Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
Житомирский государственный технологический
университет МОН Украины

В.Г. Карнаухов, В.В. Михайленко

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕРМОМЕХАНИКА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НЕУПРУГИХ ТЕЛ ПРИ МОНОГАРМОНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Монография

УДК 539.376
К99

Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.

К99 Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении: Монография. – Житомир: ЖДТУ, 2005. – 428 с.

Представлены результаты исследований по разработке моделей одночастотных нелинейных колебаний и диссипативного разогрева неупругих пьезоэлектрических пространственных тел, включая построение теорий амплитудных определяющих уравнений с обоснованием концепции амплитудно-зависимых комплексных модулей, постановку на их основе связанных задач термомеханики, методы решения соответствующих нелинейных краевых задач, решения конкретных задач и анализ эффектов, порождаемых диссипацией энергии, взаимодействием электромеханических и тепловых полей, физической нелинейностью и зависимостью свойств пассивных и активных (пьезоэлектрических) материалов от температуры. Рассматриваются вопросы интегрального оценивания энергопреобразования и диссипации в объеме пьезоэлектрических тел.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов, занимающихся вопросами механики деформируемого твердого тела.

Ил.: 111. Табл.: 18. Библиогр. 232 назв.

Рецензенты:

А.Ф. Улитко,	чл.-корр. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор. Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко;
Н.П. Плахтиенко,	доктор физ.-мат. наук. Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины;
Н.К. Кучер,	доктор техн. наук, профессор. Институт проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины

УДК 539.376

ISBN 999-999-999-9

© В.Г. Карнаухов, 2005
© В.В. Михайленко, 2005

Оглавление

Введение

В зависимости от способа производства пьезоэлектрические материалы можно разделить на три группы. Первую группу образуют пьезоэлектрические кристаллы, получаемые в виде монокристаллов. Наиболее ярким представителем этой группы является промышленный кварц. Вторая группа – пьезокерамические материалы, пьезоэлектрические свойства которых появляются в результате поляризации, когда под действием сильного электрического поля происходит упорядочение сегнетоэлектрических доменов. К третьей группе относятся полимерные и композиционные пьезоэлектрики. Необходимая анизотропия и возникновение пьезоэлектрических свойств у пьезополимеров достигается механическим вытягиванием молекул в присутствии сильного электрического поля. Композиционные пьезоэлектрики представляют собой небольшие частицы или кусочки обычной пьезокерамики, помещённые в эластомерную матрицу.

По каждой группе пьезоэлектрических материалов имеется достаточно обширная литература, относящаяся как к теоретическому и экспериментальному исследованию поведения этих материалов, так и их применению в различных областях техники. В первую очередь нельзя не отметить классические монографии [81, 173], ставшие настольными книгами каждого учёного в области пьезоэлектричества. Исследованию поведения и применению пьезоэлектрических кристаллов, в основном кварца, посвящены, например, работы [2, 21, 39, 101, 137, 155]. Обширный список изданий и публикаций, касающихся вопросов изготовления и применения пьезокерамических материалов, приведен в обзорных статьях [158, 162]. Характеристики наиболее известных отечественных составов пьезокерамики описаны в работе [136]. Вопросы, связанные с использованием пьезополимерных материалов обсуждаются, например, в работах [13, 158, 184, 206, 207, 219].

Описание типовых элементов пьезотехники [13, 20, 130, 136, 137 и др.] показывает, что геометрическая форма и величина пьезоэлементов в зависимости от их функционального назначения, частоты и вида колебаний может быть самой разнообразной. В частности, широкое применение находят пьезоэлементы в форме тел вращения и тонкие пьезоэлектрические пластины с толщинной поляризацией, рассматриваемые в настоящей монографии. Возможность создания пьезоэлементов, по-существу, любой формы с помощью несложных технологических приёмов, создание необходимого в соответствии с выбранной формой направления поляризации путём соответствующего нанесения электродов, широкий выбор способов размещения электродов – вот те особые свойства, которые выгодно отличают пьезоэлектрические керамики от пьезоэлектрических кристаллов. Ещё более совершенными по своим конструкционно-технологическим возможностям являются пьезополимерные материалы.

Широкое применение пьезоэлектрических материалов в различных областях техники привело к необходимости разработки моделей пьезоэлектрических тел с использованием основных положений механики, электродинамики и термодинамики сплошных сред. К настоящему времени достигнут значительный прогресс в построении теории пьезоэлектрических тел с привлечением наиболее простой механической модели, предполагающей упругое поведение материала и не учитывающей вязкости, пластичности и температурных эффектов. Исследования в этом направлении стали возможными благодаря фундаментальным работам В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульги [26, 27, 165, 168, 171], А.Н. Гузя, Ф.Г. Махорта [28], Ж. Можена [123], В. Новацкого [126], В.З. Партона, Б.А. Кудрявцева [130], Х.Ф. Тирстена, Р.Д Миндлина [208, 209, 226, 227], Р. Холанда, Н. Ирниса [191, 192] и др.

Быстрое распространение в технике пьезоэлектрических полимеров и композитов на их основе стимулировало построение моделей вязкоупругого поведения пьезоэлектрических тел, учитывающих взаимодействие электромеханических полей с тепловыми. Необходимость в разработке таких моделей возникает и при исследовании термоэлектромеханического состояния элементов из традиционных пьезоматериалов, например, пьезокерамических, наличие вязкоупругих свойств у которых подтверждается экспериментально [4, 18, 136, 171–173, 194, 222 и др.]. Общая теория термоэлектровязкоупругости (ТЭВУ) пьезоэлектрических тел представлена в монографиях [58, 76]. Она обобщает классические теории термовязкоупругости, изложенные в монографиях А.А. Ильюшина и Б.Е. Победри [45], Р. Кристенсена [94] и др.

Следует отметить, что наряду с потребностями техники, интерес к исследованию взаимодействия электромеханических и тепловых полей в неупругих пьезоэлектрических телах определяется и внутренней логикой развития науки, поскольку при этом удается исследовать более широкий круг явлений, происходящих в деформируемых телах и, главное, такие исследования позволяют определить границы применимости тех постановок задач, в которых взаимодействием электромеханических полей с тепловыми пренебрегается.

Одним из основных вопросов любой теории пьезоэлектрических тел является вопрос об оценке эффективности электромеханического преобразования энергии. Наиболее полной характеристикой этого преобразования является коэффициент электромеханической связи (КЭМС). Он характеризует преобразование энергии в пьезоэлектрических материалах лучше, чем совокупность пьезоэлектрических, диэлектрических и механических свойств [11]. Статические КЭМС выражаются по известным соотношениям через характеристики пьезоэлектрического материала. В динамическом случае КЭМС зависит от распределения электромеханических величин и поэтому является также функцией геометрических размеров пьезоэлемента. Существующие в настоящее время подходы к определению КЭМС разработаны в рамках электроупругой теории пьезоэлектрических тел. Они подробно обсуждаются в главе 4 настоящей монографии. Испытание временем выдержали подходы, основанные на формуле Мэзона [11], на сокращении числа независимых переменных в разрешающей системе алгебраических уравнений при решении задач электроупругости численными методами [181], энергетический подход [166, 167]. Наиболее полной и физически содержательной характеристикой эффективности преобразования энергии при электроупругих процессах является в настоящее время КЭМС, определяемый согласно энергетическому подходу А.Ф. Улитко [27, 166, 167]. Обобщение энергетической теории КЭМС на случай электроупругих многоэлектродных тел дано в работе [38]. Попыток привести определения КЭМС в рамках отмеченных выше подходов [11, 181] в соответствие с энергетическим определением КЭМС [166, 167], по-видимому, не предпринималось. В связи с расширяющимся внедрением в технику пьезополимерных материалов особую актуальность приобретают вопросы, связанные с развитием теорий КЭМС, учитывающих вязкоупругие свойства пьезоматериала.

Одним из основных режимов электромеханического нагружения пьезоэлементов является моногармонический, в частности, резонансный. Но резонансный режим колебаний может быть исследован только при учете диссипативных свойств материала. В ряде работ [16, 92, 171 и др.] диссипативные свойства принимались во внимание, однако взаимодействие электромеханических и тепловых полей не учитывалось. Вместе с тем, экспериментальные данные [173, 179, 232 и др.] свидетельствуют, что в зависимости от амплитуды, длительности нагружения, условий теплообмена резонансные колебания могут сопровождаться значительным повышением температуры диссипативного разогрева. При этом существенно изменяются электромеханические свойства материала вследствие их зависимости от температуры, что, в свою очередь, влияет на такие интегральные характеристики пьезоэлементов, как собственная частота, коэффициенты электромеханической связи и затухания колебаний и др. При неоднородной температуре учёт диссипативного разогрева приводит к краевым задачам для неоднородных пьезоэлектрических тел, что значительно усложняет их решение. Кроме того, возникает необходимость в экспериментальном исследовании зависимости электромеханических характеристик от температуры. В связи с этим отметим, что, по-видимому, единственный в настоящее время полный набор данных по температурной зависимости свойств пьезоматериала, позволяющий рассчитывать температурные поля диссипативного разогрева пьезоэлектрических пространственных тел сложной формы с учетом зависимости характеристик от температуры, содержится в монографии [171]. Необходимо также отметить, что повышение температуры отрицательно влияет на мощность и режим работы пьезопреобразователей энергии, ухудшает физические свойства пьезоматериала, ускоряет процесс его старения и т.п. Существует, по крайней мере, еще два аспекта, определяющие температурные факторы как ограничивающие функциональные возможности пьезоэлементов. Во-первых, тепловые напряжения, обусловленные температурой диссипативного разогрева, могут привести к механическому разрушению пьезоэлемента; во-вторых, при превышении температурой точки Кюри пьезоэлемент перестает быть пьезоактивным (деполяризуется) [173], в связи с чем достижение температурой диссипативного разогрева точки Кюри можно рассматривать как специфический критерий “разрушения” пьезоэлементов.

Исследованию влияния диссипативного разогрева на колебания вязкоупругих пьезоэлектрических тел в рамках одномерных задач ТЭВУ посвящены работы [29 – 31, 57, 58, 77, 86, 87 и др.]. Из этих работ следует, что расчет электромеханических и тепловых полей даже для тел самой простой геометрической формы, например, полого шара [57] при простейшем центрально-симметричном нагружении, представляет собой уже достаточно сложную математическую задачу, которая при учете зависимости свойств материала от температуры становится существенно нелинейной даже при линейной связи между напряжениями, деформациями, индукцией и напряженностью электрического поля. Нелинейность порождается зависимостью свойств от температуры и существенно нелинейной зависимостью диссипативной функции от полевых величин. Поэтому не представляется возможным получить аналитические решения подобных задач даже в одномерном случае. Трудности резко возрастают при учете пространственного характера распределения полевых величин. Прогресс в решении задач о колебаниях и диссипативном разогреве пространственных вязкоупругих пьезоэлектрических тел был достигнут благодаря реализации для этих задач метода конечных элементов (МКЭ) [59–65, 71, 72, 78, 79, 89–91, 104, 112, 117, 118, 121, 176 и др.]

Вопросы теории и практической реализации МКЭ изложены в монографиях [10, 40, 128, 138, 140]. Формализм МКЭ применительно к электроупругим средам достаточно полно представлен в работе [88]. Со времени первых публикаций [174, 175, 197–199] МКЭ применялся к широкому классу пространственных задач электроупругости [5–8, 17, 95, 181, 205 и др.], доказав свою эффективность.

Принимая во внимание специфику пространственных задач термоэлектровязкоупругости и, в первую очередь, их существенную неоднородность, порождаемую зависимостью свойств материала от температуры и связанностью полей, можно утверждать, что альтернативы численным методам решения этих задач, в частности методу конечных элементов, в настоящее время не существует. К указанному типу неоднородности следует добавить конструктивную неоднородность, поскольку пьезоактивные тела состоят, как правило, из активных (пьезоэлектрических) и пассивных (металлических и полимерных) элементов. При высоких температурах диссипативного разогрева может возникнуть еще один тип неоднородности, а именно, неоднородность вследствие частичной тепловой деполяризации пьезоматериала [173], поскольку в деполяризованных зонах характеристики материала резко изменяются.

Практически во всех отмеченных выше работах колебания и диссипативный разогрев пьезоэлектрических тел исследованы в предположении линейной связи между напряжениями, деформациями, индукцией и напряженностью электрического поля и нелинейной зависимости диссипативной функции от полевых величин. Однако, резонансные режимы колебаний сопровождаются, как правило, высоким уровнем механических напряжений и электрических полей. В этом случае при малых деформациях характеристики пьезоматериала зависят не только от температуры, но и от амплитуд полевых электромеханических величин, что подтверждается результатами экспериментов [1, 4, 46, 47, 58, 164, 217 и др.]. Условимся называть такие материалы физически нелинейными. Разработке моделей физически нелинейных пассивных и пьезоактивных вязкоупругих материалов при гармонических, в частности резонансных, процессах с учетом взаимодействия механических, электрических и тепловых полей посвящены работы [58, 73–76, 108, 114, 115, 148, 149, 161, 195, 202, 217, 220 и др.]

Основной гипотезой, принятой в данной монографии, является гипотеза о моногармоническом изменении механических и электрических полевых величин со временем при действии на неупругое тело гармонических во времени электромеханических нагрузок. Начиная с работ А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, математическому обоснованию этой гипотезы для систем обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ математиков и специалистов в области нелинейной механики. Обзор этих работ представлен, например, в монографиях [14, 103]. При решении задач о нелинейных колебаниях неупругих тел с учетом геометрической или физической нелинейностей, которые сводятся к решению некоторых начально-краевых задач для уравнений в частных производных, поступают следующим образом. Решение ищется в виде разложения по некоторой полной системе функций по координатам, например, по собственным функциям соответствующей линейной задачи теории упругости. Затем, с использованием вариационных методов либо метода Бубнова-Галеркина, получают систему нелинейных обыкновенных дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений по времени. Для решения последних используют методы нелинейной механики, в частности метод Крылова-Боголюбова-Митропольского (КБМ). Математическому обоснованию сходимости вариационных методов и метода Бубнова-Галеркина также посвящена обширная математическая литература. В связи с проблемой одночастотности колебаний, процитируем выдержку из книги [103]: “Во многих практически важных случаях в колебательных системах со многими степенями свободы наличие неизбежного трения (как внешнего, так и внутреннего), а также наличие внешних возмущающих сил (в том числе, в первую очередь, зависящих от t периодически) приводит обычно к быстрому исчезновению высших частот, т. е. к установлению основного типа колебаний (или с какой-либо частотой ω_k). Поэтому целесообразно при исследовании системы со многими степенями свободы, как это было предложено Н.Н. Боголюбовым для случая автономных систем, рассматривать одночастотный режим, т. е. колебания системы, при которых все точки нашей системы совершают колебания с одной и той же частотой.” В данной монографии принят несколько другой подход, когда с самого начала предполагается, что имеет место одночастотный режим колебаний. Применяя к соответствующим системам уравнений в частных производных асимптотические методы или метод Бубнова-Галеркина по времени, получаем системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по координатам. Для их решения применяем различного рода итерационные процедуры, сводящие решение исходных нелинейных задач к последовательности линейных задач. Последние решаются численными методами, в частности, методом конечных элементов. При таком подходе нет необходимости решать задачи на собственные значения и собственные функции соответствующей упругой задачи. Кроме того, появляется возможность построения замкнутых теорий амплитудных определяющих уравнений, в которых характеристики материала конкретизируются, как и в линейной теории, непосредственно из экспериментов на гармоническое нагружение.

Для обоснования указанного подхода в работах [143-147] решены нестационарные задачи для неупругих тел из нелинейных неупругих материалов при действии на них гармонических во времени механических нагрузок. Показано, что предположение о моногармоничности колебательных процессов выполняется с высокой точностью при колебаниях как на резонансных, так и нерезонансных частотах.

Укажем, что на предположении о моногармоничности колебаний строятся теории внутреннего трения в неупругих материалах и элементах конструкций с использованием нелинейных моделей вязкоупругости или моделей пластичности. Ссылки на литературу по этому вопросу можно найти, например, в обзоре [220].

В основном тексте настоящей монографии представлены результаты исследований авторов по разработке моделей одночастотных нелинейных колебаний и диссипативного разогрева неупругих пьезоэлектрических пространственных тел и методов решения соответствующих нелинейных краевых задач. Приведены решения конкретных задач и проанализированы те новые эффекты, которые порождаются диссипацией энергии, взаимодействием электромеханических и тепловых полей, физической нелинейностью, зависимостью свойств пассивных и активных (пьезоэлектрических) материалов от температуры. Учёт перечисленных факторов особенно важен при проектировании пьезоэлектрических источников мощного ультразвука (пьезопреобразователей) для различного рода акустических систем, например, для сварки термопластичных материалов, интенсификации технологических процессов, в медицине [19, 127, 169 и др.] и т. п. Как правило, колебания таких систем возбуждаются в режиме автоподстройки частоты.

Кроме традиционных применений в технике и естествознании, пьезоэлектрические материалы в настоящее время стали интенсивно использоваться при активном контроле колебаний элементов конструкций из пассивных (без пьезоэффекта) материалов при помощи распределенных пьезоэлектрических включений. В первую очередь это касается активного контроля колебаний тонкостенных конструкций – стержней, пластин и оболочек, которые широко используются в различных областях современной техники. Стационарное и нестационарное динамическое нагружение является наиболее распространенным при их эксплуатации. Вопрос активного контроля колебаний, в частности, их демпфирования, как и специфические вопросы механики тонкостенных элементов, в основном тексте настоящей монографии не рассматривается. Однако ввиду его исключительной важности авторы решили посвятить ему оставшуюся часть введения, обратив внимание на основные факторы, влияющие на эффективность контроля колебаний при помощи распределенных сенсоров и актуаторов. К таким факторам относятся и рассматриваемые в монографии температура диссипативного разогрева и физическая нелинейность.

До недавнего времени для снижения уровня колебаний наиболее часто применялись пассивные методы демпфирования, когда в структуру элемента вводятся неупругие (вязкоупругие либо вязкоупругопластические включения) с высокими демпфирующими характеристиками. Подробное описание технологии пассивного контроля колебаний изложено в [33, 102, 125] и в специальной литературе по тем или иным отраслям техники, ссылки на которую можно найти в [125]. Поскольку этот метод дает хорошие результаты в высокочастотной области, он и в настоящее время широко используется в технике.

В последние годы предложены более перспективные методы активного контроля с использованием пьезоэлектрических включений. В общей постановке суть этих методов заключается в том, что одни пьезоэлектрические включения (сенсоры) дают информацию о механическом состоянии тонкостенного элемента, а к другим (актуаторам) подводится разность потенциалов, связанная определенными соотношениями (уравнениями обратной связи) с показаниями сенсоров. Если разность потенциалов актуатора пропорциональна разности потенциалов сенсора, изменяются жесткостные характеристики элемента. Если же она пропорциональна току либо производной тока, изменяются характеристики демпфирования либо инерционные характеристики элемента. Таким образом можно изменять динамические характеристики конструкции, в частности, уходить с резонанса и существенно увеличивать демпфирование колебаний тела. В более узкой постановке, когда известна действующая на конструкцию нагрузка, демпфирование колебаний достигается путем подвода к актуатору разности потенциалов определенной амплитуды и фазы, которая компенсирует действие внешней механической нагрузки. Методы активного контроля дают хорошие результаты в низкочастотной области. Для расширения диапазона частот эффективного контроля колебаний необходимо разрабатывать комбинированную технологию демпфирования с применением как пассивных, так и активных методов. При использовании активного демпфирования колебаний стержней, пластин и оболочек наиболее часто используются два подхода, когда 1) пьезоэлектрические слои полностью покрывают пассивный слой, а демпфирование осуществляется путем подвода к бесконечно тонким электродам той или иной геометрической формы разности потенциалов необходимой амплитуды и фазы; 2) пьезоэлектрические слои покрывают пассивные слои лишь частично и на них наносятся электроды, к которым подводится разность потенциалов необходимой для компенсации механического нагружения амплитуды и фазы. При полном покрытии поверхностей элемента пьезослоем используются также разрезные электроды. При этом геометрическая форма электродов, сенсоров и актуаторов, их толщина, тип поляризации и положение в теле выбираются из условия наиболее эффективного контроля колебаний. Так, например, если выбрать электроды, сенсоры и актуаторы в виде суперпозиции мод колебаний, то они будут воспринимать и подавлять только эти моды. Этот тип контроля известен, как модальный. Формирование модальных сенсоров и актуаторов достигается путем изменения таких параметров: 1) структуры элемента по его толщине; 2) геометрической формы электродов, сенсоров и актуаторов; 3) поляризации пьезослоев, которая следит за изменением знака разности потенциалов; 4) угла между главными направлениями анизотропии пассивного элемента и главными направлениями анизотропии пьезоэлементов; 5) толщины пьезоэлемента (она может быть выбрана переменной для формирования модального сенсора или актуатора); 6) свойств пьезоматериалов. Последние результаты в этой области отражены в [186, 189, 218, 223, 230, 231].

При первом подходе, а также при пренебрежении влиянием пьезовключений на жесткостные характеристики пассивного элемента при использовании второго подхода решение задачи существенно упрощается, так что в некоторых случаях можно получить аналитические решения, которые дают возможность выбрать размеры и расположение электродов и пьезослоев из условий наиболее эффективного демпфирования колебаний.

Необходимо отметить, что в существующей в настоящее время литературе по контролю колебаний не учитывается реальное вязкоупругое поведение материалов, которые широко используются для изготовления пассивных и пьезоактивных элементов. В последнем случае имеются ввиду полимерные материалы с пьезоэффектом. Эти материалы обладают уникальными свойствами – им легко придать необходимую форму; в силу малой толщины и своих электромеханических свойств они существенно не изменяют жесткостные характеристики пассивной конструкции. Поэтому их широко используют для изготовления сенсоров и актуаторов.

Между тем, в механике тонкостенных элементов накоплен большой опыт использования вязкоупругих моделей интегрального типа, которые достаточно хорошо описывают диссипативные свойства полимерных материалов.

Для иллюстрации возможностей активных методов демпфирования колебаний элементов конструкций и постановки основных вопросов, возникающих при их использовании, рассмотрим, следуя [68], активнопассивное демпфирование колебаний прямоугольной пластины при помощи введения в ее структуру вязкоупругих слоев (пассивное демпфирование) и пьезоэлектрических включений (активное демпфирование). Для описания вязкоупругих свойств пассивных и пьезоактивных компонент используем линейные модели вязкоупругости интегрального типа, являющиеся наиболее эффективными для описания диссипативных свойств материалов в линейной области. При использовании указанного выше второго подхода пластина является структурно неоднородной в своей плоскости и состоит из набора идеально соединенных между собой пластинчатых пассивных и пьезоактивных элементов. В свою очередь, каждый такой элемент может состоять из произвольного числа пассивных и пьезоактивных слоев. Для описания механического поведения этих пластинчатых элементов используются гипотезы Кирхгофа-Лява для всего пакета в целом, дополненные адекватными им гипотезами о распределении электрических полевых величин [27].

Итак, рассмотрим ортотропную вязкоупругую пластину, находящуюся под действием поверхностной динамической стационарной либо нестационарной нагрузки. Пластина состоит из произвольного числа пакетов металлических, полимерных или композитных пассивных (без пьезоэффекта) слоев. На верхней и нижней поверхностях пассивной пластины размещены вязкоупругие пьезоэлектрические слои произвольной в плане конфигурации, одни из которых выполняют функции сенсора, а другие – актуатора. Следует отметить, что в настоящее время разработана такая технология, когда одно и то же пьезоэлектрическое включение может выполнять одновременно функции и сенсора, и актуатора [186, 189, 231]. Количество пьезослоев в плане и их геометрическая конфигурация выбираются из соображений наиболее эффективного демпфирования стационарных или нестационарных колебаний конструкции. В частности, при использовании первого из указанных выше подходов эти слои могут покрывать всю поверхность пассивной пластины, а демпфирование осуществляется за счет выбора той или иной конфигурации электродов и подвода к ним разности потенциалов необходимой фазы и амплитуды. При контроле нестационарных колебаний с применением модального контроля конфигурация электродов и пьезослоев выбирается в виде суперпозиции мод колебаний, вносящих основной вклад в формирование геометрической формы деформированной поверхности [186, 189, 231]. При использовании второго подхода имеем сложную конструктивно-неоднородную как по толщине, так и в плане пластину. Необходимо иметь в виду, что представленные ниже уравнения описывают не пластину в целом, а каждый ее пластинчатый элемент конечных размеров (включение, пятно) в отдельности. В частности, такой элемент может быть и пассивным, когда он не содержит пьезоактивных слоев. К тому же, направление поляризации пьезоактивных слоев может быть разным. Для описания геометрической формы сенсоров и актуаторов и направления поляризации можно по аналогии с [186, 189, 231] ввести функции формы и символы (функции поляризации) $sign$. При этом каждый элемент такой структурно-неоднородной пластины будет характеризоваться своими функциями формы и функциями поляризации [186, 189, 231]. Между элементами предполагаются условия идеального механического и электрического контакта.

Основные соотношения, как уже отмечалось, получаются на основе гипотез Кирхгоффа-Лява и дополнительных гипотез относительно электрических полевых величин [3, 27, 58]. Пьезоэлектрические слои считаются постоянными по толщине, хотя, как указано выше, за счет выбора переменной толщины можно формировать модальные сенсоры и актуаторы. Определяющие уравнения для усилий и моментов получаются в виде суммы составляющих, которые порождаются пассивным пакетом, пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами. Возможно использование нескольких видов уравнений обратной связи [186, 189, 231].

Пластина отнесена к декартовой системе координат $(x,\ y,\ z)$. Главные оси анизотропии совпадают с осями координат. Считается, что деформации малы, и используются геометрически линейные кинематические соотношения. Координатная поверхность выбирается из условий наиболее простой записи определяющих соотношений для пластины, связывающих усилия и моменты с деформациями и электрическими полевыми величинами. Кинематические соотношения теории пластин, уравнения движения, граничные условия являются универсальными соотношениями и имеют одинаковый вид независимо от свойств материала. Для геометрически линейного случая эти соотношения представлены, например, в [3, 58]. Поэтому лишь кратко напомним некоторые из них, сославшись на [3, 58].

Компоненты перемещения и деформации имеют вид

$$\begin{gathered} u_x = u(x,y) + z\theta_x(x,y), \quad u_y = v(x,y) + z\theta_y(x,y), \quad u_z = w(x,y), \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_1 + z\kappa_1, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_2 + z\kappa_2, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{12} + z\kappa_{12}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $u(x,\ y)$, $v(x,\ y)$, $w(x,\ y)$ – перемещения координатной поверхности в направлениях x, y, z соответственно, а углы поворота равны

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{2}$$

В (1)–(2) введены такие обозначения для компонент тензора тангенциальных деформаций и деформаций изгиба:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \;\; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \;\; \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ &\kappa_1 = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \;\; \kappa_2 = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \;\; \kappa_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения движения и граничные условия на торцах пластины имеют стандартный вид [3, 58] и здесь не приводятся.

Определяющие уравнения для составляющих усилий и моментов, которые вносятся в выражения для полных усилий и моментов пассивными ортотропными вязкоупругими слоями, имеют вид [58]

$$\begin{aligned} &\overset{0}{N}_1 = \overset{0}{C}_{11} \otimes \varepsilon_1 + \overset{0}{C}_{12} \otimes \varepsilon_2 + \overset{0}{K}_{11} \otimes \kappa_1 + \overset{0}{K}_{12} \otimes \kappa_2, \\ &\overset{0}{N}_2 = \overset{0}{C}_{12} \otimes \varepsilon_1 + \overset{0}{C}_{22} \otimes \varepsilon_2 + \overset{0}{K}_{12} \otimes \kappa_1 + \overset{0}{K}_{22} \otimes \kappa_2, \\ &\overset{0}{S} = \overset{0}{C}_{66} \otimes \varepsilon_{12} + \overset{0}{K}_{66} \otimes \kappa_{12}, \\ &\overset{0}{M}_1 = \overset{0}{K}_{11} \otimes \varepsilon_1 + \overset{0}{K}_{12} \otimes \varepsilon_2 + \overset{0}{D}_{11} \otimes \kappa_1 + \overset{0}{D}_{12} \otimes \kappa_2, \\ &\overset{0}{M}_2 = \overset{0}{K}_{12} \otimes \varepsilon_1 + \overset{0}{K}_{22} \otimes \varepsilon_2 + \overset{0}{D}_{12} \otimes \kappa_1 + \overset{0}{D}_{22} \otimes \kappa_2, \\ &\overset{0}{H} = \overset{0}{K}_{66} \otimes \varepsilon_{12} + \overset{0}{D}_{66} \otimes \kappa_{12}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь символ $\otimes$ обозначает интегро-дифференциальный оператор вида

$$F \otimes G = \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)\,dG(\tau). \tag{5}$$

Выражения для $\overset{0}{C}_{km}$, $\overset{0}{K}_{km}$, $\overset{0}{D}_{km}$ получаются согласно принципу Вольтерра и техники расшифровки операторных выражений [45, 138]. Так, например, произведение и частное операторов с ядрами Ю.Н. Работнова расшифровываются по правилам

$$\begin{gathered}
\frac{1}{1-\mu Э_{\alpha}^{*}(\lambda)}=1-\mu Э_{\alpha}^{*}(\lambda-\mu), \\
Э_{\alpha}^{*}(x) Э_{\alpha}^{*}(y)=\frac{1}{x-y}\left[Э_{\alpha}^{*}(x)-Э_{\alpha}^{*}(y)\right],
\end{gathered} \tag{6}$$

где α, μ, λ – параметры ядер, определяемые экспериментально [45]. При моногармоническом деформировании символ $\otimes$ заменяется алгебраическим комплексным выражением, а для упругого случая – операцией умножения.

Рассмотрим пьезоактивные слои. Считаем, что они изготовлены из вязкоупругого пьезоэлектрического материала и поляризованы по толщине. Уравнения состояния для этих слоев, упрощенные в соответствии с гипотезами Кирхгоффа-Лява и адекватными им гипотезами относительно электрических полевых величин [27], имеют вид

$$\begin{aligned}
&\overset{k}{\sigma}_x=\overset{k}{B}_{11}(z) \otimes(\varepsilon_1+z \kappa_1)+\overset{k}{B}_{12}(z) \otimes(\varepsilon_2+z \kappa_2)-\overset{k}{\gamma}_{31}(z) \otimes \overset{k}{E}_z, \\
&\overset{k}{\sigma}_y=\overset{k}{B}_{12}(z) \otimes(\varepsilon_1+z \kappa_1)+\overset{k}{B}_{22}(z) \otimes(\varepsilon_2+z \kappa_2)-\overset{k}{\gamma}_{31}(z) \otimes \overset{k}{E}_z, \\
&\overset{k}{\sigma}_{xy}=\overset{k}{B}_{66}(z) \otimes(\varepsilon_{12}+z \kappa_{12}), \\
&\overset{k}{D}_z=\overset{k}{\gamma}_{33}(z) \otimes \overset{k}{E}_z+\overset{k}{\gamma}_{31}(z) \otimes\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+z(\kappa_1+\kappa_2)\right] \quad(k=1,\ 2).
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь и ниже индекс $k=1$ относится к актуатору, а индекс $k=2$ – к сенсору, при этом

$$\begin{aligned}
&\overset{k}{B}_{11}(z)=\overset{k}{B}_{22}(z)=1 / \overset{k}{S}{}_{11}^{E}(z)\left[1-\overset{k}{\nu}{}^2(z)\right], \\
&\overset{k}{B}_{12}(z)=\overset{k}{\nu}(z) \overset{k}{B}_{11}(z), \quad \overset{k}{B}_{66}(z)=\frac{1}{2}\left[1-\overset{k}{\nu}(z)\right] \overset{k}{B}_{11}(z), \\
&\overset{k}{\gamma}_{33}=\overset{k}{\varepsilon}{}_{33}^{T}(z)\left[1-\overset{k}{k}{}_p^2(z)\right], \quad \overset{k}{\gamma}_{31}=\overset{k}{d}_{31}(z) / \overset{k}{S}{}_{11}^{E}(z)\left[1-\overset{k}{\nu}{}^2(z)\right], \\
&\overset{k}{k}{}_p^2=2\, \overset{k}{d}{}_{31}^2(z) / \overset{k}{\varepsilon}{}_{33}^{T}(z)\, \overset{k}{S}{}_{11}^{E}(z)\left[1-\overset{k}{\nu}(z)\right].
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь использованы обозначения работ [27, 58].

Пусть между пассивным пакетом и пьезоактивными слоями нанесены бесконечно тонкие электроды. Такие же электроды имеются и на внешних поверхностях пьезослоев пластины. Обозначим разность потенциалов на электродах через $\overset{k}{V}_0$ $(k = 1,\ 2)$. Согласно [27, 58], индукция $\overset{k}{D}_z$ постоянна по толщине пьезослоев, так что

$$\overset{k}{D}_z = \overset{k}{C}(x, y)\,. \tag{9}$$

При этом

$$\overset{k}{E}_z = \frac{1}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)} \otimes \overset{k}{C} - \frac{\overset{k}{\gamma}_{31}(z)}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)} \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + z(\kappa_1 + \kappa_2)]. \tag{10}$$

Интегрируя (10) по толщине пьезослоев, получаем

$$\overset{k}{C} = \frac{1}{\overset{k}{v}_0} \otimes \left[-\overset{k}{V}_0 + \overset{k}{v}_1 \otimes (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \overset{k}{v}_2 \otimes (\kappa_1 + \kappa_2) \right] \quad (k = 1,\ 2). \tag{11}$$

Обозначения для величин $\overset{k}{v}_0$, $\overset{k}{v}_1$ и $\overset{k}{v}_2$ приведены ниже (см. (15)). Подставляя (11) в (10), а полученное выражение для $\overset{k}{E}_z$ – в (7), найдем

$$\begin{gathered} \overset{k}{\sigma}_x = \overset{k}{B}_{11}(z) \otimes (\varepsilon_1 + z\kappa_1) + \overset{k}{B}_{12}(z) \otimes (\varepsilon_2 + z\kappa_2) + \overset{k}{\sigma}_0, \\ \overset{k}{\sigma}_y = \overset{k}{B}_{12}(z) \otimes (\varepsilon_1 + z\kappa_1) + \overset{k}{B}_{22}(z) \otimes (\varepsilon_2 + z\kappa_2) + \overset{k}{\sigma}_0, \\ \overset{k}{\sigma}_{xy} = \overset{k}{B}_{66}(z) \otimes (\varepsilon_{12} + z\kappa_{12}), \quad \overset{k}{\sigma}_0 = \left[\frac{\overset{k}{\gamma}{}^2_{31}(z)}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)} - \frac{\overset{k}{\gamma}_{31}(z)\,\overset{k}{v}_1}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)\,\overset{k}{v}_0} \right] \otimes \\ \otimes (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \left[\frac{\overset{k}{\gamma}{}^2_{31}(z)}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)} z - \frac{\overset{k}{\gamma}_{31}(z)\,\overset{k}{v}_2}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)\,\overset{k}{v}_0} \right] \otimes (\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{\overset{k}{\gamma}_{31}(z)}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)\,\overset{k}{v}_0} \otimes \overset{k}{V}_0\,. \end{gathered} \tag{12}$$

Интегрируя (12) по толщине пьезоактивного слоя и учитывая расположение электродов, получим для него определяющие уравнения вида

$$
\begin{aligned}
&\overset{k}{N}_1 = \overset{k}{C}_{11} \otimes \varepsilon_1 + \overset{k}{C}_{12} \otimes \varepsilon_2 + \overset{k}{K}_{11} \otimes \kappa_1 + \overset{k}{K}_{12} \otimes \kappa_2 + \overset{k}{N}_0,\\
&\overset{k}{N}_2 = \overset{k}{C}_{12} \otimes \varepsilon_1 + \overset{k}{C}_{22} \otimes \varepsilon_2 + \overset{k}{K}_{12} \otimes \kappa_1 + \overset{k}{K}_{22} \otimes \kappa_2 + \overset{k}{N}_0,\\
&\overset{k}{S} = \overset{k}{C}_{66} \otimes \varepsilon_{12} + \overset{k}{K}_{66} \otimes \kappa_{12},\\
&\overset{k}{M}_1 = \overset{k}{K}_{11} \otimes \varepsilon_1 + \overset{k}{K}_{12} \otimes \varepsilon_2 + \overset{k}{D}_{11} \otimes \kappa_1 + \overset{k}{D}_{12} \otimes \kappa_2 + \overset{k}{M}_0,\\
&\overset{k}{M}_2 = \overset{k}{K}_{12} \otimes \varepsilon_1 + \overset{k}{K}_{22} \otimes \varepsilon_2 + \overset{k}{D}_{12} \otimes \kappa_1 + \overset{k}{D}_{22} \otimes \kappa_2 + \overset{k}{M}_0,\\
&\overset{k}{H} = \overset{k}{K}_{66} \otimes \varepsilon_{12} + \overset{k}{D}_{66} \otimes \kappa_{12}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Здесь введены обозначения

$$
\begin{gathered}
\left(\overset{k}{C}_{ij}, \overset{k}{K}_{ij}, \overset{k}{D}_{ij}\right) = \int\limits_{(h_k)} \overset{k}{B}_{ij}(z)\left(1, z, z^2\right) dz + \overset{k}{v}_{(3,4,5)} - \\
- \frac{\left(\left(\overset{k}{v}_1\right)^2, \left(\overset{k}{v}_1 \overset{k}{v}_2\right), \left(\overset{k}{v}_2\right)^2\right)}{\overset{k}{v}_0},\\
\left(\overset{k}{C}_{66}, \overset{k}{K}_{66}, \overset{k}{D}_{66}\right) = \int\limits_{(h_k)} \overset{k}{B}_{66}(z)\left(1, z, z^2\right) dz,
\end{gathered} \tag{14}
$$

$$
\overset{k}{N}_0 = \frac{\overset{k}{v}_1}{\overset{k}{v}_0}\overset{k}{V}_0, \quad \overset{k}{M}_0 = \frac{\overset{k}{v}_2}{\overset{k}{v}_0}\overset{k}{V}_0 \;\; (k = 1, 2),
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\overset{k}{v}_0 = \int\limits_{(h_k)} \frac{1}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)} dz, \quad \overset{k}{v}_{(1,2)} = \int\limits_{(h_k)} \frac{\overset{k}{\gamma}_{31}(z)(1, z)}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)} dz,\\
&\overset{k}{v}_{(3,4,5)} = \int\limits_{(h_k)} \frac{\overset{k}{\gamma}{}^2_{31}(z)(1, z, z^2)}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)} dz.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Для неэлектродированной части пьезослоя

$$
\overset{k}{D}_z = 0.
$$

Поэтому

$$\overset{k}{E}_z = -\frac{\overset{k}{\gamma}_{31}(z)}{\overset{k}{\gamma}_{33}(z)} \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + z(\kappa_1 + \kappa_2)] \tag{16}$$

и во введенных выше жесткостных характеристиках необходимо положить $\overset{k}{v}_1 = \overset{k}{v}_2 \equiv 0$. Ненулевые величины $\overset{k}{v}_{3,4,5}$ определяются по формулам (15).

Общие усилия и моменты равны сумме усилий и моментов, вносимых пассивными и пьезоактивными слоями:

$$N_1 = \overset{0}{N}_1 + \overset{1}{N}_1 + \overset{2}{N}_1,\ \ldots,\ M_1 = \overset{0}{M}_1 + \overset{1}{M}_1 + \overset{2}{M}_1,\ \ldots. \tag{17}$$

Учитывая полученные выше соотношения, найдем выражения для общих усилий и моментов в пластине

$$\begin{aligned}
&N_1 = C_{11} \otimes \varepsilon_1 + C_{12} \otimes \varepsilon_2 + K_{11} \otimes \kappa_1 + K_{12} \otimes \kappa_2 + N_0,\\
&N_2 = C_{12} \otimes \varepsilon_1 + C_{22} \otimes \varepsilon_2 + K_{12} \otimes \kappa_1 + K_{22} \otimes \kappa_2 + N_0,\\
&S = C_{66} \otimes \varepsilon_{12} + K_{66} \otimes \kappa_{12},\\
&M_1 = K_{11} \otimes \varepsilon_1 + K_{12} \otimes \varepsilon_2 + D_{11} \otimes \kappa_1 + D_{12} \otimes \kappa_2 + M_0,\\
&M_2 = K_{12} \otimes \varepsilon_1 + K_{22} \otimes \varepsilon_2 + D_{12} \otimes \kappa_1 + D_{22} \otimes \kappa_2 + M_0,\\
&H = K_{66} \otimes \varepsilon_{12} + D_{66} \otimes \kappa_{12}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&C_{11} = \overset{0}{C}_{11} + \overset{1}{C}_{11} + \overset{2}{C}_{11}, \ldots,\ K_{11} = \overset{0}{K}_{11} + \overset{1}{K}_{11} + \overset{2}{K}_{11}, \ldots,\\
&D_{11} = \overset{0}{D}_{11} + \overset{1}{D}_{11} + \overset{2}{D}_{11},\ \ldots,\\
&N_0 = \overset{1}{N}_0 + \overset{2}{N}_0,\ M_0 = \overset{1}{M}_0 + \overset{2}{M}_0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Разность потенциалов на сенсоре получается путем интегрирования последнего соотношения (7) по площади сенсора S_2 (с учётом (9)), использования интегрального условия

$$\int\limits_{(S_2)} \overset{2}{D}_z ds = \int\limits_{(S_2)} \overset{2}{C}(x,\ y)\, dxdy = 0$$

и последующего интегрирования по толщине сенсора h_2. Для вязкоупругого пьезоматериала эта разность имеет вид

$$\overset{2}{V}_0 = \frac{1}{S_2} \int\limits_{(h_2)} \int\limits_{(S_2)} \frac{\overset{2}{\gamma}_{31}(z)}{\overset{2}{\gamma}_{33}(z)} \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + z(\kappa_1 + \kappa_2)] dxdydz. \tag{20}$$

Она легко измеряется и дает усредненную информацию о деформированном состоянии пластины [186, 189, 231]. Для сенсора малых размеров можно получить локальное значение разности потенциалов:

$$\overset{2}{V}_0 = \int\limits_{(h_2)} \frac{\overset{2}{\gamma}_{31}(z)}{\overset{2}{\gamma}_{33}(z)} \otimes (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) dz + \int\limits_{(h_2)} \frac{\overset{2}{\gamma}_{31}(z)}{\overset{2}{\gamma}_{33}(z)} \otimes (\kappa_1 + \kappa_2) z dz. \tag{21}$$

Как видно, измеряемая сенсором разность потенциалов зависит как от тангенциальных, так и от изгибных деформаций. Необходимо отметить, что в отличие от упругого случая показания сенсора зависят от релаксационных свойств материала. Соотношения (20) и (21) играют основную роль при контроле колебаний пластин, так как именно через показания сенсора реализуются алгоритмы обратной связи [186, 189, 231].

