11}	ν_{21}	$\ldots$	ν_{k1}
y_2	ν_{12}	ν_{22}	$\ldots$	ν_{k2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_l	ν_{1l}	ν_{2l}	$\ldots$	ν_{kl}

Тут ν_{ij} — кількість експериментів, в яких спостерігалась пара чисел (x_i, y_j). Зрозуміло, що $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \nu_{ij} = n$. Введемо позначення

$$\nu_{x_i} = \sum_{j=1}^{l} \nu_{ij}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, k\ ; \quad \nu_{y_j} = \sum_{i=1}^{k} \nu_{ij}\ , \quad j = 1, 2, \ldots, l\ .$$

Очевидно, що ν_{x_i} — кількість експериментів, в яких спостерігалась подія $\{X = x_i\}$, а ν_{y_j} — подія $\{Y = y_j\}$.

Критерій χ^2 для перевірки гіпотези $H_0 : p_{ij} = p_{x_i} p_{y_j}$ будується за тією самою схемою, що й раніше. Множинами розбиття області значень системи (X, Y) є множини $\Delta_{ij} = (x_i, y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Очевидно, що таких множин kl.

У розглядуваному випадку гіпотетичний розподіл $p_{ij} = p_{x_i} p_{y_j}$ містить невідомі параметри p_{x_i} та p_{y_j}. Тому потрібно побудувати точкові оцінки цих параметрів. Такими оцінками є відносні частоти $\tilde{p}_{x_i} = \dfrac{\nu_{x_i}}{n}$ та $\tilde{p}_{y_j} = \dfrac{\nu_{y_j}}{n}$.

Зауваження 4. Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{k} p_{x_i} = 1$ і $\sum\limits_{j=1}^{l} p_{y_j} = 1$, то очевидно, що кількість незалежних параметрів p_{x_i}, p_{y_j}, які оцінюються за двовимірною вибіркою, дорівнює $(k-1) + (l-1) = k + l - 2$.

Після заміни невідомих параметрів їх точковими оцінками, гіпотетичний розподіл конкретизується і за умови, що він справедливий,

$$P\{(X, Y) \in \Delta_{ij}\} = p_{ij} = \tilde{p}_{x_i} \tilde{p}_{y_j} = \frac{\nu_{x_i}}{n} \frac{\nu_{y_j}}{n}\ . \qquad (16.4)$$

За міру відхилення емпіричного розподілу $\dfrac{\nu_{ij}}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, l$ від гіпотетичного (16.4) вибирається статистика

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(\nu_{ij} - n\tilde{p}_{x_i} \tilde{p}_{y_j}\right)^2}{n\tilde{p}_{x_i} \tilde{p}_{y_j}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(\nu_{ij} - \nu_{x_i} \nu_{y_j} / n\right)^2}{\nu_{x_i} \nu_{y_j} / n}\ . \qquad (16.5)$$

Фішер показав, що при $n \to \infty$ статистика (16.5) має χ^2-розподіл з $kl - (k + l - 2) - 1 = (k-1)(l-1)$ ступенями вільності.

Отже, вибіркове значення $\chi^2_{\text{в}}$ статистики (16.5) порівнюється з квантилем $\chi^2_{1-\alpha}\left((k-1)(l-1)\right)$ і приймається відповідне рішення про прийняття чи відхилення гіпотези H_0.

Зауваження 5. Оскільки, знову ж таки, використовується граничний розподіл статистики (16.5) при $n \to \infty$, вимагається виконання умови $n\tilde{p}_{x_i}\tilde{p}_{y_j} = \dfrac{\nu_{x_i}\nu_{y_j}}{n} \geq 5$. Якщо ця умова для деяких клітинок табл. 16.2 не виконується, то відповідні рядки і стовпчики потрібно об'єднати з сусідніми рядками і стовпчиками.

Приклад 3. Далі наведені дані про колір волосся (світле, темне) і колір очей (блакитні, карі) 147 випадково вибраних юнаків.

Чи можна на підставі цих даних зробити висновок, що колір очей не пов'язаний з кольором волосся?

Очі / Волосся	Блакитні	Карі	Разом
Темне	31	41	72
Світле	40	35	75
Разом	71	76	147

Розв'язання

Насамперед звертаємо увагу на те, що результат кожного спостереження у даній задачі має нечисловий характер. Уведемо випадкову величину X, яка набуває деякого значення x_1 (наприклад, $x_1 = 0$), якщо очі навмання взятого юнака блакитні, та деякого значення x_2 (наприклад, $x_2 = 1$), якщо карі. Аналогічно введемо випадкову величину Y, яка набуває деякого значення y_1, якщо волосся навмання взятого юнака темне, та деякого значення y_2, якщо світле. Тоді, користуючись термінологією перевірки статистичних гіпотез, поставлену задачу можна сформулювати як задачу перевірки гіпотези про незалежність випадкових величин X та Y. В умові задачі $k = l = 2$, $n = 147$. Значення ν_{ij}, ν_{x_i}, ν_{y_j} подані в таблиці. Легко перевірити, що $\dfrac{\nu_{x_i}\nu_{y_j}}{n} > 5,\ i, j = 1,2$. Знаходимо значення статистики (16.5):

$$\chi^2_{\text{в}} = \frac{\left(31 - \frac{72\cdot 71}{147}\right)^2}{\frac{72\cdot 71}{147}} + \frac{\left(41 - \frac{72\cdot 76}{147}\right)^2}{\frac{72\cdot 76}{147}} + \frac{\left(40 - \frac{75\cdot 71}{147}\right)^2}{\frac{75\cdot 71}{147}} + \frac{\left(35 - \frac{75\cdot 76}{147}\right)^2}{\frac{75\cdot 76}{147}} \approx 1{,}51.$$

Перевіримо гіпотезу на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$. Знаходимо квантиль $\chi^2_{1-\alpha}\left((k-1)(l-1)\right) = \chi^2_{0{,}95}(1) = 3{,}84$. Оскільки $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{0{,}95}(1)$, гіпотеза приймається, тобто можна вважати, що колір очей не пов'язаний з кольором волосся.

Зауваження 6. Гіпотезу про незалежність можна перевіряти й у разі неперервних випадкових величин X та Y. Для цього область значень кожної з них розбивається на скінченну кількість інтервалів (наприклад, k інтервалів для X і l інтервалів для Y). Тоді ν_{ij} — кількість експериментів, в яких X потрапляє до i-го інтервалу, а Y — до j-го інтервалу. Очевидний зміст мають і величини ν_{x_i} та ν_{y_j}. За значеннями ν_{ij}, ν_{x_i}, ν_{y_j} обчислюється статистика (16.5), знаходиться квантиль $\chi^2_{1-\alpha}\left((k-1)(l-1)\right)$ і приймається відповідне рішення.

16.4. Перевірка значущості вибіркового коефіцієнта кореляції

Сказане у зауваженні 6 стосується, зокрема, компонент нормально розподіленого випадкового вектора (X, Y). Однак у цьому разі незалежність величин X та Y рівносильна їх некорельованості. Тому гіпотезу незалежності можна сформулювати у вигляді

$$H_0 : k_{xy} = 0, \tag{16.6}$$

де k_{xy} —коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y (стосовно позначення коефіцієнта кореляції див. зауваження 2 п. 9.4).