Для управления колебаниями к пластине подключается цепь обратной связи. Возможны различные варианты алгоритмов этой связи [186, 189, 231]. Так, управление колебаниями пластины можно осуществлять с использованием следующих соотношений обратной связи [186, 189, 231]:

$$\overset{1}{V}_0 = G_1 \overset{2}{V}_0, \tag{22}$$

$$\overset{1}{V}_0 = -G_2 \frac{\partial}{\partial t} \overset{2}{V}_0, \tag{23}$$

$$\overset{1}{V}_0 = -G_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \overset{2}{V}_0, \tag{24}$$

$$\overset{1}{V}_0 = -G_4 sign \frac{\partial \overset{2}{V}_0}{\partial t}, \tag{25}$$

где G_i – управляющие параметры, влияющие на жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики пластины. Для одновременного влияния на жесткостные характеристики, затухание, инерцию пластины можно принять, что

$$\overset{1}{V}_0 = \left(G_1 - G_2 \frac{\partial}{\partial t} - G_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - G_4 sign \frac{\partial}{\partial t} \right) \overset{2}{V}_0 \, . \tag{26}$$

Естественно, при этом задача выбора четырех управляющих параметров существенно усложняется.

Подставляя выражения вида (22)–(25) либо (26) в определяющие уравнения (18) и используя уравнения движения и соотношения (1)–(3), получим линейную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно перемещений структурно-неоднородной как по толщине, так и в плане пластины:

$$\begin{gathered} L_1(u,v,w,G_k) = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_1, \quad L_2(u,v,w,G_k) = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + F_2, \\ L_3(u,v,w,G_k) = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F_3. \end{gathered} \tag{27}$$

Коэффициенты этой системы зависят от параметров обратной связи.

Для решения полученных интегро-дифференциальных уравнений можно использовать вариационные методы в сочетании с методом усреднения. При этом решение интегро-дифференциальных уравнений представляется в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям $U_j(x,y)$ линейной упругой пьезопластины

$$\begin{gathered} u = \sum_j u_{1j}(t) U_j(x,y), \;\; v = \sum_j u_{2j}(t) U_j(x,y), \\ w = \sum_j u_{3j}(t) U_j(x,y). \end{gathered} \tag{28}$$

После использования, например, метода Бубнова-Галеркина по пространственным координатам получим линейную систему интегро-дифференциальных уравнений по времени вида

$$\frac{d^2 u_{ij}}{dt^2} + \sum_k M_{ik} \otimes u_{ik} = f_{ij}(t) \quad (i,j = 1,2,3), \tag{29}$$

где $M_{ik} \otimes$ – линейный интегральный оператор

$$M_{ik} \otimes u_{ik} = \overset{0}{M}_{ik} \left[u_{ik}(t) - \int\limits_{-\infty}^{t} \overset{1}{M}_{ik}(t-\tau) u_{ik}(\tau) d\tau \right] .$$

Считая вязкость материалов малой, для решения системы уравнений (29) можно использовать метод усреднения, подробно изложенный в монографии [45] применительно к задачам вязкоупругости. Полученное решение будет зависеть от управляющих параметров G_i, которые выбираются из условия наиболее эффективного контроля колебаний пластины, например, из условия минимальности ее поперечного прогиба.

Для решения системы (29) можно использовать и быстрое преобразование Фурье [9]. В этом случае оператор $M_{ij}\otimes$ заменяется комплексным алгебраическим выражением, отвечающим комплексным характеристикам вязкоупругих материалов [9, 58].

Необходимо отметить, что вместо глобальных параметров управления можно ввести модальные параметры, когда для каждой моды колебаний выбирается свой параметр управления [186, 189, 231].

Рассмотрим изгибные колебания пластины с наиболее простым случаем граничных условий, отвечающих шарнирному закреплению её торцов. Считаем, что пластина имеет симметричную по толщине структуру и нагружена известной стационарной или нестационарной поверхностной нагрузкой. Демпфирование колебаний пластины будем осуществлять прямоугольными в плане пьезоэлектрическими актуаторами. Необходимо выбрать наиболее эффективное расположение актуаторов и их размеры. Для случая пьезослоев, имеющих одинаковые электромеханические свойства и противоположные направления поляризации, выражения для жесткостных характеристик зависят от наличия или отсутствия электродов между пассивным и пьезоактивными слоями и приведены в [49]. При этом движение пластины описывается краевой задачей

$$\begin{aligned}
&D_{11}\otimes\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\otimes\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\otimes\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\tilde{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\\
&-\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2}+q(x,y,t)=0,\\
&w=0,\quad D_{11}\otimes\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=M_0(t)\quad (x=0;\ x=a);\\
&w=0,\quad D_{22}\otimes\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=M_0(t)\quad (y=0;\ y=b)
\end{aligned}\tag{30}$$

при нулевых начальных условиях.

Ее решение ищется в виде

$$w=\sum_m\sum_n w_{mn}(t)\sin k_m x\sin p_n y,\quad k_m=\frac{m\pi}{a},\quad p_n=\frac{n\pi}{b}.\tag{31}$$

Для прямоугольного в плане включения, имеющего размеры c, d и координаты центра ξ, η, выражение для вызываемого актуатором момента представляется в форме

$$M_0 = \sum_m \sum_n \overset{0}{M}_{mn}(t) \sin k_m x \sin p_n y, \tag{32}$$

где

$$\overset{0}{M}_{mn}(t) = \frac{16 M_0(t)}{a b k_m p_n} \sin k_m \xi \sin p_n \eta \sin \frac{k_m c}{2} \sin \frac{p_n d}{2}. \tag{33}$$

Приложенная к поверхности нагрузка представляется в такой же форме

$$q(x, y, t) = \sum_m \sum_n q_{mn}(t) \sin k_m x \sin p_n y. \tag{34}$$

С использованием представленного ниже вариационного принципа (63) – (64), получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \Delta_{mn} \otimes w_{mn} + p_{mn}(t) + M_{mn}(t) = 0 \tag{35}$$

с нулевыми начальными условиями.

Здесь

$$\begin{gathered} \Delta_{mn} = (D_{11} k_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) k_m^2 p_n^2 + D_{22} p_n^4)/\tilde{\rho}, \\ M_{mn}(t) = \overset{0}{M}_{mn}(t) \left(k_m^2 + p_n^2\right)/\tilde{\rho}, \quad p_{mn}(t) = q_{mn}(t)/\tilde{\rho}. \end{gathered} \tag{36}$$

Пусть

$$p_{mn}(t) = \overset{0}{p}_{mn} H(t), \quad M_{mn}(t) = \overset{0}{m}_{mn} H(t), \tag{37}$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда. Применение метода усреднения позволяет представить решение уравнения (35) в виде [45]

$$\begin{gathered} w_{mn}(t) = \frac{\overset{0}{p}_{mn} - \overset{0}{m}_{mn}}{\left(\overset{0}{\Delta}_{mn}\right)^2} - \exp\left(-\frac{\overset{0}{\Delta}_{mn} \overset{0}{A}_{mn}}{2} t\right) \left[\frac{\overset{0}{A}_{mn} \left(\overset{0}{p}_{mn} - \overset{0}{m}_{mn}\right)}{\left(\overset{0}{\Delta}_{mn}\right)^2 \left(2 - \overset{0}{B}_{mn}\right)} \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\frac{\overset{0}{B}_{mn}}{2} - 1\right) \overset{0}{\Delta}_{mn} t - \frac{\left(\overset{0}{p}_{mn} - \overset{0}{m}_{mn}\right)}{\left(\overset{0}{\Delta}_{mn}\right)^2} \cos\left(\frac{\overset{0}{B}_{mn}}{2} - 1\right) \overset{0}{\Delta}_{mn} t \right]. \end{gathered} \tag{38}$$

Как видно из (38), при $\overset{0}{p}_{mn} = \overset{0}{m}_{mn}$ соответствующая мода не возбуждается. Поэтому, разместив на поверхности пластины s актуаторов, можно компенсировать s мод колебаний и существенно уменьшить прогиб пластины.

Для оптимального выбора координат центра актуатора и его размеров необходимо рассмотреть задачу о вынужденных колебаниях пластины, когда

$$p_{mn}(t) = \overset{0}{p}_{mn} \exp\left(i\omega_{mn}t\right). \tag{39}$$

Если пластина не контролируется, т.е. к актуатору не прикладывается разность потенциалов, то решение уравнения (35) имеет вид

$$w_{mn} = -\overset{0}{p}_{mn}/\Delta_{mn}, \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_{mn} = \Delta'_{mn} + i\Delta''_{mn} - \tilde{\rho}\omega^2_{mn} = (D'_{11} + iD''_{11})k^4_m +\\ +2[(D'_{12} + iD''_{12}) + 2(D'_{66} + iD''_{66})]k^2_m p^2_n + (D'_{22} + iD''_{22})p^4_n - \tilde{\rho}\omega^2_{mn}.\end{aligned} \tag{41}$$

Для шарнирного закрепления резонансная частота определяется по формуле

$$\tilde{\rho}\omega^2_{mn} = \Delta'_{mn}, \tag{42}$$

при этом

$$w_{mn} = i\overset{0}{p}_{mn}/\Delta''_{mn}. \tag{43}$$

Если $D''_{mn} = D'_{mn} tg\delta$, то

$$w_{mn} = i\overset{0}{p}_{mn}/\Delta'_{mn} tg\delta. \tag{44}$$

Как видно, при $tg\delta \ll 1$ прогиб будет очень большим, хотя и конечным. С увеличением тангенса угла потерь прогиб будет уменьшаться.

Пусть теперь к актуатору приложена разность потенциалов, изменяющаяся по гармоническому закону с частотой поверхностной силы. Тогда на резонансе будет

$$w_{mn} = i\left[\overset{0}{p}_{mn} - \left(k^2_m + p^2_n\right)\overset{0}{m}_{mn}\right]/\Delta'_{mn} tg\delta. \tag{45}$$

Так как на каждом из актуаторов разность потенциалов постоянна, то мы можем выбрать в выражении (45) произвольно только одну из величин $\overset{0}{m}_{mn}$ на каждом из актуаторов. Потому если мы нанесли на поверхность пластины один актуатор, мы можем компенсировать только одну составляющую нагрузки в выражении (34). Как правило, максимальная составляющая нагрузки отвечает идексам $m = n = 1$. Если необходимо компенсировать несколько слагаемых, следует увеличить количество актуаторов. Для компенсации любой из гармоник необходимо разность потенциалов выбирать из условия равенства нулю числителя в выражении (45), т.е. положить

$$\overset{0}{p}_{mn} - \left(k_m^2 + p_n^2\right) \overset{0}{m}_{mn} = 0. \tag{46}$$

Тогда решение приобретает вид

$$w = \sum_{r \neq m} \sum_{s \neq n} \frac{\left[\overset{0}{p}_{rs} - (k_r^2 + p_s^2) \overset{0}{m}_{rs}\right]}{\Delta_{rs}} \sin k_r x \sin p_s y. \tag{47}$$

Здесь

$$\Delta_{rs} = \Delta'_{rs} + i\Delta''_{rs} - \tilde{\rho}\omega_{rs}^2. \tag{48}$$

Как видно из (47)–(48), прогиб резко падает из-за отсутствия резонансного члена в (47) и быстрой сходимости ряда Фурье, когда основной вклад в прогиб вносит резонансный член.

Разность потенциалов рассчитывается по формуле, следующей из (33) и (46):

$$M_0 = \frac{ab}{16} \frac{\overset{0}{p}_{mn} k_m p_n}{k_m^2 + p_n^2} \frac{1}{\sin k_m \xi \sin p_n \eta \sin(k_m c/2) \sin(p_n d/2)}. \tag{49}$$

Величина M_0 пропорциональна подводимой к актуатору разности потенциалов. Центр актуатора и его размеры выбираются из условия минимальности этой разности. Из (49) видно, что это будет иметь место, если выполняются равенства

$$\sin k_m \xi = 1, \quad \sin p_n \eta = 1, \quad \sin \frac{k_m c}{2} = 1, \quad \sin \frac{p_n d}{2} = 1. \tag{50}$$

Рассмотрим моды колебаний, отвечающие ω_{11}, ω_{21}, ω_{13}, ω_{22}. Для моды ω_{11} центр актуатора должен выбираться из условий $\sin k_1\xi = 1$, $\sin p_1\eta = 1$, так что его координаты равны: $\xi = \dfrac{a}{2}$, $\eta = \dfrac{b}{2}$, т.е. центр актуатора совпадает с центром пластины. При другом выборе центра актуатора имеем поверхность

$$\frac{M_0}{\overset{0}{m}} = \frac{1}{\sin k_1\xi \sin p_1\eta}, \tag{51}$$

где $\overset{0}{m}$ – константа, изображающую зависимость величины $\dfrac{M_0}{\overset{0}{m}}$, пропорциональной разности потенциалов, от координат центра актуатора. Эта поверхность представлена на рис. 1, где $\overline{\xi} = \dfrac{\xi}{a}$, $\quad \overline{\eta} = \dfrac{\eta}{b}$. Как видно из

Рис. 1.

рисунка и формулы (51), при приближении координат центра актуатора к торцам пластины подводимая к нему разность потенциалов стремится к бесконечности. В окрестности точки $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ имеется достаточно большая область, в которой потенциал мало отличается от своего минимального значения. Поэтому центр актуатора также можно размещать в этой области.

Аналогичные поверхности могут быть построены и для других мод.

Из условия (50) при $m = 2$, $n = 1$ следует, что для моды ω_{21} минимальная разность потенциалов достигается при размещении центра актуатора в точке $\left(\dfrac{a}{4}, \dfrac{b}{2}\right)$ или $\left(\dfrac{3a}{4}, \dfrac{b}{2}\right)$. При этом разность потенциалов пропорциональна величине

$$\frac{M_0}{\overset{0}{m}} = \frac{1}{\sin k_2\xi \sin p_1\eta}.$$

Поверхность, изображающая эту величину в зависимости от координат центра актуатора, имеет такой же вид, как и поверхность на рис. 1, с тем отличием, что она размещена над прямоугольником $(0 \le x \le \dfrac{a}{2}$, $0 \le y \le b)$.

Для моды ω_{13} центр актуатора следует размещать в одной из точек $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{6}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{5b}{6}\right)$. При этом пластина разбивается на три полосы шириной $\frac{b}{3}$ и длиной a. Над каждой из этих полос соответствующая поверхность имеет такой же вид, как и на рис. 1. Разность потенциалов будет стремиться к бесконечности при подходе к краям указанных полос.

Для моды ω_{22} центр актуатора, отвечающий минимальной разности потенциалов, размещается в какой-либо из точек $\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right)$, $\left(\frac{a}{4}, \frac{3b}{4}\right)$, $\left(\frac{3a}{4}, \frac{b}{4}\right)$, $\left(\frac{3a}{4}, \frac{3b}{4}\right)$. Поэтому пластина разбивается на четыре равных прямоугольника с центрами в указанных точках. Над каждым из этих прямоугольников поверхность, изображающая разность потенциалов в зависимости от координат центра актуатора, имеет вид, показанный на рис. 1. Потенциал стремится к бесконечности при приближении центра актуатора к краям этих прямоугольников.

Таким образом, при неудачном выборе координат центров актуаторов для указанных выше мод потенциал может достичь критических значений, при которых имеет место электрический или тепловой пробой.

Теперь рассмотрим, как изменяется разность потенциалов в зависимости от размера актуатора, размещенного в центре пластины или упомянутых выше прямоугольников. Площадь актуаторов будем изменять путем изменения размеров соответствующих им диагоналей l.

Для моды ω_{11} имеем $\dfrac{M_0}{\overset{0}{m}_1} = \dfrac{1}{\sin^2(\pi l/2L)}$, где l и L – длины диагоналей актуатора и пластины соответственно, $\overset{0}{m}_1$ – константа. Характер изменения величины потенциала в зависимости от размера диагонали актуатора представлен на рис. 2, так что сначала при изменении длины диагонали актуатора наблюдается резкое уменьшение потенциала, а потом – незначительное его изменение. Для моды ω_{21} при выборе центра актуатора в точке $\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{2}\right)$ имеем такую же формулу, в которой L – длина диагонали прямоугольника с центром в указанной точке. Такая же формула будет иметь место и для моды ω_{22} при выборе центра актуатора в точке $\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right)$, при этом L – длина диагонали соответствующего прямоугольника.

Рис. 2.

Для моды ω_{13} при выборе координат центра актуатора в точке $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ зависимость разности потенциалов от размера диагонали актуатора показана на рис. 3. Однако если пластину разбить на три указанных выше полосы и отнести диагональ актуатора к диагонали такой полосы, то изменение потенциала в зависимости от размера диагонали актуатора будет иметь такой же характер, как и представленный на рис. 2.

Рис. 3.

Указанные выше формулы и графики можно использовать при компенсации нескольких мод колебаний с помощью актуаторов либо разрезных электродов. На рис.4 представлен один из возможных вариантов размещения четырех актуаторов при необходимости компенсации четырех мод колебаний. При этом, конечно, разность потенциалов на каждом актуаторе не будет минимальной.

Рис. 4.

Если с помощью изменения формы электродов, толщины пьезоактуатора, углов поворота главных направлений анизотропии и изменения направления поляризации сделать член M_0 пропорциональным форме колебаний, то прогиб вообще исчезает. Если актуатор изготовить в виде суперпозиции нескольких мод, он будет демпфировать все эти моды при соответствующем выборе разности потенциалов.

Аналогичные соображения имеют место и при расчете сенсоров. Действительно, пусть на пластину действует гармоническое во времени нагружение, распределенное по одной из форм колебаний. Тогда прогиб рассчитывается по формуле

$$w = \overset{0}{w}_{mn} \sin k_m x \sin p_n y \exp(i\omega_{mn} t). \tag{52}$$

Эта форма колебаний будет выдерживаться с большой точностью, если частота нагружения равна резонансной. Тогда величина, обратная заряду Q на электроде сенсора, определяется выражением

$$\frac{1}{Q} = \frac{A}{\sin k_m \xi \sin p_n \eta \sin \dfrac{k_m c}{2} \sin \dfrac{p_n d}{2}}, \tag{53}$$

где A – константа, не зависящая от координат центра и размеров актуатора(в данном случае предполагается, что измеряется не разность потенциалов на сенсоре, а заряд(ток), который рассчитывается при условии короткого замыкания электродов сенсора). Основной принцип, в соответствии с которым рассчитываются сенсоры, состоит в том, что заряд должен быть максимальным при заданном прогибе. Тогда величина (53) должна быть минимальной. Сравнение формул (49) и (53) показывает, что координаты центров сенсора и актуатора и их размеры определяются по одинаковым формулам. Представленные выше соображения о положении и размерах актуатора для разных мод колебаний сохраняются без изменений и для сенсора. Если сенсор изготовить в виде некоторой моды колебаний, он будет реагировать только на эту моду, т.е. будет играть роль фильтра.

Представленный выше анализ носит общий характер независимо от вида граничных условий. Пусть в результате анализа частот и мод колебаний упругой пластины установлено, что при нестационарном нагружении основной вклад в деформирование вносит несколько мод, например, указанные выше четыре моды. Тогда при соответствующем выборе координат центров и размеров четырех актуаторов можно согласно представленным выше формулам устранить их действие на пластину. При этом необходимо иметь в виду, что указанные четыре электрода должны быть отделены друг от друга, т. е. необходимо использовать четыре разрезных электрода прямоугольной формы. Подводя к этим электродам разности потенциалов, рассчитанные по представленным выше формулам, устраним четыре основных моды, в результате чего прогиб существенно уменьшится.

При учете влияния пьезовключений на жесткостные характеристики пластины и при других типах граничных условий получим сложную задачу для структурно-неоднородной как по толщине, так и в плане пластины. В этом случае найти какие-либо аналитические решения достаточно трудно.

Задача существенно упрощается, если рассматривать, например, трехслойную пластину, состоящую из пассивного среднего слоя и двух пьезоактивных слоев противоположной поляризации, покрывающих всю поверхность пластины. В этом случае компенсация внешней нагрузки производится нанесением на пьезослои бесконечно тонких электродов необходимой конфигурации, к которым подводится разность потенциалов, выбранная из указанных выше соображений.

Рис. 5. Рис. 6.

Для решения задачи активного демпфирования стационарных и нестационарных колебаний можно использовать численные методы, в частности, метод конечных элементов (МКЭ) [139, 180, 196]. Полученные в работе [68] результаты расчета амплитудно-частотных характеристик для трехслойной шарнирно- и жестко защемленной квадратной пластины показаны соответственно на рис.5-6. На средний пассивный слой из дюралюминия нанесены пьезослои одинаковой толщины и с одинаковыми электромеханическими свойствами, но с противоположной поляризацией. Электромеханические свойства материалов пассивного и пьезоактивных слоев выбирались такими же, как и в работе [49]. Принимались следующие геометрические размеры: длина стороны $a = 0,1$м, толщина пассивного слоя $h_0 = 0,0098$м, толщина пьезоактивных слоев $h_1 = 0,0001$м. Показанные на рисунках кривые изображают амплитудно-частотные характеристики вязкоупругой пластины при действии на нее изменяющегося по гармоническому закону во времени внешнего давления без использования активного демпфирования. С использованием аналитических и конечноэлементных решений рассчитывалась необходимая для компенсации первой моды разность потенциалов. Прогиб пластины уменьшался на четыре порядка. Поэтому на рисунках он не представлен, поскольку практически равен нулю. На рис.7 представлена зависимость необходимой для компесации механической нагрузки разности потенциалов от размеров диагонали квадратного электрода в случае пластины с жестко защемленными торцами.

Рис. 7.

Следуя работе [68], очень кратко рассмотрим технику использования МКЭ для случая демпфирования нестационарных колебаний пластины, когда поведение изотропного материала, из которого изготовлен пассивный средний слой, описывается простейшей моделью Фойгта, а поверхностная нагрузка изменяется во времени по закону $q = q_0 H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда. При этом все операторы в (30) имеют вид

$$D_{kl} = \overset{0}{D}_{kl} + \overset{1}{D}_{kl}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{54}$$

а жесткостные характеристики трехслойной пластины указанной выше структуры выражаются формулами

$$\begin{aligned}
\overset{0}{D}_{11} &= \frac{2}{3S_{11}^{E}(1-\nu_1^2)}\left[(h_1+\frac{h_0}{2})^3-(\frac{h_0}{2})^3+\frac{(1+\nu_1)}{8}\frac{k_p^2}{1-k_p^2}h_1^3\right]+\\
&+\frac{E_0h_0^3}{12(1-\nu_0^2)},\\
\overset{0}{D}_{12} &= \frac{2}{3S_{11}^{E}(1-\nu_1^2)}\left[\nu_1(h_1+\frac{h_0}{2})^3-\nu_1(\frac{h_0}{2})^3+\frac{(1+\nu_1)}{8}\frac{k_p^2}{1-k_p^2}h_1^3\right]+\\
&+\frac{\nu_0E_0h_0^3}{12(1-\nu_0^2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{0}{D}_{66} &= \frac{2}{3S_{11}^{E}(1+\nu_1)}\left[(h_1+\frac{h_0}{2})^3-(\frac{h_0}{2})^3\right]+\frac{E_0h_0^3}{12(1+\nu_0)}, \qquad (55)\\
\overset{1}{D}_{11} &= \frac{2\eta_1}{3(1-\nu_1^2)}\left[(h_1+\frac{h_0}{2})^3-(\frac{h_0}{2})^3+\frac{(1+\nu_1)}{8}\frac{k_p^2}{1-k_p^2}h_1^3\right]+\\
&+\frac{\eta_0h_0^3}{12(1-\nu_0^2)},\\
\overset{1}{D}_{12} &= \frac{2\eta_1}{3(1-\nu_1^2)}\left[\nu_1(h_1+\frac{h_0}{2})^3-\nu_1(\frac{h_0}{2})^3+\frac{(1+\nu_1)}{8}\frac{k_p^2}{1-k_p^2}h_1^3\right]+\\
&+\frac{\eta_0\nu_0h_0^3}{12(1-\nu_0^2)},\\
\overset{1}{D}_{66} &= \frac{2\eta_1}{3(1+\nu_1)}\left[(h_1+\frac{h_0}{2})^3-(\frac{h_0}{2})^3\right]+\frac{\eta_0h_0^3}{12(1+\nu_0)}.
\end{aligned}$$

Для указанной выше механической нагрузки разность потенциалов будет также изменяться во времени по закону $V(t) = V_0 H(t)$. Тогда

$$M_0 = \frac{1}{2}\gamma_{31}(h_1 + h_0)V_0 H(t). \tag{56}$$

Здесь константы $E_0, \nu_0, \eta_0, \eta_1$ характеризуют упругие и диссипативные свойства пассивного материала, а

$$\gamma_{31} = \frac{d_{31}(1+\nu_1)}{S_{11}^E(1-\nu_1^2)}, \quad \nu_1 = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}, \quad k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{S_{11}^E(1-\nu_1)\varepsilon_{33}^T}. \tag{57}$$

Для шарнирного закрепления краев пластины уравнение (35) приобретает вид

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + 2\mu_{mn}\frac{dw_{mn}}{dt} + \omega_{mn}^2 w_{mn} = F_{mn}H(t), \tag{58}$$

где

$$\begin{gathered}\omega_{mn}^2 = \frac{D_{11}}{\rho}(k_m^2 + p_n^2)^2, \quad \mu_{mn} = \frac{\overset{1}{D}_{11}}{2\,\overset{0}{D}_{11}}\omega_{mn}^2, \\ F_{mn} = \frac{16}{abk_m p_n \rho}\left[p_0 - M_0(k_m^2 + p_n^2)\right].\end{gathered} \tag{59}$$

Решение уравнения (58) должно удовлетворять нулевым начальным условиям. Необходимо отметить, что для модели Фойгта это уравнение является точным, а при использовании метода усреднения для уравнений состояния интегрального типа оно дает приближенное решение. Для указанного типа нагружения можно получить точное решение, которое имеет вид

$$w = \frac{16}{abD_{11}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{p_0 - (k_m^2 + p_n^2)M_0}{k_m p_n (k_m^2 + p_n^2)^4}\left[1 - e^{-\mu t}(\cos\omega_\mu t + \frac{\mu}{\omega_\mu}\sin\omega_\mu t)\right], \tag{60}$$

где

$$\omega_\mu = \sqrt{\omega_{mn}^2 - \mu^2}. \tag{61}$$

Как и в общем случае, выбором разности потенциалов в соответствии с зависимостью

$$V_0 = \frac{2p_0}{\gamma_{11}(h_1 + h_0)(k_m^2 + p_n^2)} \tag{62}$$

можно исключить любую из гармоник в соотношении (60). Уничтожив основную гармонику, мы существенно уменьшим прогиб пластины.

Аналитическое решение (60) может служить эталоном при разработке численных методов моделирования демпфирования колебаний при помощи пьезоэлектрических включений, в частности и МКЭ.

Для модели Фойгта вариационное уравнение в пространстве изображений имеет вид

$$\delta\bar{Э}(x, y, z) = 0, \tag{63}$$

где

$$\begin{gathered}\bar{Э} = \frac{1}{2}\int\limits_F \left[\left(\overset{0}{D}_{11} + s\overset{1}{D}_{11}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\overset{0}{D}_{12} + s\overset{1}{D}_{12}\right)\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2} + \right.\\ + \left(\overset{0}{D}_{11} + s\overset{1}{D}_{11}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\overset{0}{D}_{66} + s\overset{1}{D}_{66}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x\partial y}\right)^2 + \rho s^2\bar{w} - \\ \left. - \frac{p_0}{s}\bar{w} - \frac{1}{s}M_0\left(\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2}\right)\right] dxdy.\end{gathered} \tag{64}$$

Для решения задачи (63)–(64) срединная поверхность пластины делится n^* узловыми точками на m^* четырехугольных изопараметрических элементов. При этом в пределах элемента прогиб пластины аппроксимируется полиномами Эрмита

$$\begin{gathered}\bar{w} = \sum_{i=1}^{4} L_i\bar{w}_i + \sum_{i=1}^{4} L_{i+4}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)_i + \\ + \sum_{i=1}^{4} L_{i+8}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)_i + \sum_{i=1}^{4} L_{i+12}\left(\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x\partial y}\right)_i.\end{gathered} \tag{65}$$

Здесь $\bar{w}_i, \left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)_i, \left(\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x\partial y}\right)_i$ – изображения по Лапласу узловых значений прогиба и производных в вершинах четырехугольника, $L_i\,(i = 2 \div 16)$ – бикубические полиномы Эрмита. Из соотношений (65) следует, что рассматриваемый элемент имеет 16 степеней свободы. Аппроксимируя механическую нагрузку и разность потенциалов полиномами Эрмита и выполняя обычную процедуру МКЭ, для определения изображений прогиба и его производных получим систему линейных алгебраических уравнений, которой в области оригинала отвечает система линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций времени

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = Q(t) \tag{66}$$

при нулевых начальных условиях

$$U(t) = 0, \quad \dot{U}(t) = 0 \ \text{ при } \quad t = 0. \tag{67}$$

Здесь $M,\ C,\ K$ – соответственно матрица масс, демпфирования и жесткости, а $Q(t)$ – узловые значения вектора внешней нагрузки.

Для решения системы (66) использован неявный метод, согласно которому на каждом временном шаге Δt необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений [196]

$$\begin{aligned}
&[a_0M + a_1C + (1+\alpha)K]U_{K+1} = Q_{K+1} + \alpha KU_K + \\
&\quad + (a_0U_K + a_2\dot{U}_K + a_3\ddot{U}_K)M + (a_1U_K + a_4\dot{U}_K + a_5\ddot{U}_K)C, \\
&\ddot{U}_{K+1} = a_0(U_{K+1} - U_K) - a_2\dot{U}_K - a_3\ddot{U}_K, \\
&\dot{U}_{K+1} = \dot{U}_K + a_6\ddot{U}_K + a_7\ddot{U}_{K+1}, \\
&\alpha = \left[-\frac{1}{3}, 0\right], \ \ \beta = (1-\alpha)^2/4, \ \gamma = \frac{1}{2} - \alpha, \ \ a_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}, \\
&a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, \ \ a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}, \ \ a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1, \ a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1, \\
&a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right), \ \ a_6 = \Delta t(1-\gamma), \ \ a_7 = \gamma\Delta t.
\end{aligned} \tag{68}$$

Полагая в соотношениях (68) $\alpha = 0$, получаем алгоритм Ньюмарка [10].

На основе указанного выше подхода реализованы алгоритмы решения динамических задач как с полностью, так и частично электродированными поверхностями. Конкретные расчеты проведены для пластины, составленной из противоположно поляризованных внешних слоев пьезокерамики типа ЦТС$_\text{Т}$БС – 2 [58, 171], внутреннего дюралюминиевого слоя со следующими характеристиками материалов [177], геометрическими размерами и параметрами нагружения:

$d_{31} = -1,6 \cdot 10^{-10}$ Кл/Н; $S_{11}^E = 12,5 \cdot 10^{-12}$м^2/Н; $S_{12}^E = 4,2 \cdot 10^{-12}$м^2/Н;
$\varepsilon_{33}^T = 2100\varepsilon_{33}^0$; $\varepsilon_{33}^0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\eta_1 = 1,7 \cdot 10^5$ Нмс,
$E_0 = 7,3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\nu_0 = 0,34$; $\eta_0 = 1,47 \cdot 10^5$ Нмс,
$\rho_0 = 0,279 \cdot 10^4$кг/м^3; $H = 2h_1 + h_0 = 0,005$ м; $h_0 = 0,004$ м;
$a = b = 0,1$ м; $p_0 = 0,1$, $V_0 = 11$ В.

Рис. 8.

На рис. 8 показано изменение прогиба в центре шарнирно опертой пластины в зависимости от времени. Кривые 1, 2 отвечают решению упругой и вязкоупругой задач соответственно при действии только механической нагрузки, а кривая 3 – решению вязкоупругой задачи при совместном электрическом и механическом нагружениях.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о нестационарных колебаниях слоистой пластины с жестко защемленными краями. В этом случае демпфирования нестационарных колебаний можно достичь только при использовании частично электродированных поверхностей. Разность потенциалов, которую необходимо приложить к электродам для демпфирования первой моды, определяется в указанной выше последовательности. Сначала решается задача на собственные колебания и вычисляется первая собственная частота изгибных колебаний жестко защемленной пластины. Затем определяется разность потенциалов, необходимая для демпфирования первой моды при вынужденных гармонических колебаниях под действием нагрузки $p(t) = p_0 \cos \omega t$. Вычисленная таким образом разность потенциалов в зависимости от размеров электродированной области имеет вид, аналогичный показанному на рис. 7.

Рис. 9.

На рис. 9 представлены кривые изменения прогиба в центре жестко защемленной пластины в зависимости от времени. Кривые 1, 2 отвечают решению для упругой и вязкоупругой пластин при действии механической нагрузки, а кривая 3 – решению для вязкоупругой пластины при совместном действии электрической и механической нагрузок. Как видно из приведенных результатов, при использовании даже одного актуатора достигается существенное уменьшение амплитуды колебаний пластины.

Таким образом, одной из основных задач при исследовании эффективности активного демпфирования стационарных и нестационарных колебаний конструкций является классическая задача расчета собственных частот, соответствующих им собственных мод колебаний структурно-неоднородных пьезоэлектрических элементов и расчет характеристик сенсоров и актуаторов для компенсации наиболее энергоемких мод механических колебаний. Необходимо отметить, что разность потенциалов, подводимая к актуатору для компенсации соответствующих мод колебаний, вызванных механической нагрузкой, является интегральной характеристикой. Поэтому для расчета этой разности очень эффективными являются вариационные методы [52, 53, 66, 67, 69, 70], которые избавляют от необходимости применения достаточно сложных и трудоемких конечноэлементных методов.

Из представленных выше результатов следует, что на эффективность активного демпфирования стационарных и нестационарных колебаний влияют положение сенсоров и актуаторов в элементе, их геометрическая форма, размеры, граничные условия, свойства пассивных и пьезоактивных материалов. Кроме того, на нее может оказать существенное влияние температура диссипативного разогрева и физическая нелинейность.

В связи с вышеуказанным разработка моделей электромеханического поведения пассивных и пьезоактивных материалов при моногармоническом нагружении с учетом нелинейности определяющих уравнений и взаимодействия электромеханических и тепловых полей является актуальной задачей при разработке методов активного демпфирования колебаний элементов конструкций при помощи распределенных сенсоров и актуаторов.

Некоторые из полученных результатов по разработке моделей пассивных и пьезоактивных материалов и элементов конструкций с учетом физической нелинейности при моногармоническом нагружении и нелинейности, обусловленной связанностью полей, отражены в монографиях [51, 54–56, 58, 76, 77, 80, 161] и обзорах [200–204, 220, 221].

В заключение выражаем благодарность рецензентам чл.-корр. НАН Украины А.Ф. Улитко, доктору физико-математических наук Н.П. Плахтиенко, доктору технических наук, профессору Н.К. Кучеру за содержательные замечания, которые способствовали улучшению книги.

Благодарим также сотрудников отдела термоупругости Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины за проявленный интерес к монографии и ценные советы в процессе ее написания.

Большую работу по подготовке рукописи проделали сотрудники кафедры высшей математики Житомирского государственного техноло-

гического университета Р.Н. Головня и Д.Н. Ярмоленко, за что выражаем им сердечную благодарность.

Глубокую признательность выражаем ректору Житомирского государственного технологического университета доктору технических наук, профессору П.П. Мельничуку и первому проректору университета доктору технических наук, профессору И.Г. Грабару за содействие в издании монографии.

Глава 1.

Приближённая теория термоэлектровязкоупругости при моногармонических электромеханических воздействиях

В данной главе приведены универсальные соотношения механики, термодинамики и электродинамики ненамагничивающихся диэлектриков как в пространственном, так и в материальном представлении: законы сохранения массы, импульса, момента импульса, первый и второй законы термодинамики, уравнения Максвелла. Второй закон термодинамики принимается в форме неравенства Клаузиуса-Дюгема. Представлены выражения для пондеромоторных сил и моментов, мощности притока энергии от электромагнитного поля к телу. Рассмотрена общая теория определяющих уравнений вязкоупругих ненамагничивающихся диэлектриков с затухающей памятью. Дана приближённая постановка задачи инфинитезимальной термоэлектровязкоупругости при циклических электромеханических процессах.

§ 1. Универсальные соотношения механики, термодинамики и электродинамики ненамагничивающихся диэлектриков

Универсальные соотношения механики, термо- и электродинамики приведены в работах [32, 43, 58, 96, 141, 163].

Рассмотрим в фиксированной декартовой системе координат x_i сплошную среду, движущуюся по закону $x_i = x_i(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, t) \quad (i = 1, 2, 3)$.

Функции $x_i(\mathrm{x}_j, t)$ для каждого момента времени t отображают среду из фиксированной конфигурации отсчета, в которой материальные частицы имеют координаты $(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ \mathrm{x}_3)$, в текущую (актуальную) конфигурацию, в которой те же частицы имеют координаты (x_1, x_2, x_3). Следуя работам [58, 141], сформулируем основные интегральные законы механики и термодинамики рассматриваемой среды в пространственном описании:

закон сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV = 0; \tag{1.1}$$

закон сохранения импульса

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, v_j dV = \oint\limits_S t_j^{(n)} dS + \int\limits_V (\mathcal{F}_j + \rho\, b_j)\, dV \quad (j = 1, 2, 3); \tag{1.2}$$

закон сохранения момента импульса

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int\limits_V (\varepsilon_{jkl} x_k v_l \rho)\, dV = \oint\limits_S \left(\varepsilon_{jkl} x_k t_l^{(n)}\right) dS + \\ + \int\limits_V (\mathcal{L}_j + \varepsilon_{jkl} x_k \mathcal{F}_l + \rho\varepsilon_{jkl} x_k\, b_l) dV \qquad (j = 1, 2, 3);\end{gathered} \tag{1.3}$$

первый закон термодинамики – уравнение энергии

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int\limits_V \left(\frac{1}{2}\rho v_j v_j + \rho U\right) dV = \oint\limits_S \left(t_j^{(n)} v_j - h_j n_j\right) dS + \\ + \int\limits_V \left[(\mathcal{F}_j + \rho b_j)\, v_j + \Phi + \Phi_h\right] dV;\end{gathered} \tag{1.4}$$

второй закон термодинамики – неравенство Клаузиуса-Дюгема

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\eta dV + \oint\limits_S \frac{h_j n_j}{\Theta} dS - \int\limits_V \frac{\Phi_h}{\Theta} dV \ge 0. \tag{1.5}$$

В приведенных соотношениях Θ – абсолютная температура; η – массовая плотность энтропии; ρ – плотность материала в актуальной конфигурации; Φ_h – тепловой источник энергии; h_i – компоненты вектора теплового потока; v_i – компоненты вектора скорости; U – массовая плотность внутренней энергии; $t_j^{(n)}$ – компоненты вектора напряжений в деформированном состоянии, приложенного к площадке с единичной нормалью $\vec{n} = \{n_i\}$ и измеряемого на единицу площади этой площадки (компоненты $t_j^{(n)}$ выражаются через компоненты тензора напряжений T_{ij} по формуле $t_j^{(n)} = T_{ij}n_i$); $\mathcal{F}_j$ – компоненты объемной силы, отнесенной к единице объёма; Φ - источники энергии, порождаемые взаимодействием тела с электромагнитным полем; $\mathcal{L}_j$ – компоненты объемной пары, отнесенной к единице объёма; ε_{jkl} – компоненты тензора Леви-Чивита. При отсутствии электромагнитных полей величины $\mathcal{F}_j$, $\mathcal{L}_j$, Φ исчезают, а массовая сила с компонентами b_j считается заданной величиной (например, является гравитационной или центростремительной силой). Однако, когда тело помещается в электромагнитное поле, в результате взаимодействия тела с этим полем $\mathcal{F}_j$, $\mathcal{L}_j$, Φ не исчезают, а вектор $\vec{t}^{\,(n)} = \{t_j^{(n)}\}$ дополняется так называемыми пондеромоторными силами. В дальнейшем под $\vec{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_j\}$ будут пониматься силы, обусловленные исключительно взаимодействием тела с электромагнитным полем, а объемные силы $\vec{b} = \{b_j\}$ другой природы при необходимости могут быть легко включены в окончательные уравнения.

На основании формулы дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объёму, и формулы Гаусса-Остроградского из (1.1) – (1.5) легко получить основные законы механики и термодинамики в локальной (дифференциальной форме) [58]:
закон сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0; \tag{1.6}$$

закон сохранения импульса

$$T_{ij,i} + \mathcal{F}_j + \rho b_j = \rho \frac{dv_j}{dt}; \tag{1.7}$$

закон сохранения момента импульса

$$\varepsilon_{jkl} T_{kl} = -\mathcal{L}_j; \tag{1.8}$$

первый закон термодинамики – уравнение энергии

$$\rho \frac{dU}{dt} = T_{ij} v_{j,i} - h_{j,\,j} + \Phi_h + \Phi; \tag{1.9}$$

второй закон термодинамики – неравенство Клаузиуса-Дюгема

$$\rho\frac{d\eta}{dt}+\left(\frac{h_j}{\Theta}\right)_{,j}-\frac{\Phi_h}{\Theta}\geq 0. \tag{1.10}$$

Фигурирующие в (1.6) – (1.10) величины $\mathcal{F}_j$, $\mathcal{L}_j$, Φ должны быть выражены через электромагнитные переменные, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла.

При исследовании взаимодействия движущегося тела с электромагнитным полем в качестве отсчетной выбирается некоторая инерциальная система отсчета K, называемая в дальнейшем системой отсчета наблюдателя [58]. Если тело жесткое,то систему отсчета можно связать с этим телом и для наблюдателя в этой системе отсчета каждая частица тела будет находиться в покое. Для деформируемого твёрдого тела выбрать единственную для всего тела систему отсчета, относительно которой тело находилось бы в покое, нельзя. В этом случае для рассматриваемой точки среды вводится так называемая собственная система отсчета K' [141] – система отсчета, относительно которой скорость этой точки в рассматриваемый момент времени равна нулю, при этом скорости соседних точек и этой точки в другие моменты времени могут отличаться от нуля. Предполагается, что физические законы одинаковы в системах K и K' [58, 141].

В системе отсчета наблюдателя K электромагнитное поле характеризуется векторами $\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}$ напряженности и $\vec{\mathcal{D}},\vec{\mathcal{B}}$ индукции электрического и магнитного полей соответственно, плотностью электрического тока $\vec{\Im}$ и заряда ρ_e. Векторы электрической $\vec{\mathcal{P}}$ и магнитной $\vec{\mathcal{M}}$ поляризации вводятся равенствами

$$\vec{\mathcal{D}}=\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}+\vec{\mathcal{P}}, \qquad \vec{\mathcal{H}}=\vec{\mathcal{B}}/\mu_0-\vec{\mathcal{M}}, \tag{1.11}$$

где ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. В собственной системе отсчета K' приведенные выше величины, вообще говоря, другие и поэтому обозначим их через $\vec{\mathcal{E}}^{'}$, $\vec{\mathcal{H}}^{'}$, $\vec{\mathcal{D}}^{'}$, $\vec{\mathcal{B}}^{'}$, $\vec{\Im}^{'}$, $\rho_e^{'}$, $\vec{\mathcal{P}}^{'}$, $\vec{\mathcal{M}}^{'}$. В дальнейшем будем рассматривать "медленно" движущиеся среды, скорость v которых относительно системы отсчета K мала по сравнению со скоростью света, и ограничимся следующим нерелятивистским приближением соотношений между штрихованными и нештрихованными величинами [93]:

$$
\begin{gathered}
\vec{\mathcal{E}}' \approx \vec{\mathcal{E}} + \vec{v}\times\vec{\mathcal{B}}, \qquad \vec{\mathcal{H}}' \approx \vec{\mathcal{H}} - \vec{v}\times\vec{\mathcal{D}}, \qquad \vec{\Im}' \approx \vec{\Im} - \vec{v}\,\rho_e, \\
\vec{\mathcal{M}}' \approx \vec{\mathcal{M}} + \vec{v}\times\vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{\mathcal{P}}' \approx \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{\mathcal{D}}' \approx \vec{\mathcal{D}}, \quad \vec{\mathcal{B}}' \approx \vec{\mathcal{B}}, \quad \rho_e' \approx \rho_e.
\end{gathered}
\tag{1.12}
$$

Приведенные выше электромагнитные характеристики удовлетворяют уравнениям Максвелла в системе наблюдателя K либо собственной системе K', движущейся относительно K со скоростью v. Сформулируем вначале эти уравнения в виде основных интегральных законов электродинамики, являющихся обобщением опытных данных. Относительно штрихованных величин эти законы имеют такой же вид, как и в случае среды, покоящейся в системе K. Поэтому с учетом соотношений (1.12) можно записать [58]:

закон Гаусса-Фарадея

$$\oint\limits_S \mathcal{B}_j n_j dS = 0; \tag{1.13}$$

закон Фарадея

$$\oint\limits_L \mathcal{E}_j' dx_j = -\frac{d}{dt}\int\limits_\Sigma \mathcal{B}_j n_j dS; \tag{1.14}$$

закон Гаусса-Кулона

$$\oint\limits_S \mathcal{D}_j n_j dS = \int\limits_V \rho_e dV; \tag{1.15}$$

закон Ампера-Максвелла

$$\oint\limits_L \mathcal{H}_j' dx_j = \frac{d}{dt}\int\limits_\Sigma \mathcal{D}_j n_j dS + \int\limits_\Sigma \Im_j' n_j dS. \tag{1.16}$$

Из (1.15), (1.16) следует, в частности, закон сохранения заряда

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho_e dV + \oint\limits_S \Im_j' n_j ds = 0. \tag{1.17}$$

Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать только ненамагничивающиеся диэлектрики, положим [126]

$$\rho_e = 0, \quad \vec{\mathcal{M}}' = 0, \quad \vec{\Im}\,' = \vec{\Im} = 0. \tag{1.18}$$

Учитывая (1.12), (1.18) и используя формулы Гаусса-Остроградского и Стокса, а также формулу дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижной поверхности, легко получить локальную форму представленных выше законов электродинамики:

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_{j,j} = 0, \quad \varepsilon_{jkl}\mathcal{E}_{l,k} + \frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial t} = 0, \\ &\mathcal{D}_{j,j} = 0, \quad \varepsilon_{jkl}\mathcal{H}_{l,k} - \frac{\partial \mathcal{D}_j}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Уравнения (1.19) представляют собой уравнения Максвелла в статистической формулировке [58] и могут быть выведены с использованием методов статистической физики [32]. В литературе имеются и другие формулировки уравнений Максвелла для движущихся сред, подробный обзор которых представлен, например, в работах [32, 42, 96].

Из (1.12) с учетом (1.18) получаем

$$\vec{\mathcal{M}} = -\vec{v} \times \vec{\mathcal{P}}, \tag{1.20}$$

так что соотношения (1.11) можно переписать в виде

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}, \qquad \vec{\mathcal{H}} = \frac{\vec{\mathcal{B}}}{\mu_0} + \vec{v} \times \vec{\mathcal{P}}. \tag{1.21}$$

Как указывалось выше, при исследовании взаимодействия термомеханических полей с электромагнитными необходимо выразить величины пондеромоторных силы $\mathcal{F}_j$ и момента $\mathcal{L}_j$, а также мощности притока энергии от поля к телу Φ через электромагнитные переменные. Имеющиеся в литературе подходы для решения этого вопроса описаны, например, в работах [32, 58, 216]. Там же приведены выражения для величин $\mathcal{F}_j$, $\mathcal{L}_j$, Φ, основанные на предположении, что взаимодействие на микроскопическом уровне характеризуется малыми заряженными частицами, движущимися в вакууме. Взаимодействие на макроуровне определяется при помощи процедуры статистического усреднения. Для случая ненамагничивающихся диэлектриков эти выражения (см. [58], формулы (1.112), (1.118), (1.119)) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{F}_j = \mathcal{P}_i\mathcal{E}^{'}_{j,i} + \varepsilon_{jkl} \overset{*}{\mathcal{P}}_k \mathcal{B}_l; \tag{1.22}$$

$$\mathcal{L}_j = \varepsilon_{jkl}\mathcal{P}_k\mathcal{E}^{'}_l; \tag{1.23}$$

$$\Phi = \dot{\mathcal{P}}_j\mathcal{E}^{'}_j + \mathcal{P}_j\mathcal{E}^{'}_j v_{k,k}, \tag{1.24}$$

где точкой сверху обозначена полная производная по времени $\left(\dot{\mathcal{A}} = \dfrac{d\mathcal{A}}{dt}\right)$, а

$$\overset{*}{\mathcal{P}}_j = \dot{\mathcal{P}}_j + \mathcal{P}_j v_{k,k} - \mathcal{P}_i v_{j,i}. \tag{1.25}$$

Авторы статьи [228] предложили сложную макромодель, упрощенный вариант которой моделирует поляризацию и намагничивание электрическими диполями и токами Ампера и приводит к выражениям для $\mathcal{F}_j$, $\mathcal{L}_j$, Φ, полностью совпадающим в случае диэлектриков без намагничивания с представленными выше соотношениями (1.22) – (1.24). Выражения для этих величин, полученные на основе других подходов, представлены в работе [216].

Вернёмся к уравнениям (1.7), (1.9), в которых тензор напряжений T_{ij} запишем в виде

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right), \tag{1.26}$$

где $\dfrac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) = T^c_{ij}$ – симметричный тензор. На основании (1.8) и с учетом (1.23) антисимметричную часть тензора T_{ij} можно выразить через электрические переменные, в результате чего будем иметь

$$T_{ij} = T^c_{ij} + \frac{1}{2}\left(\mathcal{P}_j\mathcal{E}^{'}_i - \mathcal{P}_i\mathcal{E}^{'}_j\right). \tag{1.27}$$

Подставляя (1.24) в уравнение энергии (1.9) и учитывая обозначение (1.25), можно записать

$$\rho\dot{U} = \left(T_{ij} + \mathcal{P}_i\mathcal{E}^{'}_j\right) d_{ij} + \overset{*}{\mathcal{P}}_j \mathcal{E}^{'}_j - h_{j,j} + \Phi_h, \tag{1.28}$$

где $d_{ij} = \dfrac{1}{2}(v_{j,i} + v_{i,j})$ – тензор скорости деформации [58].

Закон сохранения импульса (1.7) в силу (1.22) можно представить в виде

$$\left(T_{ij} + \mathcal{P}_i \mathcal{E}_j^{'}\right)_{,i} + \varepsilon_{jkl} \overset{*}{\mathcal{P}_k} \mathcal{B}_l - \mathcal{E}_j^{'} \mathcal{P}_{i,i} + \rho b_j = \rho \dot{v}_j. \tag{1.29}$$

Заметим, что тензор $T_{ij} + \mathcal{P}_i \mathcal{E}_j^{'}$ симметричен.

Представим уравнения энергии (1.28) и импульса (1.29), уравнения Максвелла (1.19), неравенство Клаузиуса-Дюгема (1.10) а также соотношения (1.12) и (1.21) в материальном описании. Для введения материальных величин воспользуемся основными соотношениями в интегральной форме (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (1.13) – (1.16), которые с учетом известных равенств [58]

$$\begin{gathered} n_j = n_{R_i} \frac{\partial \mathrm{x}_i}{\partial x_j} / f_{N}; \;\; dV = \Im dV_{R}; \;\; dS = \Im f_{N} dS_{R}; \\ dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_i} d\mathrm{x}_i; \quad \Im = det \left[\frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{x}_j}\right]; \quad f_{N}^2 = G_{kl} n_{R_k} n_{R_l}; \\ G_{kl} = \frac{\partial \mathrm{x}_k}{\partial x_j} \frac{\partial \mathrm{x}_l}{\partial x_j} \end{gathered} \tag{1.30}$$

перепишем в виде

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} \int\limits_{V_R} \rho_{R} dV_{R} = 0; \\ \frac{d}{dt} \int\limits_{V_R} \rho_{R} v_j dV_{R} = \oint\limits_{S_R} t_j^{(n_R)} dS_{R} + \int\limits_{V_R} (F_j + \rho_{R} b_j) dV_{R}; \\ \frac{d}{dt} \int\limits_{V_R} \left(\frac{1}{2}\rho_{R} v_j v_j + \rho_{R} U\right) dV_{R} = \\ = \oint\limits_{S_R} \left(t_j^{(n_R)} v_j - h_{R_j} n_{R_j}\right) dS_{R} + \\ + \int\limits_{V_R} \left[(F_j + \rho_{R} b_j) v_j + \Im \Phi_h + \Phi_{R}\right] dV_{R}; \end{gathered} \tag{1.31}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_R}\rho_{_R}\eta dV_{_R}+\oint\limits_{S_R}\frac{h_{_{R_j}}n_{_{R_j}}}{\Theta}dS_{_R}-\int\limits_{V_R}\frac{\Im\Phi_h}{\Theta}dV_{_R}\geq 0.$$

В интегральных законах электродинамики учтём равенства (1.18):

$$\begin{gathered}\oint\limits_{S_R}B_in_{_{R_i}}dS_{_R}=0;\ \oint\limits_{L_R}E_i^{'}d\mathrm{x}_i=-\frac{d}{dt}\int\limits_{\Sigma_R}B_in_{_{R_i}}dS_{_R};\\ \oint\limits_{S_R}D_in_{_{R_i}}dS_{_R}=0;\ \oint\limits_{L_R}H_i^{'}d\mathrm{x}_i=\frac{d}{dt}\int\limits_{\Sigma_R}D_in_{_{R_i}}dS_{_R}.\end{gathered}\tag{1.32}$$

Входящие в (1.31), (1.32) материальные величины выражаются через соответствующие величины в пространственном описании следующим образом:

$$\begin{gathered}\rho_{_R}=\Im\rho;\qquad t_j^{(n_{_R})}=P_{kj}n_{_{R_k}};\qquad P_{kj}=\Im\,T_{ij}\frac{\partial\mathrm{x}_k}{\partial x_i};\\ F_j=\Im\,\mathcal{F}_j;\qquad h_{_{R_i}}=\Im\ h_j\frac{\partial\mathrm{x}_i}{\partial x_j};\qquad \Phi_{_R}=\Im\,\Phi;\\ B_i=\Im\,\mathcal{B}_j\frac{\partial\mathrm{x}_i}{\partial x_j};\qquad E_i'=\mathcal{E}_j^{\,'}\frac{\partial x_j}{\partial\mathrm{x}_i};\qquad D_j=\Im\,\mathcal{D}_i\frac{\partial\mathrm{x}_i}{\partial x_j};\\ H_i^{'}=\mathcal{H}_j^{\,'}\frac{\partial x_j}{\partial\mathrm{x}_i}.\end{gathered}\tag{1.33}$$

Имеют место обратные соотношения

$$\begin{gathered}\rho=\frac{1}{\Im}\rho_{_R};\ T_{ij}=\frac{1}{\Im}P_{kj}\frac{\partial x_i}{\partial\mathrm{x}_k};\ \mathcal{F}_j=\frac{1}{\Im}F_j;\\ h_j=\frac{1}{\Im}h_{_{R_i}}\frac{\partial x_j}{\partial\mathrm{x}_i};\ \Phi=\frac{1}{\Im}\Phi_{_R};\ \mathcal{B}_j=\frac{1}{\Im}B_i\frac{\partial x_j}{\partial\mathrm{x}_i};\ \mathcal{E}_j^{\,'}=E_i^{\,'}\frac{\partial\mathrm{x}_i}{\partial x_j};\\ \mathcal{D}_j=\frac{1}{\Im}D_i\frac{\partial x_j}{\partial\mathrm{x}_i};\ \mathcal{H}_j^{\,'}=H_i^{\,'}\frac{\partial\mathrm{x}_i}{\partial x_j}.\end{gathered}\tag{1.34}$$

В (1.33), (1.34) P_{ij} – первый несимметричный тензор Пиолы-Кирхгофа. Выражения для нештрихованных материальных величин E_j, H_j, естественно, такие же, как и для $E_j^{'}, H_j^{'}$.

Вводя материальные векторы P_i, M_i по формулам

$$P_i = \Im \mathcal{P}_j \frac{\partial \mathrm{x}_i}{\partial x_j}, \qquad M_i = \mathcal{M}_j \frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_i},$$
$$\mathcal{P}_j = \frac{1}{\Im} P_i \frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_i}, \qquad \mathcal{M}_j = M_i \frac{\partial \mathrm{x}_i}{\partial x_j} \tag{1.35}$$

и учитывая (1.11), (1.20), нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$D_j = \varepsilon_0 \Im G_{jk} E_k + P_j, \qquad B_j = \mu_0 \Im G_{jk}(H_k + M_k),$$
$$M_k = \varepsilon_{klm} P_l \tilde{v}_m \quad \left(\vec{M} = \vec{P} \times \vec{\tilde{v}}\right), \qquad \tilde{v}_m = v_l \frac{\partial \mathrm{x}_m}{\partial x_l}. \tag{1.36}$$

Связь между штрихованными и нештрихованными величинами в материальном представлении имеет вид

$$\vec{E}^{\,\prime} = E + \vec{\tilde{v}} \times \vec{B}, \qquad \vec{H}^{\,\prime} = H - \vec{\tilde{v}} \times \vec{D} \tag{1.37}$$

или в координатной форме

$$E_i^{'} = E_i + \varepsilon_{imn} \tilde{v}_m B_n, \;\; H_j^{'} = H_j - \varepsilon_{jmn} \tilde{v}_m D_n. \tag{1.38}$$

Выражение (1.25) при переходе к материальным величинам преобразуется с учетом равенства $\dot{\Im} = \Im v_{k,k}$ [58] к виду

$$\overset{*}{\mathcal{P}}_j = \frac{1}{\Im} \frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_i} \dot{P}_i. \tag{1.39}$$

Локальные уравнения электродинамики (1.19) в материальном представлении получаются из (1.32) при помощи формул Гаусса-Остроградского и Стокса:

$$\frac{\partial B_i}{\partial \mathrm{x}_i} = 0, \qquad \varepsilon_{ikl} \frac{\partial E_l^{'}}{\partial \mathrm{x}_k} = -\dot{B}_i,$$
$$\frac{\partial D_i}{\partial \mathrm{x}_i} = 0, \qquad \varepsilon_{ikl} \frac{\partial H_l^{'}}{\partial \mathrm{x}_k} = \dot{D}_i, \tag{1.40}$$

где величины $E_l^{'}, H_l^{'}$ определяются соотношениями (1.38).

Принимая во внимание равенство

$$d_{ij} = \frac{\partial \mathrm{x}_r}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{x}_s}{\partial x_j}\dot{V}_{rs},$$

где $V_{rs} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_r}\dfrac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_s} - \delta_{rs}\right)$ – тензор деформации Грина [58], и используя формулы перехода к материальным величинам (1.34), (1.39), из (1.28) получаем первый закон термодинамики в материальном представлении

$$\rho_{R}\dot{U} = t_{rs}\dot{V}_{rs} + E_i^{'}\dot{P}_i - h_{R_{i,i}} + \Im\Phi_h, \quad h_{R_{i,i}} = \frac{\partial h_{R_i}}{\partial \mathrm{x}_i}, \tag{1.41}$$

причём симметричный тензор t_{rs} имеет вид

$$t_{rs} = \Im\frac{\partial \mathrm{x}_r}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{x}_s}{\partial x_j}\left(T_{ij} + \mathcal{P}_i\mathcal{E}_j^{'}\right). \tag{1.42}$$

При получении (1.41) и ниже используется известное соотношение [58]

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\Im}\frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_i}\right) = 0. \tag{1.43}$$

Переходя в (1.29) к материальным величинам, получаем уравнение сохранения импульса в материальном описании

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_r}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_s}t_{rs}\right) + \Im f_j + \rho_{R}b_j = \rho_{R}\ddot{u}_j, \tag{1.44}$$

где введены перемещения u_j и

$$\vec{f} = \overset{*}{\vec{\mathcal{P}}} \times \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{E}}^{'} div\vec{\mathcal{P}}. \tag{1.45}$$

Принимая во внимание (1.39), (1.34), (1.35), представим (1.44) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_r}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_s}t_{rs}\right) + f_{R_j} + \rho_{R}b_j = \rho_{R}\ddot{u}_j, \tag{1.46}$$

причём

$$f_{R_j} = \left(\dot{\vec{\mathrm{P}}} \times \vec{B} - \frac{\partial P_m}{\partial \mathrm{x}_m}\vec{E}^{\,'}\right)\cdot\frac{\partial \vec{\mathrm{x}}}{\partial x_j}, \tag{1.47}$$

а $\dfrac{\partial \mathrm{x}_i}{\partial x_j} = \dfrac{1}{2\Im}\, \varepsilon_{imp}\varepsilon_{jgr}\, \dfrac{\partial x_q}{\partial \mathrm{x}_m}\dfrac{\partial x_r}{\partial \mathrm{x}_p}$ [58].

Второй закон термодинамики в материальном представлении, согласно последнему из соотношений (1.31), принимает вид

$$\rho_{_R}\dot{\eta} + \frac{\partial\left(h_{_{R_j}}/\Theta\right)}{\partial \mathrm{x}_j} - \frac{\Im\Phi_h}{\Theta} \geq 0. \tag{1.48}$$

Перепишем материальные соотношения первого закона термодинамики (1.41) и закона сохранения импульса (1.44) в немного измененном виде. Для этого вначале, используя уравнения электродинамики (1.19) и соотношения (1.25), (1.12), (1.11), (1.20), представим уравнение сохранения импульса в пространственном описании (1.29) в виде

$$\left(T_{ij} + \mathcal{P}_i\mathcal{E}_j^{'} + T_{ij}^s\right)_{,i} + \rho\, b_j - \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}\right)_j = \rho\, \ddot{u}_j, \tag{1.49}$$

где

$$T_{ij}^s = \varepsilon_0\mathcal{E}_i\mathcal{E}_j + \frac{1}{\mu_0}\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j - \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\mathcal{E}_k\mathcal{E}_k + \frac{1}{\mu_0}\mathcal{B}_k\mathcal{B}_k\right)\delta_{ij}. \tag{1.50}$$

Сопоставляя (1.7) и (1.49), приходим, в частности, к следующему выражению для пондеромоторной силы $\vec{\mathcal{F}}$

$$\mathcal{F}_j = \left(\mathcal{P}_i\mathcal{E}_j^{'} + T_{ij}^s\right)_{,i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}\right)_j. \tag{1.51}$$

Переходя в (1.49) к материальным величинам и принимая во внимание тождество [58]

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_r}\left(\Im\frac{\partial \mathrm{x}_r}{\partial x_i}\right) = 0, \tag{1.52}$$

представим материальную форму закона сохранения импульса в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_r}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_s}t_{rs} + \Im\frac{\partial \mathrm{x}_r}{\partial x_i}T_{ij}^s\right) + \rho_{_R} b_j - \Im\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}\right)_j = \rho_{_R}\ddot{u}_j. \tag{1.53}$$

Здесь величины t_{rs}, T_{ij}^s определяются соответственно соотношениями (1.42), (1.50).

Вводя функцию

$$u = U - \vec{\mathcal{E}}^{\,'} \cdot \frac{\vec{\mathcal{P}}}{\rho} \tag{1.54}$$

и используя (1.6), (1.25), перепишем закон сохранения энергии (1.28) в виде

$$\rho\dot{u} = \left(T_{ij} + \mathcal{P}_i\mathcal{E}_j^{'}\right) d_{ij} - \mathcal{P}_j\dot{\mathcal{E}}_j^{'} - h_{j,j} + \Phi_h - \mathcal{E}_j^{'}\mathcal{P}_i v_{j,i}. \tag{1.55}$$

Непосредственным дифференцированием из (1.34) получаем

$$\dot{\mathcal{E}}_j^{'} = \frac{\partial \mathrm{x}_i}{\partial x_j}\dot{E}_i^{'} - \mathcal{E}_i^{'} v_{i,j}. \tag{1.56}$$

Подставляя (1.56) в (1.55) и переходя к материальным величинам в других слагаемых, приходим к материальному представлению первого закона термодинамики в виде

$$\rho_{R}\dot{u} = t_{rs}\dot{V}_{rs} - P_i\dot{E}_i^{'} - h_{R_{i,i}} + \Im\Phi_h. \tag{1.57}$$

Учитывая то, что $u = U - \vec{\mathcal{E}}^{\,'} \cdot \dfrac{\vec{\mathcal{P}}}{\rho} = U - \vec{E}^{\,'} \cdot \dfrac{\vec{P}}{\rho_R}$ и $\dot{\rho_R} = 0$, уравнение (1.57) может быть получено из (1.41) сразу же.

Следуя [58], будем называть представленную выше теорию *динамической*. Наряду с ней рассмотрим более простую *квазидинамическую* теорию [58], когда пренебрегается различием между величинами со штрихами и без них. Все представленные выше соотношения имеют место и для квазидинамической теории, если в них произвести замену

$$\mathcal{E}_j^{'} \to \mathcal{E}_j\,; \quad \mathcal{H}_j^{'} \to \mathcal{H}_j\,; \quad E_j^{'} \to E_j\,; \quad H_j^{'} \to H_j\,.$$

В частности, для этой теории можно представить первый закон термодинамики и закон сохранения импульса в виде

$$\frac{\dot{u}}{\Im} = \left(T_{ij} + \mathcal{D}_i\mathcal{E}_j - u^{F}\delta_{ij}\right) d_{ij} + \mathcal{E}_j\,\overset{*}{\mathcal{D}}_j - h_{j,j} + \Phi_h, \tag{1.58}$$

$$\left(T_{ij} + \mathcal{D}_i\mathcal{E}_j - u^{F}\delta_{ij}\right)_{,i} - f_j + \rho\, b_j = \rho\,\ddot{u}_j, \tag{1.59}$$

где

$$u = \rho_R U + \Im\, u^{F}, \quad u^{F} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\mathcal{E}_k\,\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{E}}, \tag{1.60}$$

$$\vec{f} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathcal{B}} \times rot\,\vec{\mathcal{B}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}\right). \tag{1.61}$$

В материальном описании соотношения (1.58), (1.59) принимают вид

$$\begin{aligned} &\dot{u} = \tilde{t}_{rs}\dot{V}_{rs} + E_j\dot{D}_j - h_{R_{j,j}} + \Im\Phi_h, \\ &\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_r}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_s}\tilde{t}_{rs}\right) - \Im f_j + \rho_R b_j = \rho_R \ddot{u}_j, \end{aligned} \tag{1.62}$$

причём

$$\tilde{t}_{rs} = \Im\frac{\partial \mathrm{x}_r}{\partial x_i}\,\frac{\partial \mathrm{x}_s}{\partial x_j}\left(T_{ij} + \mathcal{D}_i\mathcal{E}_j - u^F\delta_{ij}\right). \tag{1.63}$$

Отметим, что для рассматриваемого случая уравнение энергии не содержит магнитных переменных. Второй закон термодинамики для квазидинамической теории имеет такой же вид, как и (1.10), (1.48).

В уравнениях Максвелла (1.40) необходимо опустить штрихи.

§ 2. Граничные условия. Сводка универсальных соотношений в материальном описании

Источником получения граничных условий для представленных выше дифференциальных уравнений служат общие условия на поверхности разрыва, которые выводятся из основных соотношений термомеханики и электродинамики в интегральной форме [141, 216, 229].

Из интегрального уравнения сохранения импульса (1.2) и соотношения (1.51) получаем условие

$$\left\|T_{ij} + \mathcal{P}_i\mathcal{E}_j^{'} + T_{ij}^s\right\| n_i = 0. \tag{1.64}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ – скачок величины при переходе через поверхность разрыва (границу области) в направлении положительной нормали $\vec{n}$.

Из (1.4), (1.24) следует условие

$$\left\|(T_{ij} + \mathcal{P}_i\mathcal{E}_j^{'} + T_{ij}^s)v_j - h_i\right\| n_i = 0 \tag{1.65}$$

или, с учетом (1.64), условие непрерывности нормальной составляющей теплового потока

$$\|h_i\|\, n_i = 0. \tag{1.66}$$

Из соотношений электродинамики в интегральной форме (1.13) – (1.16) следуют общие условия

$$\left\|\vec{\mathcal{B}}\right\| \cdot \vec{n} = 0 \qquad \left(\left\|\mathcal{B}_j\right\| n_j = 0\right); \tag{1.67}$$

$$\begin{gathered} \vec{n} \times \left\|\vec{\mathcal{E}}^{\,\prime}\right\| = \vec{n} \times \left\|\vec{\mathcal{E}}\right\| - v^{(n)} \left\|\vec{\mathcal{B}}\right\| = 0 \\ \left(\varepsilon_{jkl} n_k \left\|\mathcal{E}_l\right\| - n_k v_k \left\|\mathcal{B}_j\right\| = 0\right); \end{gathered} \tag{1.68}$$

$$\begin{gathered} \left\|\vec{\mathcal{D}}\right\| \cdot \vec{n} = \left\|\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}\right\| \cdot \vec{n} = \sigma_{\text{пов}} \\ \left(\left\|\varepsilon_0 \mathcal{E}_j + \mathcal{P}_j\right\| n_j = \sigma_{\text{пов}}\right); \end{gathered} \tag{1.69}$$

$$\begin{gathered} \vec{n} \times \left\|\frac{\vec{\mathcal{B}}}{\mu_0} - \vec{\mathcal{M}}\right\| + v^{(n)} \left(\left\|\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}\right\| - \vec{n}\sigma_{\text{пов}}\right) = \vec{\Im}_{\text{пов}} \\ \left(\varepsilon_{jkl}\, n_k \left\|\frac{\mathcal{B}_l}{\mu_0} - \mathcal{M}_l\right\| + v_k n_k \left(\left\|\varepsilon_0 \mathcal{E}_j + \mathcal{P}_j\right\| - n_j \sigma_{\text{пов}}\right) = \Im_{\text{пов}\, j}\right). \end{gathered} \tag{1.70}$$

Здесь $v^{(n)}$ – проекция скорости точки поверхности разрыва на положительную нормаль; $\sigma_{\text{пов}}$, $\Im_{\text{пов}}$ – соответственно поверхностные плотности заряда и тока [141].

Из закона сохранения заряда (1.17) имеем условие

$$\begin{gathered} \left\|\vec{\Im}\right\| \cdot \vec{n} - v^{(n)} \left\|\rho_e\right\| + \vec{n} \cdot \nabla \times \left(\vec{n} \times \vec{\Im}_{\text{пов}}\right) + \\ + v^{(n)} \nabla \cdot \left(\vec{n}\, \sigma_{\text{пов}}\right) = -\frac{\partial \sigma_{\text{пов}}}{\partial t}, \end{gathered} \tag{1.71}$$

где ∇ – оператор Гамильтона.

Условие (1.68) равносильно условию непрерывности касательной составляющей вектора напряженности электрического поля $\vec{\mathcal{E}}^{\,\prime}$, которое может быть записано в виде

$$\left\|\vec{\mathcal{E}}^{\,\prime} - \left(\vec{\mathcal{E}}^{\,\prime} \cdot \vec{n}\right) \vec{n}\right\| = 0 \qquad \left(\left\|\mathcal{E}_j^{\prime} - (\mathcal{E}_k^{\prime} n_k) n_j\right\| = 0\right). \tag{1.72}$$

Аналогично, условие (1.70) может быть выражено через скачок касательной составляющей вектора напряженности магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}^{'}$:

$$\left\|\vec{\mathcal{H}}^{'} - \left(\vec{\mathcal{H}}^{'} \cdot \vec{n}\right)\vec{n}\right\| = \left(\vec{\Im}_{пов} - \vec{v}\sigma_{пов}\right) \times \vec{n}$$
$$\left(\left\|\mathcal{H}_j^{'} - \left(\mathcal{H}_k^{'} n_k\right) n_j\right\| = \varepsilon_{jkl}\left(\Im_{пов} - v_k \sigma_{пов}\right) n_l\right). \tag{1.73}$$

В рассматриваемом нами случае ненамагничивающихся диэлектриков необходимо со стороны этих диэлектриков учитывать соотношения (1.18), (1.20), (1.21).

Приведём для удобства использования в дальнейшем сводку универсальных соотношений термоэлектромеханики в материальном описании.

Динамическая теория:

уравнение энергии

$$\rho_R \dot{U} = t_{rs}\dot{V}_{rs} + E_j^{'}\dot{P}_j - h_{R_{j,j}} + \Im\Phi_h \tag{1.74}$$

или

$$\rho_R \dot{u} = t_{rs}\dot{V}_{rs} - P_j \dot{E}_j^{'} - h_{R_{j,j}} + \Im\Phi_h, \tag{1.75}$$

где

$$u = U - \vec{E}^{'} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{\rho_R}\right), \quad t_{rs} = \Im \frac{\partial \mathrm{x}_r}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{x}_s}{\partial x_j}\left(T_{ij} + \mathcal{P}_i\,\mathcal{E}_j^{'}\right);$$

второй закон термодинамики

$$\rho_R \dot{\eta} + \frac{\partial\left(h_{R_j}/\Theta\right)}{\partial \mathrm{x}_j} - \Im\frac{\Phi_h}{\Theta} \geq 0; \tag{1.76}$$

уравнение сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_r}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_s}t_{rs} + \Im\frac{\partial \mathrm{x}_r}{\partial x_i}T_{ij}^s\right) + \rho_R b_j - \Im f_j = \rho_R \ddot{u}_j, \tag{1.77}$$

где

$$\vec{f} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}\right),$$

$$T_{ij}^s = \varepsilon_0 \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_i \mathcal{B}_j - \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathcal{E}_k \mathcal{E}_k + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_k \mathcal{B}_k \right) \delta_{ij};$$

уравнения электродинамики

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B_i}{\partial \mathrm{x}_i} = 0, \qquad \varepsilon_{ikl} \frac{\partial E_{_l}^{'}}{\partial \mathrm{x}_k} = -\dot{B}_i, \\ &\frac{\partial D_i}{\partial \mathrm{x}_i} = 0, \qquad \varepsilon_{ikl} \frac{\partial H_{_l}^{'}}{\partial \mathrm{x}_k} = \dot{D}_i; \end{aligned} \tag{1.78}$$

дополнительные соотношения

$$\begin{aligned} &D_j = \varepsilon_0 \Im G_{jk} E_k + P_j, \quad B_j = \mu_0 \Im G_{jk} (H_k + M_k), \\ &M_k = \varepsilon_{klm} P_l \tilde{v}_m, \qquad \tilde{v}_m = v_{_l} \frac{\partial \mathrm{x}_m}{\partial x_{_l}}; \end{aligned} \tag{1.79}$$

связь между штрихованными и нештрихованными величинами

$$E_i^{'} = E_i + \varepsilon_{imn} \tilde{v}_m B_n, \qquad H_j^{'} = H_j - \varepsilon_{jmn} \tilde{v}_m D_n; \tag{1.80}$$

кинематические соотношения

$$V_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_r} \frac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_s} - \delta_{rs} \right), \quad x_k = \mathrm{x}_k + u_k. \tag{1.81}$$

Источником граничных условий для дифференциальных уравнений (1.74) – (1.78) служат соотношения (1.64) – (1.73), которые перепишем в материальном представлении

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_s} t_{rs} + \Im \frac{\partial \mathrm{x}_r}{\partial x_i} T_{ij}^s \right\| n_{R_r} = 0; \qquad \left\| h_{R_j} \right\| n_{R_j} = 0; \\ &\| B_j \| \, n_{R_j} = 0; \qquad \| D_j \| \, n_{R_j} = \Im f_N \sigma_{\text{пов}} = \sigma_{R\,\text{пов}}; \\ &\tilde{\varepsilon}_{jnm} \, n_{R_n} \left\| E_m^{'} \right\| = 0; \quad \tilde{\varepsilon}_{jnm} \, n_{R_n} \left\| H_m^{'} \right\| = f_N \Im_{\text{пов}\,j}^{'}, \end{aligned} \tag{1.82}$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{inm} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \mathrm{x}_n}{\partial x_j} \frac{\partial \mathrm{x}_m}{\partial x_k}, \;\; \vec{\Im}_{\text{пов}}^{'} = \vec{\Im}_{\text{пов}} - \vec{v}_\tau \sigma_{\text{пов}}, \tag{1.83}$$

а $\vec{v}_\tau$ – касательная составляющая вектора скорости на поверхности тела. Условие (1.71) для ненамагничивающихся диэлектриков $\left(\vec{\Im}' = 0,\right.$ $\left.\rho_{l} = 0, \vec{\mathcal{M}}' = 0\right)$ в качестве граничного условия не выступает, а выражает собой связь между объемными плотностями тока и заряда во внешней по отношению к телу среде и поверхностными плотностями тока и заряда на границе тела. Это условие может быть использовано только для согласования задаваемых на границе величин (в смысле их корректности).

Если $\vec{\Im}' = 0$ и извне тела, то последнее из условий (1.82) сводится к однородному.

Для фигурирующих выше величин $\Im$, f_{N}, G_{jk} используются принятые ранее обозначения (1.30)

$$\Im = det\left[\frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{x}_j}\right]; \quad f_{N}^2 = G_{kl} n_{R_k} n_{R_l}; \quad G_{jk} = \frac{\partial \mathrm{x}_j}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{x}_k}{\partial x_i}.$$

Производные $\dfrac{\partial \mathrm{x}_j}{\partial x_k}$ выражаются через производные $\dfrac{\partial x_m}{\partial \mathrm{x}_n}$ следующим образом

$$\frac{\partial \mathrm{x}_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2\Im}\varepsilon_{jmp}\,\varepsilon_{kqr}\frac{\partial x_q}{\partial \mathrm{x}_m}\frac{\partial x_r}{\partial \mathrm{x}_p}. \tag{1.84}$$

Выписанные соотношения остаются в силе и для <u>*квазидинамической*</u> теории, если в них произвести замену E_m' на E_m, H_m' на H_m и $\Im'_{\text{пов}\,j}$ на $\Im_{\text{пов}\,j}$. При этом уравнения энергии и импульса можно преобразовать к виду:

уравнение энергии

$$\dot{u} = \tilde{t}_{rs}\dot{V}_{rs} + E_j\dot{D}_j - h_{R_{j,j}} + \Im\Phi_h, \tag{1.85}$$

где

$$u = \rho_{R}U + \Im u^{F}; \qquad u^{F} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\mathcal{E}_k\mathcal{E}_k;$$

$$\tilde{t}_{rs} = \Im\frac{\partial \mathrm{x}_r}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{x}_s}{\partial x_j}\left(T_{ij} + \mathcal{D}_i\mathcal{E}_j - u^{F}\delta_{ij}\right);$$

уравнения сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_r}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_s}\tilde{t}_{rs}\right) + \rho_{R}b_j - \Im\tilde{f}_j = \rho_{R}\,\ddot{u}_j, \tag{1.86}$$

где

$$\vec{\tilde{f}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathcal{B}} \times rot\,\vec{\mathcal{B}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}\right).$$

Тогда вместо первого из соотношений (1.82) необходимо записать

$$\left\| \frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_s}\,\tilde{t}_{rs} \right\| n_{R_r} = 0. \tag{1.87}$$

Дополнительные соотношения (1.79) перепишем с учетом $M_k = 0$:

$$D_j = \varepsilon_0 \Im G_{jk} E_k + P_j; \quad B_j = \mu_0 \Im G_{jk} H_k. \tag{1.88}$$

Сказанное выше относительно условия (1.71) остаётся в силе. При этом в (1.71) необходимо опустить члены, содержащие скорость $v^{(n)}$.

Представленные для обеих теорий системы универсальных соотношений не являются замкнутыми. Число неизвестных величин в них больше числа уравнений. Для замыкания этих систем необходимо добавить к ним так называемые определяющие уравнения, теория которых рассматривается в следующем параграфе. Здесь же приведём соотношения, играющие важную роль в этой теории.

Исключая из соотношений (1.74), (1.76) величину $\Im\Phi_h$, получаем так называемое приведенное диссипативное неравенство

$$\rho_R(-\dot{U} + \Theta\dot{\eta}) + t_{ij}\dot{V}_{ij} + E_j^{'}\dot{P}_j - \frac{1}{\Theta}\Theta_{,j} h_{R_j} \geq 0. \tag{1.89}$$

Вводя функцию свободной энергии $\Phi = U - \Theta\eta$, перепишем (1.89) в виде

$$t_{ij}\dot{V}_{ij} + E_j^{'}\dot{P}_j - \rho_R \eta\dot{\Theta} - \rho_R\dot{\Phi} - \frac{1}{\Theta}\Theta_{,j} h_{R_j} \geq 0. \tag{1.90}$$

Аналогично, исключая $\Im\Phi_h$ из (1.85), (1.76), получаем приведенное диссипативное неравенство для квазидинамической теории

$$(-\dot{u} + \rho_R\Theta\dot{\eta}) + \tilde{t}_{ij}\dot{V}_{ij} + E_j\dot{D}_j - \frac{1}{\Theta}\Theta_{,j} h_{R_j} \geq 0. \tag{1.91}$$

Вводя функцию

$$\Phi = u - \rho_R\Theta\eta = \rho_R(U - \Theta\eta) + \Im u^{^F}, \tag{1.92}$$

перепишем (1.91) в виде

$$\tilde{t}_{ij}\dot{V}_{ij} + E_j\dot{D}_j - \rho_R\eta\dot{\Theta} - \dot{\Phi} - \frac{1}{\Theta}\Theta_{,j} h_{R_j} \geq 0. \tag{1.93}$$

§ 3. Общая теория определяющих уравнений вязкоупругих ненамагничивающихся диэлектриков с затухающей памятью

Общая теория определяющих уравнений вязкоупругих материалов с поляризацией и намагничиванием разработана в монографиях [58, 76], где рассматриваются материалы с затухающей памятью функционального типа, внутренними переменными и интегро-дифференциального и дифференциального типов. Хотя теория вязкоупругих ненамагничивающихся диэлектриков следует из этих общих теорий как частный случай [58], рассмотрим её независимо. При этом ограничимся случаем материалов с затухающей памятью функционального типа.

Термоэлектромагнитомеханический процесс в ненамагничивающемся диэлектрике характеризуется следующей совокупностью функций координат и времени: 1) законом движения $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\mathrm{x}}, t)$; 2) тензором напряжения $T_{ij}(\vec{\mathrm{x}}, t)$; 3) массовыми силами $\vec{b}(\vec{\mathrm{x}}, t)$; 4) плотностью источников тепла $\Phi_h(\vec{\mathrm{x}}, t)$; 5) удельной внутренней энергией $U(\vec{\mathrm{x}}, t)$; 6) абсолютной температурой $\Theta(\vec{\mathrm{x}}, t)$, которая предполагается положительной $(\Theta(\vec{\mathrm{x}}, t) > 0)$; 7) удельной энтропией $\eta(\vec{\mathrm{x}}, t)$, которая, как и абсолютная температура, вводится априори; 8) вектором теплового потока $\vec{h}(\vec{\mathrm{x}}, t)$; 9) напряженностью электрического поля $\vec{\mathcal{E}}(\vec{\mathrm{x}}, t)$; 10) индукцией электрического поля $\vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathrm{x}}, t)$; 11) напряженностью магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}(\vec{\mathrm{x}}, t)$; 12) индукцией магнитного поля $\vec{\mathcal{B}}(\vec{\mathrm{x}}, t)$. Представленная совокупность функций называется термодинамическим процесом, если она удовлетворяет уравнениям сохранения импульса, момента импульса, энергии и уравнениям Максвелла. Чтобы определить термодинамический процесс в любой точке $\vec{\mathrm{x}}$, достаточно задать совокупность функций

$$R(\cdot) = \{\vec{x}(\vec{\mathrm{x}}, t);\ T_{ij}(\vec{\mathrm{x}}, t);\ U(\vec{\mathrm{x}}, t);\ \Theta(\vec{\mathrm{x}}, t);\ \eta(\vec{\mathrm{x}}, t);$$

$$\vec{h}(\vec{\mathrm{x}}, t);\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{\mathrm{x}}, t);\ \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathrm{x}}, t)\},$$

поскольку напряженность и индукция магнитного поля могут быть найдены в этом случае из уравнений Максвелла (1.19) с учетом соотношений (1.11) и равенства $\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{P}} \times \vec{v}$ – для динамической и $\vec{\mathcal{M}} = 0$ – для квазидинамической теорий, а функции $\vec{b}(\vec{\mathrm{x}}, t)$, $\Phi_h(\vec{\mathrm{x}}, t)$ – из уравнений сохранения импульса и энергии. По функциям, входящим в $R(\cdot)$, легко находятся остальные величины, фигурирующие в универсальных соотношениях, такие как градиент деформации, плотность и т.д.