Нехай $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ — двовимірна випадкова вибірка обсягу n.

Змістовною оцінкою k_{xy} є вибірковий коефіцієнт кореляції k^*_{xy} [див. формулу (12.12)].

Розглянемо статистику

$$Z = \frac{\sqrt{n-2}\, k_{xy}^*}{\sqrt{1-k_{xy}^{*2}}}, \qquad (16.7)$$

яка є зростаючою функцією від k_{xy}^*.

Доведено, що за справедливої гіпотези (16.6) статистика Z має розподіл Стьюдента з $n-2$ ступенями вільності. Це дозволяє сформулювати наступний ***критерій перевірки гіпотези*** (16.6) за результатами конкретної вибірки

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$$

з нормально розподіленої генеральної сукупності (X, Y): потрібно обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції k_{xy}^* [див. формулу (12.12)], знайти вибіркове значення $z_в$ статистики (16.7) і порівняти це значення з відповідним квантилем розподілу Стьюдента. При цьому гіпотеза $H_0 : k_{xy} = 0$ для заданого рівня значущості α *приймається*, якщо

$|z_в| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ — для $H_1 : k_{xy} \neq 0$;

$z_в < t_{1-\alpha}(n-2)$ — для $H_1 : k_{xy} > 0$;

$z_в > t_{\alpha}(n-2)$ — для $H_1 : k_{xy} < 0$.

А якщо ні, то гіпотезу H_0 слід відхилити на користь відповідної альтернативної гіпотези H_1.

У разі відхилення гіпотези H_0 кажуть, що вибірковий коефіцієнт кореляції k_{xy}^* є *статистично значущим,* у разі прийняття — *статистично незначущим*.

Приклад 4. З нормально розподіленої генеральної сукупності (X, Y) одержано двовимірну вибірку обсягом $n = 18$ і за нею обчислено вибірковий коефіцієнт кореляції $k_{xy}^* = -0{,}15$.

Чи можна на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ вважати випадкові величини X та Y залежними з від'ємною кореляцією між ними?

Розв'язання

Перевіримо гіпотезу $H_0 : k_{xy} = 0$ проти альтернативної гіпотези $H_1 : k_{xy} < 0$. Вибірковий коефіцієнт кореляції вже знайдено, тому

$$z_{\text{в}} = \frac{\sqrt{18-2}\cdot(-0{,}15)}{\sqrt{1-(0{,}15)^2}} \approx -0{,}61.$$

За табл. Д1.5 дод. 1 знаходимо $t_{0,05}(16) = -t_{0,95}(16) = -1{,}746.$ Оскільки $z_{\text{в}} > t_{0,05}(16)$, приймаємо гіпотезу $H_0 : k_{xy} = 0,$ тобто на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ випадкові величини X та Y слід уважати незалежними.

Зауваження 7. У загальному випадку некорельованість випадкових величин X та Y є лише необхідною, але не достатньою умовою їх незалежності. Зокрема, це стосується і випадкових величин X та Y, кожна з яких розподілена нормально. Інакше кажучи, випадкові величини X та Y можуть бути некорельованими $(k_{xy} = 0)$, кожна з них може мати нормальний розподіл. Проте X і Y можуть бути залежними. Система (X ,Y) у такому разі не є розподіленою нормально.

Разом з тим вибірковим коефіцієнтом кореляції k_{xy}^* можна скористатись і в разі, коли випадкові величини мають нормальні розподіли, але нічого не відомо про розподіл системи (X ,Y). Справді, за справедливої гіпотези

$$H_0 : X, Y \text{ — незалежні,} \tag{16.8}$$

система (X ,Y) має двовимірний нормальний розподіл і можна скористатись описаним раніше критерієм.

Якщо k_{xy}^* виявиться статистично значущим, гіпотезу (16.8) слід відхилити. А якщо ні, то нічого конкретного стосовно цієї гіпотези сказати не можна і треба звернутись до загальної схеми критерію χ^2 (див. зауваження 6).

16.5. Перевірка гіпотези про однорідність вибірок

Нехай незалежно одна від одної одержані $k\,(k \geq 2)$ вибірок з обсягами відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Перевірити гіпотезу про ***однорідність*** цих вибірок означає перевірити гіпотезу про те, що їх можна вважати одержаними з тієї самої генеральної сукупності X. При цьому питання про вигляд розподілу випадкової величини X не ставиться. На практиці до перевірки гіпотези однорідності зводиться, наприклад, задача контролю якості деякої продукції, коли за контрольними вибірками з різних партій потрібно з'ясувати, змінювалась чи ні її якість у результаті зміни технологічного процесу, штату працівників чи інших умов виробництва. Гіпотезу про однорідність вибірок ще називають гіпотезою про однорідність експериментальних даних. Очевидно, що за справедливості цієї гіпотези вибірки можна об'єднати в одну вибірку обсягом $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Отже, нехай потрібно перевірити гіпотезу H_0: вибірки однорідні. Для цього, як і в п. 16.1, розіб'ємо область значень випадкової величини X на l множин $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_l$, які не перетинаються. Позначимо через ν_{ij} кількість тих значень i-ї вибірки $(i = 1, 2, \ldots, k)$, які потрапляють до j-ї множини $\Delta_j \, (j = 1, 2, \ldots, l)$. Тоді дані вибірок можна подати у вигляді табл. 16.3.

Таблиця 16.3

Δ_j \ Номер вибірки	1	2	$\cdots$	k	$\sum_{i=1}^{k} \nu_{ij} = \nu_j$
Δ_1	ν_{11}	ν_{21}	$\cdots$	ν_{k1}	ν_1
Δ_2	ν_{12}	ν_{22}	$\cdots$	ν_{k2}	ν_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Δ_l	ν_{1l}	ν_{2l}	$\cdots$	ν_{kl}	ν_l
$\sum_{j=1}^{l} \nu_{ij} = n_i$	n_1	n_2	$\cdots$	n_k	n

До табл. 16.3 одночасно занесені величини ν_j — загальна кількість значень, які потрапляють до множини Δ_j зі всіх вибірок, та n_i — обсяги вибірок.

Очевидно, що $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \nu_{ij} = \sum_{j=1}^{l} \nu_j = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Згідно з критерієм χ^2 перевірка гіпотези про однорідність вибірок зводиться до обчислення вибіркового значення статистики

$$\chi_n{}^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{\left(\nu_{ij} - n_i\nu_j / n\right)^2}{n_i\nu_j / n} \qquad (16.9)$$

і порівняння цього значення з квантилем $\chi^2_{1-\alpha}\left(\left(k-1\right)\left(l-1\right)\right)$.

Формально маємо той самий алгоритм, що й алгоритм перевірки гіпотези про незалежність випадкових величин з п. 16.3.