Пусть $\Lambda(\tau)$ – некоторая величина в момент времени τ в фиксированной точке $\vec{\mathrm{x}}$. Функция

$$\Lambda^t(s) = \Lambda(t-s) \qquad (0 < s < \infty) \tag{1.94}$$

называется прошлой историей этой величины в точке $\vec{\mathrm{x}}$. Рассматривая подробнее более простую квазидинамическую теорию (динамическая теория строится аналогично), считаем, что текущие значения энтропии $\eta(t)$, внутренней энергии $U(t)$, напряжения $T_{ij}(t)$, напряженности электрического поля $\vec{\mathcal{E}}(t)$ и теплового потока $\vec{h}(t)$ являются функционалами прошлых историй градиента деформации $x^t_{i,j}(s)$, температуры $\Theta^t(s)$, индукции электрического поля $\vec{\mathcal{D}}^t(s)$ и функциями текущих значений $x_{i,j}(t), \Theta(t), \vec{\mathcal{D}}(t)$ и градиента температуры $g_j(t) = \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_j}$. В силу определения (1.92) это относится и к функции Φ. Материалы с такой зависимостью величин называются простыми. Переход к материальным величинам позволяет представить неравенство Клаузиуса-Дюгема в виде (1.93), а предполагаемую выше функциональную связь между величинами записать следующим образом:

$$\begin{gathered}
\Phi = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(\bar{\Lambda}^t(s);\, \bar{\Lambda}(t),\, \vec{g}_{R}(t));\;\; \tilde{t}_{ij} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\tilde{t}_{ij}}}(\bar{\Lambda}^t(s);\, \bar{\Lambda}(t),\, \vec{g}_{R}(t));\\
E_j = \overset{\infty}{\underset{s=0}{E_j}}(\bar{\Lambda}^t(s);\, \bar{\Lambda}(t),\, \vec{g}_{R}(t));\;\; \eta = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\eta}}(\bar{\Lambda}^t(s);\, \bar{\Lambda}(t),\, \vec{g}_{R}(t));\\
h_{R_j} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{h_{R_j}}}(\bar{\Lambda}^t(s);\, \bar{\Lambda}(t),\, \vec{g}_{R}(t)),
\end{gathered} \tag{1.95}$$

где $g_{R_j} = \dfrac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{x}_j} = g_i\dfrac{\partial x_i}{\partial \mathrm{x}_j}$, а для остальных независимых переменных величин введено обозначение

$$\bar{\Lambda}(t) = (V_{ij}(t),\, D_j(t),\, \Theta(t)). \tag{1.96}$$

Основой использования неравенства (1.93) является требование о его выполнении для произвольных историй независимых переменных V_{ij}, D_j, Θ. При этом необходимо иметь правило дифференцирования по времени скалярного функционала Φ. Для материалов с затухающей памятью такое правило приведено, например, в работах [34, 183].

Его обобщение на вязкоупругие среды с поляризацией и намагничиванием дано в работе [58]. Повторим основные моменты этого обобщения на случай, когда рассматриваются ненамагничивающиеся диэлектрические материалы.

Рассмотрим 13-мерное пространство A векторов $\bar{\Omega} = (\Omega_{kl}, \Omega_k, \Omega)$. Первые девять элементов этих векторов интерпретируем как компоненты Ω_{kl} некоторого симметричного тензора второго ранга, остальные – как компоненты Ω_k некоторого вектора и скаляра Ω соответственно. Скалярное произведение и норма в пространстве A определяются обычным способом

$$\bar{\Omega}^1 \cdot \bar{\Omega}^2 = \Omega^1_{kl}\,\Omega^2_{kl} + \Omega^1_k\,\Omega^2_k + \Omega^1\,\Omega^2, \tag{1.97}$$

$$\left\|\bar{\Omega}\right\|_0 = (\,\bar{\Omega}\cdot\bar{\Omega}\,)^{1/2}. \tag{1.98}$$

Множество векторов (1.96) образует в A некоторое подмножество $\mathcal{B}$, поскольку $det[2V_{ij} + \delta_{ij}] \neq 0$ и $\Theta > 0$.

Рассмотрим положительную, монотонно убывающую функцию $h(s)$, такую, что

$$\int\limits_0^\infty h^2(s)dS < \infty \tag{1.99}$$

и определим пространство $\mathcal{H}$ всех вектор-функций $\bar{\Gamma}(s) = (\Omega^t_{kl}(s), \Omega^t_k(s), \Omega^t(s)\,)$, принимающих значения в пространстве A, со скалярным произведением и нормой

$$< \bar{\Gamma}^1(s), \bar{\Gamma}^2(s)\ >= \int\limits_0^\infty h^2(s)\bar{\Gamma}^1(s)\cdot\bar{\Gamma}^2(s)\,dS, \tag{1.100}$$

$$\left\|\bar{\Gamma}(s)\right\|_1 = \left[\,\int\limits_0^\infty h^2(s)\|\Gamma(s)\|_0^2 dS\right]^{1/2}. \tag{1.101}$$

Пространство $\mathcal{H}$ является гильбертовым пространством [34, 58].

Предположим теперь, что каждый из функционалов в определяющих уравнениях (1.95) является непрерывным по нормам (1.98), (1.101), а функционал Φ удовлетворяет принципу затухающей памяти, что математически конкретизируется введением функции $h(s)$ согласно

(1.99). Тогда этот функционал дифференцируем по Фреше по норме (1.101) [34, 58], так что для любых историй $\bar{\Lambda}^t(s)$ и функций $\bar{\Gamma}(s)$ из $\mathcal{H}$ получаем

$$\begin{aligned}&\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(\bar{\Lambda}^t(s)+\bar{\Gamma}(s);\,\bar{\Lambda}(t),\,\vec{g}_R(t)\right)-\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(\bar{\Lambda}^t(s);\,\bar{\Lambda}(t),\,\vec{g}_R(t)\right)=\\&\qquad=\delta_\Lambda\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(\bar{\Lambda}^t(s);\,\bar{\Lambda}(t),\,\vec{g}_R(t)\;\middle|\;\bar{\Gamma}(s)\right)+\circ\left(\left\|\bar{\Gamma}(s)\right\|_1\right),\end{aligned}\tag{1.102}$$

где $\delta_\Lambda\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}$ – линейный по $\bar{\Gamma}(s)$ функционал, свой для каждого набора переменных $(\bar{\Lambda}^t(s);\,\bar{\Lambda}(t),\,\vec{g}_R(t))$ и непрерывный по этим переменным. Кроме того, пусть для каждой прошлой истории $\bar{\Lambda}^t(s)$ существуют непрерывные по $(\bar{\Lambda}^t(s);\,\bar{\Lambda}(t),\,\vec{g}_R(t))$ частные производные $\partial_\Lambda\Phi = \{\partial_{V_{ij}}\Phi,\,\partial_{D_i}\Phi,\,\partial_\Theta\Phi\}$, $\partial_{g_R}\Phi=\{\partial_{g_{R_j}}\Phi\}$, так что имеет место соотношение

$$\begin{aligned}&\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(\bar{\Lambda}^t(s);\,\bar{\Lambda}(t)+\Omega,\,\vec{g}_R(t)+\Delta\vec{g}_R\right)-\\&-\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(\bar{\Lambda}^t(s);\,\bar{\Lambda}(t),\,\vec{g}_R(t))=\partial_\Lambda\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(\bar{\Lambda}^t(s);\,\bar{\Lambda}(t),\,\vec{g}_R(t))\cdot\bar{\Omega}+\\&+\partial_{g_R}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(\bar{\Lambda}^t(s);\,\bar{\Lambda}(t),\,\vec{g}_R(t))\Delta\vec{g}_R+\circ\left(\left\|\bar{\Omega}(s)\right\|_0\right)+\circ\left(|\Delta\vec{g}_R|\right),\\&|\Delta\vec{g}_R|=\left(\Delta g_{R_j}\cdot\Delta g_{R_j}\right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{1.103}$$

Отметим, что дифференциалы из (1.103) и дифференциал Фреше из (1.102) можно представить в виде

$$\begin{aligned}&\partial_\Lambda\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(\bar{\Lambda}^t(s);\bar{\Lambda}(t),\vec{g}_R(t)\right)\cdot\bar{\Omega}+\partial_{g_R}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(\bar{\Lambda}^t(s);\bar{\Lambda}(t),\vec{g}_R(t)\right)\cdot\Delta\vec{g}_R=\\&\qquad=\frac{d}{d\alpha}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(\bar{\Lambda}^t(s);\,\bar{\Lambda}(t)+\alpha\Omega,\,\vec{g}_R(t)+\alpha\Delta\vec{g}_R\right)\Bigg|_{\alpha=0};\end{aligned}\tag{1.104}$$

$$\begin{aligned}&\delta_\Lambda\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(\bar{\Lambda}^t(s);\,\bar{\Lambda}(t),\,\vec{g}_R(t)\;|\;\bar{\Gamma}(s))=\\&\qquad=\frac{d}{d\alpha}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(\bar{\Lambda}^t(s)+\alpha\bar{\Gamma}(s);\;\bar{\Lambda}(t),\,\vec{g}_R(t)\,).\end{aligned}\tag{1.105}$$

Если теперь рассмотреть $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}$ как функцию параметра t, то нетрудно показать, что производная $\dot{\Phi}$ может быть записана в виде

$$\dot{\Phi} = \partial_{V_{ij}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)\dot{V}_{ij} + \partial_{D_j} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)\dot{D}_j + \partial_{\Theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)\dot{\Theta} + \partial_{g_{R_j}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)\dot{g}_{R_j} +$$
$$+\delta_{V_{ij}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;\,|\dot{V}^t_{ij}\,) + \delta_{D_j} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;\,|\dot{D}^t_j) + \delta_{\Theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;\,|\dot{\Theta}^t\,), \tag{1.106}$$

где

$$\dot{V}^t_{ij} = -\frac{d}{ds} V^t_{ij}\,(s); \;\; \dot{D}^t_j = -\frac{d}{ds} D^t_j\,(s); \;\; \dot{\Theta}^t = -\frac{d}{ds}\Theta^t\,(s) \tag{1.107}$$

и введено обозначение

$$(;) = (\,V^t_{kl}\,(s),\, D^t_l\,(s),\, \Theta^t\,(s);\, V_{kl}\,(t),\, D_l\,(t),\, \Theta\,(t),\, g_{R_l}\,(t)). \tag{1.108}$$

Подставляя (1.106) в приведенное диссипативное неравенство (1.93), получаем

$$\left(\tilde{t}_{ij} - \partial_{V_{ij}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)\right)\dot{V}_{ij} + \left(E_j - \partial_{D_j} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)\right)\dot{D}_j - \left(\rho_R \eta + \partial_{\Theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)\right)\dot{\Theta} -$$
$$-\partial_{g_{R_j}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)\dot{g}_{R_j} - \delta_{V_{ij}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(;\,|\,\dot{V}^t_{ij}\right) - \delta_{D_j} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(;\,|\,\dot{D}^t_j\right) - \tag{1.109}$$
$$-\delta_{\Theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(;\,|\,\dot{\Theta}^t\right) - \frac{1}{\Theta} h_{R_j}\, g_{R_j} \geq 0.$$

Можно показать [34, 183], что при фиксированных прошлых историях $\bar{\Lambda}^t(s)$ и фиксированных значениях $\bar{\Lambda}(t)$, $\vec{g}_R(t)$ величины $\dot{V}_{ij}$, $\dot{D}_j$, $\dot{\Theta}$, $\dot{g}_{R_j}$ могут изменяться произвольно. Чтобы неравенство (1.109) выполнялось для любых значений $\dot{V}_{ij}$, $\dot{D}_j$, $\dot{\Theta}$, $\dot{g}_{R_j}$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при них обращались в нуль, а оставшаяся часть была положительной для всех t:

$$\partial_{g_{R_j}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;) = 0, \tag{1.110}$$

$$\tilde{t}_{ij} = \partial_{V_{ij}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;), \quad E_j = \partial_{D_j} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;), \quad \rho_R \eta = -\partial_{\Theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)\,; \tag{1.111}$$

$$D'_{\text{эм}} - \frac{1}{\Theta}\overset{\infty}{\underset{s=0}{h_{R_j}}}(;)g_{R_j} \geq 0, \tag{1.112}$$

где

$$D'_{\text{эм}} = -\delta_{V_{ij}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(;\mid \dot{V}^t_{ij}\right) - \delta_{D_j} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(;\mid \dot{D}^t_{j}\right) - \delta_{\Theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}\left(;\mid \dot{\Theta}^t\right). \tag{1.113}$$

– скорость диссипации электромеханической энергии [58].

С учетом условий (1.110) – (1.113) уравнение энергии (1.85) преобразуется к виду

$$\rho_R \Theta \dot{\eta} = -h_{R_{j,j}} + D'_{\text{эм}} + \Im\Phi_h. \tag{1.114}$$

При однородных температурных полях ($\vec{g}_R = 0$) из (1.112) получаем неравенство для внутренней диссипации

$$D'_{\text{эм}} \geq 0. \tag{1.115}$$

Для динамической теории исходным является приведенное диссипативное неравенство (1.90). При этом все приведенные выше результаты по структуре определяющих уравнений остаются в силе, если в формулах сделать следующие замены:

$$\begin{gathered} \tilde{t}_{ij} \to t_{ij},\ E_j \to E'_j,\ D_j \to P_j,\ \Phi \to \rho_R \Phi, \\ \bar{\Lambda}(t) = (\, V_{ij}(t),\, P_j,\, \Theta\,). \end{gathered} \tag{1.116}$$

Теперь можно сформулировать следующие фундаментальные свойства вязкоупругих ненамагничивающихся диэлектрических материалов, обладающих затухающей памятью функционального типа:

1) поведение таких материалов полностью определяется заданием двух функционалов – скалярного функционала $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)$ и функционала теплового потока $\overset{\infty}{\underset{s=0}{h_{R_j}}}(;)$;

2) согласно (1.110) функционал $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;)$ не зависит от градиента температуры, так что $\Phi = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(\,\bar{\Lambda}^t(s); \bar{\Lambda}(t))$;

3) тензор $\tilde{t}_{ij}$, напряженность электрического поля E_j, энтропия η (для динамической теории t_{ij}, E'_j, η соответственно) определяются

по функционалу Φ соотношениями (1.111) (в динамической теории в (1.111) необходимо произвести замены (1.116)) и, следовательно, также не зависят от градиента температуры;

4) функционал теплового потока $\overset{\infty}{\underset{s=0}{h_{R_j}}}(\bar{\Lambda}^t(s);\, \bar{\Lambda}(t),\, \vec{g}_R)$ удовлетворяет обобщенному диссипативному неравенству (1.112);

5) при однородных температурных полях ($\vec{g}_R = 0$) внутренняя диссипация не отрицательна.

К аналогичным выводам приходим и при построении теории с использованием других наборов независимых переменных, отличающихся от (1.96). Так, предполагая, что $\bar{\Lambda}(t) = (V_{ij}(t),\, E_j(t),\, \Theta(t))$ и вводя в приведенное диссипативное неравенство (1.91) вместо функции (1.92) функцию

$$\Phi = u - \rho_R \Theta \eta - E_j D_j, \tag{1.117}$$

получаем

$$\tilde{t}_{ij}\dot{V}_{ij} - D_j \dot{E}_j - \rho_R \eta \dot{\Theta} - \dot{\Phi} - \frac{1}{\Theta}\Theta_{,j} h_{R_j} \geq 0. \tag{1.118}$$

Проводя те же рассуждения, что и выше, приходим к соотношениям [58]

$$\begin{gathered}
\partial_{g_{R_j}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;) = 0;\\
\tilde{t}_{ij} = \partial_{V_{ij}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;),\;\; D_j = -\partial_{E_j} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;),\;\; \rho_R \eta = -\partial_{\Theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;);\\
D'_{\text{эм}} - \frac{1}{\Theta}\, \overset{\infty}{\underset{s=0}{h_{R_j}}}\; g_{R_j} \geq 0,
\end{gathered} \tag{1.119}$$

где

$$D'_{\text{эм}} = -\delta_{V_{ij}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;\, |\dot{V}^t_{ij}) - \delta_{E_j} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;\, |\dot{E}^t_j) - \delta_{\Theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}(;\, |\dot{\Theta}^t), \tag{1.120}$$

а в обозначении (1.108) необходимо заменить $D^t_l(s)$ на $E^t_l(s)$ и $D_l(t)$ на $E_l(t)$.

Определяющие уравнения (1.111) или (1.119) и соответствующие определяющие уравнения для динамической теории при заданных на основе экспериментов выражениях для функционалов $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}$ и $\overset{\infty}{\underset{s=0}{h_{R_j}}}$, удовлетворяющих неравенству (1.112), замыкают системы универсальных соотношений, приведенные в предыдущих параграфах, и позволяют перейти к постановке конкретных задач термоэлектромеханики.

Потребуем, как и в работах [58, 76, 77], выполнения условий

$$D^{'}_{\text{эм}} \geq 0, \qquad \underset{s=0}{\overset{\infty}{h}}{}_{R_j}(;)g_{R_j} \leq 0, \tag{1.121}$$

являющихся достаточными для удовлетворения неравенства (1.112), но делающих используемую формулировку второго закона термодинамики более сильной. Связь между вектором теплового потока и градиентом температуры может быть задана упрощенным соотношением [58, 77]

$$h_{R_j} = h_{R_j}(\,\bar{\Lambda}(t),\, g_{R_j}\,), \tag{1.122}$$

которое должно удовлетворять второму условию (1.121). В частности, с достаточной для практики точностью можно ограничиться законом теплопроводности Фурье, при котором второе из условий (1.121) удовлетворяется автоматически.

Из сказанного следует, что основной проблемой при конкретизации определяющих соотношений является выбор выражения для функционала Φ, удовлетворяющего условию неотрицательности внутренней диссипации (1.121). Такой выбор может быть сделан только на основе анализа всей накопленной для рассматриваемого класса материалов экспериментально-теоретической информации о поведении материала при различных историях температуры, деформации, индукции электрического поля или другого набора независимых переменных.

Формально гипотеза о затухающей памяти позволяет представить функционал Φ в виде суммы интегралов возрастающей кратности [58, 190]. Используя описанный выше аппарат, можно построить формальные нелинейные теории термоэлектромеханики с учетом связанности механических, тепловых и электромагнитных полей. Однако при существенной нелинейной зависимости от историй независимых переменных в упомянутых обобщенных рядах необходимо удерживать большое количество членов. Программа определения ядер этих рядов чрезвычайно громоздка и в настоящее время труднореализуема. Кроме того, оказывается [187], что результаты вычисления ядер по экспериментальным данным очень чувствительны к погрешностям экспериментов. Поэтому при построении теории термоэлектровязкоупругости в общем случае наиболее приемлемым кажется подход, развиваемый в монографиях [58, 76] и основанный на различного рода обобщениях известных механических и термомеханических теорий в сочетании с дополнительными гипотезами относительно взаимодействия термомеханических полей с электромагнитными. Так, построенные в [58, 76] конечная линейная и главная теории обобщенных термологически простых вязкоупругих материалов с поляризацией и намагничиванием (под такими материалами понимаются материалы, допускающие введение приведенного времени [58, 76]) являются обобщением механических конечной линейной [76, 182] и главной [45, 76] теорий и включают последние как частный случай. Согласно [58], для конечной линейной квазидинамической теории ненамагничивающихся вязкоупругих диэлектриков функционал Φ представляется в виде

$$\begin{aligned}\Phi = \Phi^{\infty}\left(\bar{\Lambda}(t)\right) + \frac{1}{2}M^{(1)}_{ijkl} * V_{d_{ij}} * V_{d_{kl}} + M^{(2)}_{kij} * D_{d_k} * V_{d_{ij}} + \\ + M^{(3)}_{ij} * \Theta_d * V_{d_{ij}} + \frac{1}{2}M^{(4)}_{ij} * D_{d_i} * V_{d_j} + \\ + M^{(5)}_{i} * D_{d_i} * \Theta_d + \frac{1}{2}M^{(6)} * \Theta_d * \Theta_d,\end{aligned} \tag{1.123}$$

где $\bar{\Lambda}_d(s) = \left(V_{d_{ij}}(s),\, D_{d_j}(s),\, \Theta_d(s)\right) = \bar{\Lambda}(t-s) - \bar{\Lambda}(t)$ – разностные истории, а

$$M^{(i)} * f_1 * f_2 = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} M^{(i)}\left(\tau_1,\, \tau_2;\, \bar{\Lambda}(t)\right) f_1(t-\tau_1)\, f_2(t-\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2.$$

Для главной квазидинамической теории [58]

$$\Phi = \Phi^{\infty}\left(\bar{\Lambda}(t)\right) + \int\limits_{-\infty}^{t} N\left(\bar{\Gamma}\right) d\tau, \tag{1.124}$$

где $\bar{\Gamma} = \left(\bar{\Lambda}_d(\tau),\, \Lambda(t),\, t-\tau\right)$.

Дальнейшая конкретизация функционалов (1.123), (1.124) связана с выбором конкретных выражений для фигурирующих в них функций $M^{(i)}$, Φ^{∞}, N. При этом должно выполняться требование неотрицательности внутренней диссипации (1.113). Для конечной линейной и главной динамических теорий выражения для функционалов можно получить из представленных выше соотношений (1.123), (1.124) с учетом $\bar{\Lambda}(t) = \left(V_{ij}(t),\, P_j,\, \Theta\right)$.

В заключение отметим, что использование неравенства Клаузиуса-Дюгема в качестве второго закона термодинамики приводит к неоднозначности в определении диссипации или энтропии [188, 214]. Действительно, пусть заданы некоторый функционал $\hat{\Phi}$ и функционал вектора теплового потока $\hat{h}_{R_j}$. По формулам (1.111), (1.113) находим

$$\begin{gathered} \hat{\tilde{t}}_{ij} = \partial_{V_{ij}} \hat{\Phi}, \qquad \hat{E}_j = \partial_{D_j} \hat{\Phi}, \\ \rho_R \hat{\eta} = -\partial_{\Theta} \hat{\Phi}, \qquad \hat{D}'_{\text{эм}} = -\delta_V \hat{\Phi} - \delta_D \hat{\Phi} - \delta_{\Theta} \hat{\Phi}. \end{gathered} \tag{1.125}$$

Здесь для удобства введена сокращенная запись частных производных и производных Фреше.

Подставляя (1.125) в уравнение импульса (1.86), энергии (1.114), электродинамики (1.78), где необходимо опустить штрихи, и используя кинематические соотношения (1.81), определяющее уравнение для вектора теплового потока, например, вида (1.122), дополнительные соотношения (1.88), соотношения, связывающие величины в актуальном и материальном описании (1.34), и соотношение (1.84), получаем замкнутую систему десяти интегродифференциальных уравнений относительно десяти неизвестных: трёх функций $x_i = x_i(\mathrm{x}_j, t)$, определяющих закон движения; трёх составляющих вектора электрической индукции $D_j = D_j(\mathrm{x}_j, t)$; температуры $\Theta = \Theta(\mathrm{x}_j, t)$ и трёх составляющих вектора напряженности магнитного поля $H_j = H_j(\mathrm{x}_j, t)$. Зададим другой функционал

$$\Phi = \hat{\Phi} - \Theta \mathop{f}_{s=0}^{\infty} \left(V_{ij}^t(s),\, D_j^t(s) \right), \tag{1.126}$$

где f – некоторый функционал прошлых историй деформаций и индукции электрического поля. Пусть при этом $h_{R_j} = \hat{h}_{R_j}$. Тогда

$$\begin{gathered} \tilde{t}_{ij} = \hat{\tilde{t}}_{ij}, \qquad E_j = \hat{E}_j, \\ \rho_R \eta = \rho_R \hat{\eta} + f, \quad D'_{\text{эм}} = \hat{D}'_{\text{эм}} + \Theta \dot{f}, \quad \dot{f} = \delta_V f + \delta_D f. \end{gathered} \tag{1.127}$$

Подстановка (1.127) в уравнения импульса (1.86), энергии (1.114), электродинамики (1.78) с использованием тех же уравнений, что и выше, приводит к той же системе уравнений, что и функционал $\hat{\Phi}$. Из

(1.82), (1.87) видно, что не изменятся и граничные условия. То же относится и к начальным условиям. Будет удовлетворяться и неравенство (1.112), если, скажем, $\dot{f} \geq 0$.

Для изотермического случая $\Theta = \Theta_0$ функционалы $\Phi_1 = \hat{\Phi}$ и $\Phi_2 = \hat{\Phi} - \overset{\infty}{\underset{s=0}{f}}\left(V_{ij}^t(s),\, D_j^t(s)\right)$ приводят к одним и тем же выражениям для $\tilde{t}_{ij}$, E_j

$$\tilde{t}_{ij} = \partial_{V_{ij}} \hat{\Phi}, \qquad E_j = \partial_{D_j} \hat{\Phi}, \tag{1.128}$$

но различным скоростям диссипации

$$D'_{\text{эм}_1} = -\delta_V \hat{\Phi} - \delta_D \hat{\Phi} \geq 0, \quad D'_{\text{эм}_2} = -\delta_V \hat{\Phi} - \delta_D \hat{\Phi} + \dot{f}, \tag{1.129}$$

которые отличаются произвольным функционалом $\dot{f}$ прошлых историй, удовлетворяющим неравенству

$$\dot{f} \geq \delta_V \hat{\Phi} + \delta_D \hat{\Phi}. \tag{1.130}$$

Эту неоднозначность в определении диссипации можно устранить, задав выражение для скорости диссипации [43, 214].

Из сказанного выше следует, что в общем случае невозможно определить диссипацию по известным уравнениям для $\tilde{t}_{ij}$ и E_j, скажем, найденным в результате экспериментов. Эти уравнения и уравнение для скорости диссипации $D'_{\text{эм}}$ характеризуют различные стороны поведения материала и поэтому должны определяться или задаваться независимо [44, 138].

Назовём вязкоупругие диэлектрические материалы, позволяющие для некоторого типа историй выразить диссипативные параметры через механические и электрические, электромеханически детерминированными (ЭМД) относительно данного типа историй по аналогии с механически детерминированными вязкоупругими материалами в термомеханике [77]. Соответственно, материалы, детерминированные относительно произвольных достаточно гладких историй, назовём абсолютно электромеханически детерминированными (АЭМД). К числу АЭМД-материалов принадлежат, например, материалы, описываемые рассмотренной выше главной теорией.

Понятно, что в основе механической или электромеханической детерминированности всегда лежат некоторые ограничения на структуру теории, подобно, скажем, ограничениям, накладываемым на общую нелинейную теорию при построении главной теории [45, 58]. Анализ такого рода ограничений для некоторых известных теорий вязкоупругости проведен в работе [77].

Мы же отметим только электромеханическую детерминированность в среднем за период произвольной вязкоупругой диэлектрической среды относительно изотермических циклических процессов, понимая под последними процессы, при которых истории электромеханических величин являются периодическими функциями времени с общим периодом T. Действительно, переписав выражение для скорости диссипации в виде

$$D'_{\text{эм}} = \tilde{t}_{ij}\dot{V}_{ij} + E_j\dot{D}_j - \rho_R\eta\dot{\Theta} - \dot{\Phi} \tag{1.131}$$

и усредняя (1.131) за период с учетом $\Theta = const$, получаем

$$< D'_{\text{эм}} >=< \tilde{t}_{ij}\dot{V}_{ij} + E_j\dot{D}_j >, \tag{1.132}$$

где введено обозначение

$$< (\cdot) >= \frac{1}{T}\int\limits_0^T (\cdot)dt. \tag{1.133}$$

Для динамической теории

$$< D'_{\text{эм}} >=< t_{ij}\dot{V}_{ij} + E'_j\dot{P}_j > . \tag{1.134}$$

§ 4. Соотношения инфинитезимальной теории термоэлектровязкоупругости пьезоэлектрических тел

Начиная с этого параграфа, предметом рассмотрения будут пьезоэлектрические материалы как класс ненамагничивающихся диэлектриков, для которых связанность механических и электрических полей особенно ощутима, в частности, пьезокерамические материалы, наличие вязкоупругих свойств у которых подтверждается экспериментально [136, 169]. Актуальность рассматриваемых вопросов применительно к полимерным пьезоматериалам [45] неоспорима.

Важнейшей технологической операцией изготовления пьезокерамики является поляризация в сильном электрическом поле [173], сопровождающаяся, как правило, небольшим удлинением поляризующегося тела в направлении этого поля и возникновением начальных напряжений, обусловленных неоднородностью поляризации и ослабевающих затем в процессе старения пьезокерамики [20]. Поляризация материала, возникшая при наложении сильного поля, остаётся и после его снятия. В то же время электрическое поле, которое первоначально сохраняется как внутри тела так и вне его, со временем компенсируется электрическими зарядами из окружающей среды и исчезает. В результате остаточной поляризации материал становится пьезоактивным при наложении слабых электромеханических полей.

В принципе, состояние с остаточными поляризацией и деформациями, возникающее вследствие наложения сильного электрического поля, можно рассчитать, используя соотношения предыдущих параграфов. В дальнейшем это состояние может быть использовано в качестве начального при построении как линейной, так и различной степени сложности нелинейных теорий наложения слабых термоэлектромеханических полей на установившееся конечное [51, 58, 130]. В монографии [58] описана квадратичная теория наложения и вытекающая из неё линейная теория, из которой, в частности следует, что первоначально изотропная керамическая среда после поляризации в сильном поле становится трансверсально-изотропной с плоскостью изотропии, перпендикулярной направлению поляризующего поля, и характеристиками, зависящими от остаточных поляризации и деформаций.

В дальнейшем, говоря о пьезокерамическом материале, всегда будем подразумевать материал, прошедший после предварительной поляризации и до момента первого нагружения процесс естественного старения. Состояние материала вследствие старения, характеризующееся относительной стабильностью свойств во времени, назовём естественным. Считаем, что в естественном состоянии в материале отсутствуют деформации, напряжения и электрическое поле. Все изменения в свойствах материала при его последующих электромеханических и тепловых нагружениях измеряются по отношению к свойствам естественного состояния. Другими словами, материал начинает помнить о своем прошлом с момента первого возмущения его естественного состояния.

Известно, что поляризованные керамики (пьезокерамики) являются хрупкими материалами. Их разрушение происходит при достаточно малых относительных деформациях, редко превышающих 1/1000 [173]. Это позволяет с высокой степенью точности описывать кинематику пьезокерамической среды линейным тензором деформаций.

В связи со сказанным, считаем деформации бесконечно малыми.

Кроме того, предполагаем, что скорости изменения связанных электрического и механического полей малы по сравнению со скоростью света настолько, что можно пренебречь магнитным полем, обусловленным переменным электрическим полем, и использовать квазистатическое приближение для электрического поля [11]. Оценка точности такого приближения приведена, например, в работе [27].

Вследствие первого предположения не делаем различия между отсчетной и актуальной конфигурациями, полагая

$$\begin{gathered}\rho_{R} = \rho; \quad h_{R_j} = h_j; \qquad V_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \\ \mathcal{P}_i = P_i; \quad \mathcal{D}_i = D_i; \quad \mathcal{E}_i = E_i.\end{gathered} \tag{1.135}$$

В силу второго предположения, связанного с ограничением на скорости, исходим из соотношений квазидинамической теории, в которых положим

$$\tilde{t}_{ij} = T_{ij} + D_i E_j - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_k E_k \delta_{ij} = \sigma_{ij} \tag{1.136}$$

и опустим все слагаемые, содержащие магнитные переменные.

В результате упрощений получаем:

уравнения сохранения импульса (уравнения движения)

$$\sigma_{ij,i} + \rho b_j = \rho\, \ddot{u}_j; \tag{1.137}$$

уравнения электростатики

$$D_{j,j} = 0, \qquad E_j = -\varphi_{,j}, \tag{1.138}$$

где φ – электрический потенциал, введение которого позволяет автоматически удовлетворить второму из уравнений (1.78) $\quad (\dot{B}_i = 0)$;

первый и второй законы термодинамики

$$\begin{gathered}\dot{u} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + E_j \dot{D}_j - h_{j,j} + \Phi_h, \\ \rho\Theta\dot{\eta} + h_{j,j} - \frac{h_j \Theta_{,j}}{\Theta} - \Phi_h \geq 0,\end{gathered} \tag{1.139}$$

где $u = \rho U + \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_k E_k$ – полная энергия в единице объёма.

Вводя свободную энергию $\Phi = u - \rho\Theta\eta$ и исключая из (1.139) Φ_h (или сразу же из (1.93)), получаем приведенное диссипативное неравенство

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + E_j\dot{D}_j - \rho\eta\dot{\Theta} - \dot{\Phi} - \frac{1}{\Theta}h_j\Theta_{,j} \geq 0, \tag{1.140}$$

которое будет удовлетворяться, если потребовать выполнения обобщенного неравенства Планка и неравенства Фурье [163]

$$-\dot{\Phi} - \rho\eta\dot{\Theta} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + E_j\dot{D}_j = D'_{\text{эм}} \geq 0, \tag{1.141}$$

$$h_j\Theta_{,j} \leq 0. \tag{1.142}$$

Первый закон термодинамики перепишем в виде

$$\rho c_{T}\dot{\Theta} = -h_{j,j} + D'_{\text{эм}} + \Phi_h + Y_0 \quad \Big(Y_0 = \rho(\, c_{T}\dot{\Theta} - \Theta\dot{\eta}\,)\Big)\,, \tag{1.143}$$

где c_{T} – удельная теплоёмкость на единицу массы.

Представленная в §3 структура определяющих уравнений остаётся в силе с учетом замены $\tilde{t}_{ij} \to \sigma_{ij}$, $V_{ij} \to \varepsilon_{ij}$:

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = \partial_{\varepsilon_{ij}}\Phi, \quad E_j = \partial_{D_j}\Phi, \quad \rho\eta = -\partial_{\Theta}\Phi, \\ D'_{\text{эм}} = -\delta_{\varepsilon}\Phi - \delta_{D}\Phi - \delta_{\Theta}\Phi. \end{gathered} \tag{1.144}$$

Вид функционалов для σ_{ij}, E_j, $\rho\eta$ конкретизируется выбором независящего от градиента температуры скалярного функционала Φ, удовлетворяющего неравенству

$$-\delta_{\varepsilon}\Phi - \delta_{D}\Phi - \delta_{\Theta}\Phi \geq 0. \tag{1.145}$$

Аналогичные соотношения можно записать для других наборов независимых переменных. Из (1.119), (1.120), например, будем иметь

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = \partial_{\varepsilon_{ij}}\Phi, \quad D_j = -\partial_{E_j}\Phi, \quad \rho\eta = -\partial_{\Theta}\Phi, \\ D'_{\text{эм}} = -\delta_{\varepsilon}\Phi - \delta_{E}\Phi - \delta_{\Theta}\Phi, \end{gathered} \tag{1.146}$$

где величина Φ, определяемая равенством (1.117), представляет собой функционал прошлых историй и функцию текущих значений величин ε_{ij}, E_j, Θ.

В дальнейшем ограничимся частным случаем уравнения состояния для теплового потока в форме закона Фурье

$$h_i = -\lambda_{ij}\Theta_{,j}, \tag{1.147}$$

где $\lambda_{ij}\text{x}_i\text{x}_j \geq 0$ для произвольных x_j $(i, j = 1, 2, 3)$. Тогда неравенство (1.142) удовлетворяется автоматически.

Вектор электрической поляризации находится по формуле

$$P_j = D_j - \varepsilon_0 E_j. \tag{1.148}$$

На поверхностях разрыва и, в частности, на границе тела должны выполняться равенства

$$\begin{gathered} \|\sigma_{ij}\|\, n_i = 0; \quad \|D_j\|\, n_j = \sigma_{пов}; \quad \varepsilon_{ijk} n_j \,\|E_k\| = 0; \\ \|h_j\|\, n_j = 0, \end{gathered} \tag{1.149}$$

использование которых предполагает известным решение уравнений Максвелла для внешней среды. Под внешней средой подразумевается диэлектрическая среда, например, воздух. Электрическое поле во внешней среде будем считать квазистатическим, удовлетворяющим уравнениям (1.138). Это позволяет заменить третье из условий (1.149), выражающее непрерывность касательной составляющей вектора напряженности электрического поля, условием непрерывности потенциала [27]

$$\|\varphi\| = 0. \tag{1.150}$$

Если на поверхности раздела диэлектрических сред нет свободных электрических зарядов ($\sigma_{пов} = 0$), нормальная составляющая вектора электрической индукции на ней непрерывна [27]

$$\|D_j\|\, n_j = 0. \tag{1.151}$$

В каждом конкретном случае электрические граничные условия зависят от способа подвода (съема) электрической энергии к телу. Формулировки некоторых физически реализуемых граничных условий для электрических переменных даны, например, в работе [27] и будут использоваться в последующих главах.

Применительно к границе тела первое из условий (1.149) может быть переписано в виде

$$\sigma_{ij} n_i = t_j^{(\text{м})} + t_j^{(\text{э})}, \quad t_j^{(\text{э})} = D_i^{(\text{c})} n_i E_j^{(\text{c})} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_k^{(\text{c})} E_k^{(\text{c})} n_j, \tag{1.152}$$

где $t_j^{(\text{м})}$ - вектор механических усилий, а $t_j^{(\text{э})}$ – вектор, характеризующий взаимодействие с электрическим полем $E_j^{(\text{c})}$, $D_j^{(\text{c})}$ внешней среды, которое интерпретируется как внешнее поле рассеивания.

На части поверхности тела могут задаваться перемещения

$$u_j = \hat{u}_j. \tag{1.153}$$

В качестве граничного условия для теплового потока используем в дальнейшем условие конвективного теплообмена с внешней средой

$$h_i n_i = \alpha_\text{т} \left(\Theta - \Theta^{(c)} \right), \tag{1.154}$$

где $\alpha_\text{т}$ – коэффициент теплоотдачи на поверхности тела, $\Theta^{(\text{c})}$ – температура внешней среды.

К приведенным выше граничным условиям необходимо добавить начальные условия для механических переменных и температуры

$$u_j\big|_{t=t_0} = \overset{\circ}{u}_j, \quad \dot{u}_j\big|_{t=t_0} = \overset{\circ}{v}_j, \quad \Theta\big|_{t=t_0} = \overset{\circ}{\Theta}\,. \tag{1.155}$$

Начальные условия для электрических переменных в рамках электростатического приближения уравнений Максвелла, как в нашем случае, не ставятся [27], что соответствует предположению о мгновенном изменении электрического поля.

Представленные выше уравнения движения (импульса) (1.137), электростатики (1.138), энергии (1.143), соотношения Коши в (1.135), определяющие уравнения (1.144) или (1.146), уравнение для теплового потока (1.147), граничные условия (1.149) – (1.154), начальные условия (1.155) образуют замкнутую систему уравнений для определения связанных электромеханических и тепловых полей при условии, что для внешней среды известны решения уравнений электростатики (1.138). Если рассеиванием энергии во внешнюю среду пренебречь, что, в частности, можно сделать, если диэлектрическая проницаемость последней существенно ниже диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика

[27], то система перечисленных выше уравнений замыкается только на внутреннем объёме тела. В этом случае второе из условий (1.149) и его частный вид (1.151) заменяются приближенными равенствами [27]

$$D_j n_j \approx -\sigma_{пов}, \qquad D_j n_j \approx 0, \tag{1.156}$$

где D_j – электрическая индукция в пьезоэлектрике, а вектор $t_j^{(э)}$ в граничном условии (1.152) отбрасывается.

Оценка электромагнитных полей рассеивания для акустической области колебаний пьезокерамических тел дана в работах [36, 168].

§ 5. Приближённая постановка задачи термоэлектровязкоупругости при циклических электромеханических процессах

Наличие внутренних потерь и диссипации в неупругих телах приводит при внешнем моногармоническом нагружении к быстрому затуханию высших гармоник и установлению для всех точек объёма тела режима колебаний, близкого к одночастотному режиму с частотой, равной частоте нагружения ω. Сказанное, естественно, относится и к неупругим пьезоэлектрическим телам. Отметим, что случаи суб- и супергармонических резонансов нами не рассматриваются.

5.1 Прежде чем перейти к изложению материала даного параграфа, остановимся, следуя работе [85], на простейшей модельной задаче о вынужденных продольных колебаниях пассивного (непьезоактивного) вязкоупругого стержня и на её примере оценим степень точности, с которой выдерживается одночастотный режим колебаний, в частности, резонансный режим.

Воспользуемся интегральной формой уравнения состояния с кубической характеристикой мгновенной упругости и простейшим ядром в виде экспоненты. Будем учитывать зависимость свойств материала от температуры, повышающейся вследствие диссипативного разогрева. Колебания и диссипативный разогрев исследуем в окрестности частоты основного линейного резонанса стержня с учетом третьей гармоники. Проведём сравнение результатов с результатами, получаемыми в рамках одночастотного приближения колебаний.

При решении задач воспользуемся итерационным численным алгоритмом, базирующимся на методах квазилинеаризации [129] и дискретной ортогонализации [22].

Постановка задачи и алгоритм решения. Исходными механическими уравнениями модели являются уравнения движения, Коши и состояния

$$\frac{d\sigma}{dx} = \rho\ddot{u};\;\; \varepsilon = \frac{du}{dx};\;\; \varepsilon = S(1+\alpha\sigma^2)\cdot\sigma + \int\limits_0^\infty K(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau. \qquad (1.157)$$

Здесь σ, ε – механическое напряжение и деформация; u – перемещение; α – коэффициент нелинейности; ρ, S, $K(\tau)$ – характеристики материала.