Приклад 5. З'ясовується рівень знань з вищої математики серед студентів двох потоків ІІ-го курсу. Для цього на кожному потоці навмання відбираються 50 студентів, які пишуть контрольну роботу. Результати написання контрольної роботи занесені до таблиці.

Потрібно перевірити припущення про те, що суттєвої різниці у рівнях засвоєння знань студентами обох потоків не існує. Взяти $\alpha = 0{,}05$.

Оцінка	Потоки		Разом
	1	2	
2	3	9	12
3	19	24	43
4	18	12	30
5	10	5	15
Разом	50	50	100

Розв'язання

Мовою перевірки статистичних гіпотез маємо дві вибірки однакових обсягів $n_1 = n_2 = 50$ і потрібно перевірити гіпотезу H_0 про їх однорідність. Для цього обчислюємо вибіркове значення статистики (16.9):

$$\chi^2_{\text{в}} = \frac{\left(3 - \frac{50\cdot 12}{100}\right)^2}{\frac{50\cdot 12}{100}} + \frac{\left(9 - \frac{50\cdot 12}{100}\right)^2}{\frac{50\cdot 12}{100}} + \frac{\left(19 - \frac{50\cdot 43}{100}\right)^2}{\frac{50\cdot 43}{100}} + \frac{\left(24 - \frac{50\cdot 43}{100}\right)^2}{\frac{50\cdot 43}{100}} +$$

$$+\frac{\left(18-\frac{50\cdot 30}{100}\right)^2}{\frac{50\cdot 30}{100}}+\frac{\left(12-\frac{50\cdot 30}{100}\right)^2}{\frac{50\cdot 30}{100}}+\frac{\left(10-\frac{50\cdot 15}{100}\right)^2}{\frac{50\cdot 15}{100}}+\frac{\left(5-\frac{50\cdot 15}{100}\right)^2}{\frac{50\cdot 15}{100}}\approx 6,45.$$

Для числа ступенів вільності дістаємо

$$(k-1)(l-1)=(2-1)(4-1)=3.$$

Знаходимо відповідний квантиль:

$$\chi^2_{1-\alpha}\left((k-1)(l-1)\right)=\chi^2_{0,95}(3)=7,81.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{в}}<\chi^2_{0,95}(3)$, відхиляти гіпотезу H_0 немає підстав, тобто можна вважати відмінність у рівнях засвоєння знань студентами обох потоків незначущою (несуттєвою).

► *Задачі*

Використовуючи критерій Пірсона, на рівні значущості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X зі статистичними даними, які подані у вигляді інтервального варіаційного ряду (у першому рядку зазначені часткові інтервали $a_{i-1}\div a_i$, у другому — відповідні їм частоти n_i).

1. $\alpha=0,05$;

$a_{i-1}\div a_i$	2÷12	12÷22	22÷32	32÷42	42÷52	52÷62	62÷72
n_i	7	8	15	36	15	11	8

2. $\alpha=0,05$;

$a_{i-1}\div a_i$	1,5÷ 3,5	3,5÷ 5,5	5,5÷ 7,5	7,5÷ 9,5	9,5÷ 11,5	11,5÷ 13,5	13,5÷ 15,5
n_i	4	18	12	35	15	10	6

3. $\alpha=0,05$;

$a_{i-1}\div a_i$	1÷6	6÷11	11÷16	16÷21	21÷26	26÷31	31÷36
n_i	6	12	16	40	13	8	5

4. $\alpha=0,01$;

$a_{i-1}\div a_i$	3,0÷ 3,6	3,6÷ 4,2	4,2÷ 4,8	4,8÷ 5,4	5,4÷ 6,0	6,0÷ 6,6	6,6÷ 7,2
n_i	6	8	31	43	22	15	5

5. $\alpha = 0,025;$

$a_{i-1} \div a_i$	0÷2,2	2,2÷ 4,4	4,4÷ 6,6	6,6÷ 8,58	8,8÷ 11,0	11,0÷ 13,2	13,2÷ 15,4
n_i	14	18	32	70	20	36	10

6. $\alpha = 0,01;$

$a_{i-1} \div a_i$	–4÷0	0÷4	4÷8	8÷12	12÷16	16÷20	20÷24
n_i	8	16	40	72	36	18	10

7. $\alpha = 0,05;$

$a_{i-1} \div a_i$	2÷7	7÷12	12÷17	17÷22	22÷27	27÷32	32÷37
n_i	10	26	25	30	26	21	12

8. $\alpha = 0,025;$

$a_{i-1} \div a_i$	4÷6	6÷8	8÷10	10÷12	12÷14	14÷16	16÷18
n_i	12	14	38	15	10	7	4

9. $\alpha = 0,05;$

$a_{i-1} \div a_i$	0÷10	10÷20	20÷30	30÷40	40÷50	50÷60	60÷70
n_i	10	27	55	70	20	13	5

10. $\alpha = 0,025;$

$a_{i-1} \div a_i$	1,8÷ 2,8	2,8÷ 3,8	3,8÷ 4,8	4,8÷ 5,8	5,8÷ 6,8	6,8÷ 7,8	7,8÷ 8,8
n_i	5	15	23	27	19	6	5

11. $\alpha = 0,05;$

$a_{i-1} \div a_i$	10÷13	13÷16	16÷19	19÷20	22÷25	25÷28	28÷31
n_i	12	23	30	29	29	16	11

12. $\alpha = 0,01;$

$a_{i-1} \div a_i$	1,2÷ 5,2	5,2÷ 9,2	9,2÷ 13,2	13,2÷ 17,2	17,2÷ 21,2	21,2÷ 25,2	25,2÷ 29,2
n_i	8	28	32	66	36	20	10

13. $\alpha = 0,05;$

$a_{i-1} \div a_i$	1,5÷ 4,5	4,5÷ 7,5	7,5÷ 10,5	10,5÷ 13,5	13,5÷ 16,5	16,5÷ 19,5	19,5÷ 22,5
n_i	5	12	34	50	28	14	7

14. $\alpha = 0,05;$

$a_{i-1} \div a_i$	10÷16	16÷22	22÷28	28÷34	34м40	40÷46	46÷52
n_i	9	24	34	48	20	9	6

15. $\alpha = 0{,}01$;

$a_{i-1} \div a_i$	2,0÷ 3,5	3,5÷ 5,0	5,0÷ 6,5	6,5÷ 8,0	8,0÷ 9,5	9,5÷ 11,0	11,0÷ 12,5
n_i	5	16	21	42	32	8	6

16. $\alpha = 0{,}05$;

$a_{i-1} - a_i$	9÷11	11÷13	13÷15	15÷17	17÷19	19÷21	21÷23
n_i	6	8	15	32	18	14	7

17. $\alpha = 0{,}05$;

$a_{i-1} \div a_i$	0,5÷ 5,5	5,5÷ 10,5	10,5÷ 15,5	15,5÷ 20,5	20,5÷ 25,5	25,5÷ 30,5	30,5÷ 35,5
n_i	13	20	30	60	35	30	12

18. $\alpha = 0{,}025$;

$a_{i-1} \div a_i$	12÷15	15÷18	16÷21	21÷24	24÷27	27÷30	30÷33
n_i	10	13	20	65	55	24	13

19. $\alpha = 0{,}05$;

$a_{i-1} \div a_i$	2,6÷ 6,6	6,6÷ 10,6	10,6÷ 14,6	14,6÷ 18,6	18,6÷ 22,6	22,6÷ 26,6	26,6÷ 30,6
n_i	6	10	17	45	35	22	15

20. $\alpha = 0{,}01$;

$a_{i-1} \div a_i$	2÷8	8÷14	14÷20	20÷26	26÷32	32÷38	38÷44
n_i	12	18	22	38	24	20	16

21. Дати відповідь на перше запитання зазначеної задачі 3 з підрозд. 14, користуючись критерієм χ^2 :

а) задачі 3*а*; б) задачі 3*б*; в) задачі 3*в*;
г) задачі 3*г*; ґ) задачі 3*ґ*.