Далее рассматриваются только стационарные колебания. В соответствии со сказанным выше величины u, σ, ε представляются в виде

$$q = q_1' \cos\omega t - q_1'' \sin\omega t + q_3' \cos 3\omega t - q_3'' \sin 3\omega t. \qquad (1.158)$$

Применяя к уравнениям (1.157) обычную процедуру гармонического баланса с учетом представлений (1.158) и вводя обозначения

$$\begin{array}{llll} y_1 = u_1'; & y_2 = u_1''; & y_3 = \sigma_1'; & y_4 = \sigma_1''; \\ y_5 = u_3'; & y_6 = u_3''; & y_7 = \sigma_3'; & y_8 = \sigma_3'', \end{array} \qquad (1.159)$$

сводим решение уравнений (1.157) к решению нелинейной системы восьми обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, ..., y_8, \omega, T) \;\; (i = 1 \div 8). \qquad (1.160)$$

Здесь учтено, что механические свойства материала являются функциями температуры T, под которой понимается температура диссипативного разогрева, усредненная за период $2\pi/\omega$ и по поперечному сечению стержня. Уравнение для ее нахождения в случае стационарных колебаний можно представить в виде системы

$$\frac{dT}{dx} = T_1;\;\; \frac{dT_1}{dx} = \frac{\alpha_{\text{т}} P}{\lambda F}\cdot(T - T_{\text{с}}) - \frac{1}{\lambda}D', \qquad (1.161)$$

где

$$D' = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega} \sigma\dot{\varepsilon}dt = \frac{\omega}{2}\left[K_{1S}\left({\sigma_1'}^2 + {\sigma_1''}^2\right) + 3K_{3S}\left({\sigma_3'}^2 + {\sigma_3''}^2\right)\right] \qquad (1.162)$$

– средняя за период $2\pi/\omega$ мощность диссипации; $K_{1S} = \int\limits_0^\infty K(z)\sin\omega z dz$, $K_{3S} = \int\limits_0^\infty K(z)\sin 3\omega z dz$; P, F – периметр и площадь поперечного сечения стержня; $\alpha_{\text{т}}$ – коэффициент теплоотдачи; $T_{\text{с}}$ – температура окружающей среды; λ – коэффициент теплопроводности.

Объединяя (1.160), (1.161) с учетом (1.162), получаем замкнутую нелинейную систему из десяти обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций y_i, T и T_1, для однозначного решения которой необходимо использовать те или иные механические и тепловые граничные условия, например:

$$\begin{aligned} &x = 0: \;\; u_1' = A_0; \;\; u_1'' = u_3' = u_3'' = 0; \;\; \lambda T_1 = \alpha_{\text{т}}(T - T_{\text{с}}), \\ &x = l: \;\; \sigma_1' = \sigma_1'' = \sigma_3' = \sigma_3'' = 0; \;\; \lambda T_1 = -\alpha_{\text{т}}(T - T_{\text{с}}), \end{aligned} \tag{1.163}$$

соответствующие гармоническому возбуждению колебаний стержня с заданной амплитудой перемещения A_0 на его левом конце $x = 0$ и при свободном правом конце $x = l$, а также при условии конвективного теплообмена с окружающей средой.

Применяя к (1.160), (1.161), (1.162) процедуру квазилинеаризации [129], сводим задачу к итерационной схеме решения системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\overset{n+1}{y_i}}{dx} = \sum_{j=1}^{10} \overset{n}{a}_{ij} \cdot \overset{n+1}{y_i} + \overset{n}{b}_i \quad (i = 1 \div 10,\; n = 0, 1, 2, ...), \tag{1.164}$$

где $y_9 = T$, $y_{10} = T_1$. Граничные условия (1.163) для каждой итерации перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} &\overset{n+1}{y_1}(0) = A_0; \;\; \overset{n+1}{y_2}(0) = \overset{n+1}{y_5}(0) = \overset{n+1}{y_6}(0) = 0; \\ &\lambda \overset{n+1}{y_{10}}(0) = \alpha_{\text{т}}\left(\overset{n+1}{y_9}(0) - T_{\text{с}}\right); \\ &\overset{n+1}{y_3}(l) = \overset{n+1}{y_4}(l) = \overset{n+1}{y_7}(l) = \overset{n+1}{y_8}(l) = 0; \\ &\lambda \overset{n+1}{y_{10}}(l) = -\alpha_{\text{т}}\left(\overset{n+1}{y_9}(l) - T_{\text{с}}\right). \end{aligned} \tag{1.165}$$

Соотношения для коэффициентов $\overset{n}{a}_{ij}$ и $\overset{n}{b}_i$ системы (1.164) из-за громоздкости не приводим. Отметим только, что ненулевые из этих коэффициентов определяются по решениям предыдущего приближения. На первой итерации решается задача для физически линейного материала, когда в (1.157) $\alpha = 0$.

При численном решении краевой задачи (1.164), (1.165) методом дискретной ортогонализации использовались стандартные программы из работы [24].

В случае одночастотного приближения колебаний в (1.158) необходимо положить $q_3' = q_3'' = 0$ и провести соответствующие упрощения в остальных соотношениях. В результате количество уравнений в (1.164) сокращается до шести.

Исходные данные и результаты расчетов. Мгновенная механическая податливость S и ядро K из (1.157) выбирались в виде

$$S = S_0(1+\beta_1 T),\ \ K(\tau, T) = K_0(\tau)(1+\beta_2 T),\ \ K_0(\tau) = Ce^{-a\tau}.$$

В расчетах принималось, что $C = \dfrac{1}{\eta_0}$, $a = \dfrac{1}{\eta_0 S_0}$.

В предположении линейности и изотермичности свойств материала выбор ядра в виде экспоненты равносилен, как известно, использованию модели вязкоупругого тела Кельвина. Параметр η_0 в этом случае характеризует вязкость и связан с тангенсом угла механических потерь δ_0 приближенным равенством $\eta_0 = \dfrac{2\delta_0}{\omega \cdot S_0}$ при условии, что $\delta_0^2 << 1$.

Учет температурной зависимости свойств проводился в предположении, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Последнее равенство при одночастотном описании колебаний соответствует известному в литературе [77] случаю, когда тангенс угла механических потерь с ростом температуры не изменяется.

Введем безразмерную частоту $\Omega = \omega l \sqrt{S_0 \rho}$ и величины

$$\begin{gathered} \bar{u} = (< u^2(x,t) >)^{0,5};\ \ \bar{\sigma} = (< \sigma^2(x,t) >)^{0,5}; \\ \bar{p} = < \sigma(x,t)\dot{u}(x,t) >, \end{gathered} \tag{1.166}$$

где $< (\bullet) > = \dfrac{\omega}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi/\omega} (\bullet) dt$.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\rho = 7,5 \cdot 10^3$кг/м^3; $\lambda = 45,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$; $\alpha_{\text{т}} = 14 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$; $l = 0,1$м; $F = 10^{-4}$м^2; $P = 0,04$м; $T_{\text{с}} = 20°C$; $S_0 = 1,5 \cdot 10^{-11}$Па$^{-1}$.

Рис. 1.1. Рис. 1.2.

На рис. 1.1 представлены частотные зависимости максимального напряжения $\bar{\sigma}$ (на левом конце стержня) для трех значений параметра η_0 из табл. 1.1 (кривые 1, 2, 3 соответственно).

Штриховые кривые отвечают случаю линейного материала ($\alpha = 0$), сплошные – случаю нелинейного материала с коэффициентом нелинейности $\alpha = 10^{-16}$Па$^{-2}$. При этом кривые $1''$, $2''$, $3''$ построены в рамках одночастотного приближения колебаний, а кривые $1'''$, $2'''$, $3'''$ – с учетом третьей гармоники. Амплитуда нагружения A_0 выбиралась из условия, что величина A_0/η_0 остается постоянной $\left(A_0/\eta_0 = 0,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{м}}{\text{Па}\cdot\text{с}}\right)$.

Таблица 1.1.

η_0, Па $\cdot\, c$	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$
u_3/u_1	0,04	0,02	0,01
σ_3/σ_1	0,12	0,06	0,03

В табл. 1.1 для разных значений параметра η_0 приведены максимальные отношения амплитуд перемещений на свободном конце стержня и напряжений – на нагруженном конце в диапазоне частот из рис. 1.1.

На рис. 1.2 показаны частотные характеристики напряжения $\bar{\sigma}$ при $A_0 = 1$мкм, $\eta_0 = 5 \cdot 10^4$Па $\cdot\, c$ и параметрах нелинейности $\alpha = 5\times$ $\times 10^{-17}$ Па$^{-2}$ (кривые $1'', 1'''$) и $\alpha = 10^{-16}$Па$^{-2}$ (кривые $2''$, $2'''$). Кривая $1'$ построена для случая линейного материала ($\alpha = 0$).

В табл. 1.2 для параметров $\alpha = 10^{-16}$Па$^{-2}$, $\eta_0 = 2 \cdot 10^5$Па $\cdot\, c$, $S_0 = 0,625 \cdot 10^{-11}$Па$^{-1}$, $A_0 = 1$мкм представлены значения величин (1.166) и диссипативной функции (1.162) в некоторых точках вдоль длины стержня, полученные как с учетом, так и без учета третьей гармоники на частоте максимального различия этих значений ($\Omega = 1,076$). Для сравнения в табл. 1.3 представлены значения величин $\bar{u}$ на правом и величин $\bar{\sigma}$, D', $\bar{p}$ на левом концах стержня на частоте линейного резонанса $\Omega = 1,11$.

Кривые на рис. 1.1, 1.2 и числовые значения величин в таблицах 1.1–1.3 получены в предположении, что свойства материала от температуры не зависят ($\beta = 0$). На рис. 1.3 показаны частотные характеристики на-

Таблица 1.2.

$x \cdot 10$м	$\bar{u}$, мкм		$\bar{\sigma}$, МПа		$D' \cdot 10^{-5}$, Вт/м^3		$\bar{p} \cdot 10^{-4}$, Вт	
	*[1]	**[2]	*	**	*	**	*	**
0,0	1,00	1,00	49,57	51,06	247,49	250,59	12,28	12,49
0,1	6,76	6,83	48,92	50,44	239,09	244,61	9,83	10,00
0,2	13,23	13,56	47,02	48,56	216,70	226,65	7,55	7,63
0,3	19,34	19,91	43,95	45,46	186,58	198,58	5,53	5,51
0,4	24,90	25,71	39,86	41,22	154,39	163,30	3,82	3,69
0,5	29,79	30,81	34,87	35,97	122,41	124,37	2,44	2,25
0,6	33,91	35,09	29,06	29,86	90,321	85,67	1,37	1,20
0,7	37,19	38,49	22,53	23,02	58,212	50,96	0,63	0,53
0,8	39,56	40,94	15,40	15,66	28,92	23,56	0,20	0,16
0,9	41,00	42,42	7,82	7,91	7,77	6,03	0,02	0,02
1,0	41,50	42,90	0	0	0	0	0	0

[1] С учетом третьей гармоники

[2] Без учета третьей гармоники

Таблица 1.3.

		$\bar{u}$, мкм	$\bar{\sigma}$, МПа	$D' \cdot 10^{-5}$, Вт/м^3	$\bar{p} \cdot 10^{-4}$, Вт
$\Omega = 1.11$	*[1]	24,26	30,51	97,69	4,97
	**[2]	24,24	30,47	96,63	4,92
$\Omega = 1.076$	*	41,50	49,57	247,49	12,28
	**	42,90	51,06	250,59	12,49

[1] С учетом третьей гармоники

[2] Без учета третьей гармоники

пряжения $\bar{\sigma}$ при $\alpha = 10^{-16}$Па$^{-2}$, $\eta_0 = 2 \cdot 10^5$ Па$\cdot c$, $S_0 = 0,625 \cdot 10^{-11}$Па$^{-1}$ и значениях параметра $\beta = 0$ (кривые $1, 1'$), $\beta = 10^{-3}$град$^{-1}$ (кривые $2, 2'$) и $\beta = 3 \cdot 10^{-3}$град$^{-1}$ (кривые $3, 3'$). Кривые $1, 2, 3$ соответствуют одночастотному приближению колебаний, тогда как кривые $1', 2', 3'$ рассчитаны с учетом третьей гармоники.

Рис. 1.3.

Анализ полученных результатов позволяет заключить, что одночастотное приближение колебаний приводит к некоторому затягиванию верхних ветвей частотных характеристик в области их неоднозначности. С увеличением уровня нелинейности это затягивание усиливается (рис. 1.2). Для материала с бо́льшей вязкостью отмеченное затягивание становится менее заметным, а при достаточно большой вязкости может произойти вырождение областей неоднозначности частотных характеристик (кривые $3'', 3'''$ на рис. 1.1). В целом, с увеличением вязкости влияние третьей гармоники ослабевает, о чем свидетельствуют также данные табл. 1.1.

До предельной частоты, с которой начинается отмеченное выше затягивание характеристики одночастотного приближения, одночастотный режим выдерживается с достаточно высокой степенью точности. По крайней мере, влиянием третьей гармоники всегда можно пренебречь, если интересоваться только областью однозначности решений.

Температурная зависимость свойств материала в силу исследуемого вида этой зависимости практически не сказывается на соотношении результатов, получаемых в рамках одночастотного приближения и с учетом третьей гармоники, поскольку не влияет на уровень механических потерь.

Возможность моногармонического приближения для существенно нелинейных материалов,термомеханическое поведение которых описывается обобщенными моделями течения, исследована в работах [143 – 147]. Результаты этих исследований обсуждаются в обзоре [221].

5.2 Обратимся снова к пьезоэлектрическим телам и будем считать, что функции внешнего электромеханического воздействия являются суммами медленных и осциллирующих составляющих. Под "медленной" понимается величина, характерное время изменения которой велико по сравнению с периодом колебаний. Осциллирующие составляющие имеют общую частоту ω и медленные амплитуды. Представим функции внешнего электромеханического воздействия в виде

$$
\begin{gathered}
F(\vec{x}, t) = \{\hat{\varphi}; \hat{\sigma}_{пов}; \hat{u}_j;\ t_j^{(м)}; b_j\} = \overline{F}(\vec{x}, t) + \tilde{F}(\vec{x}, t), \\
\tilde{F}(\vec{x}, t) = F^{'}(\vec{x}, t) \cos \omega t - F^{''}(\vec{x}, t) sin\omega t.
\end{gathered}
\tag{1.167}
$$

Здесь $\hat{\varphi}$, $\hat{\sigma}_{пов}$, $\hat{u}_j$, $t_j^{(м)}$ – заданные на соответствующих частях границы тела значения электрического потенциала, заряда, перемещений и механических усилий; b_j – массовая сила.

В соответствии со сказанным выше, считаем, что такой же вид в первом приближении имеют все электромеханические переменные в объёме тела:

$$
\begin{gathered}
f_1(\vec{x}, t) = \{\sigma_{ij}; \varepsilon_{ij}; D_j; E_j; u_j; \varphi\} = \overline{f_1}\,(\vec{x}, t) + \tilde{f}_1\,(\vec{x}, t)\,, \\
\tilde{f}_1(\vec{x}, t) = f_1^{'}(\vec{x}, t) \cos \omega t - f_1^{''}(\vec{x}, t) \sin \omega t.
\end{gathered}
\tag{1.168}
$$

Внешние тепловые воздействия, в частности источник тепла Φ_h, предполагаются медленными. Колебаниями температуры за период, имеющими термоупругую природу, пренебрегается [77]. Изменения температуры за период колебаний, вызванные диссипацией энергии, обычно незначительны [77]. Поэтому саму температуру, а также тепловой поток и градиент температуры считаем медленными функциями

$$
f_2\,(\vec{x}, t) = \{\Phi_h; \Theta; h_j; \Theta_{,j}\} = \overline{f_2}\,(\vec{x}, t)\,. \tag{1.169}
$$

В (1.167) – (1.169) величины $\overline{F}(\vec{x}, t)$, $F^{','' }(\vec{x}, t)$, $\overline{f}_1(\vec{x}, t)$, $f_1^{','' }(\vec{x}, t)$, $\overline{f}_2(\vec{x}, t)$ являются медленными.

Будем считать, что для медленных движений выполняются приближенные равенства

$$
\dot{\overline{u}}_j \approx 0, \qquad \ddot{\overline{u}}_j \approx 0, \qquad \dot{\overline{D}}_j \approx 0. \tag{1.170}
$$

С физической точки зрения это означает, что вязкими, инерционными эффектами и токами смещения при медленных движениях пренебрегается.

Дифференцируя осциллирующие составляющие в (1.168), получаем

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{f}}_1 &= \dot{f}_1' \cos\omega t - \dot{f}_1'' \sin\omega t - \omega(f_1' \sin\omega t + f_1'' \cos\omega t);\\ \ddot{\tilde{f}}_1 &= -2\omega(\dot{f}_1' \sin\omega t + \dot{f}_1'' \cos\omega t)-\\ &\qquad -\omega^2(f_1' \cos\omega t - f_1'' \sin\omega t).\end{aligned} \tag{1.171}$$

При нахождении второй производной ввиду медленности амплитуд $f_1^{','' }$ отброшено слагаемое $\ddot{f}_1' \cos\omega t - \ddot{f}_1'' \sin\omega t$, как имеющее второй порядок малости [58].

Подставляя величины (1.168) с учетом (1.171), (1.170) в уравнения движения (1.137), уравнения электростатики (1.138), соотношения Коши (1.135), соотношения (1.150), (1.152) – (1.154), служащие для определения граничных условий, в начальные условия (1.155) и следуя обычной процедуре усреднения [14, 97], приходим к системе уравнений для усредненных за период колебаний медленно изменяющихся амплитуд осциллирующих составляющих электромеханического поля, которая в тех же обозначениях, что и в (1.167), (1.168), имеет вид

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,i}' + \rho\omega^2 u_j' + \rho b_j' = -2\rho\omega\dot{u}_j'', \quad \sigma_{ij,i}'' + \rho\omega^2 u_j'' + \rho b_j'' = -2\rho\omega\dot{u}_j';\\ D_{j,j}' = 0, \quad D_{j,j}'' = 0; \qquad E_j' = -\varphi_{,j}', \quad E_j'' = -\varphi_{,j}'';\\ \varepsilon_{ij}' = \frac{1}{2}(u_{i,j}' + u_{j,i}'), \qquad \varepsilon_{ij}'' = \frac{1}{2}(u_{i,j}'' + u_{j,i}'').\end{gathered} \tag{1.172}$$

Для граничных условий на поверхности тела S получаем

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}' n_i = t_j^{'(\text{м})}, \quad \sigma_{ij}'' n_i = t_j^{''(\text{м})} \text{ – на } S_\sigma;\\ u_j' = \hat{u}_j', \quad u_j'' = \hat{u}_j'' \text{ – на } S_u \quad (S = S_\sigma \cup S_u);\\ D_j' n_j = -\hat{\sigma}_{пов}', \quad D_j'' n_j = -\hat{\sigma}_{пов}'' \text{ – на } S_D;\\ \varphi' = \hat{\varphi}', \qquad \varphi'' = \hat{\varphi}'' \text{ – на } S_\varphi \quad (S = S_D \cup S_\varphi).\end{gathered} \tag{1.173}$$

Усредненные за период колебаний медленные составляющие электромеханического и теплового полей удовлетворяют системе уравнений

$$\bar{\sigma}_{ij,i} + \rho\bar{b}_j = 0; \;\; \bar{D}_{j,j} = 0; \;\; \bar{E}_j = -\bar{\varphi}_{,j}; \;\; \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}); \tag{1.174}$$

$$\rho c_{\text{т}}\dot{\bar{\Theta}} = -\bar{h}_{i,i} + \bar{D}' + \bar{\Phi}_h, \qquad \bar{h}_i = -\lambda_{ij}\bar{\Theta}_{,j} \tag{1.175}$$

и граничным условиям

$$\begin{gathered} \bar{\sigma}_{ij}n_i = \bar{t}_j^{(\text{м})} \text{ – на } S_\sigma; \qquad \bar{u}_j = \bar{\hat{u}}_j \text{ – на } S_u; \\ \bar{D}_j = -\bar{\hat{\sigma}}_{пов} \text{ – на } S_D; \qquad \bar{\varphi} = \bar{\hat{\varphi}} \text{ – на } S_\varphi; \end{gathered} \tag{1.176}$$

$$\bar{h}_i n_i = \alpha(\bar{\Theta} - \Theta^{(c)}) \text{ – на } S. \tag{1.177}$$

Поскольку величина Y_0 в уравнении энергии (1.143) характеризует термоупругие тепловые эффекты, а их вкладом в приращение температуры за период мы пренебрегаем, то усредненное значение этой величины в уравнении энергии (1.175) опущено [77].

Начальные условия принимают вид

$$\begin{gathered} u_j'(\vec{x}, t_0) + \bar{u}_j(\vec{x}, t_0) = \overset{\circ}{u}_j(\vec{x}); \quad u_j''(\vec{x}, t_0) = -\frac{\overset{\circ}{v}_j(\vec{x})}{\omega}; \\ \bar{\Theta}(\vec{x}, t_0) = \overset{\circ}{\Theta}(\vec{x}). \end{gathered} \tag{1.178}$$

В проведенных выше рассуждениях не задействованными оказались определяющие уравнения. Представим их в виде

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\sigma_{ij}}}(;), \quad E_j = \underset{s=0}{\overset{\infty}{E_j}}(;), \quad D'_{эм} = \underset{s=0}{\overset{\infty}{D'_{эм}}}(;), \\ (;) = (\varepsilon_{ij}^t(s), D_j^t(s), \Theta^t(s); \varepsilon_{ij}(t), D_j(t), \Theta(t)). \end{gathered} \tag{1.179}$$

Функционалы в правых частях (1.179) связаны с определяющим поведение материала скалярным функционалом соотношениями (1.144).

Схема усреднения функционалов при получении укороченных систем уравнений первого приближения обсуждается в работах [77, 97]. Применительно к величинам (1.168), (1.169) эта схема, согласно [77], приводит к следующим определяющим уравнениям:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ij}' \\ \sigma_{ij}'' \\ \bar{\sigma}_{ij} \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \underset{s=0}{\overset{\infty}{\sigma_{ij}}}(\varepsilon_{ij}^{*\tau}, D_j^{*\tau}, \bar{\Theta};\ \varepsilon_{ij}^*, D_j^*, \bar{\Theta}) \begin{pmatrix} \cos\omega\tau \\ -\sin\omega\tau \\ 1/2 \end{pmatrix} d\tau, \tag{1.180}$$

$$\begin{pmatrix} E_j^{'} \\ E_j^{''} \\ \bar{E}_j \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \overset{\infty}{\underset{s=0}{E_j}} (\varepsilon_{ij}^{*\tau}, D_j^{*\tau}, \bar{\Theta};\ \ \varepsilon_{ij}^{*}, D_j^{*}, \bar{\Theta}) \begin{pmatrix} \cos\omega\tau \\ -\sin\omega\tau \\ 1/2 \end{pmatrix} d\tau, \tag{1.181}$$

$$\bar{D}_{\text{эм}}^{'} = \frac{\omega}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \overset{\infty}{\underset{s=0}{D_{\text{эм}}^{'}}} \left(\varepsilon_{ij}^{*\tau},\, D_j^{*\tau},\, \bar{\Theta};\quad \varepsilon_{ij}^{*},\, D_j^{*},\, \bar{\Theta}\right) d\tau, \tag{1.182}$$

где

$$\begin{gathered} \varepsilon_{ij}^{*} = \bar{\varepsilon}_{ij}(t) + \varepsilon_{ij}^{'}(t)\cos\omega\tau - \varepsilon_{ij}^{''}(t)\sin\omega\tau, \\ \varepsilon_{ij}^{*\tau} = \bar{\varepsilon}_{ij}(t) + \varepsilon_{ij}^{'}(t)\cos\omega(\tau - s) - \varepsilon_{ij}^{''}(t)\sin\omega(\tau - s), \\ D_j^{*} = \bar{D}_j(t) + D_j^{'}(t)\cos\omega\tau - D_j^{''}(t)\sin\omega\tau, \\ D_j^{*\tau} = \bar{D}_j(t) + D_j^{'}(t)\cos\omega(\tau - s) - D_j^{''}(t)\sin\omega(\tau - s), \\ \bar{\Theta} = \bar{\Theta}(t), \end{gathered} \tag{1.183}$$

причем зависимость от $\vec{x}$ опущена. Из (1.180) – (1.183) видно, что в первом приближении усреднение функционалов для нашего случая связано с "замораживанием" медленных величин, т.е. представлением их в течении периода как параметров. Поэтому в первом приближении в силу равенства (1.141), а также с учетом (1.170) можно записать

$$\bar{D}_{\text{эм}}^{'} = \frac{\omega}{2}(\sigma_{ij}^{''}\varepsilon_{ij}^{'} - \sigma_{ij}^{'}\varepsilon_{ij}^{''} + E_j^{''}D_j^{'} - E_j^{'}D_j^{''}). \tag{1.184}$$

Соотношения (1.180), (1.181), (1.184) замыкают приведенную выше систему уравнений (1.172) – (1.178). Если в качестве независимых переменных в определяющих уравнениях считаются ε_{ij}, E_j, Θ, как в (1.146), то структура соответствующих амплитудных уравнений имеет тот же вид, что и (1.180), (1.181), если, конечно, заменить E_j на D_j, а D_j на E_j.

В общем случае системы уравнений (1.172) и (1.174), (1.175) связаны за счёт: 1) взаимодействия медленных и осциллирующих электромеханических полей, проявляющегося в зависимости амплитуд осциллирующих полей $\sigma_{ij}^{','''}$, $E_j^{','''}$ (или $D_j^{','''}$) не только от амплитуд $\varepsilon_{ij}^{','''}$, $D_j^{','''}$

(или $E_j^{','\,''}$), но и от медленных составляющих полей $\bar{\varepsilon}_{ij}$, $\bar{D}_j$ (или $\bar{E}_j$) и наоборот, зависимости медленных составляющих $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{E}_j$ (или $\bar{D}_j$) как от $\bar{\varepsilon}_{ij}$, $\bar{D}_j$ (или $\bar{E}_j$), так и от амплитуд осциллирующих составляющих $\varepsilon_{ij}^{','\,''}$, $D_j^{','\,''}$ (или $E_j^{','\,''}$); 2) диссипации энергии, определяемой соотношением (1.184), и зависимости свойств от температуры. Не такой простой, как в термомеханике [77], оказывается ситуация с первым начальным условием (1.178), разделить в котором вклады быстрой и медленной составляющих движения в начальное перемещение в общем случае нельзя по той простой причине, что электрические начальные условия в рамках используемой постановки задачи не ставятся. Этот вопрос требует более детального рассмотрения. В частности, указанные вклады можно разделить, если не учитывать зависимости медленных составляющих $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{E}_j$ (или $\bar{D}_j$) от амплитуд $D_j^{','\,''}$ или ($E_j^{','\,''}$) или при более сильном условии, когда взаимодействием медленных и осциллирующих электромеханических полей пренебрегается. Для этого необходимо решить дополнительную статическую задачу (1.174), (1.176) при $\bar{b}_j = \bar{b}_j(\vec{\mathrm{x}}, t_\circ^+)$, $\bar{t}_j^{(\text{м})} = \bar{t}_j^{(\text{м})}(\vec{\mathrm{x}}, t_\circ^+)$, $\bar{\hat{u}}_j = \bar{\hat{u}}_j(\vec{\mathrm{x}}, t_\circ^+)$, $\bar{\hat{\sigma}}_{пов} = \bar{\hat{\sigma}}_{пов}(\vec{\mathrm{x}}, t_\circ^+)$, $\bar{\hat{\varphi}} = \bar{\hat{\varphi}}(\vec{\mathrm{x}}, t_\circ^+)$ и с использованием условий (1.178) в определяющих уравнениях для $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{E}_j$ (или $\bar{D}_j$). По сути – это задача о начальном электротермоупругом состоянии, за которое отвечает медленная составляющая движения $\bar{u}_j(\vec{\mathrm{x}}, t_\circ)$. Вопрос о начальных условиях важен в нелинейных задачах, которые допускают неоднозначность стационарных состояний. Реализуемость того или иного состояния существенно зависит от того, в какой области притяжения находится система в момент времени $t = t_\circ$.

В упомянутом выше случае, когда взаимодействием медленных и осциллирующих составляющих полей пренебрегается, т.е. когда $\sigma_{ij}^{','\,''}$, $E_j^{','\,''}$ (или $D_j^{','\,''}$) не зависят от $\bar{\varepsilon}_{ij}$, $\bar{D}_j$ (или $\bar{E}_j$), а $\bar{\sigma}_{ij}$, $\overline{E}_j$ (или $\bar{D}_j$) – от $\varepsilon_{ij}^{','\,''}$, $D_j^{','\,''}$ (или $E_j^{','\,''}$), связь между системами уравнений (1.172) и (1.174), (1.175) осуществляется только по линии термоэлектромеханического сопряжения (ТЭМС), под которым в дальнейшем будем понимать взаимодействие из-за диссипации и зависимости свойств от температуры. В этом случае задача (1.174), (1.176) для медленных составляющих электромеханического поля (**задача 2**) отделяется от общей и решается на втором этапе с использованием температурного поля, рассчитанного в рамках амплитудно-температурной задачи (1.172), (1.173), (1.175), (1.177), (1.178) (**задача 1**). При этом, естественно, предполагается, что упомянутая ранее вспомогательная статическая задача типа (1.174), (1.176) решена и $\bar{u}_j(\vec{x},\, t_\circ)$ найдено, в результате чего начальные условия (1.178) разделены.

В ряде практически важных случаев основной интерес представляет температурное поле диссипативного разогрева. Тогда в (1.168) можно положить $\bar{f}_1(\vec{\mathrm{x}},\, t) \equiv 0$ (если, конечно, взаимодействие быстрых и медленных полей невелико) и ограничиться решением задачи 1.

Если в рамках задачи 1 не интересоваться вопросами устойчивости квазистационарных режимов колебаний, правые части в первых двух уравнениях (1.172) можно положить равными нулю. Тогда вместе со стационарным уравнением теплопроводности (в (1.175) $\dot{\bar{\Theta}} = 0$) получаем систему связанных уравнений для определения стационарных электромеханических и тепловых полей.

Последний вариант постановки задачи можно расширить, если стационарное уравнение теплопроводности заменить нестационарным (1.175) с начальным условием для температуры (1.178). Такая замена обосновывается тем, что временами переходных процессов неустановившихся электромеханических колебаний обычно можно пренебречь по сравнению со временем существенного изменения температуры [77]. В результате будем иметь известную в литературе приближённую постановку связанных задач [58, 77], позволяющую описывать переходной тепловой процесс. Ввиду исключительной важности этой постановки в дальнейшем, выпишем её основные соотношения. Уравнения электромеханики (1.172) и граничные условия (1.173) можно формально представить в комплексной форме

$$\begin{aligned} &\tilde{\sigma}_{ij,i} + \rho\omega^2 \tilde{u}_j = 0, \qquad \tilde{D}_{j,j} = 0, \\ &\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}), \qquad \tilde{E}_j = -\tilde{\varphi}_{,j}; \end{aligned} \tag{1.185}$$

$$\begin{gathered} \tilde{\sigma}_{i\,j} n_i = \tilde{t}_j^{(\text{м})} \ - \text{на } S_\sigma,\ \ \tilde{u}_j = \tilde{\hat{u}}_j \ - \text{на } S_u; \\ \tilde{D}_j n_i = -\tilde{\hat{\sigma}}_{\text{пов}} \ - \text{на } S_D,\ \ \tilde{\varphi} = \tilde{\hat{\varphi}} \ - \text{на } S_\varphi \\ (\, S = S_\sigma \cup S_u, \quad S = S_D \cup S_\varphi\,). \end{gathered} \tag{1.186}$$

Здесь и далее волной сверху обозначается комплексная величина

$$\begin{gathered} \tilde{p} = \{\tilde{\sigma}_{ij}; \tilde{u}_j; \tilde{\varepsilon}_{ij}; \tilde{D}_j; \tilde{E}_j; \tilde{\varphi}; \tilde{t}_j^{(\text{м})}; \tilde{\hat{u}}_j; \tilde{\hat{\sigma}}_{\text{пов}}; \tilde{\hat{\varphi}}\} = p' + ip'', \\ i = \sqrt{-1} - \text{мнимая единица}. \end{gathered} \tag{1.187}$$

Соотношение для средней за период скорости диссипации (1.184) (диссипативной функции), которое для периодических процессов является точным (см. (1.132)), перепишем в виде

$$\bar{D}'_{эм} = \frac{\omega}{2} Im(\tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \tilde{E}_j \bar{\tilde{D}}_j), \tag{1.188}$$

где Im – мнимая часть комплексного выражения, а $\bar{\tilde{(\cdot)}}$ – комплексно-сопряженная величина.

Добавим к приведенным выше соотношениям уравнение теплопроводности (энергии)

$$\rho c_{_T} \dot{T} = (\lambda_{ij} T_{,j})_{,i} + \bar{D}' \tag{1.189}$$

с граничным

$$-\lambda_{ij} T_{,j} n_i = \alpha(T - T^c) - \ \text{на поверхности}\, S \tag{1.190}$$

и начальным

$$T = \overset{\circ}{T} \quad \text{при} \quad t = t_\circ \tag{1.191}$$

условиями. Здесь и в дальнейшем средняя за цикл температура обозначается через T $\left(T = \bar{\Theta},\ T^c = \Theta^{(c)},\ \overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{\Theta}\right)$. Массовая сила $\vec{b}$ и тепловой источник недиссипативной природы Φ_h из дальнейшего рассмотрения исключаются.

Для замыкания системы уравнений (1.185) – (1.191) к ней необходимо присоединить определяющие уравнения для амплитуд, которые для рассматриваемого случая стационарных колебаний и с учетом обозначения (1.133) $(T = 2\pi/\omega)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma'_{ij} \\ \sigma''_{ij} \end{pmatrix} &= 2 < \overset{\infty}{\underset{s=0}{\sigma}}{}_{ij}(;) \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{pmatrix} >, \\ \begin{pmatrix} E'_j \\ E''_j \end{pmatrix} &= 2 < \overset{\infty}{\underset{s=0}{E}}{}_j(;) \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{pmatrix} >. \end{aligned} \tag{1.192}$$

В обозначении (1.179) для (;) необходимо положить

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t, \quad D_j(t) = D'_j\cos\omega t - D''_j\sin\omega t,$$

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{ij}^{t}(s)=\varepsilon_{ij}^{'}\cos\omega(t-s)-\varepsilon_{ij}^{''}\sin\omega(t-s),\\
D_{j}^{t}(s)=D_{j}^{'}\cos\omega(t-s)-D_{j}^{''}\sin\omega(t-s),\\
\varepsilon_{ij}^{',''}=const,\qquad D_{j}^{',''}=const,
\end{gathered}
\tag{1.193}
$$

$$
\Theta^{t}(\,s\,)=\Theta(\,t\,)=const,\qquad -\infty<s<t. \tag{1.194}
$$

Если учесть соотношения (1.144) в определяющих уравнениях (1.192) и ввести квазипотенциал [58]

$$
\begin{gathered}
\tilde{W}(\varepsilon_{ij}^{'},\ \varepsilon_{ij}^{''},\ D_{j}^{'},\ D_{j}^{''},\ \breve{\varepsilon}_{ij}^{'},\ \breve{\varepsilon}_{ij}^{''},\ \breve{D}_{j}^{'},\ \breve{D}_{j}^{''})=\\
=2<\underset{s=0}{\overset{\infty}{\Phi}}(\breve{\varepsilon}_{ij}^{t}(s),\ \breve{D}_{j}^{t}(s);\ \varepsilon_{ij}(t),\ D_{j}(t))>,
\end{gathered}
\tag{1.195}
$$

где $\breve{\varepsilon}_{ij}^{t}(s)=\breve{\varepsilon}_{ij}^{'}\cos\omega(t-s)-\breve{\varepsilon}_{ij}^{''}\sin\omega(t-s)$, $\breve{D}_{j}^{t}(s)=\breve{D}_{j}^{'}\cos\omega(t-s)-$ $-\breve{D}_{j}^{''}\sin\omega(t-s)$,

то амплитуды можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ij}^{'}=\left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial\varepsilon_{ij}^{'}}\right)_{\breve{\Lambda}\to\Lambda},\qquad \sigma_{ij}^{''}=\left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial\varepsilon_{ij}^{''}}\right)_{\breve{\Lambda}\to\Lambda},\\
E_{j}^{'}=\left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial D_{j}^{'}}\right)_{\breve{\Lambda}\to\Lambda},\qquad E_{j}^{''}=\left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial D_{j}^{''}}\right)_{\breve{\Lambda}\to\Lambda}.
\end{gathered}
\tag{1.196}
$$

Здесь выражение $\breve{\Lambda}\to\Lambda$ означает, что после дифференцирования величины $\breve{\Lambda}=\{\breve{\varepsilon}_{ij}^{'},\breve{\varepsilon}_{ij}^{''},\breve{D}_{j}^{'},\breve{D}_{j}^{''}\}$ следует заменить на величины $\Lambda=\{\varepsilon_{ij}^{'},\varepsilon_{ij}^{''},D_{j}^{'},D_{j}^{''}\}$.

Соотношения (1.192), (1.195), (1.196) показывают, что если общие определяющие уравнения (1.179) известны для достаточно широкого класса историй электромеханических величин (в данном случае деформаций и индукции электрического поля), включая периодические, то процедура получения амплитудных уравнений достаточно проста и эти уравнения не требуют никакой дополнительной экспериментальной проверки [58]. В линейной теории электровязкоупругости соотношения (1.192) или (1.195), (1.196) приводят к амплитудным уравнениям, которые формально могут быть представлены в комплексной форме

$$
\tilde{\sigma}_{ij}=\tilde{C}_{ijkl}^{D}\tilde{\varepsilon}_{kl}+\tilde{h}_{kij}\tilde{D}_{k},\quad \tilde{E}_{j}=\tilde{h}_{jik}\tilde{\varepsilon}_{ik}+\tilde{\beta}_{jk}^{\varepsilon}\tilde{D}_{k}. \tag{1.197}
$$

Комплексные коэффициенты

$$\tilde{C}^{D}_{ijkl} = C^{D'}_{ijkl} + iC^{D''}_{ijkl}, \quad \tilde{h}_{kij} = h'_{kij} + ih''_{kij} \quad \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{jk} = \beta'_{jk} + i\beta''_{jk} \tag{1.198}$$

уравнений (1.197) являются функциями частоты и, в общем случае, температуры

$$C^{D',D''}_{ijkl} = C^{D',D''}_{ijkl}(\omega, T), \quad h^{','' }_{kij} = h^{','' }_{kij}(\omega, T), \quad \beta^{','' }_{jk} = \beta^{','' }_{jk}(\omega, T). \tag{1.199}$$

Если в качестве независимых переменных выступают деформации и компоненты вектора напряженности электрического поля, линейные амплитудные уравнения имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}^{E}_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl} - \tilde{e}_{kij}\tilde{E}_k, \quad \tilde{D}_j = \tilde{e}_{jik}\tilde{\varepsilon}_{ik} + \tilde{\mu}_{jk}\tilde{E}_k, \tag{1.200}$$

где

$$\tilde{C}^{E}_{ijkl} = \tilde{C}^{E'}_{ijkl} + i\tilde{C}^{E''}_{ijkl}, \quad \tilde{e}_{kij} = e'_{kij} + ie''_{kij} \quad \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{jk} = \mu'_{jk} + i\mu''_{jk} \tag{1.201}$$

и

$$C^{E',E''}_{ijkl} = C^{E',E''}_{ijkl}(\omega, T), \quad e^{','' }_{kij} = e^{','' }_{kij}(\omega, T), \quad \mu^{','' }_{jk} = \mu^{','' }_{jk}(\omega, T). \tag{1.202}$$

Методы определения комплексных характеристик линейных вязкоупругих материалов с пьезоэффектом хорошо известны и описаны, например, в работах [48, 58, 136, 171].

Обсуждаемый вариант постановки задачи уже с самого начала предопределяет и алгоритм её решения, а именно, диссипативная функция (1.188) в процессе интегрирования уравнения теплопроводности (1.189) должна в определённые моменты времени уточняться по результатам решения соответствующих этим моментам (точнее, распределениям температуры в эти моменты) стационарных задач электромеханики (1.185), (1.186), (1.192). В зависимости от вида определяющих уравнений (1.192) последние могут быть как линейными, так и нелинейными. Если определяющие уравнения линейны и коэффициенты в них постоянны, задача сразу распадается на две независимые линейные задачи, когда вначале рассчитывается электромеханическое состояние и определяется диссипативная функция, а затем решается уравнение теплопроводности с известным источником тепла и определяется температурное поле диссипативного разогрева.

Для пассивных (непьезоактивных) тел, как металлических, так и полимерных, входящих в состав пьезоконструкций, разрешающая система уравнений, описывающих колебания и виброразогрев этих тел, получается из приведенных выше соотношений путем соответствующего упрощения. Так, для пассивных полимерных тел в определяющих уравнениях необходимо отбросить пьезоэлектрические характеристики, а для металлических тел, которые везде в книге считаются идеальными проводниками – пьезоэлектрические и диэлектрические.

В общем случае приведенная выше приближённая постановка задачи предполагает известными общие уравнения электровязкоупругости, например, в виде функционалов, фигурирующих в (1.192) или (1.195). Для построения этих функционалов необходимо располагать значительно большим объемом экспериментально-теоретической информации, чем того требует описание колебательных процессов. Поэтому возникает необходимость в построении замкнутых теорий амплитудных определяющих уравнений электровязкоупругости, ориентированных только на колебательные процессы и в которых характеристики материала, как и в линейной теории, конкретизировались бы непосредственно из экспериментов. Этому вопросу посвящены две следующие главы книги.

Глава 2.

Общая структура амплитудных определяющих уравнений для неупругих физически нелинейных пьезоэлектрических тел в одночастотном приближении

В данной главе исследуется общая структура амплитудных уравнений, описывающих одночастотное приближение колебаний неупругих физически нелинейных пьезоэлектрических тел и обосновывается возможность представления этих уравнений через потенциалы. Отмечена фундаментальная роль, которую играет в этих вопросах условие инвариантности амплитуд относительно преобразования сдвига по времени.

Дана сводка основных соотношений для неупругих материалов без пьезоэффекта. Установлены условия, при которых нелинейные амплитудные уравнения для изотропного и трансверсально-изотропного материалов формулируются в терминах концепции амплитудно-зависимых комплексных характеристик. Для этих материалов строятся конкретные замкнутые теории нелинейных амплитудных уравнений, допускающие нахождение комплексных характеристик материала непосредственно из экспериментов на гармоническое нагружение.

Концепции амплитудно-зависимых комплексных характеристик и построению замкнутой теории нелинейных амплитудных уравнений для трансверсально-изотропных пьезоэлектрических материалов посвящена следующая глава.

§ 1. Исследование структуры амплитудных определяющих уравнений на основе кратноинтегральной теории электровязкоупругости

В данном параграфе представлены в обзорном виде основные результаты работ [114, 115].

Обратимся к неравенству Планка (1.141)

$$-\dot{\Phi} - \rho\eta\dot{\Theta} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + E_i\dot{D}_i = D'_{\text{эм}} \geq 0 \tag{2.1}$$

и примем основное для всего дальнейшего изложения предположение: пусть в результате воздействия гармонической электромеханической нагрузки с круговой частотой ω в пьезоэлектрическом теле устанавливается одночастотное (моногармоническое) напряженно-деформированное и электрическое состояние вида

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}\cos\omega t - \sigma''_{ij}\sin\omega t, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t, \\ &E_j = E'_j\cos\omega t - E''_j\sin\omega t, \quad D_j = D'_j\cos\omega t - D''_j\sin\omega t. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Некоторые соображения о точности результатов расчетов, основанных на этой гипотезе, изложены нами во введении, а также в начале § 5 предыдущей главы. В теории нелинейных колебаний это предположение получило название принципа одночастотности [14, 103].