22. Комплектні вироби однакового типу надходять від трьох постачальників. Перевірка показала, що серед навмання взятих n_1 виробів першого постачальника m_1 бракованих, n_2 другого — m_2 бракованих, n_3 третього — m_3 бракованих. Чи можна на рівні значущості α вважати, що якість виробів не залежить від постачальника?

	n_1	m_1	n_2	m_2	n_3	m_3	α
а)	40	2	50	3	20	2	0,05
б)	50	4	30	1	70	6	0,05
в)	30	1	40	2	60	7	0,1
г)	40	1	70	8	50	4	0,1
ґ)	30	2	45	3	65	8	0,05

17. СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ ПАРНОЇ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ

Часто потрібно дослідити залежність між двома величинами X та Y, одна з яких, наприклад X, не є випадковою. Терміном «регресія» (ще — «парна регресія») користуються й у цьому разі. Невипадкову змінну позначатимемо x. У п. 17.1 розглядається найпростіший випадок регресійної залежності випадкової величини Y від невипадкової змінної x, а саме випадок лінійної регресії.

17.1. Модель парної лінійної регресії (одна зі змінних — невипадкова)

Нехай змінна x має кількісний характер і є невипадковою, тобто її значення контрольовані і можуть задаватись дослідником. Через Y позначимо випадкову величину, поведінка якої певним чином залежить від x. Наприклад, x — кількість хімічної речовини, що вноситься в ґрунт, а Y — вміст цієї речовини в рослині, яка виросла на даному ґрунті. Випадковість величини Y викликається впливом на неї, поряд з x, численних неконтрольованих (випадкових) факторів. У наведеному прикладі це можуть бути відмінності у рослинах, ґрунтах, кліматичних умовах тощо.

Отже, кожному заданому значенню x відповідає не одне (як у функціональних залежностях), а ціла множина можливих значень Y, і сказати наперед, до експерименту, яке саме значення Y буде спостерігатись, неможливо. Подібні залежності між величинами x та Y мають назву *стохастичних* і вивчаються в середньому, а саме у вигляді функціональної залежності математичного сподівання $M\left[Y\right]$ від x. Функція $M\left[Y\right]=\varphi\left(x\right)$, яка описує поведінку математичного сподівання $M\left[Y\right]$ зі зміною x, називається *функцією регресії.*

Коли, як і в нашому випадку, досліджується зв'язок між двома величинами, то говорять про ***парну регресію***.

Далі розглянемо найпростіший випадок парної регресії, а саме припустимо, що функція регресії має вигляд

$$M\left[Y\right]=\beta_0+\beta_1 x, \qquad (17.1)$$

де β_0,β_1 — деякі параметри.

Постає питання: як за конкретними статистичними даними

$$\left(x_i,\, y_i\right),\ \ i=1,\, 2,\, ...,\, n;\quad n>2, \tag{17.2}$$

тобто, наборами заданих значень x_i змінної x та відповідних їм значень y_i випадкової величини Y, що спостерігались, оцінити параметри β_0 та β_1? Точкові оцінки цих параметрів — це деякі функції величин (17.2)

$$\tilde{\beta}_0=\tilde{\beta}_0\left(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n\right),\ \tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_1\left(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n\right), \tag{17.3}$$

які підлягають конкретизації з використанням того чи іншого методу оцінювання.

Оскільки різним серіям з n експериментів, навіть за тих самих x_i, відповідатимуть, взагалі кажучи, різні набори даних (17.2), оцінки (17.3) є випадковими. Тому потрібно з'ясовувати питання не тільки про вигляд функцій (17.3), а й про їхню точність і надійність.

У зв'язку з цим у теоретичних викладках припускається, що експерименти ще не проведені і їх результати нам не відомі, тобто є випадковими і мають вигляд

$$\left(x_i,\, Y_i\right),\ \ i=1,\, 2,\, ...,\, n;\quad n>2.$$

При цьому випадкову величину Y_i, яка описує результат i-го спостереження, відповідно до залежності (17.1) можна подати як

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i,\quad i=1,\, 2,\, ...,\, n, \tag{17.4}$$

де ε_i — випадкова величина (похибка спостереження).

Далі припускаємо, що

ε_i — *незалежні і всі розподілені за законом* $N\left(0,\, \sigma\right)$. (17.5).

Якщо виконуються умови (17.4), (17.5), то кажуть, що має місце *модель парної лінійної регресії,* ще — *нормальної регресії.* Параметри β_0, β_1 називають *коефіцієнтами регресії*, а σ^2 — *залишковою дисперсією*, яка також підлягає оцінюванню за результатами спостережень. Відповідну оцінку позначимо $\tilde{\sigma}^2$.

Пропускаючи теоретичні викладки, наведемо лише кінцеві співвідношення для точкової та інтервальної оцінки параметрів регресії і перевірки гіпотез для цих параметрів за результатами спостережень (17.2).

***Точкові оцінки*:**

$$\tilde{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \Big/ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$$

$$\tilde{\beta}_0 = \overline{y} - \tilde{\beta}_1 \overline{x}, \qquad (17.6)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 - \tilde{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \right) \Big/ n-2.$$

Тут

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Зауваження 1. Точкові оцінки $\tilde{\beta}_0$ і $\tilde{\beta}_1$ невідомих коефіцієнтів β_0 і β_1 знаходять з умови мінімуму величини

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right]^2.$$

Система рівнянь $\dfrac{\partial S(\beta_0,\, \beta_1)}{\partial \beta_0} = 0,\ \dfrac{\partial S(\beta_0,\, \beta_1)}{\partial \beta_1} = 0$ для знаходження $\tilde{\beta}_0$ і $\tilde{\beta}_1$ набуває вигляду

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 x_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 x_i\right) x_i = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему відносно $\tilde{\beta}_0$ та $\tilde{\beta}_1$, отримуємо перші два співвідношення (17.6).

***Довірчі інтервали*:**

$$\tilde{\beta}_1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) < \beta_1 < \tilde{\beta}_1 + \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2); \quad (17.7)$$

$$\tilde{\beta}_0 - \frac{\tilde{\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) < \beta_0 < \tilde{\beta}_0 + \frac{\tilde{\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2); \quad (17.8)$$

$$\frac{(n-2)\tilde{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)} < \sigma^2 < \frac{(n-2)\tilde{\sigma}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)}.$$

Тут α — заданий рівень значущості, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ — квантиль розподілу Стьюдента, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$, $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ — квантилі розподілу «хі»-квадрат.

На практиці найчастіше доводиться перевіряти гіпотези $H_0:\beta_1=0$ та $H_0:\beta_0=0$.

Перевірка гіпотези $H_0:\beta_1=0$ зводиться до обчислення значення

$$z_{\text{в}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\,\frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\sigma}} \tag{17.9}$$

і порівняння цього значення з відповідним квантилем розподілу Стьюдента. При цьому гіпотеза H_0 на рівні значущості α приймається, якщо

$$\begin{gathered} |z_{\text{в}}| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \text{ — для } H_1:\beta_1\neq 0,\\ z_{\text{в}} < t_{1-\alpha}(n-2) \text{ — для } H_1:\beta_1>0,\\ z_{\text{в}} > t_{\alpha}(n-2) \text{ — для } H_1:\beta_1<0. \end{gathered} \tag{17.10}$$

У випадку альтернативної гіпотези $H_1:\beta_1\neq 0$ можна скористатись довірчим інтервалом (17.7). Якщо цей інтервал покриває нуль, гіпотезу H_0 слід прийняти. Якщо ні — відхилити.

Якщо гіпотеза $H_0:\beta_1=0$ (за альтернативної гіпотези $H_1:\beta_1\neq 0$) приймається, то це свідчить про відсутність лінійного зв'язку між величинами $M[Y]$ і x [див. формулу (17.1)]. Іншими словами, модель парної лінійної регресії не узгоджується з результатами спостережень.

Якщо потрібно з’ясувати, якого типу зв’язок між величинами $M[Y]$ і x (додатний чи від’ємний), гіпотеза $H_0:\beta_1=0$ перевіряється відносно альтернативи $H_1:\beta_1>0$ чи $H_1:\beta_1<0$.

Перевірка гіпотези $H_0:\beta_0=0$ зводиться до обчислення значення

$$z_{\text{в}}=\frac{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}\,\frac{\tilde{\beta}_0}{\tilde{\sigma}}. \tag{17.11}$$

Алгоритм перевірки дістаємо з алгоритму (17.10) заміною β_1 на β_0. У разі альтернативної гіпотези $H_1:\beta_0\neq 0$ можна скористатись довірчим інтервалом (17.8). Якщо останній покриває нуль, гіпотеза H_0 приймається. Якщо ні — відхиляється.

Приклад застосування моделі парної лінійної регресії

Передусім зазначимо, що з урахуванням тотожностей

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2; \tag{17.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\,\overline{x}\,\overline{y},$$

для проведення регресійного аналізу в межах даної моделі достатньо обчислити за статистичними даними (17.2) п'ять сум:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \sum_{i=1}^{n}y_i,\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2,\ \sum_{i=1}^{n}y_i^2,\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i. \tag{17.13}$$

Застосуємо модель парної лінійної регресії для аналізу результатів одного експерименту, описаного в праці [1, вип. 1]. У ґрунт дев'яти дослідних ділянок внесена різна кількість x_i фосфору і виміряно вміст y_i фосфору в рослинах, які виросли на цих ділянках:

x_i	1	4	5	9	11	13	23	23	28
y_i	64	71	54	81	76	93	77	95	109

За наведеними результатами обчислюємо суми (17.13):

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 117,\ \sum_{i=1}^{9} y_i = 720,\ \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 2255,\ \sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 59874,\ \sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 10400.$$

Далі згідно з формулами (17.12) знаходимо:

$$\overline{x} = \frac{117}{9} = 13, \quad \overline{y} = \frac{720}{9} = 80;$$

$$\sum_{i=1}^{9}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 2255 - 9\cdot 13^2 = 734;$$

$$\sum_{i=1}^{9}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 = 59874 - 9\cdot 80^2 = 2274;$$

$$\sum_{i=1}^{9}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right) = 10400 - 9\cdot 13\cdot 80 = 1040.$$

За формулами (17.6) обчислюємо точкові оцінки коефіцієнтів регресії:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{1040}{734} = 1,42;$$

$$\tilde{\beta}_0 = \overline{y} - \tilde{\beta}_1 \overline{x} = 80 - 1,42\cdot 13 = 61,54\ .$$

Оцінку прямої регресії, що має вигляд

$$y = 61,54 + 1,42x,$$

разом з точками (x_i, y_i) нанесено на рис. 17.1

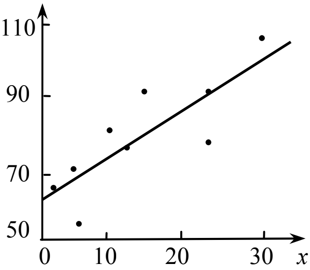


Рис. 17.1

Далі за останньою формулою (17.6) обчислюємо точкову оцінку залишкової дисперсії

$$\tilde{\sigma}^2 = \left(2274 - (1,42)^2\, 734\right)/9 - 2 = 113,42\ .$$

Візьмемо $\alpha = 0,01$ і побудуємо довірчі інтервали (17.7), (17.8). Для цього за табл. Д1.5 дод. 1 знаходимо

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-2\right) = t_{0,995}\left(7\right) = 3,499.$$

Для нашого випадку

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-2\right)=\frac{\sqrt{113,42}}{\sqrt{734}}3,499=1,37,$$

$$\frac{\tilde{\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-2\right)=\frac{\sqrt{113,42}\ \sqrt{2255}}{\sqrt{9\cdot 734}}3,499=21,6.$$

Тому з формул (17.7) і (17.8) дістаємо

$$1,42-1,37<\beta_1<1,42+1,37,$$
$$61,54-21,6<\beta_0<61,54+21,6$$

або

$$0,05<\beta_1<2,79,$$
$$39,94<\beta_0<83,14.$$

Оскільки довірчий інтервал для β_1 не покриває нуля, модель парної лінійної регресії узгоджується з результатами експериментів. Більше того, кутовий коефіцієнт β_1 значимо більший від нуля. Це означає, що збільшення кількості фосфору у ґрунті приводить до статистично значущого збільшення його вмісту в рослинах.

Довірчий інтервал для коефіцієнта β_0 показує, що останній також значимо більший від нуля. Це можна інтерпретувати так: унесення фосфору в ґрунт не є єдиним джерелом його вмісту в рослинах.

Тих самих висновків дійдемо в результаті перевірки гіпотези $H_0:\beta_1=0$ за альтернативної гіпотези $H_1:\beta_1>0$ та гіпотези $H_0:\beta_0=0$ за альтернативної гіпотези $H_1:\beta_0>0$, узявши той самий рівень значущості $\alpha=0,01$. Справді, для першого випадку з (17.9) дістаємо

$$z_{\text{в}}=\sqrt{734}\frac{1,42}{\sqrt{113,42}}=3,61.$$

Крім того, $t_{1-\alpha}\left(n-2\right)=t_{0,99}\left(7\right)=2,998.$

Оскільки $z_{\text{в}}>t_{0,99}\left(7\right)$, гіпотеза $H_0:\beta_1=0$ на рівні значущості $\alpha=0,01$ відхиляється.