Если изменение температуры за период колебаний считать очень малым и подставить (2.2) в (2.1), то после усреднения за период полученного соотношения придем к выражению для средней за период колебаний диссипативной функции (1.188) или

$$\bar{D}' = \frac{\omega}{2}\left(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_jD'_j - E'_jD''_j\right). \tag{2.3}$$

Следовательно, в предположении моногармонического характера напряжений, деформаций, напряженности и индукции электрического поля (2.2) усредненная за период колебаний диссипативная функция полностью электромеханически определима, т.е. определяется связью между величинами σ'_{ij}, σ''_{ij} , E'_{ij}, E''_{ij} , ε'_{ij}, ε''_{ij} , D'_j, D''_j .

Один из возможных подходов установления этой связи рассмотрен в конце первой главы и состоит в следующем: предполагается, что путем той или иной аппроксимации функционала свободной энергии Φ из (2.1) и использования формул (1.144) получены некоторые общие определяющие уравнения (1.179) для механических напряжений σ_{ij} и напряженности E_j электрического поля. Учитывая в этих общих определяющих уравнениях моногармоничность величин (2.2) и применяя к ним процедуру усреднения (1.192) (усреднение Галеркина), находим связь между амплитудами

$$\begin{aligned} &\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right), \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right), \\ &E'_j = E'_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right), \quad E''_j = E''_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Аргументами функций (2.4) в общем случае следует считать также частоту и температуру. Но поскольку последние фигурируют как параметры и могут быть легко включены в окончательные соотношения, акцентировать на них внимание пока не будем.

Отметим, что любая конкретизация общих функционалов представляет собой достаточно сложную проблему и осуществима только на основе всей накопленной для данного материала экспериментально-теоретической информации, значительно шире той, которая требуется для описания реакции материала на циклические истории типа (2.2). Поэтому усреднение по Галеркину является, прежде всего, одним из возможных способов теоретического исследования структуры амплитудных определяющих уравнений (2.4) в рамках той или иной термодинамической теории пьезоэлектрической среды. Так, в монографии [58] с его помощью рассмотрены специфические особенности амплитудных уравнений для сред типа Фойгта, с внутренними переменными, с затухающей памятью, а также среды, описываемой тензорно-линейными (квазилинейными) соотношениями электровязкоупругости.

В работах [114, 115] усреднение по Галеркину применяется к соотношениям общей кратноинтегральной теории электровязкоупругости [58], которая строится на основе тех же эвристических соображений, что и чисто механическая теория [45, 74]. Использование кратноинтегральных соотношений позволило установить некоторые общие специфические особенности амплитудных связей (2.4). В частности, в [74, 115] показано, что если для ядер кратноинтегральной теории постулировать выполнение принципа взаимности [45], т. е. считать, что они имеют такую же симметрию относительно перестановки индексов, что и соответствующие коэффициенты нелинейной электроупругой среды, то моногармоническое поведение вязкоупругого пьезоэлектрического материала полностью определяется двумя интегральными (энергетическими) характеристиками, одна из которых (общая для всех возможных наборов независимых переменных) характеризует среднюю за период мощность диссипации (2.3), а другая (своя для каждого набора) – консервативные свойства материала. Отметим, что постановка этого вопроса и его решение для некоторых частных механических моделей представлены в монографиях [77, 161]. Изложенное выше конкретизируется математически представлением амплитудных определяющих уравнений через потенциалы [115]

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \\ E'_k &= \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k}, \quad E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Потенциалы U, D однозначно определяются по энергетическим характеристикам

$$\bar{U} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k, \tag{2.6}$$

$$\bar{D} = \frac{2}{\omega}\bar{D}' = \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k, \tag{2.7}$$

для чего эти последние необходимо представить как функции независимых переменных с набором аргументов

$$\Gamma_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}, \Gamma_{ijk} = \varepsilon'_{ij}D'_k + \varepsilon''_{ij}D''_k, \Gamma_{kl} = D'_k D'_l + D''_k D''_l \tag{2.8}$$

и выполнить интегрирование согласно формулам

$$\begin{aligned} U &= \int_0^1 \bar{U}\left(\lambda\varepsilon'_{ij}, \lambda\varepsilon''_{ij}, \lambda D'_k, \lambda D''_k\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \\ D &= \int_0^1 \bar{D}\left(\lambda\varepsilon'_{ij}, \lambda\varepsilon''_{ij}, \lambda D'_k, \lambda D''_k\right)\frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Для среды с конкретной симметрией строения зависимости $\bar{U}\left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k\right)$, $\bar{D}\left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k\right)$, а следовательно, и зависимости

$U\left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k\right)$, $D\left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k\right)$ реализуются через соответствующий набор инвариантов тензоров (2.8). Консервативные характеристики для других наборов независимых переменных (ε_{ij}, E_k), (σ_{ij}, E_k), (σ_{ij}, D_k) связаны с функцией (2.6) подобно тому, как связаны с внутренней энергией электроупругой среды другие электроупругие потенциалы. Например, величина

$$\bar{H} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} - D'_k E'_k - D''_k E''_k \tag{2.10}$$

является амплитудным аналогом электрической энтальпии и используется совместно с мощностью диссипации (2.7), как характеристика моногармонического поведения материала при выборе в качестве независимых переменных деформаций ε_{ij} и напряженности электрического поля E_k. Уравнения в потенциалах в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma'_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}},\\ D'_k = -\frac{\partial H}{\partial E'_k} + \frac{\partial D}{\partial E''_k}, \quad D''_k = -\frac{\partial H}{\partial E''_k} - \frac{\partial D}{\partial E'_k}.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Если характеристики $\bar{H}$ и $\bar{D}$ известны, скажем, определены экспериментально, и записаны как функции аргументов типа (2.8), где D'_k и D''_k следует заменить на E'_k и E''_k, то нахождение потенциалов H и D проводится согласно формулам (2.9) с заменой $\bar{U}$ на $\bar{H}$, U на H и D'_k, D''_k на E'_k, E''_k.

Уравнения в потенциалах являются амплитудными аналогами соответствующих уравнений электроупругости [27]. Потенциалы, кроме аргументов типа (2.8), являются также функциями частоты ω и, в общем случае, температуры. Если U и D – линейные функции величин (2.8) (квадратичные по ε'_{ij}, ε''_{ij}, D'_k, D''_k), из (2.5) получаем амплитудные определяющие уравнения линейной теории.

Предположение о выполнении для ядер кратноинтегральных соотношений принципа взаимности, в рамках которого в [115] получены уравнения (2.5) или (2.11), является довольно жестким. А именно, оно накладывает на функции U, D, $\bar{U}$, $\bar{D}$, как функции аргументов (2.8), ограничения в виде равенств

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon'_{ij} \partial \varepsilon''_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon''_{ij} \partial \varepsilon'_{kl}}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial D'_k \partial D''_l} = \frac{\partial^2 U}{\partial D''_k \partial D'_l},$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon'_{ij} \partial D''_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon''_{ij} \partial D'_k}. \tag{2.12}$$

Заметим, что эти равенства не являются тривиальными в отличие от аналогичных равенств, в которых фигурируют величины только с одним или только с двумя штрихами.

Предположим, что U и D – функции аргументов (2.8). Тогда уравнения (2.5) можно представить в виде

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kl} + \tilde{h}_{kij}\,(;)\,\tilde{D}_k, \;\; \tilde{E}_k = \tilde{h}_{kij}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)\,\tilde{D}_l, \tag{2.13}$$

где введены комплексные величины

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij}, \quad \tilde{E}_k = E'_k + iE''_k,$$
$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = \varepsilon'_{kl} + i\varepsilon''_{kl}, \quad \tilde{D}_k = D'_k + iD''_k, \tag{2.14}$$
$$\tilde{p} = \left\{ \tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)\,,\, \tilde{h}_{kij}\,(;)\,,\, \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;) \right\} = p' + ip'', \quad i = \sqrt{-1}.$$

Комплексные коэффициенты $\tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)\,,\, \tilde{h}_{kij}\,(;)\,,\, \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)$ являются функциями компонент тензоров (2.8), а также частоты и температуры.

Аналогичные уравнения можно записать для других наборов независимых переменных, например, из (2.11) следуют уравнения

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}^{E}_{ijkl}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kl} - \tilde{e}_{kij}\,(;)\,\tilde{E}_k, \quad \tilde{D}_k = \tilde{e}_{kij}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)\,\tilde{E}_l. \tag{2.15}$$

Отметим, что в работе [114] уравнения (2.13) и (2.15) получены непосредственно, как результат усреднения по Галеркину кратноинтегральных соотношений электровязкоупругости и постулирования для ядер этих соотношений принципа взаимности.

Коэффициенты в (2.13), (2.15) имеют такую же симметрию по индексам, что и соответствующие коэффициенты линейной теории. Вместе с тем, в отличие от линейных уравнений, количество коэффициентов в (2.13) или (2.15) при переходе к конкретной среде с определенной симметрией строения в общем случае не уменьшается. Действительно, при рассмотрении конкретной среды в число аргументов тензоров $\tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)\,, \tilde{h}_{kij}\,(;)\,, \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)$, кроме тензоров (2.8), необходимо включить тензоры, определяющие симметрию этой среды [157]. Определяющие тензоры трансверсальной изотропии могут быть выбраны, например, в одном из следующих видов: δ_{ij}, δ_{3i} или $\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}$, δ_{3i}. А так как группа симметрии тензоров $\tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)\,, \tilde{h}_{kij}\,(;)\,, \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)$ является пересечением групп симметрии тензоров, определяющих среду, и переменных тензоров (2.8), то вне зависимости от симметрии среды в (2.13) в общем случае входят 21 коэффициент $\tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)$, 18 коэффициентов $\tilde{h}_{kij}\,(;)$ и 6 коэффициентов $\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)$.

В связи с этим для комплексной формы представления амплитудных уравнений (2.13) или (2.15) введем название “комплексность амплитудных уравнений в широком смысле” в отличие от известного в механике комплексного представления амплитудных уравнений под названием “концепция амплитудно-зависимых комплексных модулей”. Эта концепция предполагает полную аналогию нелинейных амплитудных уравнений с амплитудными определяющими уравнениями линейной теории с тем лишь различием, что комплексные модули (коэффициенты) являются функциями амплитуд независимых переменных, например, ε'_{ij}, ε''_{ij}, D'_k, D''_k. Так, для трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала предполагается возможность описания одночастотного приближения колебаний амплитудными уравнениями с десятью амплитудно-зависимыми комплексными коэффициентами, пять из которых механические, три – пьезоэлектрические и два – диэлектрические.

Представленные выше соотношения путем соответствующего упрощения позволяют получить уравнения концепции амплитудно-зависимых комплексных модулей. Обоснованию этого вывода посвящен материал данной и следующей глав. В заключение отметим, что ввиду использования соотношений общей кратноинтегральной теории электровязкоупругости все фигурирующие в данном параграфе функции переменных (2.8) предполагаются разложимыми в степенные ряды по этим переменным.

§ 2. Исследование структуры амплитудных связей с использованием условия инвариантности относительно преобразования сдвига по времени

2.1. Если общие определяющие уравнения электровязкоупругости известны для широкого класса историй внешнего воздействия, включая периодические, то получить амплитудные определяющие уравнения с использованием усреднения по Галеркину (1.192) достаточно просто и эти амплитудные уравнения не будут требовать какой-либо дополнительной экспериментальной проверки. Такой подход отражает сущность первой интерпретации амплитудных уравнений [161, 220].

Вместе с тем, если ориентироваться только на колебательные процессы, нет необходимости в конкретизации общих определяющих уравнений, поскольку они содержат значительно больше информации, чем требуется для описания реакции материала на гармоническое воздействие. Поведение линейного электровязкоупругого материала, например, точно описывается в этом случае алгебраическими уравнениями с комплексными характеристиками и эти характеристики допускают непосредственное экспериментальное определение. Приведенные в предыдущем параграфе соотношения свидетельствуют о возможности построения замкнутой теории амплитудных уравнений нелинейной электровязкоупругости, в которой характеристики материала также конкретизировались бы непосредственно из экспериментов на гармоническое электромеханическое нагружение. Такой подход к установлению амплитудных уравнений назовем, следуя [220], второй интерпретацией этих уравнений.

Согласно этому подходу амплитуды независимых переменных, например механических напряжений $\sigma'_{ij}, \sigma''_{ij}$ и напряженности электрического поля E'_k, E''_k с самого начала формально рассматриваются как тензорные и векторные функции компонент деформации $\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}$ и индукции электрического поля D'_k, D''_k, частоты и температуры (как и раньше, акцентировать внимание на зависимостях от частоты и температуры пока не будем):

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right), \quad & \sigma''_{ij} &= \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right), \\ E'_j &= E'_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right), \quad & E''_j &= E''_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Функции (2.16) должны удовлетворять требованиям инвариантности, отвечающим типу симметрии среды, ограничениям второго закона термодинамики, условию инвариантности амплитуд относительно преобразования сдвига по времени [220] и, возможно, ряду условий более частного характера.

При таком подходе мы не привязываемся к какой-либо теории неупругих пьезоэлектрических материалов, например, к общей кратноинтегральной теории электровязкоупругости, как в предыдущем параграфе, а предполагаем, что амплитудные уравнения в рамках этого подхода не зависят от того, какая механическая среда рассматривается: вязкоупругая, упругопластическая или упруговязкопластическая. Единственным условием является реализуемость в этой среде моногармонического состояния вида (2.2).

При второй интерпретации амплитудных уравнений возможны несколько направлений построения теории в зависимости от порядка удовлетворения сформулированным выше ограничениям на амплитудные связи (2.16).

Возможен вариант, когда с самого начала используются теоремы о представлении тензорных и векторных функций (2.16) [157], тип симметрии которых отвечает материальной симметрии среды, а затем на используемые представления накладываются другие ограничения. Примеры такого построения теории рассматриваются в §§5–7 данной главы.

Если от функций (2.16) сначала потребовать удовлетворения условию инвариантности относительно преобразования сдвига по времени в случае произвольной симметрии среды, то как показывается ниже, это приводит к общей структуре амплитудных связей типа уравнений (2.13). После этого в зависимости от симметрии среды могут использоваться те или иные представления, но уже не тензорных функций (2.16), а тензоров – коэффициентов уравнений (2.13).

В §3 данной главы с использованием условия инвариантности амплитуд относительно преобразования сдвига по времени и теоремы о разложении векторных полей обосновывается возможность представления амплитудных уравнений через потенциалы для произвольного типа симметрии среды (уравнения типа (2.5) или (2.11)). В этом случае ограничения, накладываемые симметрией среды, можно учесть тем или иным представлением, но уже не тензорных, а скалярных функций тензорных аргументов типа (2.8). В результате придем к классическому способу конкретизации амплитудных уравнений, характерному для нелинейной теории упругости. Такие варианты построения теории также рассматриваются в §§ 5 – 7 данной главы.

2.2. Общая структура амплитудных определяющих уравнений в виде их комплексности в широком смысле (уравнения (2.13) и (2.15)) выступает в §1 как следствие усреднения по Галеркину соотношений общей кратноинтегральной теории электровязкоупругости и постулирования для ядер этой теории принципа взаимности. Поскольку материалы в этой книге всегда предполагаются нестареющими и в (1.192) усредняются периодические функции времени, уравнения (2.13) и (2.15) автоматически инвариантны относительно произвольного сдвига временного аргумента, т.е относительно замены в (2.2) ωt на $\omega t+\varphi$. То же самое относится к любым амплитудным уравнениям, которые получаются как результат усреднения каких-либо общих определяющих уравнений.

При второй интерпретации амплитудных уравнений условие инвариантности зависимостей (2.16) относительно преобразования сдвига по времени является одним из основных ограничений на эти зависимости. Ниже показано, что комплексность амплитудных уравнений в широком смысле является следствием именно этого условия.

Рассмотрим произвольные зависимости (2.16) и потребуем от них удовлетворения условию инвариантности относительно преобразования сдвига по времени или, как уже отмечалось, инвариантности к замене в (2.2) ωt на $\omega t + \varphi$. Это условие можно представить в символическом матричном виде

$$\mathbf{QS}\left(\mathbf{\Lambda}\right) = \mathbf{S}\left(\mathbf{Q\Lambda}\right), \tag{2.17}$$

где

$$\mathbf{S} = \left(\sigma'_{ij}, \sigma''_{ij}, E'_k, E''_k\right)^T, \quad \mathbf{\Lambda} = \left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k\right)^T,$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ниже считаем функции (2.16) непрерывно-дифференцируемыми по $\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}$, D'_k, D''_k. Тогда путем исключения параметра φ равенства (2.17) можно записать в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D''_k}D'_k + i\tilde{\sigma}_{ij} = 0, \\ &\frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial D''_k}D'_k + i\tilde{E}_i = 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где введены обозначения

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij}, \quad \tilde{E}_k = E'_k + iE''_k, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial D''_k}D'_k = 0, \tag{2.20}$$

где $\tilde{\Phi} = \Phi_1 + i\Phi_2$ – комплекснозначная функция 18 действительных переменных $\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}$, D'_k, D''_k. Записав соответствующую характеристическую систему или непосредственной подстановкой в уравнение (2.20), легко убедиться, что любая из величин

$$\Gamma_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}, \Gamma_{ijk} = \varepsilon'_{ij}D'_k + \varepsilon''_{ij}D''_k, \Gamma_{kl} = D'_kD'_l + D''_kD''_l, \tag{2.21}$$

$$\hat{\Gamma}_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{kl} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl}, \hat{\Gamma}_{ijk} = \varepsilon'_{ij}D''_k - \varepsilon''_{ij}D'_k, \hat{\Gamma}_{kl} = D'_kD''_l - D''_kD'_l \tag{2.22}$$

является частным интегралом уравнения (2.20).

Величины (2.21) и (2.22) можно записать в терминах полных амплитуд и сдвигов фаз

$$\begin{gathered}
\Gamma_{ijkl} = \mathring{\varepsilon}_{ij}\,\mathring{\varepsilon}_{kl}\cos\left(\varphi^\varepsilon_{kl} - \varphi^\varepsilon_{ij}\right), \quad \Gamma_{ijk} = \mathring{\varepsilon}_{ij}\,\mathring{D}_k\cos\left(\varphi^D_k - \varphi^\varepsilon_{ij}\right),\\
\Gamma_{kl} = \mathring{D}_k\,\mathring{D}_l\cos\left(\varphi^D_l - \varphi^D_k\right),\\
\hat{\Gamma}_{ijkl} = \mathring{\varepsilon}_{ij}\,\mathring{\varepsilon}_{kl}\sin\left(\varphi^\varepsilon_{kl} - \varphi^\varepsilon_{ij}\right), \quad \hat{\Gamma}_{ijk} = \mathring{\varepsilon}_{ij}\,\mathring{D}_k\sin\left(\varphi^D_k - \varphi^\varepsilon_{ij}\right),\\
\hat{\Gamma}_{kl} = \mathring{D}_k\,\mathring{D}_l\sin\left(\varphi^D_l - \varphi^D_k\right),
\end{gathered} \tag{2.23}$$

где

$$\begin{gathered}
\mathring{\varepsilon}_{ij} = \left({\varepsilon'_{ij}}^2 + {\varepsilon''_{ij}}^2\right)^{0,5}, \quad \mathring{\mathrm{D}}_k = \left({D'_k}^2 + {D''_k}^2\right)^{0,5},\\
\mathrm{tg}\varphi^\varepsilon_{ij} = \varepsilon''_{ij}/\varepsilon'_{ij}, \quad \mathrm{tg}\varphi^D_k = D''_k/D'_k,
\end{gathered} \tag{2.24}$$

и в силу этого всегда выразить через 9 амплитуд $\mathring{\varepsilon}_{ij}$, $\mathring{D}_k$ и 8 сдвигов фаз, например, $\varphi^\varepsilon_{kl} - \varphi^\varepsilon_{11}$, $\varphi^D_k - \varphi^\varepsilon_{11}$ (всего 17 независимых переменных). Произвольная функция этих 17 переменных является общим решением уравнения (2.20). Вместе с тем, это общее решение в дальнейшем удобнее представлять в виде произвольной функции

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}\left(\Gamma_{ijkl},\ \Gamma_{ijk},\ \Gamma_{kl},\ \hat{\Gamma}_{ijkl},\ \hat{\Gamma}_{ijk},\ \hat{\Gamma}_{kl}\right). \tag{2.25}$$

Разумеется, что аргументы в (2.25) не являются независимыми. Например, легко убедиться в справедливости равенств

$$
\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{ijkl}\hat{\Gamma}_{pqrs} &= \Gamma_{ijpq}\Gamma_{klrs} - \Gamma_{ijrs}\Gamma_{klpq},\\
\hat{\Gamma}_{ijk}\hat{\Gamma}_{pqr} &= \Gamma_{ijpq}\Gamma_{kr} - \Gamma_{ijr}\Gamma_{pqk},\\
\hat{\Gamma}_{kl}\hat{\Gamma}_{pq} &= \Gamma_{kp}\Gamma_{lq} - \Gamma_{kq}\Gamma_{lp}.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Обратимся к соотношениям

$$
\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kl} + \tilde{h}_{kij}\,(;)\,\tilde{D}_k, \quad \tilde{E}_k = \tilde{h}^{*}_{kij}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)\,\tilde{D}_l, \tag{2.27}
$$

где, кроме (2.19), используются обозначения

$$
\begin{gathered}
\tilde{\varepsilon}_{kl} = \varepsilon'_{kl} + i\varepsilon''_{kl}, \quad \tilde{D}_k = D'_k + iD''_k,\\
\tilde{p} = \left\{\tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)\,, \tilde{h}_{kij}\,(;)\,, \tilde{h}^{*}_{kij}\,(;)\,, \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)\right\} = p' + ip'',
\end{gathered}
\tag{2.28}
$$

а комплексные коэффициенты $\tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)\,, \tilde{h}_{kij}\,(;)\,, \tilde{h}^{*}_{kij}\,(;)\,, \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)$ являются функциями компонент тензоров (2.21) и (2.22). Если предположить дифференцируемость этих функций и подставить соотношения (2.27) в уравнения (2.18), то легко убедиться, что эти уравнения удовлетворяются тождественно. Для этого необходимо учесть сказанное об уравнении (2.20) и его общем решении (2.25). Более того, можно показать, что в силу произвольности коэффициентов $\tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)\,, \tilde{h}_{kij}\,(;)\,, \tilde{h}^{*}_{kij}\,(;)\,, \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)$ представления величин $\tilde{\sigma}_{ij}$ и $\tilde{E}_k$ в виде (2.27) следует рассматривать как общее решение уравнений (2.18).

Итак, если некоторые дифференцируемые функции (2.16) удовлетворяют условию инвариантности относительно преобразования сдвига по времени (2.17), то они представимы в виде (2.27). С другой стороны, принимая во внимание инвариантность величин (2.21) и (2.22) относительно преобразования сдвига по времени, т.е относительно замены

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon'_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\cos\varphi \;-\; \varepsilon''_{kl}\sin\varphi, \quad \varepsilon''_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\sin\varphi + \varepsilon''_{kl}\cos\varphi,\\
&D'_k \to D'_k\cos\varphi \;-D''_k\sin\varphi, \quad D''_k \to D'_k\sin\varphi + D''_k\cos\varphi,
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

непосредственной проверкой убеждаемся, что функции (2.27) удовлетворяют условию (2.17).

Таким образом, необходимым и достаточным условием инвариантности функций (2.16) относительно преобразования сдвига по времени является их представление в виде (2.27). При этом, естественно, предполагается дифференцируемость коэффициентов $\tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;)$, $\tilde{h}_{kij}\,(;)$, $\tilde{h}^{*}_{kij}\,(;)$, $\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)$.

Дальнейшее изложение материала основано на следующем замечании.

Замечание 1. Выделим из множества всевозможных физически нелинейных материалов класс материалов, нелинейные свойства которых можно считать "симметричными"относительно знака возмущающих факторов. Например, материал с кубической нелинейностью одинаково (“симметрично”) реагирует на растяжение - сжатие или, скажем, на изменение знака электрической индукции. Если же материалу, кроме того, присуща заметная квадратичная нелинейность, то его реакция на подобные возмущения уже “несимметрична”.

Ниже рассматриваются только материалы выделенного класса, которые будем называть материалами с “симметричными” нелинейными свойствами.

В интересующем нас случае одночастотного приближения колебаний нелинейные свойства материала отражаются в зависимости коэффициентов из (2.27) от амплитуд и сдвигов фаз независимых переменных, а материала с “симметричными” нелинейными свойствами – от амплитуд и абсолютных величин сдвигов фаз. Это значит, что величины (2.22) в силу (2.23) должны входить в число аргументов в виде произведений или квадратов. Но тогда из (2.26) следует, что эти коэффициенты можно считать функциями только величин (2.21).

Обращаем внимание читателя на то, что соотношениями §1 также предполагаются материалы с “симметричными” нелинейными свойствами, поскольку при усреднении по Галеркину общих кратноинтегральных соотношений электровязкоупругости интегралы четной кратности пропадают. Поэтому наборы аргументов (2.8) и (2.21) совпадают.

Разумеется, соотношения (2.27) можно использовать в качестве исходных и в случае одночастотного приближения колебаний материалов с “несимметричными” нелинейными свойствами. Для этого коэффициенты этих уравнений следует считать функциями не только величин (2.21), но и величин типа (2.22), проявляющих зависимость от знака сдвига фаз. Однако такое описание колебаний не будет полным без учета постоянных составляющих этих колебаний, которые могут оказывать существенное влияние на осциллирующие составляющие (2.2) [100].

Итак, коэффициенты в уравнениях (2.27) считаем далее функциями компонент тензоров (2.21): $(;) = (\Gamma_{ijkl},\ \Gamma_{ijk},\ \Gamma_{kl})$.

Обратимся к вопросу о симметрии этих коэффициентов относительно перестановки индексов. Симметрия

$$\begin{gathered}\tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;) = \tilde{C}^{D}_{jikl}\,(;) = \tilde{C}^{D}_{ijlk}\,(;)\,,\\ \tilde{h}_{kij}\,(;) = \tilde{h}_{kji}\,(;)\,,\quad \tilde{h}^{*}_{kij}\,(;) = \tilde{h}^{*}_{kji}\,(;)\end{gathered} \tag{2.30}$$

является естественной. Что касается симметрии

$$\tilde{C}^{D}_{ijkl}\,(;) = \tilde{C}^{D}_{klij}\,(;)\,,\quad \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}\,(;) = \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{lk}\,(;) \tag{2.31}$$

или равенства коэффициентов

$$\tilde{h}_{kij}\,(;) = \tilde{h}^{*}_{kij}\,(;)\,, \tag{2.32}$$

то, как следует из вышеизложенного, о них ничего пока сказать нельзя. Для исследования этого вопроса обратимся к функции диссипации (2.7)

$$\bar{D} = \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k. \tag{2.33}$$

Если записать выражение для этой функции с учетом равенств (2.18), то можно показать, что функция $\bar{U}$ (2.6)

$$\bar{U} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k, \tag{2.34}$$

как функция независимых переменных ε'_{kl}, ε''_{kl}, D'_k, D''_k, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.20)

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\bar{U}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\bar{U}}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\bar{U}}{\partial D''_k}D'_k = 0. \tag{2.35}$$

Этому же уравнению удовлетворяет и функция $\bar{D}$. Для этого следует записать с учетом (2.18) выражение для $\bar{U}$ (2.34).

Замечание 2. Отмеченные выше преобразования с учетом равенств (2.18) удобно проводить в комплексной записи, если ввести комплекснозначную функцию (1.188)

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \tilde{E}_k\bar{\tilde{D}}_k \tag{2.36}$$

и учесть, что

$$\mathrm{Im}\tilde{\Phi} = \bar{D},\quad \mathrm{Re}\tilde{\Phi} = \bar{U}. \tag{2.37}$$

Тогда, используя в (2.36) равенства (2.18), приходим к дифференциальному уравнению (2.20).

Функцию (2.34) $\bar{U}$ будем называть *функцией накопления.* Энергетическое содержание этой функции раскрывается в гл. 4.

Поскольку функции диссипации и накопления удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.20), то для материалов с "симметричными" нелинейными свойствами они, как и коэффициенты уравнений (2.27), являются функциями вида

$$\bar{D} = \bar{D}\left(\Gamma_{ijkl},\ \Gamma_{ijk},\ \Gamma_{kl}\right), \quad \bar{U} = \bar{U}\left(\Gamma_{ijkl},\ \Gamma_{ijk},\ \Gamma_{kl}\right). \tag{2.38}$$

С другой стороны, выделяя в уравнениях (2.27) действительные и мнимые части и используя их в соотношениях (2.33) и (2.34), можно записать

$$\bar{D} = \bar{D}_1 + \bar{D}_2, \quad \bar{U} = \bar{U}_1 - \bar{U}_2, \tag{2.39}$$

где с учетом обозначений (2.21) и (2.22)

$$\begin{aligned}
\bar{D}_1 &= \overset{D''}{C}_{ijkl}(;)\,\Gamma_{ijkl} + \Big(h''_{kij}(;) + h^{*''}_{kij}(;)\Big)\,\Gamma_{ijk} + \beta''_{kl}(;)\,\Gamma_{kl},\\
\bar{D}_2 &= \overset{D'}{C}_{ijkl}(;)\,\hat{\Gamma}_{ijkl} + \Big(h'_{kij}(;) - h^{*'}_{kij}(;)\Big)\,\hat{\Gamma}_{ijk} + \beta'_{kl}(;)\,\hat{\Gamma}_{kl},\\
\bar{U}_1 &= \overset{D'}{C}_{ijkl}(;)\,\Gamma_{ijkl} + \Big(h'_{kij}(;) + h^{*'}_{kij}(;)\Big)\,\Gamma_{ijk} + \beta'_{kl}(;)\,\Gamma_{kl},\\
\bar{U}_2 &= \overset{D''}{C}_{ijkl}(;)\,\hat{\Gamma}_{ijkl} + \Big(h''_{kij}(;) - h^{*''}_{kij}(;)\Big)\,\hat{\Gamma}_{ijk} + \beta''_{kl}(;)\,\hat{\Gamma}_{kl}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Замечание 3. В результате преобразования сдвига по времени (2.29) полные амплитуды деформаций $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ и индукции электрического поля $\overset{\circ}{D}_k$ (2.24) не изменяются, а фазы $\varphi^{\varepsilon}_{ij}$ и $\overset{D}{\varphi_k}$ меняются соответственно на $\varphi^{\varepsilon}_{ij} + \varphi$ и $\overset{D}{\varphi_k} + \varphi$. Наряду с преобразованием (2.29), рассмотрим преобразование независимых переменных вида

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{kl} &\to \varepsilon'_{kl}\cos\varphi + \varepsilon''_{kl}\sin\varphi, \quad \varepsilon''_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\sin\varphi - \varepsilon''_{kl}\cos\varphi,\\
D'_k &\to D'_k\cos\varphi + D''_k\sin\varphi, \quad D''_k \to D'_k\sin\varphi - D''_k\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Заметим, что это преобразование не следует из (2.29) ни при каком φ . Преобразование (2.41) также не изменят полных амплитуд деформаций $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ и индукции электрического поля $\overset{\circ}{D}_k$. Что касается фаз $\varphi^{\varepsilon}_{ij}$ и $\overset{D}{\varphi_k}$, то они меняются соответственно на $-\varphi^{\varepsilon}_{ij} + \varphi$ и $-\overset{D}{\varphi_k} + \varphi$.

Поскольку величины (2.21) в силу (2.23) определяются косинусами сдвигов фаз, то они в результате преобразования (2.41) не изменяются. В этом можно убедиться и непосредственно, подставляя (2.41) в (2.21). Следовательно, функции диссипации и накопления (2.38), как функции аргументов (2.21), инвариантны к преобразованию (2.41). То же самое относится и к коэффициентам $\overset{D'}{C}_{ijkl}(;)$, $\overset{D''}{C}_{ijkl}(;)$, $h'_{kij}(;)$, $h''_{kij}(;)$, $h^{*'}_{kij}(;)$, $h^{*''}_{kij}(;)$, $\beta'_{kl}(;)$, $\beta''_{kl}(;)$ в соотношениях (2.40). Что касается величин (2.22) $\hat{\Gamma}_{ijkl}$, $\hat{\Gamma}_{ijk}$ и $\hat{\Gamma}_{kl}$, фигурирующих в (2.40), то они в результате преобразования (2.41) меняют знак на противоположный.

В силу изложенного, левые части равенств (2.39) и первые слагаемые правых частей этих равенств не изменяются при замене (2.41), тогда как вторые слагаемые $\bar{D}_2$ и $\bar{U}_2$ правых частей меняют знак на противоположный. Поэтому, требуя однозначную определимость функций накопления и диссипации (2.38) своими аргументами, следует положить

$$\bar{D}_2 = 0, \quad \bar{U}_2 = 0. \tag{2.42}$$

Достаточными условиями выполнения равенств (2.42) являются следующие условия симметрии

$$\begin{aligned} &\overset{D'}{C}_{ijkl}(;) = \overset{D'}{C}_{klij}(;), \quad h'_{kij}(;) = {h^*_{kij}}'(;), \quad \beta'_{kl}(;) = \beta'_{lk}(;); \\ &\overset{D''}{C}_{ijkl}(;) = \overset{D''}{C}_{klij}(;), \quad h''_{kij}(;) = {h^*_{kij}}''(;), \quad \beta''_{kl}(;) = \beta''_{lk}(;). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Эти условия фигурируют в §1 как следствия предположения для ядер кратноинтегральной теории условий взаимности. Здесь же они должны постулироваться независимо.

Итак, мы снова, но уже во второй интерпретации, получаем общую структуру амплитудных определяющих уравнений в виде их комплексности в широком смысле [107]:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} &= \overset{D}{\tilde{C}}_{ijkl}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kl} + \tilde{h}_{kij}(;)\,\tilde{D}_k, \\ \tilde{E}_k &= \tilde{h}_{kij}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)\,\tilde{D}_l. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Естественно, все сказанное об уравнениях (2.44) в §1 остается в силе. Единственное отличие в том, что коэффициенты этих уравнений, как и функции (2.38), не обязательно должны разлагаться в степенные ряды по переменным (2.21).

Замечание 4. В линейном случае коэффициенты в уравнениях (2.44) постоянны, а условия (2.43) являются не только достаточными, но и необходимыми для выполнения равенств (2.42). Поэтому в этом случае структура амплитудных уравнений полностью определяется условием их инвариантности относительно преобразования сдвига по времени.

2.3. К аналогичным результатам приходим и в случае других наборов независимых переменных. Рассмотрим, например, произвольные зависимости

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},\, E'_k, E''_k\right), \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right), \\ D'_j &= D'_j\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right), \quad D''_j = D''_j\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right) \end{aligned} \tag{2.45}$$

и потребуем от них удовлетворения условию инвариантности относительно преобразования сдвига по времени, которое получается из (2.17) путем формальной замены

$$E'_k \leftrightarrow D'_k, \quad E''_k \leftrightarrow D''_k. \tag{2.46}$$

Соответствующие равенства в дифференциальной форме имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde\sigma_{ij}}{\partial E'_k}E''_k - \frac{\partial\tilde\sigma_{ij}}{\partial E''_k}E'_k + i\tilde\sigma_{ij} = 0, \\ &\frac{\partial\tilde D_j}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde D_j}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde D_j}{\partial E'_k}E''_k - \frac{\partial\tilde D_j}{\partial E''_k}E'_k + i\tilde D_j = 0. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Расписав с учетом уравнений (2.47) выражение для диссипативной функции (2.33), получаем для данного набора независимых переменных соответствующую консервативную характеристику

$$\bar H = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} - D'_kE'_k - D''_kE''_k. \tag{2.48}$$

(амплитудный аналог электрической энтальпии).

Диссипативная функция $\bar D$ и функция $\bar H$, как функции независимых переменных ε'_{kl}, ε''_{kl}, E'_k, E''_k, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\Phi}{\partial E'_k}E''_k - \frac{\partial\Phi}{\partial E''_k}E'_k = 0 \tag{2.49}$$

и для материалов с “симметричными” нелинейными свойствами являются функциями аргументов

$$\begin{gathered} \Gamma_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}, \quad \overset{E}{\Gamma}_{ijk} = \varepsilon'_{ij}E'_k + \varepsilon''_{ij}E''_k, \\ \overset{E}{\Gamma}_{kl} = E'_kE'_l + E''_kE''_l : \end{gathered} \tag{2.50}$$

$$\bar{D} = \bar{D}\left(\Gamma_{ijkl}, \Gamma^{E}_{ijk}, \Gamma^{E}_{kl}\right), \quad \bar{H} = \bar{H}\left(\Gamma_{ijkl}, \Gamma^{E}_{ijk}, \Gamma^{E}_{kl}\right). \tag{2.51}$$

Замечание 5. Здесь также удобно проводить преобразования с использованием равенств (2.47) в комплексной записи, введя формально комплекснозначную функцию

$$\tilde{F} = \tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} - \tilde{D}_k\bar{\tilde{E}}_k, \quad \mathrm{Im}\tilde{F} = \bar{D}, \quad Re\tilde{F} = \bar{H}. \tag{2.52}$$

Аналогично вышеизложенному показывается, что необходимым и достаточным условием инвариантности функций (2.45) относительно преобразования сдвига по времени является их представление в виде

$$\begin{gathered} \tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}^{E}_{ijkl}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kl} + \tilde{e}^{*}_{kij}\,(;)\,\tilde{E}_k, \\ \tilde{D}_k = \tilde{e}_{kij}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)\,\tilde{E}_l. \end{gathered} \tag{2.53}$$

Комплексные коэффициенты $\tilde{C}^{E}_{ijkl}\,(;)$, $\tilde{e}^{*}_{kij}\,(;)$, $\tilde{e}_{kij}\,(;)$, $\tilde{\mu}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)$ для материалов с “симметричными” нелинейными свойствами являются функциями аргументов (2.50) и предполагаются дифференцируемыми по этим аргументам.

Разделяя в (2.53) действительные и мнимые части с учетом обозначений

$$\tilde{p} = \left\{\tilde{C}^{E}_{ijkl}\,(;)\,,\, \tilde{e}^{*}_{kij}\,(;)\,,\, \tilde{e}_{kij}\,(;)\,,\, \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{kl}\,(;)\right\} = p' + ip'' \tag{2.54}$$

и используя полученные соотношения в выражении для функции диссипации $\bar{D}$ (2.33) и функции $\bar{H}$ (2.48), получаем

$$\bar{D} = \bar{D}_1 + \bar{D}_2, \quad \bar{H} = \bar{H}_1 - \bar{H}_2, \tag{2.55}$$

где

$$\begin{gathered} \bar{D}_1 = C^{E''}_{ijkl}\,(;)\,\Gamma_{ijkl} - \left(e''_{kij}\,(;) - e^{*''}_{kij}\,(;)\right)\Gamma^{E}_{ijk} - \mu''_{kl}\,(;)\,\Gamma^{E}_{kl}, \\ \bar{D}_2 = C^{E'}_{ijkl}\,(;)\left[\varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{kl} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl}\right] + \\ + \left(e'_{kij}\,(;) + e^{*'}_{kij}\,(;)\right)\left[\varepsilon'_{ij}E''_k - \varepsilon''_{ij}E'_k\right] - \mu'_{kl}\,(;)\left[E'_kE''_l - E''_kE'_e\right], \\ \bar{H}_1 = C^{E'}_{ijkl}\,(;)\,\Gamma_{ijkl} - \left(e'_{kij}\,(;) - e^{*'}_{kij}\,(;)\right)\Gamma^{E}_{ijk} - \mu'_{kl}\,(;)\,\Gamma^{E}_{kl}, \\ \bar{H}_2 = C^{E''}_{ijkl}\,(;)\left[\varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{kl} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl}\right] + \\ \left(e''_{kij}\,(;) + e^{*''}_{kij}\,(;)\right)\left[\varepsilon'_{ij}E''_k - \varepsilon''_{ij}E'_k\right] - \mu''_{kl}\,(;)\left[E'_kE''_l - E''_kE'_l\right]. \end{gathered} \tag{2.56}$$

Как и выше, требование однозначности функций $\bar{D}$ и $\bar{H}$ приводит к равенствам

$$\bar{D}_2 = 0, \quad \bar{H}_2 = 0, \tag{2.57}$$

для удовлетворения которых постулируются следующие условия симметрии:

$$\begin{aligned} &C^{E'}_{ijkl}(;) = C^{E'}_{klij}(;), \quad e^{*'}_{kij}(;) = -e'_{kij}(;), \quad \mu'_{kl}(;) = \mu'_{lk}(;); \\ &C^{E''}_{ijkl}(;) = C^{E''}_{klij}(;), \quad e^{*''}_{kij}(;) = -e''_{kij}(;), \quad \mu''_{kl}(;) = \mu''_{lk}(;). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Амплитудные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} &= \tilde{C}^{E}_{ijkl}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kl} - \tilde{e}_{kij}(;)\,\tilde{E}_k, \\ \tilde{D}_k &= \tilde{e}_{kij}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{kl}(;)\,\tilde{E}_e. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Остается в силе замечание относительно линейной теории.

В заключение запишем выражения для функции диссипации $\bar{D}$ и функции $\bar{H}$

$$\begin{aligned} \bar{D} &= C^{E''}_{ijkl}(;)\,\Gamma_{ijkl} - 2e''_{kij}(;)\,\Gamma^{E}_{ijk} - \mu''_{kl}(;)\,\Gamma^{E}_{kl}, \\ \bar{H} &= C^{E'}_{ijkl}(;)\,\Gamma_{ijkl} - 2e'_{kij}(;)\,\Gamma^{E}_{ijk} - \mu'_{kl}(;)\,\Gamma^{E}_{kl}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

§ 3. Представление амплитудных уравнений через потенциалы

Представленные в § 1 амплитудные уравнения в потенциалах (уравнения (2.5) и (2.11)) получены в работе [115] как результат усреднения по Галеркину соотношений общей кратноинтегральной теории электровязкоупругости в предположении выполнения для ядер этой теории принципа взаимности [45]. Последнее условие накладывает довольно жесткие ограничения на амплитудные потенциалы в виде равенств (2.12).

В данном параграфе возможность представления амплитудных уравнений через потенциалы исследуется с использованием второй интерпретации этих уравнений, когда амплитуды независимых переменных, например, напряжений σ'_{ij}, σ''_{ij} и напряженности электрического поля E'_k, E''_k (2.16) с самого начала формально рассматриваются как тензорные и векторные функции компонент деформации ε'_{kl}, ε''_{kl} и индукции электрического поля D'_k, D''_k. Затем используется условие инвариантности амплитудных связей относительно преобразования сдвига по времени (2.17) и следующая теорема о разложении векторных полей.

Теорема. Пусть $\vec{X}$ – элемент N-мерного векторного пространства E_N с внутренним произведением $\vec{A} \otimes \vec{B}$, $\vec{Y}\left(\vec{X}\right)$ – непрерывно-дифференцируемое отображение $E_N \to E_N$, а $F\left(\vec{X}\right)$ – скалярная непрерывно-дифференцируемая функция. Тогда любое решение уравнения

$$\vec{X} \otimes \vec{Y}\left(\vec{X}\right) = F\left(\vec{X}\right) \tag{2.61}$$

представимо в виде

$$\begin{gathered}
\vec{Y}(\vec{X}) = grad\Psi(\vec{X}) + \vec{U}(\vec{X}); \\
\Psi\left(\vec{X}\right) = \int\limits_0^1 F\left(\lambda\vec{X}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}; \\
U_i\left(\vec{X}\right) = \int\limits_0^1 \lambda X_j \left[\frac{\partial Y_i\left(\lambda\vec{X}\right)}{\partial\left(\lambda X_j\right)} - \frac{\partial Y_j\left(\lambda\vec{X}\right)}{\partial\left(\lambda X_i\right)}\right] d\lambda; \\
\vec{U}(\vec{X}) \otimes \vec{X} = 0.
\end{gathered} \tag{2.62}$$

Утверждение теоремы проверяется дифференцированием равенства

$$\int\limits_0^1 \vec{X} \otimes \vec{Y}\left(\lambda\vec{X}\right) d\lambda = \Psi\left(\vec{X}\right), \tag{2.63}$$

которое получается из (2.61), если произвести замену $\vec{X}$ на $\lambda\vec{X}$ и воспользоваться обозначением функции $\Psi\left(\vec{X}\right)$ из (2.62).

Обратимся к равенствам (2.33) и (2.34)

$$\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k = \bar{D}\left(\varepsilon'_{kl},\ \varepsilon''_{kl},\ D'_l,\ D''_l\right), \tag{2.64}$$

$$\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k = \bar{U}\left(\varepsilon'_{kl},\ \varepsilon''_{kl},\ D'_l,\ D''_l\right). \tag{2.65}$$

Поскольку на амплитудные зависимости (2.16) накладывается условие инвариантности относительно преобразования сдвига по времени, функции диссипации $\bar{D}$ и накопления $\bar{U}$, фигурирующие в правых частях равенств (2.64) и (2.65), удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.20).

Обозначим $\vec{X} = \left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k\right)$, $\vec{Y} = \left(\sigma''_{ij}, -\sigma'_{ij}, E''_k, -E'_k\right)$. Тогда решение уравнения (2.64) в силу приведенной выше теоремы представляется в виде

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= -\frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}} - D''_{ij}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} + D'_{ij}, \\ E'_k &= -\frac{\partial D}{\partial D''_k} - R''_k, \quad E''_k = \frac{\partial D}{\partial D'_k} + R'_k, \end{aligned} \tag{2.66}$$

где функция D определяется соотношением

$$D = \int_0^1 \bar{D}\left(\lambda\varepsilon'_{ij},\ \lambda\varepsilon''_{ij},\ \lambda D'_k,\ \lambda D''_k\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{2.67}$$

(см. (2.9)). Для функций D'_{ij}, D''_{ij}, R'_k, R''_k имеем

$$D'_{ij}\varepsilon'_{ij} + D''_{ij}\varepsilon''_{ij} + R'_k D'_k + R''_k D''_k = 0. \tag{2.68}$$

Подставляя (2.66) в уравнение (2.65), получаем

$$-D''_{ij}\varepsilon'_{ij} + D'_{ij}\varepsilon''_{ij} - R''_k D'_k + R'_k D''_k = \bar{U}\left(\varepsilon'_{kl},\, \varepsilon''_{kl},\, D'_l,\, D''_l\right). \tag{2.69}$$

Здесь учтено, что функция D (2.67), как и функция $\bar{D}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.20).

Приняв $\vec{X} = \left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k\right)$, $\vec{Y} = \left(-D''_{ij}, D'_{ij}, -R''_k, R'_k\right)$ и снова воспользовавшись приведенной выше теоремой, приходим к решению уравнения (2.69)

$$\begin{aligned} D'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + g''_{ij}, \quad D''_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - g'_{ij}, \\ R'_k &= \frac{\partial U}{\partial D''_k} + g''_k, \quad R''_k = -\frac{\partial U}{\partial D'_k} - g'_k. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Функция $\bar{U}$ определяется соотношением

$$U = \int_0^1 \bar{U}\left(\lambda\varepsilon'_{ij},\, \lambda\varepsilon''_{ij},\, \lambda D'_k,\, \lambda D''_k\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{2.71}$$

(см. (2.9)) и поэтому также удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.20).

Объединяя (2.66) и (2.70), получаем совместное решение уравнений (2.64) и (2.65) в виде [109]

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}} + g'_{ij}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} + g''_{ij}, \\
E'_k &= \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k} + g'_k, \ \ E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k} + g''_k.
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Функции g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k удовлетворяют условиям

$$
\begin{aligned}
g'_{ij}\varepsilon'_{ij} + g''_{ij}\varepsilon''_{ij} + g'_k D'_k + g''_k D''_k = 0, \\
g''_{ij}\varepsilon'_{ij} - g'_{ij}\varepsilon''_{ij} + g''_k D'_k - g'_k D''_k = 0,
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

причем первое из них является следствием теоремы, примененной к уравнению (2.69), а второе – следствием уравнений (2.68), (2.70) и (2.20).

Подставим уравнения (2.72) в (2.64) и (2.65), учитывая при этом равенства (2.20) и (2.73). В результате получаем выражения для функций диссипации $\bar{D}$ и накопления $\bar{U}$ через потенциалы соответственно D и U

$$
\begin{aligned}
\bar{D} &= \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}\varepsilon'_{ij} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}\varepsilon''_{ij} + \frac{\partial D}{\partial D'_k}D'_k + \frac{\partial D}{\partial D''_k}D''_k, \\
\bar{U} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}}\varepsilon'_{ij} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}}\varepsilon''_{ij} + \frac{\partial U}{\partial D'_k}D'_k + \frac{\partial U}{\partial D''_k}D''_k.
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

Таким образом, условия (2.73) приводят к тому, что функции g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k в уравнениях (2.72) являются “безмощностными”. Они не дают никакого вклада ни в функцию диссипации, ни в функцию накопления. Используя третье из соотношений (2.62) и условия инвариантности относительно преобразования сдвига по времени в дифференциальной форме (2.18), можно показать, что достаточными условиями равенств

$$
g'_{ij} = 0, \quad g''_{ij} = 0, \quad g'_k = 0, \quad g''_k = 0 \tag{2.75}
$$

и представления тем самым амплитудных уравнений в потенциалах

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \\
E'_k &= \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k}, \quad E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k}
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

являются следующие условия симметрии

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}-\frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}=\frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}},\\ \frac{\partial E'_k}{\partial D'_l}-\frac{\partial E''_k}{\partial D''_l}=\frac{\partial E'_l}{\partial D'_k}-\frac{\partial E''_l}{\partial D''_k},\\ \frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial D'_k}-\frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial D''_k}=\frac{\partial E'_k}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial E''_k}{\partial\varepsilon''_{ij}}.\end{gathered}\tag{2.77}$$

Дифференцируя равенства (2.76), легко убедиться, что эти условия являются и необходимыми.

Подобным образом можно получить аналогичные результаты для других наборов независимых переменных. Соответствующая консервативная характеристика, как отмечалось в §2, находится путем расписывания выражения для функции диссипации с использованием соответствующих условий инвариантности относительно преобразования сдвига по времени в дифференциальной форме. Например, в случае зависимостей (2.45) совместное решение уравнений

$$\begin{gathered}\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij}-\sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}+D'_kE''_k-D''_kE'_k=\bar D\left(\varepsilon'_{kl},\,\varepsilon''_{kl},\,E'_l,\,E''_l\right),\\ \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}+\sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}-D'_kE'_k-D''_kE''_k=\bar H\left(\varepsilon'_{kl},\,\varepsilon''_{kl},\,E'_l,\,E''_l\right),\end{gathered}\tag{2.78}$$

где функции $\bar D$ и $\bar H$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.49), однозначно определено и представимо в виде

$$\begin{gathered}\sigma'_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial D}{\partial\varepsilon''_{ij}},\quad \sigma''_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon''_{ij}}+\frac{\partial D}{\partial\varepsilon'_{ij}},\\ D'_k=-\frac{\partial U}{\partial E'_k}+\frac{\partial D}{\partial E''_k},\quad D''_k=-\frac{\partial U}{\partial E''_k}-\frac{\partial D}{\partial E'_k}\end{gathered}\tag{2.79}$$

тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия симметрии

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}-\frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}=\frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}},\\ \frac{\partial D'_k}{\partial E'_l}-\frac{\partial D''_k}{\partial E''_l}=\frac{\partial D'_l}{\partial E'_k}-\frac{\partial D''_l}{\partial E''_k},\\ \frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial E'_k}-\frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial E''_k}=-\left(\frac{\partial D'_k}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial D''_k}{\partial\varepsilon''_{ij}}\right),\end{gathered}\tag{2.80}$$

при этом

$$
\begin{aligned}
H &= \int\limits_0^1 \bar{H}\left(\lambda\varepsilon'_{ij},\, \lambda\varepsilon''_{ij},\, \lambda E'_k,\, \lambda E''_k\right)\frac{d\lambda}{\lambda},\\
D &= \int\limits_0^1 \bar{D}\left(\lambda\varepsilon'_{ij},\, \lambda\varepsilon''_{ij},\, \lambda E'_k,\, \lambda E''_k\right)\frac{d\lambda}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{2.81}
$$

В общем случае совместное решение уравнений (2.78) содержит слагаемые, аналогичные функциям $g'_{ij},\ g''_{ij},\ g'_k,\ g''_k$ в уравнениях (2.72). Однако они также не дают никакого вклада в диссипативную $\bar{D}$ и консервативную $\bar{H}$ характеристики. Сказать что-либо больше об этих функциях, как и о функциях $g'_{ij},\ g''_{ij},\ g'_k,\ g''_k$ из (2.72), нельзя.

Выше отмечалось, что если амплитудные уравнения получаются как результат усреднения по Галеркину (первая интерпретация амплитудных уравнений) каких-либо общих определяющих уравнений, условие инвариантности амплитуд относительно сдвига по времени выполняется автоматически. При этом возникает естественный вопрос о выполнении условий симметрии типа (2.77) и (2.80). Если в качестве общих выступают кратноинтегральные соотношения электровязкоупругости, для ядер которых постулируется "принцип взаимности", равенства (2.77) или (2.80) выполняются. Более того, в силу (2.12) имеют место более сильные равенства, например $\dfrac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}} = \dfrac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}},\ \dfrac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}} = \dfrac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}}$ и т.п., являющиеся достаточными, но не необходимыми для равенств (2.77). Поэтому условия симметрии (2.77), как менее ограничительные, допускают более широкий класс амплитудных зависимостей, представимых в потенциалах, чем предположение о выполнении "принципа взаимности"для ядер общей кратноинтегральной теории электровязкоупругости.

В общем случае вопрос о симметрии типа (2.77) или (2.80), как и вопрос о выполнении "принципа взаимности" в общей теории, остается открытым. Несмотря на это, любые амплитудные уравнения, получаемые как результат усреднения по Галеркину общих уравнений, допускают выделение потенциальной части. Оставшиеся члены этих уравнений типа функций $g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k$ в (2.72) не будут влиять на диссипацию и накопление и поэтому, как это делается в подобных случаях в классической континуальной механике, могут быть отброшены.

Учитывая в уравнениях (2.76) и (2.79) зависимость потенциалов от переменных типа (2.38) и (2.51), легко получить амплитудные уравнения в виде (2.44) и (2.59).

Постулируемая в §2 симметрия коэффициентов по индексам в данном случае удовлетворяется автоматически.

В линейном случае уравнения (2.76) и (2.79) являются точными.

Приведенные в этом и предыдущих параграфах результаты получены вне зависимости от типа материальной симметрии среды. При их использовании для сред с конкретной симметрией строения можно исходить из тех или иных представлений тензорных коэффициентов уравнений (2.44) и (2.59) или представлений скалярных функций тензорных аргументов в уравнениях (2.76) и (2.79). Вместе с тем, практический интерес представляют такие амплитудные определяющие уравнения, которые можно записать в терминах "концепции амплитудно-зависимых комплексных модулей (характеристик)", описанной в конце §1. В связи с этим дальнейшее изложение материала будет подчинено выяснению условий, при которых эта "концепция..." имеет место.

§ 4. Сводка соотношений для материалов без пьезоэффекта

Все приведенные в предыдущих параграфах общие соотношения остаются в силе и для неупругих пассивных (непьезоэлектрических) материалов. При этом, если интересоваться только механикой, в этих соотношениях необходимо отбросить электрические и пьезоэлектрические величины. Приведем сводку основных соотношений.

Одночастотное приближение стационарных колебаний

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}\cos\omega t - \sigma''_{ij}\sin\omega t, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t \tag{2.82}$$

описывается тензорными функциями

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right), \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right), \tag{2.83}$$

которые должны удовлетворять условию инвариантности относительно преобразования сдвига по времени (2.17). Это условие можно записать в виде равенств

$$\begin{cases} \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right)\cos\varphi - \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right)\sin\varphi = \\ \qquad = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}\cos\varphi - \varepsilon''_{kl}\sin\varphi, \varepsilon'_{kl}\sin\varphi + \varepsilon''_{kl}\cos\varphi\right), \\ \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right)\sin\varphi + \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right)\cos\varphi = \\ \qquad = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}\cos\varphi - \varepsilon''_{kl}\sin\varphi, \varepsilon'_{kl}\sin\varphi + \varepsilon''_{kl}\cos\varphi\right), \end{cases} \tag{2.84}$$

которые путем исключения параметра φ и в предположении дифференцируемости функций (2.83) сводятся к первому дифференциальному равенству (2.18) или

$$\begin{cases} \sigma'_{ij} = \dfrac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} - \dfrac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl}, \\ \sigma''_{ij} = \dfrac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} - \dfrac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl}. \end{cases} \tag{2.85}$$

Функции диссипации и накопления

$$\bar{D} = \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}, \quad \bar{U} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}, \tag{2.86}$$

как функции независимых переменных, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} = 0 \tag{2.87}$$

и для материалов с “симметричными” нелинейными свойствами являются функциями вида

$$\bar{D} = \bar{D}\left(\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}\right), \quad \bar{U} = \bar{U}\left(\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}\right), \tag{2.88}$$

т. е. скалярными функциями тензора 4-го ранга

$$\Gamma_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}. \tag{2.89}$$

Функции (2.88) инвариантны относительно преобразования сдвига по времени, т. е. замены

$$\varepsilon'_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\cos\varphi - \varepsilon''_{kl}\sin\varphi, \quad \varepsilon''_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\sin\varphi + \varepsilon''_{kl}\cos\varphi, \tag{2.90}$$

а также относительно замены (2.41)

$$\varepsilon'_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\cos\varphi + \varepsilon''_{kl}\sin\varphi, \quad \varepsilon''_{kl} \to \varepsilon'_{kl}\sin\varphi - \varepsilon''_{kl}\cos\varphi, \tag{2.91}$$

которая из (2.90) не следует.

В результате замены (2.90) полные амплитуды $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ деформаций не изменяются, а фазы $\varphi^{\varepsilon}_{ij}$ деформаций меняются на $\varphi^{\varepsilon}_{ij} + \varphi$. Замена (2.91) также не изменяет амплитуд деформаций $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$. Что касается фаз деформаций $\varphi^{\varepsilon}_{ij}$, то они меняются на $-\varphi^{\varepsilon}_{ij} + \varphi$. “Физическое” содержание замены (2.91) раскрывается тем, что зависимость функций диссипации и накопления (2.88) от фаз колебаний $\varphi^{\varepsilon}_{ij}$ реализуется в виде зависимости от косинусов сдвигов этих фаз $\cos\left(\varphi^{\varepsilon}_{ij} - \varphi^{\varepsilon}_{kl}\right)$, которые при замене (2.91) не изменяются.

Для материалов с “симметричными” нелинейными свойствами общая структура амплитудных уравнений в виде их комплексности в широком смысле

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}\left(;\right)\tilde{\varepsilon}_{kl}, \quad \tilde{C}_{ijkl}\left(;\right) = C'_{ijkl}\left(;\right) + iC''_{ijkl}\left(;\right), \tag{2.92}$$

где $C'_{ijkl}\left(;\right)$, $C''_{ijkl}\left(;\right)$ – функции аргументов (2.89), является следствием условия инвариантности зависимостей (2.83) относительно преобразования сдвига по времени и постулирования симметрии

$$C'_{ijkl}\left(;\right) = C'_{klij}\left(;\right), \quad C''_{ijkl}\left(;\right) = C''_{klij}\left(;\right). \tag{2.93}$$

В линейном случае (см. замечание 4 §2) структура амплитудных уравнений полностью определяется условием инвариантности относительно преобразования сдвига по времени.

Остается в силе все сказанное в §3 относительно представления амплитудных уравнений через потенциалы.

Совместное решение двух уравнений

$$\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}, = \bar{D}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right), \quad \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}, = \bar{U}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right) \tag{2.94}$$

относительно механических напряжений представимо в виде

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}} + g'_{ij}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} + g''_{ij}. \tag{2.95}$$

Поскольку правые части в (2.94) удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.87), а потенциалы U и D в (2.95) находятся по ним согласно формул

$$U = \int\limits_0^1 \bar{U}\left(\lambda\varepsilon'_{ij}, \lambda\varepsilon''_{ij}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad D = \int\limits_0^1 \bar{D}\left(\lambda\varepsilon'_{ij}, \lambda\varepsilon''_{ij}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{2.96}$$

то U и D также удовлетворяют уравнению (2.87).

Составляющие g'_{ij}, g''_{ij}, как тензорные функции

$$g'_{ij} = g'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right), \quad g''_{ij} = g''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right), \tag{2.97}$$

являются “безмощностными”. Они не дают вклада ни в диссипацию, ни в накопление механической энергии, т. е. удовлетворяют равенствам

$$g''_{ij}\varepsilon'_{ij} - g'_{ij}\varepsilon''_{ij} = 0, \quad g'_{ij}\varepsilon'_{ij} + g''_{ij}\varepsilon''_{ij} = 0. \tag{2.98}$$

Необходимым и достаточным условием того, что $g'_{ij} = 0$, $g''_{ij} = 0$, является равенство (2.77)

$$\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}} - \frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}} = \frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}}. \tag{2.99}$$

Если это равенство выполняется, то автоматически выполняется и равенство

$$\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}} + \frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}} = \frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}}. \tag{2.100}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать каждое из уравнений (2.85) по ε'_{mn} и ε''_{mn}. Комбинируя получаемые таким образом равенства, будем иметь

$$\begin{gathered}
2\left[\left(\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon''_{mn}} + \frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon'_{mn}}\right) - \left(\frac{\partial\sigma'_{mn}}{\partial\varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial\sigma''_{mn}}{\partial\varepsilon'_{ij}}\right)\right] = \\
= \varepsilon''_{kl}\frac{\partial}{\partial\varepsilon'_{kl}}\left[\left(\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon'_{mn}} - \frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon''_{mn}}\right) - \left(\frac{\partial\sigma'_{mn}}{\partial\varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial\sigma''_{mn}}{\partial\varepsilon''_{ij}}\right)\right] - \\
-\varepsilon'_{kl}\frac{\partial}{\partial\varepsilon''_{kl}}\left[\left(\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon'_{mn}} - \frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon''_{mn}}\right) - \left(\frac{\partial\sigma'_{mn}}{\partial\varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial\sigma''_{mn}}{\partial\varepsilon''_{ij}}\right)\right].
\end{gathered} \tag{2.101}$$

Аналогично показывается, что выполнение равенства (2.100) влечет за собой автоматическое выполнение равенства (2.99).

Сказать что-либо больше о составляющих g'_{ij} и g''_{ij} в (2.95) нельзя, разве только то, что они удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2.85).

Если в уравнениях (2.95) при $g'_{ij} = 0$ и $g''_{ij} = 0$ учесть зависимость потенциалов от аргументов (2.89), придем к амплитудным уравнениям (2.92) с автоматическим выполнением симметрии по индексам (2.93).

Для упрощения дальнейших выкладок введем оператор

$$A[u] = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} - \frac{\partial u}{\partial \varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl}, \tag{2.102}$$

который, очевидно, имеет такие свойства:

$$\begin{gathered} A[u \pm v] = A[u] \pm A[v], \quad A[uv] = A[u]\,v + uA[v], \\ A[f(I_k)] = \sum_l \frac{\partial f}{\partial I_l} A[I_l]. \end{gathered} \tag{2.103}$$

Здесь u и v – дифференцируемые функции переменных ε'_{ij}, ε''_{ij}, а f – функция переменных $I_k\left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}\right)$. Тогда уравнения (2.85) примут вид

$$\sigma'_{ij} = A\left[\sigma''_{ij}\right], \quad \sigma''_{ij} = -A\left[\sigma'_{ij}\right], \tag{2.104}$$

а для функций диссипации и накопления можно записать

$$A\left[\bar{D}\right] = 0, \quad A\left[\bar{U}\right] = 0. \tag{2.105}$$

§ 5. Неупругий изотропный материал

В этом и следующем параграфах приводятся примеры построения замкнутых амплитудных теорий для конкретных сред. Первым, как наиболее простой, рассматривается случай неупругого изотропного материала, который, как известно, пьезоактивным не является. Изотропные материалы широко используются в качестве составных элементов пьезоэлектрических конструкций. Сразу отметим, что представленные в данном параграфе окончательные результаты по структуре амплитудных уравнений не являются новыми и хорошо известны в литературе [148, 149, 161, 220 и др.], однако получены вследствие других соображений, в частности, без привлечения гипотезы о простых состояниях [148].

5.1. В данном пункте в качестве исходных будем использовать амплитудные уравнения в потенциалах (2.95), пренебрегая в них “безмощностными” составляющими. Для упрощения выкладок перепишем эти уравнения в комплексной форме

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon'_{ij}} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \tag{2.106}$$

где

$$\tilde{U} = U + iD, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij}. \tag{2.107}$$

Потенциалы U и D , как и функции накопления и диссипации $\bar{U}$ и $\bar{D}$, с которыми они связаны соотношениями (2.96), удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.87)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} = 0 \tag{2.108}$$

и поэтому (см. (2.20) и (2.25)) являются в общем случае функциями вида

$$U = U\left(\Gamma_{ijkl}, \hat{\Gamma}_{ijkl}\right), \quad D = D\left(\Gamma_{ijkl}, \hat{\Gamma}_{ijkl}\right), \tag{2.109}$$

где

$$\Gamma_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}, \quad \hat{\Gamma}_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{kl} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl}. \tag{2.110}$$

Величины (2.110) не являются независимыми и связаны первым из равенств (2.26). Для материалов с “симметричными” нелинейными свойствами зависимости (2.109) упрощаются (см. замечание 1 § 2):

$$U = U\left(\Gamma_{ijkl}\right), \quad D = D\left(\Gamma_{ijkl}\right). \tag{2.111}$$

Поскольку U и D – скаляры, их зависимость от тензоров (2.110) может быть реализована только через совместные инварианты этих тензоров, отвечающих тому или иному типу симметрии среды. Вместе с тем, структура тензоров (2.110) такова, что позволяет рассматривать функции U и D как скалярные функции двух симметричных тензоров второго ранга ε'_{ij}, ε''_{ij} и в качестве аргументов этих функций использовать соответствующие наборы совместных инвариантов тензоров ε'_{ij} и ε''_{ij}, отвечающих типу симметрии среды. Естественно, что в этом случае от функций U и D необходимо потребовать удовлетворения дифференциальному уравнению (2.108). Перейдем к изотропным материалам. Из всевозможных совместных инвариантов тензоров ε'_{ij} и ε''_{ij}, отвечающих изотропии, возьмем только линейные и квадратичные инварианты

$$\varepsilon'_{kk}, \;\; \varepsilon''_{kk}, \;\; \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ji}, \;\; \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ji}, \;\; \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{ji}. \tag{2.112}$$

Далее нам будет удобнее использовать инварианты (2.112) в виде

$$\begin{gathered} I_1 = \varepsilon'_{kk}, \quad I_2 = \varepsilon''_{kk}, \quad I_3 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ji} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ji}, \\ I_4 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{ji} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{ji}, \quad I_5 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ji} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ji}. \end{gathered} \tag{2.113}$$

Функции U и D, как функции инвариантов (2.113), должны удовлетворять дифференциальному уравнению (2.108), которое с учетом выражений для производных

$$\begin{aligned}&\frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon'_{kl}} = \delta_{ki}\delta_{il}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \delta_{ki}\delta_{il}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon'_{kl}} = 2\varepsilon'_{kl}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon''_{kl}} = 2\varepsilon''_{kl},\\ &\frac{\partial I_4}{\partial \varepsilon'_{kl}} = 2\varepsilon''_{kl}, \quad \frac{\partial I_4}{\partial \varepsilon''_{kl}} = 2\varepsilon'_{kl}, \quad \frac{\partial I_5}{\partial \varepsilon'_{kl}} = 2\varepsilon'_{kl}, \quad \frac{\partial I_5}{\partial \varepsilon''_{kl}} = -2\varepsilon''_{kl}\end{aligned} \tag{2.114}$$

принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_2} I_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} I_2 + 2\frac{\partial \Phi}{\partial I_4} I_5 - 2\frac{\partial \Phi}{\partial I_5} I_4 = 0. \tag{2.115}$$

Заметим, что инвариант I_3, как аргумент функции Φ, фигурирует в уравнении (2.115) в виде параметра. Уравнению (2.115) отвечает характеристическая система

$$\frac{dI_2}{I_1} = -\frac{dI_1}{I_2} = \frac{dI_4}{2I_5} = -\frac{dI_5}{2I_4}, \tag{2.116}$$

первыми интегралами которой являются

$$J_1 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 + I_2^2\right), \tag{2.117}$$

$$J_3 = 2I_1 I_2 I_4 + \left(I_1^2 - I_2^2\right) I_5, \quad J_4 = \left(I_1^2 - I_2^2\right) I_4 - 2I_1 I_2 I_5. \tag{2.118}$$

Таким образом, потенциалы U и D с учетом обозначения

$$J_2 = \frac{1}{2} I_3 \tag{2.119}$$

зависят от четырех аргументов J_1, J_2, J_3 и J_4:

$$U = U\left(J_1, J_2, J_3, J_4\right), \quad D = D\left(J_1, J_2, J_3, J_4\right). \tag{2.120}$$

Заметим, что эти аргументы являются следующими инвариантами тензоров (2.110):

$$J_1 = \frac{1}{2}\Gamma_{iijj}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\Gamma_{ijij}, \quad J_3 = 2\Gamma_{iikl}\Gamma_{kljj} - \Gamma_{iijj}\Gamma_{klkl}, \tag{2.121}$$

$$J_4 = 2\Gamma_{ijkk}\hat{\Gamma}_{llij}. \tag{2.122}$$

Перейдем к уравнениям (2.106), в которых учтем зависимости (2.120). После необходимых выкладок с использованием выражений для производных (2.114) получаем

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij} = \left[\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{1}{J_1}\left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_3} - i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_4}\right)(J_3 + iJ_4)\right]\tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_2}\tilde{\varepsilon}_{ij} + \\ +2\left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_3} + i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_4}\right)\tilde{\varepsilon}_{kk}^2\left(\varepsilon'_{ij} - i\varepsilon''_{ij}\right),\end{gathered} \tag{2.123}$$

где обозначено

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}. \tag{2.124}$$

Из (2.123) следует, что в изотропном случае уравнения в потенциалах (2.106) допускают концепцию амплитудно-зависимых характеристик тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_3} + i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_4} = 0 \tag{2.125}$$

или равносильные ему действительные равенства (см. (2.107))

$$\frac{\partial U}{\partial J_3} = \frac{\partial D}{\partial J_4}, \quad \frac{\partial U}{\partial J_4} = -\frac{\partial D}{\partial J_3}. \tag{2.126}$$

Заметим, что равенства (2.126) – это известные из теории функций комплексного переменного условия Коши-Римана аналитичности функции $U + iD$ относительно комплексного аргумента $J_3 + iJ_4$.

С учетом (2.125) уравнения (2.123) принимают вид

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \left[\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{2}{J_1}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_3}(J_3 + iJ_4)\right]\tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_2}\tilde{\varepsilon}_{ij}. \tag{2.127}$$

Для материалов с “симметричными” нелинейными свойствами потенциалы имеют вид (2.111) и поэтому инвариантны к преобразованию (2.91). Из (2.121) и (2.122) видно, что в результате этого преобразования аргументы J_1, J_2 и J_3 остаются постоянными, тогда как аргумент J_4 меняет знак на противоположный. Поэтому требуем

$$\tilde{U}(J_1,\, J_2,\, J_3, -J_4) = \tilde{U}(J_1,\, J_2,\, J_3, J_4). \tag{2.128}$$

Но тогда из (2.125) получаем

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4} = 0. \tag{2.129}$$

Таким образом, имеем следующий **результат**: для изотропных материалов с "симметричными" нелинейными свойствами уравнения в потенциалах (2.106) или в обычной записи

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \;\; \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} \tag{2.130}$$

допускают комплексную форму представления

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\lambda}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \tilde{\mu}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} \tag{2.131}$$

с амплитудно-зависимыми комплексными модулями $\tilde{\lambda}\,(;)$ и $\tilde{\mu}\,(;)$ тогда и только тогда, когда потенциалы U и D являются функциями вида $U = U\,(J_1,\, J_2)\,,\;\; D = (J_1,\, J_2)\,.$ При этом

$$\tilde{\lambda}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1}, \quad \tilde{\mu}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_2}, \quad \tilde{U} = U + iD \tag{2.132}$$

и выполняется условие взаимности

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}\,(;)}{\partial J_2} = \frac{\partial \tilde{\mu}\,(;)}{\partial J_1}. \tag{2.133}$$

Экспериментальному определению подлежат функции накопления и диссипации

$$\bar{U}\,(J_1,\, J_2) = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}, \quad \bar{D}\,(J_1,\, J_2) = \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}, \tag{2.134}$$

после чего комплексный потенциал находится по формуле

$$\tilde{U} = \int\limits_0^1 \tilde{\Phi}\left(\lambda^2 J_1, \lambda^2 J_2\,\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \bar{\Phi} = \bar{U} + i\bar{D}. \tag{2.135}$$

Линейную теорию получаем, когда функции (2.134) аппроксимируются линейными функциями инвариантов J_1 и J_2.

5.2. В данном пункте приводится пример построения замкнутой амплитудной теории, когда в качестве исходных выступают те или иные представления тензорных функций, тип симметрии которых отвечает материальной симметрии среды, а затем накладываются другие ограничения, в частности, условие инвариантности относительно преобразования сдвига по времени [106].

Как и в предыдущем пункте, рассмотрим изотропный материал. В качестве зависимостей (2.83)

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, \delta_{ij}\right), \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, \delta_{ij}\right), \tag{2.136}$$

в число аргументов которых включен образующий тензор изотропии δ_{ij}, используем общее представление квазилинейных изотропных функций [157]

$$\sigma'_{ij} = \Omega'_1 \cdot \delta_{ij} + \ \Omega'_2 \cdot \varepsilon'_{ij} + \Omega'_3 \cdot \varepsilon''_{ij}, \quad \sigma''_{ij} = \Omega''_1 \cdot \delta_{ij} + \ \Omega''_2 \cdot \varepsilon'_{ij} + \Omega''_3 \cdot \varepsilon''_{ij} \tag{2.137}$$

со скалярными коэффициентами Ω'_m и Ω''_m $(m = 1,\ 2,\ 3)$, зависящими только от линейных и квадратичных совместных инвариантов тензоров ε'_{ij} и ε''_{ij}, т.е. от инвариантов (2.112), которые, как и в п. 5.1, возьмем в виде (2.113).

Выбор в качестве исходных зависимостей (2.137) продиктован стремлением обобщить концепцию комплексных характеристик на физически нелинейный материал.

От тензорных функций (2.137) требуем выполнения условий инвариантности относительно преобразования сдвига по времени в виде дифференциальных равенств (2.104), которые с учетом обозначения (2.107) и с целью упрощения выкладок запишем в виде одного комплексного равенства

$$A\left[\tilde{\sigma}_{ij}\right] = i\tilde{\sigma}_{ij}. \tag{2.138}$$

Перепишем также в комплексном виде и соотношения (2.137):

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\Omega}_1 \cdot \delta_{ij} + \ \tilde{\Omega}_2 \cdot \varepsilon'_{ij} + \tilde{\Omega}_3 \cdot \varepsilon''_{ij}. \tag{2.139}$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{\Omega}_m = \Omega'_m + i\,\Omega''_m \quad (m = 1,\ 2,\ 3)\,. \tag{2.140}$$

Отметим, что действие оператора A (2.102) на функцию переменных (2.113) определяется левой частью равенства (2.115). Кроме того, $A\left[\varepsilon'_{ij}\right] = -\varepsilon''_{ij}$, $A\left[\varepsilon''_{ij}\right] = \varepsilon'_{ij}$.

Подставив (2.139) в (2.138) и приравняв скалярные коэффициенты при δ_{ij}, ε'_{ij} и ε''_{ij}, получаем уравнения для функций (2.140):

$$A\left[\tilde{\Omega}_1\right] = i\tilde{\Omega}_1, \tag{2.141}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A\left[\tilde{\Omega}_2\right] + \tilde{\Omega}_3 = i\tilde{\Omega}_2 \\ A\left[\tilde{\Omega}_3\right] - \tilde{\Omega}_2 = i\tilde{\Omega}_3. \end{array}\right. \tag{2.142}$$

В результате элементарных преобразований система уравнений (2.142) сводится к виду

$$\left\{\begin{array}{l} A\left[\tilde{\Omega}_2 + i\tilde{\Omega}_3\right] = 2i\left(\tilde{\Omega}_2 + i\tilde{\Omega}_3\right) \\ A\left[\tilde{\Omega}_2 - i\tilde{\Omega}_3\right] = 0. \end{array}\right. \tag{2.143}$$

Из второго уравнения системы (2.143) и соотношений (2.115) – (2.119) следует, что функция

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}_2 - i\tilde{\Omega}_3\right) \tag{2.144}$$

является функцией четырех инвариантов J_1, J_2, J_3, J_4 из (2.117) – (2.119).

Для решения уравнения (2.141) и первого уравнения системы (2.143) сделаем замену переменных. В качестве новых переменных возьмем только что упомянутые инварианты J_1, J_2, J_3, J_4 и некоторую функцию инвариантов (2.113) $J = J\left(I_1,\, I_2,\, I_3,\, I_4,\, I_5\right)$. Естественно, что инварианты J_k $(k = 1,\, 2, 3, 4)$ и инвариант J должны быть функционально независимыми. Оператор $A\left[\tilde{\Omega}\right]$, выраженный через новые переменные, обозначим $A_1\left[\tilde{\Omega}\right]$. Тогда, учитывая свойства (2.103), для функции $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}\left(J_1,\, J_2,\, J_3,\, J_4,\, J\,\right)$ получаем

$$\begin{gathered} A_1\left[\tilde{\Omega}\right] = \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial J_1}A\left[J_1\right] + \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial J_2}A\left[J_2\right] + \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial J_3}A\left[J_3\right] + \\ + \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial J_4}A\left[J_4\right] + \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial J}A\left[J\right] = \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial J}A\left[J\right]. \end{gathered} \tag{2.145}$$

Если выбрать J так, чтобы $A\left[J\right] = 1$ (очевидно, что в этом случае условие функциональной независимости инвариантов J_1, J_2, J_3, J_4 и J

удовлетворяется), то уравнение (2.141) и первое уравнение из (2.143) примут соответственно вид

$$\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial J} = i\tilde{\Omega} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial J} = 2i\tilde{\Omega}, \tag{2.146}$$

а их решения – вид

$$\tilde{\Omega} = \tilde{c}\cdot(\cos J + i\sin J) \quad \text{и} \quad \tilde{\Omega} = \tilde{c}\cdot(\cos 2J + i\sin 2J), \tag{2.147}$$

где $\tilde{c} = \tilde{c}\,(J_1, J_2, J_3, J_4\,)$ – произвольная комплекснозначная функция инвариантов (2.117) – (2.119). Выбор инварианта J может быть относительно произвольным. Пусть J зависит только от I_1 и I_2 из (2.113) и удовлетворяет уравнению $A\,[J] = 1$, т.е. $\dfrac{\partial J}{\partial I_2}I_1 - \dfrac{\partial J}{\partial I_1}I_2 = 1$. Общее решение этого уравнения

$$J = \arcsin\frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}} + g\left(I_1^2 + I_2^2\right),$$

где g – произвольная функция. Отметим, что нами везде рассматривается общий случай, когда $I_1^2 + I_2^2 \neq 0$. Положим $g = 0$. Тогда

$$J = \arcsin\frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}} \tag{2.148}$$

и из (2.147) получаем общие решения уравнений (2.141) и (2.143)

$$\begin{gathered}\tilde{\Omega}_1 = \tilde{c}_1\cdot(I_1 + iI_2) = \tilde{c}_1\cdot\tilde{\varepsilon}_{kk},\\ \frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}_2 + i\tilde{\Omega}_3\right) = \tilde{c}_2\cdot\left(I_1^2 - I_2^2 + i2I_1I_2\right) = \tilde{c}_2\cdot\tilde{\varepsilon}_{kk}^2,\end{gathered} \tag{2.149}$$

где $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ – произвольные комплекснозначные функции инвариантов J_1, J_2, J_3, J_4 из (2.117) – (2.119). В (2.149) учтены обозначения (2.113) и (2.124).

Из (2.144) и (2.149) имеем

$$\tilde{\Omega}_2 = \tilde{\mu} + \tilde{c}_2\cdot\tilde{\varepsilon}_{kk}^2, \quad \tilde{\Omega}_3 = i\left(\tilde{\mu} - \tilde{c}_2\cdot\tilde{\varepsilon}_{kk}^2\right). \tag{2.150}$$

Таким образом, требование инвариантности исходных представлений (2.137) или (2.139) к преобразованию сдвига по времени сводит их к виду

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{c}_1\cdot\tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \tilde{\mu}\cdot\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{c}_2\cdot\tilde{\varepsilon}_{kk}^2\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}, \tag{2.151}$$

где $\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \varepsilon'_{ij} - i\varepsilon''_{ij}$.

Обратимся к функциям накопления и диссипации (см. (2.36))

$$\bar{U} = Re\tilde{\Phi}, \quad \bar{D} = Im\tilde{\Phi}, \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}. \tag{2.152}$$

Если учесть (2.151), (2.113), (2.117) – (2.119), можно записать

$$\tilde{\Phi} = 2\tilde{c}_1 \cdot J_1 + 2\tilde{\mu} \cdot J_2 + \tilde{c}_2 \cdot (J_3 - iJ_4)\,. \tag{2.153}$$

Перейдем к установлению условий, при которых для уравнений (2.151) выполняется концепция амплитудно-зависимых комплексных модулей. Как и раньше, будем рассматривать материалы с "симметричными" нелинейными свойствами. Исследование уравнений (2.151), как и их применение, в случае материала с "несимметричными" нелинейными свойствами возможно, но без учета постоянной составляющей колебаний и её взаимосвязи с осциллирующими составляющими, будет неполным. Вместе с тем, сделаем следующие замечания.

Замечание 1. В предположении простой (монофазной) деформации [148], когда $\varepsilon''_{ij} = \alpha\varepsilon'_{ij} \quad (\alpha = const)$, выполняются равенства

$$J_3 = 4J_1J_2, \quad J_4 = 0 \tag{2.154}$$

и из (2.151) получаем известные в литературе [148, 149, 161, 220] упрощенные амплитудные уравнения

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{c}_1 \cdot \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \tilde{\mu}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu} + 2J_1 \cdot \tilde{c}_2 \tag{2.155}$$

с двумя комплексными модулями $\tilde{c}_1$ и $\tilde{\mu}_1$, зависящими от двух инвариантов J_1 и J_2 .

Замечание 2. Аппроксимируем уравнения (2.151) уравнениями

$$\hat{\tilde{\sigma}}_{ij} = \tilde{c}_0 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \tilde{\mu}_0 \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij}, \tag{2.156}$$

где $\tilde{c}_0 = c'_0 + ic''_0$, $\tilde{\mu}_0 = \mu'_0 + i\mu''_0$ – функции инвариантов J_1, J_2, J_3, J_4, и найдем $\tilde{c}_0$ и $\tilde{\mu}_0$ из условия

$$R = \left(\tilde{\sigma}_{ij} - \hat{\tilde{\sigma}}_{ij}\right)\left(\overline{\tilde{\sigma}_{ij} - \hat{\tilde{\sigma}}_{ij}}\right) \Rightarrow \min, \tag{2.157}$$

реализовав обычную процедуру метода наименьших квадратов.

Решение системы уравнений

$$\frac{\partial R}{\partial c'_0} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial c''_0} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \mu'_0} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \mu''_0} = 0 \tag{2.158}$$

в комплексном представлении имеет вид

$$\tilde{c}_0 = \tilde{c}_1 + \frac{\tilde{c}_2}{6\left(J_2 - \frac{1}{3}J_1\right)}\left[(4J_1J_2 - J_3) + iJ_4\right],$$
$$\tilde{\mu}_0 = \tilde{\mu} + \frac{\tilde{c}_2}{6\left(J_2 - \frac{1}{3}J_1\right)}\left[3J_3 - 4J_1^2 - 3iJ_4\right]. \tag{2.159}$$

Таким образом, в пределах точности метода наименьших квадратов амплитудные уравнения (2.151) представимы в терминах концепции амплитудно-зависимых комплексных модулей

$$\tilde{\sigma}_{ij} \approx \tilde{c}_0 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \tilde{\mu}_0 \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij}. \tag{2.160}$$

Легко проверить, что функции накопления и диссипации (2.152) в результате проведенной аппроксимации не изменяются.