У другому випадку з формули (17.11) отримуємо

$$z_{\text{в}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 734}}{\sqrt{2255}} \frac{61,54}{\sqrt{113,42}} = 9,88 > t_{0,99}(7)$$

і відхиляємо гіпотезу $H_0 : \beta_0 = 0$.

17.2. Парна лінійна регресія, коли обидві змінні — випадкові

Нехай досліджується регресійна залежність випадкової величини Y від іншої випадкової величини X (регресія Y на X).

Позначимо через Y_{x_i} значення випадкової величини Y, якого вона може набути за умови, що випадкова величина X набула значення x_i. Очевидно, що Y_{x_i} є випадковою величиною вигляду

$$Y_{x_i} = M\left[Y / X = x_i\right] + \varepsilon_i, \tag{17.14}$$

де

$$M\left[\varepsilon_i\right] = 0, \quad D\left[\varepsilon_i\right] = D\left[Y / X = x_i\right].$$

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ — конкретні результати незалежних спостережень над випадковою величиною X. Тоді для кожної пари

$$\left(x_i, Y_{x_i}\right), \; i = 1, 2, ..., n$$

справедливе зображення (17.14), причому випадкові величини

$$\varepsilon_i, \; i = 1, 2, ..., n \text{ — незалежні.}$$

Якщо припустити, що умовне математичне сподівання можна наблизити лінійною функцією

$$M\left[Y / X = x_i\right] = \beta_0 + \beta_1 x_i \tag{17.15}$$

і взяти, що всі

$$\varepsilon_i, \; i = 1, 2, ..., n \; \textit{мають розподіл} \; N(0, \sigma), \tag{17.16}$$

залишаються справедливими всі співвідношення точкової, інтервальної оцінки і перевірки гіпотез з п. 17.1.

Це означає, що незалежно від того, є змінна X випадковою величиною чи ні, лінійний регресійний аналіз за конкретними даними $\left(x_i, y_i\right), \; i = 1, 2, ..., n$ можна виконати з використанням тих самих співвідношень (так, хід і результати розв’язання прикладу з п. 17.1 не змінюються, якщо внесення фосфору в ґрунт вважати випадковим).

Зауваження 2. Якщо система (X,Y) має двовимірний нормальний розподіл, умови (17.15), (17.16) виконуються автоматично.

Оцінки параметрів лінійної регресії Y на X можна дістати іншим способом, без звертання до умовної за X моделі (17.15), (17.16). Для цього спочатку нагадаємо, що в припущені лінійної регресії для конкретизації її параметрів достатньо знати лише перші та другі моменти розподілу системи (X, Y). Згідно з п. 10.4 ці параметри мають вигляд

$$\beta_1 = k_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x},\ \beta_0 = m_y - \beta_1 m_x. \qquad (17.17)$$

Теоретичні характеристики $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y,\ k_{xy}$ зазвичай невідомі. Проте їх можна оцінити за результатами спостережень і підставити знайдені оцінки у (17.17). У результаті дістанемо відповідні оцінки параметрів лінійної регресії.

Перевірка гіпотези $H_0 : \beta_1 = 0$ згідно з формулою (17.17) рівносильна перевірці гіпотези $H_0 : k_{xy} = 0$ (див. п. 16.4).

► *Задачі*

Побудувати пряму $y = \beta_0 + \beta_1 x$ регресії Y на X за результатами п'яти спостережень $(x_i,\ y_i)$. На рисунок, поряд з прямою регресії, нанести точки $(x_i,\ y_i)$. Побудувати довірчі інтервали для β_0 і β_1 і зробити висновок про узгодженість лінійної регресії з результатами спостережень. Той самий висновок зробити за допомогою перевірки гіпотези $H_0 : \beta_1 = 0$. Узяти $\alpha = 0,01$.

1	(1; 4,9)	(2; 5,9)	(3; 4,4)	(4; 3,4)	(5; 2,9)
2	(2; 3,5)	(4; 5,8)	(6; 7,1)	(8; 6,1)	(10; 7,5)
3	(1; 0,9)	(3; 2,9)	(4; 2,5)	(6; 5,1)	(7; 4)
4	(1; 4,7)	(2; 5,7)	(3; 4,2)	(4; 2,2)	(5; 2,7)
5	(0; 3,5)	(2; 3,8)	(4; 1,8)	(6; 1,5)	(7; 0,4)
6	(1; 1,5)	(3; 4,5)	(4; 4,1)	(5; 6,4)	(6; 6,8)
7	(1; 4,5)	(2; 5,5)	(3; 3,9)	(4; 2,1)	(5; 2,5)
8	(2; 5,3)	(3; 6,3)	(4; 4,9)	(5; 2,9)	(6; 3,3)

Закінчення таблиці

9	(0; 1,2)	(1; 2,1)	(2; 1,5)	(3; 2,9)	(4; 2,5)
10	(1; 4,2)	(2; 5,2)	(3; 3,7)	(4; 1,7)	(5; 2,2)
11	(2; 4,9)	(3; 5,7)	(4; 4,3)	(5; 2,4)	(6; 2,9)
12	(0; 3,7)	(1; 4,2)	(2; 2,7)	(3; 3,3)	(4; 1,5)
13	(2; 1,5)	(3; 2,8)	(4; 2,4)	(6; 4,8)	(7; 3,8)
14	(1; 2,9)	(2; 3,9)	(3; 2,3)	(4; 0,8)	(5; 1,3)
15	(1; 4,1)	(2; 4,9)	(3; 3,6)	(4; 1,9)	(5; 2,1)
16	(0; 4,3)	(1; 2,5)	(3; 3,1)	(5; 2,1)	(7; 0,3)
17	(1; 2,5)	(3; 4,8)	(5; 5,9)	(7; 4,9)	(9; 6,5)
18	(1; 3,9)	(2; 4,8)	(3; 3,4)	(4; 1,4)	(5; 1,9)
19	(0; 3,5)	(2; 6,1)	(4; 6,9)	(6; 6,5)	(8; 7,5)
20	(1; 2,3)	(2; 2,5)	(3; 4,5)	(4; 4,1)	(5; 5,5)
21	(1; 3,7)	(2; 4,7)	(3; 3,2)	(4; 1,4)	(5; 1,7)
22	(2; 5,5)	(3; 6,5)	(4; 5,1)	(5; 3,2)	(6; 3,6)
23	(2; 4,5)	(4; 7,1)	(6; 8,1)	(8; 7,5)	(10; 8,5)
24	(1; 3,5)	(2; 4,5)	(3; 2,9)	(4; 1,5)	(5; 1,8)
25	(1; 3,3)	(2; 4,3)	(3; 2,8)	(4; 1,1)	(5; 1,4)
26	(1; 2,5)	(3; 1,8)	(5; 3,1)	(7; 4,9)	(9; 6,1)
27	(2; 2,5)	(4; 2,8)	(6; 5,1)	(7; 3,9)	(8; 5,3)
28	(1; 0,9)	(2; 3,3)	(3; 4,5)	(4; 4,1)	(5; 6,2)
29	(1; 3,1)	(2; 2,6)	(3; 3,4)	(4; 2,5)	(5; 0,9)
30	(0; 0,8)	(2; 2,5)	(4; 2,6)	(6; 4,8)	(8; 3,9)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основний

1. *Бикел П.* Математическая статистика / П. Бикел, К. Доксам. — М. : Финансы и статистика, 1983. — Вып. 1. — 278; — Вып. 2. — 254 с.

2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей и её инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М. : Высш. шк., 2000. — 480 с.

3. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей : учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. — М. : Высш. шк., 1999. — 576 с.

4. *Вища* математика: спеціальні розділи : підручник : у 2 т. — Т. 2 / [Г. Л. Кулініч та ін.]; за ред. Г. Л. Кулініча. — К. : Либідь, 1996. — 336 с.

5. *Гихман И. И.* Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. — К. : Вища шк., 1979. — 408 с.

6. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — М. : Наука, 1988. — 446 с.

7. *Вища* математика : навч. посіб. : у 4 ч. / [В. П. Денисюк, В. М. Бобков, Т. А. Погребецька, В. К. Репета]. — К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. — (Модульна технологія навчання). — Ч. 4 : Теорія ймовірностей і математична статистика. — 256 с.

8. *Зайцев Е. П.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб.-метод. пособие / Е. П. Зайцев. — Кременчуг : Кременчуг, 2005. — 484 с.

9. *Ивченко Г. И.* Математическая статистика : учеб. пособие для втузов / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. — М. : Высш. шк., 1984. — 248 с.

10. *Коваленко И. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для втузов / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. — М. : Высш. шк., 1973. — 368 с.

11. *Вища* математика. Модуль 8. Теорія ймовірностей. Випадкові події : навч. посіб. [І. О. Ластівка, В. П. Мартиненко, Ю. А. Паламарчук, І. В. Шевченко]. — К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. — 108 с.

12. *Вища* математика. Модуль 9. Теорія ймовірностей. Випадкові величини: навч. посіб. [І. О. Ластівка, В. П. Мартиненко, Ю. А. Паламарчук, І. В. Шевченко]. — К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. — 96 с.

13. *Вища* математика. Модуль 10. Математична статистика : навч. посіб. [І. О. Ластівка, В. С. Коновалюк, Ю. А. Паламарчук, В. І. Трофименко]. — К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. — 100 с.

14. *Михайленко В. В*. Теорія ймовірностей, математична статистика і випадкові функції. Курс лекцій : навч. посіб. / В. В. Михайленко. — Житомир : ЖІТІ, 2003. — 292 с.

15. *Пугачев В. С.* Введение в теорию вероятностей / В. С. Пугачев. — М. : Наука, 1968. — 368 с.

16. *Скороход А. В*. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів / А. В. Скороход. — К. : Вища шк., 1971. — 296 с.

17. *Справочник* по теории вероятностей и математической статистике / [В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин]. — М. : Наука, 1985. — 640 с.

18. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. — М. : Наука, 1978. — 224с.

19. *Шефтель З. Г.* Теорія ймовірностей : підручник / З. Г. Шефтель. — К. : Вища шк., 1994. — 192 с.

Додатковий

20. *Головня Р. М.* Збірник завдань з теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів : навч. посіб. / Р. М. Головня, В. О. Коваль, О. В. Лущиков. — Житомир : ЖДТУ, 2011. — 140 с.

21. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. Задачи и упражнения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М. : Наука, 1973. — 366 с.

22. *Вища* математика : основні означення, приклади і задачі : навч. посіб. / [Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва]. — К. : Либідь, 1992. — 288 с.

23. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. — М. : Высш. шк., 1979. — 400 с.

24. *Ластівка І. О.* Теорія ймовірностей та математична статистика : практикум / І. О. Ластівка, Ю. А. Паламарчук. — К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. — 236 с.

25. *Сборник* задач по математике для втузов. — Ч 3. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимова. — М. : Наука. 1990. — 428 с.

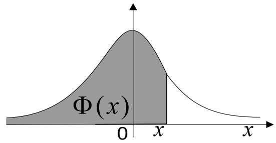
26. *Теорія* ймовірностей : збірник задач / за ред. А. В. Скорохода. — К. : Вища шк., 1976. — 384 с.

27. *Чудесенков В. Ф.* Сборник задач по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) : учеб. пособие для вузов / В. Ф. Чудесенков. — 2-е изд., перераб. — М. : Высш. шк., 1999. — 126 с.

Додаток 1

Таблиця Д1.1. **Функція розподілу Φ(*x*) нормального закону** $N(0,1)$;

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x),\ \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$$



x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

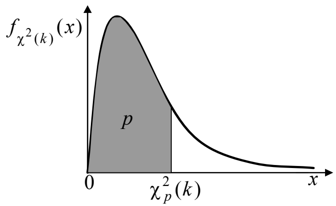
Таблиця Д1.2. **Значення функції щільності** $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ **нормального розподілу** $N(0,1)$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Таблиця Д1.3. **Квантилі** u_p **нормального розподілу** $N(0,1)$

p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,999
u_p	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблиця Д1.4. **Квантилі «хі»-квадрат розподілу** $\chi_p^2\left(k\right)$

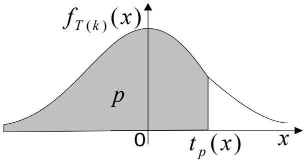


	p														
k	**0,005**	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,999**
1	$0,0^{4}393$	$0,0^{3}157$	$0,0^{3}982$	$0,0^{2}393$	0,0158	0,0642	0,148	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,00	1,42	3,67	4,64	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,65	2,19	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,2	3,07	3,83	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	9,52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	10,7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	14,0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	15,1	17,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	16,2	18,2	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	18,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3

Закінчення табл. Д1.4

	p													
k	**0,005**	**0,01**	**0,25**	**0,05**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,999**
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,0	13,5	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	12,9	14,4	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	13,7	15,4	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	16,3	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	15,4	17,2	23,9	26,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,5	11,0	12,3	14,0	16,3	18,1	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	17,2	19,0	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	18,1	19,9	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	18,9	20,9	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	19,8	21,8	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	20,7	22,7	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	21,6	23,6	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	22,5	24,6	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7
35	17,2	18,5	20,6	22,5	24,8	27,8	30,2	38,9	41,8	46,1	49,8	53,2	57,3	60,3	66,6
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	32,3	34,9	44,2	47,3	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8	73,4
45	24,3	25,9	28,4	30,6	33,4	36,9	39,6	49,5	52,7	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2	80,1
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	41,4	44,3	54,7	58,2	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5	86,7
75	47,2	49,5	52,9	56,1	59,8	64,5	68,1	80,9	85,1	91,1	96,2	100,8	106,4	110,3	118,6
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	87,9	92,1	106,9	111,7	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2	149,4

Таблиця Д1.5. **Квантилі розподілу Стьюдента** $t_p(k)$



			p				
k	**0,750**	**0,900**	**0,950**	**0,975**	**0,990**	**0,995**	**0,999**
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

Таблиця Д1.6. **Квантилі розподілу Фішера** $F_p\left(k_1, k_2\right)$

k_2	k_1																	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
	$p = 0{,}9$																	
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,24	1,17

Продовження табл. Д1.6

k_2	k_1																	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
	$p = 0,95$																	
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22

Продовження табл. Д1.6

k_2	k_1																	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
	$p = 0{,}975$																	
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	993,1	997,2	1001	1006	1010	1014
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,41	4,36	4,31	4,25	4,20
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27

Продовження табл. Д1.6

	k_1																	
k_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
	p = 0,99																	
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32

Продовження табл. Д1.6

k_2	k_1																	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
	p = 0,995																	
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5
3	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27
6	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00
7	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.64	7.53	7.42	7.31	7.19
8	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06
9	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.45	4.34
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01
13	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10
18	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99
19	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36

Закінчення табл. Д1.6

k_2	k_1																	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
	p = 0,999																	
1	405384	500000	540379	562500	576405	585937	592873	598144	602284	605621	610668	615764	620908	623497	626099	628712	631337	633972
2	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	125.0	124.5	124.0
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47	48.05	47.41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40
5	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24	26.92	26.42	25.91	25.39	25.13	24.87	24.60	24.33	24.06
6	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69	18.41	17.99	17.56	17.12	16.90	16.67	16.44	16.21	15.98
7	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33	14.08	13.71	13.32	12.93	12.73	12.53	12.33	12.12	11.91
8	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.40	12.05	11.77	11.54	11.19	10.84	10.48	10.30	10.11	9.92	9.73	9.53
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.19	8.00
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.93	9.52	9.20	8.96	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.63	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.35	6.18
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59
13	17.82	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98	6.80	6.52	6.23	5.93	5.78	5.63	5.47	5.30	5.14
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.58	6.40	6.13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47
16	16.12	10.97	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.98	5.81	5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.23
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75	5.58	5.32	5.05	4.78	4.63	4.48	4.33	4.18	4.02
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.13	4.87	4.59	4.45	4.30	4.15	4.00	3.84
19	15.08	10.16	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39	5.22	4.97	4.70	4.43	4.29	4.14	3.99	3.84	3.68
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.86	3.70	3.54
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56	4.31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.06
30	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	3.07	2.92	2.76
40	12.61	8.25	6.59	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.64	3.40	3.14	3.01	2.87	2.73	2.57	2.41
60	11.97	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69	3.54	3.32	3.08	2.83	2.69	2.55	2.41	2.25	2.08
120	11.38	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	1.95	1.77
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.66	1.45

Додаток 2

Таблиця Д2.1. **Критерії значущості для перевірки гіпотез про дисперсії нормально розподілених генеральних сукупностей**

Гіпо-теза, що переві-ряється H_0	Припущення відносно m	Статисти-ка Z-кри-терію*	Розподіл Z: $f(z/H_0)$	Область прийняття гіпотези H_0 для двобічного критерію	Альтернативна гіпотеза і область прийняття гіпотези H_0 для правобічного критерію
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	m відоме	$\dfrac{nS_0^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n)$	$\chi^2_{\alpha/2}(n) < \dfrac{ns_0^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$	$H_1:\ \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\dfrac{ns_0^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}(n)$
	m невідоме, $\tilde{m} = \overline{X}$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$	$H_1:\ \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	m_1 і m_2 відомі	S_{01}^2 / S_{02}^2, $s_{01}^2 > s_{02}^2$	$F(n_1, n_2)$	$\dfrac{s_{01}^2}{s_{02}^2} < F_{1-\alpha/2}(n_1, n_2)$	$H_1:\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\dfrac{s_{01}^2}{s_{02}^2} < F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	m_1 і m_2 невідомі, $\tilde{m}_1 = \overline{X}_1$, $\tilde{m}_2 = \overline{X}_2$	S_1^2 / S_2^2, $s_1^2 > s_2^2$	$F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\dfrac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$H_1:\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

* Значення статистики Z наводиться за умови, що справедлива гіпотеза H_0.

Таблиця Д2.2. **Критерії значущості для перевірки гіпотез про середні нормально розподілених генеральних сукупностей**

Гіпотеза, що перевіряється H_0	Припущення відносно σ^2	Статистика Z-критерію *	Розподіл $Z: f(z/H_0)$	Область прийняття гіпотези H_0 для двобічного критерію	Альтернативна гіпотеза і область прийняття гіпотези H_0 для правобічного критерію
$m = m_0$	σ^2 відома	$\dfrac{\bar{X} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$	$\dfrac{\lvert\bar{x} - m_0\rvert}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2}$	$H_1 : m > m_0$; $\dfrac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha}$
	σ^2 невідома	$\dfrac{\bar{X} - m_0}{S/\sqrt{n}}$	$T(n-1)$	$\dfrac{\lvert\bar{x} - m_0\rvert}{s/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2}(n-1)$	$H_1 : m > m_0$; $\dfrac{\bar{x} - m_0}{s/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(n-1)$
$m_1 = m_2$	σ_1^2 і σ_2^2 відомі	$\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0, 1)$	$\dfrac{\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < u_{1-\alpha/2}$	$H_1 : m_1 > m_2$; $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < u_{1-\alpha}$

Закінчення табл. Д2.2

Гіпотеза, що перевіряється H_0	Припущення відносно σ^2	Статистика Z-критерію *	Розподіл $Z: f(z/H_0)$	Область прийняття гіпотези H_0 для двобічного критерію	Альтернативна гіпотеза і область прийняття гіпотези H_0 для правобічного критерію
$m_1 = m_2$	σ_1^2 і σ_2^2 невідомі, причому гіпотеза H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ приймається, $\tilde{\sigma}_1^2 = S_1^2$, $\tilde{\sigma}_2^2 = S_2^2$	$\dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$, де $S = \left(\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$T(n_1 + n_2 - 2)$	$\dfrac{\lvert\overline{x}_1 - \overline{x}_2\rvert}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} < t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$	$H_1: m_1 > m_2$; $\dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} < t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
$m_1 = m_2$	σ_1^2 і σ_2^2 невідомі, причому гіпотеза H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ відхиляється, $\tilde{\sigma}_1^2 = S_1^2$, $\tilde{\sigma}_2^2 = S_2^2$	$\dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$	$T(k)$, де $k \approx \dfrac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$	$\dfrac{\lvert\overline{x}_1 - \overline{x}_2\rvert}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} < t_{1-\alpha/2}(k)$	$H_1: m_1 > m_2$; $\dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} < t_{1-\alpha}(k)$

*Значення статистики Z наводиться за умови, що справедлива гіпотеза H_0.