Поскольку число фигурирующих в (2.151) определяющих функций больше числа аргументов (шесть действительных функций c_1', c_1'', μ', μ'', c_2', c_2'' четырех аргументов J_1, J_2, J_3, J_4), для этих функций следует определить некоторые функциональные зависимости. Отметим, что в частных случаях, рассмотренных в замечаниях 1 и 2, количество определяющих функций уменьшается автоматически вторым соотношением (2.155) и соотношениями (2.159).

Перейдем к материалам с “симметричными” нелинейными свойствами. Функции диссипации и накопления инвариантны к преобразованию (2.91). В результате этого преобразования аргумент J_4 меняет знак на противоположный, тогда как аргументы J_1, J_2 и J_3 остаются постоянными. Поэтому требуем (см. (2.152))

$$\tilde{\Phi}\left(J_1, J_2, J_3, -J_4\right) = \tilde{\Phi}\left(J_1, J_2, J_3, J_4\right). \tag{2.161}$$

Если учесть (2.153) и ввести обозначения

$$\tilde{c}_1^* = \tilde{c}_1\left(J_1, J_2, J_3, -J_4\right), \quad \tilde{\mu}^* = \tilde{\mu}\left(J_1, J_2, J_3, -J_4\right),$$
$$\tilde{c}_2^* = \tilde{c}_2\left(J_1, J_2, J_3, -J_4\right), \tag{2.162}$$

условие (2.161) запишется в виде равенства

$$2\left(\tilde{c}_1^* - \tilde{c}_1\right)J_1 + 2\left(\tilde{\mu}^* - \tilde{\mu}\right)J_2 + \left(\tilde{c}_2^* - \tilde{c}_2\right)J_3 + i\left(\tilde{c}_2^* + \tilde{c}_2\right)J_4 = 0, \tag{2.163}$$

которое можно рассматривать как искомую функциональную зависимость функций $\tilde{c}_1$, $\tilde{\mu}$ и $\tilde{c}_2$ из (2.151).

Если предположить, что функции $\tilde{c}_1$, $\tilde{\mu}$ и $\tilde{c}_2$ являются четными относительно инварианта J_4, т.е.

$$\tilde{c}_1^* = \tilde{c}_1, \;\; \tilde{\mu}^* = \tilde{\mu}, \;\; \tilde{c}_2^* = \tilde{c}_2, \tag{2.164}$$

то из (2.163) получим

$$\tilde{c}_2 = 0. \tag{2.165}$$

Высказанное только что предположение о четности функций для материалов с "симметричными" нелинейными свойствами не являются дополнительным предположением. Действительно, уравнения (2.151) можно записать в "развернутом" виде (2.92)

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kl}, \tag{2.166}$$

где

$$\tilde{C}_{ijkl}\,(;) = \tilde{c}_1 \cdot \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\tilde{\mu} \cdot (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \tilde{c}_2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{nn}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\delta_{kl}. \tag{2.167}$$

Для материала с "симметричными" нелинейными свойствами левая часть равенства (2.167) инвариантна к преобразованию (2.91). Поэтому, если учесть, что

$$\tilde{\varepsilon}_{nn}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \Gamma_{ijnn} + i\hat{\Gamma}_{ijnn} \tag{2.168}$$

(см.(2.110)) и величина $\hat{\Gamma}_{ijnn}$ в результате преобразования (2.91) меняет знак, можно записать

$$\begin{gathered}(\tilde{c}_1^* - \tilde{c}_1)\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\,(\tilde{\mu}^* - \tilde{\mu})\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \\ + \left[(\tilde{c}_2^* - \tilde{c}_2)\,\Gamma_{ijnn} - i\,(\tilde{c}_2^* + \tilde{c}_2)\,\hat{\Gamma}_{ijnn}\right]\delta_{kl} = 0.\end{gathered} \tag{2.169}$$

Из последнего равенства получаем

$$\tilde{c}_1^* = \tilde{c}_1, \quad \tilde{\mu}^* = \tilde{\mu}, \quad \tilde{c}_2 = 0. \tag{2.170}$$

Сформулируем полученный в данном пункте **результат** следующим образом: для изотропных материалов с "симметричными" нелинейными свойствами амплитудные уравнения в предположении их квазилинейности имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{c}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \tilde{\mu} \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij}, \tag{2.171}$$

где $\tilde{c}_1$ и $\tilde{\mu}$ – произвольные функции инвариантов J_1, J_2, J_3 и четные относительно инварианта J_4.

Замечание 3. Чтобы каждый раз не подчеркивать требование четности функций $\tilde{c}_1$ и $\tilde{\mu}$, в число аргументов вместо инварианта J_4 можно включить инвариант (см. (2.113))

$$\bar{J}_4 = I_4^2 + I_5^2 = \frac{1}{4J_1^2}\left(J_3^2 + J_4^2\right). \qquad (2.172)$$

Тогда в (2.171) функции $\tilde{c}_1$ и $\tilde{\mu}$ – произвольные функции инвариантов J_1, J_2, J_3 и $\bar{J}_4$. Заметим, что $\bar{J}_4$ является следующим инвариантом тензора Γ_{ijkl} из (2.110):

$$\bar{J}_4 = 2\Gamma_{ijkl}\Gamma_{ijkl} - \Gamma_{ijji}\Gamma_{kllk}. \qquad (2.173)$$

5.3. Практическое использование уравнений (2.171) из-за сложной инвариантной зависимости коэффициентов затруднительно. Уменьшения количества определяющих инвариантов в этих уравнениях можно достичь, если предположить их потенциальность и воспользоваться результатами п. 5.1. Вместе с тем, представляет определенный интерес исследование этого вопроса независимо от результатов п. 5.1, а как развитие замкнутой амплитудной теории п. 5.2.

Уравнения (2.171) потенциальны тогда и только тогда, когда выполняются условия симметрии (2.99) и (2.100). Объединим эти условия в одной комплексной записи

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} + i\frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}{\partial \varepsilon'_{ij}} + i\frac{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}{\partial \varepsilon''_{ij}}. \qquad (2.174)$$

Подставляя (2.171) в (2.174) (коэффициенты в (2.171) удобно считать сначала функциями инвариантов (2.113)) и приравнивая скалярные коэффициенты при $\tilde{\varepsilon}_{kl}\delta_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}\delta_{kl}$, $\bar{\tilde{\varepsilon}}_{kl}\delta_{ij} - \bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\delta_{kl}$ и $\bar{\tilde{\varepsilon}}_{kl}\tilde{\varepsilon}_{ij} - \bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{kl}$, получим равенства

$$2\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial I_3}\tilde{\varepsilon}_{nn} - \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial I_1} - i\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial I_2} = 0, \qquad (2.175)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial I_5} + i\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial I_4} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial I_5} + i\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial I_4} = 0. \qquad (2.176)$$

Перейдя к производным по J_1, J_2, J_3 и J_4 с учетом соотношений (2.117) – (2.119) и выполнив элементарные преобразования, будем иметь

$$J_1\left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial J_2} - \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial J_1}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial J_3} - i\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial J_4}\right)(J_3 + iJ_4) = 0, \qquad (2.177)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial J_3} + i\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial J_4} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial J_3} + i\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial J_4} = 0. \tag{2.178}$$

Равенства (2.178) – это записанные в комплексной форме условия Коши-Римана для функций $\tilde{c}_1$ и $\tilde{\mu}$, как функций комплексного переменного $J_3 + iJ_4$ (см. (2.125), (2.126)). Но поскольку функции $\tilde{c}_1$ и $\tilde{\mu}$ являются четными относительно инварианта J_4, из (2.178) получаем равенства

$$\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial J_3} = \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial J_4} = \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial J_3} = \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial J_4} = 0, \tag{2.179}$$

а из (2.177) с учетом (2.179) – равенство

$$\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial J_2} = \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial J_1}. \tag{2.180}$$

Таким образом, уравнения (2.171) потенциальны тогда и только тогда, когда коэффициенты этих уравнений являются функциями только двух инвариантов J_1, J_2 и выполняется условие взаимности (2.180).

5.4. Ниже предполагаются такие изотропные материалы с "симметричными" нелинейными свойствами, которые допускают упрощенный вид амплитудных уравнений с двумя определяющими инвариантами J_1 и J_2. В обозначениях (2.131) это

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\lambda}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \tilde{\mu}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij}, \tag{2.181}$$

где

$$\tilde{\lambda}\,(;) = \lambda'\,(;) + i\lambda''\,(;)\,, \quad \tilde{\mu}\,(;) = \mu'\,(;) + i\mu''\,(;)\,, \quad (;) = (J_1,\, J_2)\,. \tag{2.182}$$

В уравнениях (2.181) фигурируют четыре действительных функции $\lambda'\,(;)\,,\ \lambda''\,(;)\,,\ \mu'\,(;)\,,\ \mu''\,(;)$ двух действительных аргументов J_1 и J_2. Поэтому между ними существуют определенные зависимости, информация о которых позволила бы сократить объем экспериментов. Этот вопрос решается просто, когда уравнения (2.181) потенциальны. В качестве искомых зависимостей выступают условия взаимности (2.133) или в обычной записи

$$\frac{\partial \lambda'\,(;)}{\partial J_2} = \frac{\partial \mu'\,(;)}{\partial J_1}, \quad \frac{\partial \lambda''\,(;)}{\partial J_2} = \frac{\partial \mu''\,(;)}{\partial J_1}. \tag{2.183}$$

При этом комплексные модули находятся по формулам (2.132), а потенциалы – по формуле (2.135).

Запишем амплитудные уравнения (2.181) в терминах комплексных модулей сдвига и объемного сжатия. Для этого разложим тензоры, определяющие механические напряжения и деформации, на девиаторную и шаровую составляющие

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} = s'_{ij} + \sigma'\delta_{ij}, \quad \sigma''_{ij} = s''_{ij} + \sigma''\delta_{ij}, \quad 3\sigma' = \sigma'_{kk}, \quad 3\sigma'' = \sigma''_{kk}, \\ \varepsilon'_{ij} = e'_{ij} + \varepsilon'\delta_{ij}, \quad \varepsilon''_{ij} = e''_{ij} + \varepsilon''\delta_{ij}, \quad 3\varepsilon' = \varepsilon'_{kk}, \quad 3\varepsilon'' = \varepsilon''_{kk} \end{aligned} \tag{2.184}$$

и введем инварианты (см. (2.113))

$$\hat{I}_1 = I_1 = 3\varepsilon', \quad \hat{I}_2 = I_2 = 3\varepsilon'', \quad \hat{I}_3 = e'_{ij}e'_{ij} + e''_{ij}e''_{ij} \tag{2.185}$$

и

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2\right), \quad \hat{J}_2 = \frac{1}{2}\hat{I}_3. \tag{2.186}$$

Очевидно, что инварианты (2.186) связаны с инвариантами (2.117) и (2.119) соотношениями

$$J_1 = \hat{J}_1, \quad J_2 = \hat{J}_2 + \frac{1}{3}\hat{J}_1. \tag{2.187}$$

Введем комплексные величины

$$\tilde{s}_{ij} = s'_{ij} + is''_{ij}, \quad \tilde{\sigma} = \sigma' + i\sigma'', \quad \tilde{e}_{ij} = e'_{ij} + ie''_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''. \tag{2.188}$$

Если в амплитудных уравнениях (2.181) учесть равенства (2.184) и обозначения (2.188), а в коэффициентах этих уравнений провести замену переменных (2.187), то они преобразуются к виду

$$\tilde{s}_{ij} = \tilde{G}\,(;)\,\tilde{e}_{ij}, \quad \tilde{\sigma} = 3\tilde{K}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}, \tag{2.189}$$

где

$$\tilde{G}\,(;) = \tilde{\mu}\,(;)\,, \quad \tilde{K}\,(;) = \tilde{\lambda}\,(;) + \frac{1}{3}\tilde{\mu}\,(;) \tag{2.190}$$

– соответственно комплексные модули сдвига и объемного сжатия, зависящие от набора инвариантов $(;) = \left(\hat{J}_1,\, \hat{J}_2\right)$. Обозначим

$$\tilde{G}\,(;) = G'\,(;) + iG''\,(;)\,, \quad \tilde{K}\,(;) = K'\,(;) + iK''\,(;)\,. \tag{2.191}$$

Тогда

$$G'(;)=\mu'(;),\quad G''(;)=\mu''(;),$$
$$K'(;)=\lambda'(;)+\frac{1}{3}\mu'(;),\quad K''(;)=\lambda''(;)+\frac{1}{3}\mu''(;). \tag{2.192}$$

Из (2.133) получаем условие взаимности

$$\frac{\partial\tilde{K}(;)}{\partial\hat{J}_2}=\frac{\partial\tilde{G}(;)}{\partial\hat{J}_1}, \tag{2.193}$$

при выполнении которого уравнения (2.189) выражаются через потенциалы $U=U\left(\hat{J}_1,\hat{J}_2\right)$ и $D=D\left(\hat{J}_1,\hat{J}_2\right)$ (см. (2.106))

$$\tilde{s}_{ij}=\frac{\partial\tilde{U}}{\partial e'_{ij}}+i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial e''_{ij}},\quad \tilde{\sigma}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\varepsilon'}+i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\varepsilon''}\right),\quad \tilde{U}=U+iD. \tag{2.194}$$

В этом случае

$$\tilde{K}(;)=\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\hat{J}_1},\quad \tilde{G}(;)=\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\hat{J}_2}. \tag{2.195}$$

Потенциалы U и D находятся по определяемым экспериментально функциям накопления и диссипации

$$\bar{U}\left(\hat{J}_1,\,\hat{J}_2\right)=s'_{ij}e'_{ij}+s''_{ij}e''_{ij}+3\left(\sigma'\varepsilon'+\sigma''\varepsilon''\right),$$
$$\bar{D}\left(\hat{J}_1,\,\hat{J}_2\right)=s''_{ij}e'_{ij}-s'_{ij}e''_{ij}+3\left(\sigma''\varepsilon'-\sigma'\varepsilon''\right) \tag{2.196}$$

с помощью формулы

$$\tilde{U}=\int\limits_0^1\tilde{\Phi}\left(\lambda^2\hat{J}_1,\lambda^2\hat{J}_2\right)\frac{d\lambda}{\lambda},\quad \tilde{\Phi}=\bar{U}+i\bar{D}. \tag{2.197}$$

Полученные выше результаты отвечают релаксационной формулировке теории. Построение соответствующей теории, когда $\sigma\sim\varepsilon$ – связь записывается в терминах ползучести, не вызывает дополнительных затруднений. В этом случае в представленных выше соотношениях необходимо поменять местами составляющие деформаций ε'_{ij}, ε''_{ij} и напряжений σ'_{ij}, σ''_{ij} и заменить модули на податливости.

Приведем окончательные **результаты** для материалов с "симметричными" нелинейными свойствами, допускающих упрощенный вид амплитудных уравнений с двумя определяющими инвариантами.

Амплитудные уравнения имеют вид

$$\tilde{e}_{ij} = \tilde{S}_{G}\,(;)\,\tilde{s}_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{3}\tilde{S}_{K}\,(;)\,\tilde{\sigma}. \tag{2.198}$$

Комплексные податливости $\tilde{S}_{G}\,(;)$ и $\tilde{S}_{K}\,(;)$ зависят от набора инвариантов $(;) = \left(J_1^{(\sigma)},\, J_2^{(\sigma)}\right)$, которые получаем из (2.186) путем замены $\varepsilon' \to \sigma'$, $\varepsilon'' \to \sigma''$, $e'_{ij}e'_{ij} + e''_{ij}e''_{ij} \to s'_{ij}s'_{ij} + s''_{ij}s''_{ij}$:

$$J_1^{(\sigma)} = \frac{1}{2}\left[\left(3\sigma'\right)^2 + \left(3\sigma''\right)^2\right], \quad J_2^{(\sigma)} = \frac{1}{2}\left(s'_{ij}s'_{ij} + s''_{ij}s''_{ij}\right). \tag{2.199}$$

Поскольку выражение для функции диссипации является "несимметричным" относительно $\sigma \longleftrightarrow \varepsilon$ – замены, комплексные податливости удобно записывать в виде

$$\tilde{S}_{G} = S'_{G}\,(;) - i\,S''_{G}\,(;)\,, \quad \tilde{S}_{K} = S'_{K}\,(;) - i\,S''_{K}\,(;)\,. \tag{2.200}$$

Необходимым и достаточным условием представления уравнений (2.198) через потенциалы является условие взаимности

$$\frac{1}{9}\,\frac{\partial \tilde{S}_{K}\,(;)}{\partial J_2^{(\sigma)}} = \frac{\partial \tilde{S}_{G}\,(;)}{\partial J_1^{(\sigma)}}. \tag{2.201}$$

В этом случае

$$\tilde{S}_{K}\,(;) = 9\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1^{(\sigma)}}, \quad \tilde{S}_{G}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_2^{(\sigma)}}, \quad \tilde{U} = U - iD, \tag{2.202}$$

а потенциалы $U = U\left(J_1^{(\sigma)},\, J_2^{(\sigma)}\right)$ и $D = D\left(J_1^{(\sigma)},\, J_2^{(\sigma)}\right)$ находятся по функциям накопления и диссипации

$$\begin{aligned} \bar{U}\left(J_1^{(\sigma)}, J_2^{(\sigma)}\right) &= s'_{ij}e'_{ij} + s''_{ij}e''_{ij} + 3\left(\sigma'\varepsilon' + \sigma''\varepsilon''\right), \\ \bar{D}\left(J_1^{(\sigma)}, J_2^{(\sigma)}\right) &= s''_{ij}e'_{ij} - s'_{ij}e''_{ij} + 3\left(\sigma''\varepsilon' - \sigma'\varepsilon''\right) \end{aligned} \tag{2.203}$$

с помощью формулы

$$\tilde{U} = \int_0^1 \tilde{\Phi}\left(\lambda^2 J_1^{(\sigma)},\, \lambda^2 J_2^{(\sigma)}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \tilde{\Phi} = \bar{U} - i\bar{D}. \tag{2.204}$$

Для упрощенных амплитудных уравнений (2.189) и (2.198) положительно решается вопрос об их взаимной обратимости: комплексные модули и податливости связаны теми же соотношениями, что и в линейной теории

$$\tilde{S}_{\scriptscriptstyle G} = \tilde{G}^{-1}, \quad \tilde{S}_{\scriptscriptstyle K} = \tilde{K}^{-1}, \tag{2.205}$$

а переход от набора аргументов $\left(\hat{J}_1,\, \hat{J}_2\right)$ к набору аргументов $\left(J_1^{(\sigma)}, J_2^{(\sigma)}\right)$ или наоборот осуществляется с помощью уравнений

$$J_1^{(\sigma)} = 9\left|\tilde{K}\left(\hat{J}_1, \hat{J}_2\right)\right|^2 \hat{J}_1, \quad J_2^{(\sigma)} = \left|\tilde{G}\left(\hat{J}_1, \hat{J}_2\right)\right|^2 \hat{J}_2 \tag{2.206}$$

или

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{9}\left|\tilde{S}_{\scriptscriptstyle K}\left(J_1^{(\sigma)}, J_2^{(\sigma)}\right)\right|^2 J_1^{(\sigma)}, \quad \hat{J}_2 = \left|\tilde{S}_{\scriptscriptstyle G}\left(J_1^{(\sigma)}, J_2^{(\sigma)}\right)\right|^2 J_2^{(\sigma)}. \tag{2.207}$$

При этом, естественно, предполагается разрешимость уравнений (2.206) относительно инвариантов $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$, а уравнений (2.207) – относительно инвариантов $J_1^{(\sigma)}$ и $J_2^{(\sigma)}$.

5.5. Термодинамические ограничения на амплитудные уравнения выражаются в неотрицательности функции диссипации. Вместе с тем, физически содержательным является требование неотрицательности и функции накопления [220], которая из термодинамики не следует и должна рассматриваться как дополнительная гипотеза. Таким образом, требуем выполнения неравенств

$$\bar{D} \geq 0, \quad \bar{U} \geq 0. \tag{2.208}$$

Выпишем выражения для функций диссипации и накопления, соответствующие рассмотренным выше амплитудным уравнениям (2.181), (2.189) и (2.198):

$$\bar{D} = 2\lambda''\,(;\,)\,J_1 + 2\mu''\,(;\,)\,J_2, \quad \bar{U} = 2\lambda'\,(;\,)\,J_1 + 2\mu'\,(;\,)\,J_2; \tag{2.209}$$

$$\bar{D} = 2K''\,(;\,)\,\hat{J}_1 + 2G''\,(;\,)\,\hat{J}_2, \quad \bar{U} = 2K'\,(;\,)\,\hat{J}_1 + 2G'\,(;\,)\,\hat{J}_2; \tag{2.210}$$

$$\bar{D} = \frac{2}{9} S''_{K}(;)\, J_1^{(\sigma)} + 2S''_{G}(;)\, J_2^{(\sigma)},\ \bar{U} = \frac{2}{9} S'_{K}(;)\, J_1^{(\sigma)} + 2S'_{G}(;)\, J_2^{(\sigma)}. \tag{2.211}$$

Для фигурирующих в (2.209) – (2.211) составляющих комплексных характеристик, в число аргументов которых включим также, как параметры, частоту ω и температуру T, условия (2.208) приводят к следующим неравенствам:

$$\begin{array}{ll} \lambda''\,(J_1,\, 0,\, \omega,\, T) \geq 0, & \lambda'\,(J_1,\, 0,\, \omega,\, T) \geq 0, \\ \mu''\,(0,\, J_2,\, \omega,\, T) \geq 0, & \mu'\,(0,\, J_2,\, \omega,\, T) \geq 0; \end{array} \tag{2.212}$$

$$\begin{array}{ll} K''\left(\hat{J}_1,\, 0,\, \omega,\, T\right) \geq 0, & K'\left(\hat{J}_1,\, 0,\, \omega,\, T\right) \geq 0, \\ G''\left(0,\, \hat{J}_2,\, \omega,\, T\right) \geq 0, & G'\left(0,\, \hat{J}_2,\, \omega,\, T\right) \geq 0; \end{array} \tag{2.213}$$

$$\begin{array}{ll} S''_{K}\left(J_1^{(\sigma)},\, 0,\, \omega,\, T\right) \geq 0, & S'_{K}\left(J_1^{(\sigma)},\, 0,\, \omega,\, T\right) \geq 0, \\ S''_{G}\left(0,\, J_2^{(\sigma)},\, \omega,\, T\right) \geq 0, & S'_{G}\left(0,\, J_2^{(\sigma)},\, \omega,\, T\right) \geq 0. \end{array} \tag{2.214}$$

В частном случае, когда пренебрегается влиянием объемной деформации на модуль сдвига и влиянием сдвигов на модуль объемного сжатия [220], вклады энергий формоизменения и объемной деформации в суммарную диссипативную и “накапливаемую” энергии разделяются:

$$\begin{array}{l} \bar{D} = 2K''\left(\hat{J}_1,\, \omega, T\right)\hat{J}_1 + 2G''\left(\hat{J}_2,\, \omega, T\right)\hat{J}_2, \\ \bar{U} = 2K'\left(\hat{J}_1,\, \omega, T\right)\hat{J}_1 + 2G'\left(\hat{J}_2,\, \omega, T\right)\hat{J}_2. \end{array} \tag{2.215}$$

Поэтому имеем ограничения в виде неравенств

$$\begin{array}{ll} G'\left(\hat{J}_2,\, \omega, T\right) \geq 0, & G''\left(\hat{J}_2,\, \omega, T\right) \geq 0, \\ K'\left(\hat{J}_1,\, \omega, T\right) \geq 0, & K''\left(\hat{J}_1,\, \omega, T\right) \geq 0. \end{array} \tag{2.216}$$

Аналогичные неравенства в случае пренебрежения объемно-сдвиговыми эффектами получаем для комплексных податливостей:

$$\begin{array}{ll} S'_{G}\left(J_2^{(\sigma)},\, \omega,\, T\right) \geq 0, & S''_{G}\left(J_2^{(\sigma)},\, \omega,\, T\right) \geq 0, \\ S'_{K}\left(J_1^{(\sigma)},\, \omega,\, T\right) \geq 0, & S''_{K}\left(J_1^{(\sigma)},\, \omega,\, T\right) \geq 0. \end{array} \tag{2.217}$$

В заключение обратимся к вопросу об экспериментальной конкретизации амплитудных уравнений (2.189) или (2.198). Этот вопрос достаточно хорошо освещен в литературе и останавливаться на нем подробно нет необходимости. Отметим только, что в общем случае зависимостей $\tilde{G}\left(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \omega, T\right)$, $\tilde{K}\left(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \omega, T\right)$, $\tilde{S}_{G}\left(J_1^{(\sigma)}, J_2^{(\sigma)}, \omega, T\right)$, $\tilde{S}_{K}\left(J_1^{(\sigma)}, J_2^{(\sigma)}, \omega, T\right)$ программа экспериментов может быть реализована на реогониометре Вайссенберга с использованием образцов пластинчатой и трубчатой формы [220].

Эта программа включает серию нагружений при различных уровнях амплитуд и сдвигов фаз компонент деформаций или напряжений и измерение амплитуд и фаз соответствующих реакций.

Если взаимным влиянием девиаторных и шаровых составляющих деформированного или напряженного состояний пренебрегается, параметры амплитудных уравнений могут быть найдены, как и в теории малых упругопластических деформаций, из одномерных экспериментов [220]. Заметим, что в этом случае условия взаимности (2.193) или (2.201) выполняются автоматически и уравнения в потенциалах следует считать точными.

Если с самого начала исходить из амплитудных уравнений в потенциалах, т.е. интересоваться построением нелинейной теории с точностью до средних за период значений диссипированной и “накапливаемой” энергий, условия взаимности (2.193) или (2.201) позволяют сократить объем измерений.

§ 6. Неупругий трансверсально-изотропный материал (без пьезоэффекта)

Как и в предыдущем параграфе, рассматриваются два варианта построения конкретных амплитудных уравнений. В первом варианте с самого начала предполагается потенциальность этих уравнений и в качестве исходных используются соотношения (2.106) – (2.111).

Во втором варианте исходными соотношениями являются общие представления квазилинейных трансверсально-изотропных тензорных функций.

6.1. Рассмотрим уравнения в потенциалах (2.106). Потенциалы U и D удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.108) и поэтому являются, вообще говоря, функциями вида (2.109). Для материалов с “симметричными” нелинейными свойствами зависимости (2.109) упрощаются, принимая вид (2.111).

Перейдем к трансверсально-изотропным материалам (без пьезоэффекта). Будем считать, что ось трансверсальной изотропии совпадает с координатной осью Ox_3. Как и в предыдущем параграфе, мы не ставим перед собой задачу нахождения для рассматриваемого случая каких-либо общих представлений функций вида (2.109) или (2.111), а считаем потенциалы U и D скалярными трансверсально-изотропными функциями двух симметричных тензоров второго ранга ε'_{ij} и ε''_{ij} и требуем от них удовлетворения дифференциальному уравнению (2.108).

Из всевозможных совместных инвариантов тензоров ε'_{ij} и ε''_{ij}, отвечающих трансверсальной изотропии, возьмем только инварианты первого и второго порядка

$$\begin{gathered}\varepsilon'_{kk}, \quad \varepsilon''_{kk}, \quad \varepsilon'_{33}, \quad \varepsilon''_{33}, \quad \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ji}, \quad \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ji}, \\ \varepsilon'_{3k}\varepsilon'_{k3}, \quad \varepsilon''_{3k}\varepsilon''_{k3}, \quad \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{ji}, \quad \varepsilon'_{3k}\varepsilon''_{k3} \\ (i,\, j,\, k = 1,\, 2,\, 3)\,.\end{gathered} \tag{2.218}$$

Очевидно, что инварианты (2.218) являются функционально независимыми. Ниже вместо некоторых пар инвариантов (2.218) будем использовать их суммы и разности:

$$\begin{aligned}&I_1 = \varepsilon'_{kk}, \quad I_2 = \varepsilon''_{kk}, \quad I_3 = \varepsilon'_{33}, \quad I_4 = \varepsilon''_{33}, \\ &I_5 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ji} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ji}, \quad I_6 = \varepsilon'_{3k}\varepsilon'_{k3} + \varepsilon''_{3k}\varepsilon''_{k3}, \\ &I_7 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{ji} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{ji}, \quad I_8 = \varepsilon'_{3k}\varepsilon''_{k3} + \varepsilon''_{3k}\varepsilon'_{k3}, \\ &I_9 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ji} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ji}, \quad I_{10} = \varepsilon'_{3k}\varepsilon'_{k3} - \varepsilon''_{3k}\varepsilon''_{k3}.\end{aligned} \tag{2.219}$$

Функции U и D, как функции инвариантов (2.219), должны удовлетворять дифференциальному уравнению (2.108), которое с учетом выражений для производных

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon'_{kl}} = \delta_{ki}\delta_{il}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \delta_{ki}\delta_{il}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon'_{kl}} = \delta_{k3}\delta_{3l}, \quad \frac{\partial I_4}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \delta_{k3}\delta_{3l}, \\
\frac{\partial I_5}{\partial \varepsilon'_{kl}} = 2\varepsilon'_{kl}, \quad \frac{\partial I_5}{\partial \varepsilon''_{kl}} = 2\varepsilon''_{kl}, \quad \frac{\partial I_6}{\partial \varepsilon'_{kl}} = \delta_{k3}\varepsilon'_{3l} + \delta_{l3}\varepsilon'_{3k}, \\
\frac{\partial I_6}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \delta_{k3}\varepsilon''_{3l} + \delta_{l3}\varepsilon''_{3k}, \quad \frac{\partial I_7}{\partial \varepsilon'_{kl}} = 2\varepsilon''_{kl}, \quad \frac{\partial I_7}{\partial \varepsilon''_{kl}} = 2\varepsilon'_{kl}, \\
\frac{\partial I_8}{\partial \varepsilon'_{kl}} = \delta_{k3}\varepsilon''_{3l} + \delta_{l3}\varepsilon''_{3k}, \quad \frac{\partial I_8}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \delta_{k3}\varepsilon'_{3l} + \delta_{l3}\varepsilon'_{3k}, \\
\frac{\partial I_9}{\partial \varepsilon'_{kl}} = 2\varepsilon'_{kl}, \quad \frac{\partial I_9}{\partial \varepsilon''_{kl}} = -2\varepsilon''_{kl}, \quad \frac{\partial I_{10}}{\partial \varepsilon'_{kl}} = \delta_{k3}\varepsilon'_{3l} + \delta_{l3}\varepsilon'_{3k}, \\
\frac{\partial I_{10}}{\partial \varepsilon''_{kl}} = -\delta_{k3}\varepsilon''_{3l} - \delta_{l3}\varepsilon''_{3k}
\end{gathered} \tag{2.220}
$$

принимает вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \Phi}{\partial I_2} I_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} I_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial I_4} I_3 - \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} I_4 + 2\frac{\partial \Phi}{\partial I_7} I_9 - 2\frac{\partial \Phi}{\partial I_9} I_7 + \\
+2\frac{\partial \Phi}{\partial I_8} I_{10} - 2\frac{\partial \Phi}{\partial I_{10}} I_8 = 0.
\end{gathered} \tag{2.221}
$$

Заметим, что инварианты I_5 и I_6, как аргументы функции Φ, фигурируют в уравнении (2.221) в виде параметров. Легко проверить, что первыми интегралами характеристической системы, соответствующей уравнению (2.221), будут

$$
J_1 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 + I_2^2\right), \quad J_2 = \frac{1}{2}\left(I_3^2 + I_4^2\right), \quad J_3 = I_1 I_3 + I_2 I_4, \tag{2.222}
$$

$$
\begin{gathered}
J_6 = 2I_1 I_2 I_7 + \left(I_1^2 - I_2^2\right) I_9, \quad J_7 = \left(I_1^2 - I_2^2\right) I_7 - 2I_1 I_2 I_9, \\
J_8 = 2I_3 I_4 I_8 + \left(I_3^2 - I_4^2\right) I_{10}, \quad J_9 = \left(I_3^2 - I_4^2\right) I_8 - 2I_3 I_4 I_{10}.
\end{gathered} \tag{2.223}
$$

Кроме того, обозначим

$$
J_4 = \frac{1}{2} I_5, \quad J_5 = \frac{1}{2} I_6. \tag{2.224}
$$

Поэтому потенциалы U и D зависят от 9 аргументов

$$
U = U\left(J_1,\, J_2, \ldots, J_9\right), \quad D = D\left(J_1,\, J_2, \ldots, J_9\right). \tag{2.225}
$$

Заметим, что эти аргументы являются следующими инвариантами тензоров (2.110):

$$
\begin{gathered}
J_1 = \frac{1}{2}\Gamma_{iijj}, \;\; J_2 = \frac{1}{2}\Gamma_{3333}, \;\; J_3 = \Gamma_{kk33}, \;\; J_4 = \frac{1}{2}\Gamma_{ijij}, \\
J_5 = \frac{1}{2}\Gamma_{k3k3}, \;\; J_6 = 2\Gamma_{kkij}\Gamma_{ijll} - \Gamma_{kkll}\Gamma_{ijij}, \quad J_7 = 2\Gamma_{kkij}\hat{\Gamma}_{llij}, \\
J_8 = 2\Gamma_{333k}\Gamma_{k333} - \Gamma_{3333}\Gamma_{k3k3}, \quad J_9 = 2\Gamma_{333k}\hat{\Gamma}_{333k}.
\end{gathered}
\tag{2.226}
$$

Обратимся к уравнениям (2.106), в которых учтем зависимости (2.225). После необходимых выкладок с использованием выражений для производных (2.220) получаем

$$
\begin{gathered}
\tilde{\sigma}_{ij} = \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{1}{J_1}\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6} - i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7} \right)(J_6 + iJ_7) \right] \tilde{\varepsilon}_{kk} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3}\tilde{\varepsilon}_{33} \right\} \delta_{ij} + \\
+ \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_2} + \frac{1}{J_2}\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8} - i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9} \right)(J_8 + iJ_9) \right] \tilde{\varepsilon}_{33} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3}\tilde{\varepsilon}_{kk} \right\} \delta_{i3}\delta_{3j} + \\
+ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4}\tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_5}\left(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}\right) + 2\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7} \right)\tilde{\varepsilon}^2_{kk}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \\
+ \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9} \right)\tilde{\varepsilon}^2_{33}\left(\delta_{i3}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{3j} + \delta_{j3}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{3i}\right),
\end{gathered}
\tag{2.227}
$$

где, как и раньше, обозначено

$$
\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}, \quad \bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \varepsilon'_{ij} - i\varepsilon''_{ij}, \quad \tilde{U} = U + iD. \tag{2.228}
$$

Из (2.227) следует, что в случае трансверсальной изотропии уравнения в потенциалах (2.106) допускают концепцию амплитудно-зависимых комплексных характеристик тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$
\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9} = 0 \tag{2.229}
$$

или равносильные им действительные равенства

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial U}{\partial J_6} = \frac{\partial D}{\partial J_7}, \quad \frac{\partial U}{\partial J_7} = -\frac{\partial D}{\partial J_6}, \\
\frac{\partial U}{\partial J_8} = \frac{\partial D}{\partial J_9}, \quad \frac{\partial U}{\partial J_9} = -\frac{\partial D}{\partial J_8}.
\end{gathered}
\tag{2.230}
$$

Равенства (2.230) – это условия Коши-Римана аналитичности функции $\tilde{U} = U + iD$ относительно комплексных аргументов $J_6 + iJ_7$ и $J_8 + iJ_9$.

С учетом (2.229) уравнения (2.227) принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} = &\left\{ \left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{2}{J_1} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6} (J_6 + iJ_7) \right] \tilde{\varepsilon}_{kk} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3} \tilde{\varepsilon}_{33} \right\} \delta_{ij} + \\ &+ \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_2} + \frac{2}{J_2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8} (J_8 + iJ_9) \right] \tilde{\varepsilon}_{33} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3} \tilde{\varepsilon}_{kk} \right\} \delta_{i3}\delta_{3j} + \\ &+ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4} \tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_5} (\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}) . \end{aligned} \tag{2.231}$$

Обратимся к функциям накопления и диссипации (см. (2.36))

$$\bar{U} = Re\tilde{\Phi}, \quad \bar{D} = Im\tilde{\Phi}, \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}. \tag{2.232}$$

Если учесть (2.231), можно записать

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 + 4i \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6} J_7 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8} J_9 \right), \tag{2.233}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0 = &2\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1} J_1 + 2\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_2} J_2 + 2\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3} J_3 + 2\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4} J_4 + \\ &+2\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_5} J_5 + 4\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6} J_6 + 4\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8} J_8. \end{aligned} \tag{2.234}$$

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на характер нелинейности материала. Перейдем теперь к материалам с “симметричными” нелинейными свойствами, для которых функции накопления $\bar{U}$ и диссипации $\bar{D}$, а также потенциалы U и D являются функциями вида (2.111) и, следовательно, инвариантны к преобразованию (2.91). Из (2.226) видно, что в результате этого преобразования инварианты J_7 и J_9 меняют знак, тогда как остальные инварианты остаются постоянными. Поэтому должно быть

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(J_1, \ldots, J_6, -J_7, J_8, -J_9) = \tilde{\Phi}(J_1, \ldots, J_6, J_7, J_8, J_9), \\ \tilde{U}(J_1, \ldots, J_6, -J_7, J_8, -J_9) = \tilde{U}(J_1, \ldots, J_6, J_7, J_8, J_9). \end{aligned} \tag{2.235}$$

Но тогда из (2.233) получаем

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6} J_7 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8} J_9 = 0 \tag{2.236}$$

или с учетом (2.229)

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7} J_7 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9} J_9 = 0. \tag{2.237}$$

Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9} = 0, \tag{2.238}$$

а это значит (см. (2.229)), что и

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8} = 0. \tag{2.239}$$

Принимая во внимание равенства (2.239) и введя обозначения

$$\tilde{\lambda}_\alpha\,(;) = \lambda'_\alpha\,(;) + i\lambda''_\alpha\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_\alpha} \quad (\alpha = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5)\,, \tag{2.240}$$

из (2.231) получаем

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij} = \left[\tilde{\lambda}_1\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{\lambda}_3\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}\right]\delta_{ij} + \\ + \left[\tilde{\lambda}_2\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{\lambda}_3\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk}\right]\delta_{i3}\delta_{3j} + \tilde{\lambda}_4\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \\ + \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_5\,(;)\,(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i})\,, \quad (;) = (J_1,\, J_2,\, J_3,\, J_4,\, J_5)\,.\end{gathered} \tag{2.241}$$

Очевидно, что если в уравнениях (2.106) исходить из полной системы функционально независимых совместных инвариантов тензоров ε'_{ij} и ε''_{ij}, отвечающих трансверсальной изотропии (кроме инвариантов (2.218) учесть инварианты третьего порядка, но не больше двух), мы выйдем за пределы квазилинейности, которая предполагается концепцией комплексных характеристик. Поэтому приходим к следующему **результату**: для трансверсально-изотропных материалов с "симметричными" нелинейными свойствами уравнения в потенциалах (2.106) или в обычной записи (2.130) допускают комплексную форму представления (2.241) с амплитудно-зависимыми комплексными модулями (характеристиками) тогда и только тогда, когда потенциалы являются функциями вида

$$U = U\left(J_1,\, J_2,\, J_3,\, J_4,\, J_5\right), \quad D = D\left(J_1,\, J_2,\, J_3,\, J_4,\, J_5\right). \tag{2.242}$$

В этом случае комплексные модули находятся по формулам (2.240) и выполняются условия взаимности

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha\,(;)}{\partial J_\beta} = \frac{\partial \tilde{\lambda}_\beta\,(;)}{\partial J_\alpha} \quad (\alpha,\, \beta = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5)\,. \tag{2.243}$$

Экспериментальному определению подлежат функции накопления и диссипации

$$\bar{U}\left(J_1,\, \ldots,\, J_5\right) = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}, \quad \bar{D}\left(J_1,\, \ldots,\, J_5\right) = \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}, \tag{2.244}$$

после чего комплексный потенциал находится по формуле

$$\tilde{U} = \int\limits_0^1 \tilde{\Phi}\left(\lambda^2 J_1,\, \ldots,\, \lambda^2 J_5\right) \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \tilde{\Phi} = \bar{U} + i\bar{D}. \tag{2.245}$$

Линейную теорию получаем, когда функции (2.244) аппроксимируются линейными функциями инвариантов $J_1,\, J_2,\, \ldots,\, J_5$.

6.2. Для трансверсально-изотропного материала можно повторить рассуждения п.5.2. предыдущего параграфа и показать, что концепция амплитудно-зависимых комплексных модулей допускает более широкий класс амплитудных зависимостей, чем те, которые описываются уравнениями (2.241). Для этого тензорные функции (2.83)

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl},\, \delta_{ij},\, \delta_{j3}\right), \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl},\, \delta_{ij},\, \delta_{j3}\right), \tag{2.246}$$

в число аргументов которых включены образующие тензоры трансверсальной изотропии δ_{ij} и δ_{j3}, разложим в базисе

$$\delta_{ij}, \quad \delta_{i3}\delta_{3j}, \quad \varepsilon'_{ij}, \quad \delta_{i3}\varepsilon'_{3j} + \delta_{j3}\varepsilon'_{3i}, \quad \varepsilon''_{ij}, \quad \delta_{i3}\varepsilon''_{3j} + \delta_{j3}\varepsilon''_{3j} : \tag{2.247}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} = \Omega'_1 \cdot \delta_{ij} + \Omega'_2 \cdot \delta_{i3}\delta_{3j} + \Omega'_3 \cdot \varepsilon'_{ij} + \Omega'_4 \cdot \left(\delta_{i3}\varepsilon'_{3j} + \delta_{j3}\varepsilon'_{3i}\right) + \\ + \Omega'_5 \cdot \varepsilon''_{ij} + \Omega'_6 \cdot \left(\delta_{i3}\varepsilon''_{3j} + \delta_{j3}\varepsilon''_{3i}\right), \\ \sigma''_{ij} = \Omega''_1 \cdot \delta_{ij} + \Omega''_2 \cdot \delta_{i3}\delta_{3j} + \Omega''_3 \cdot \varepsilon'_{ij} + \Omega''_4 \cdot \left(\delta_{i3}\varepsilon'_{3j} + \delta_{j3}\varepsilon'_{3i}\right) + \\ + \Omega''_5 \cdot \varepsilon''_{ij} + \Omega''_6 \cdot \left(\delta_{i3}\varepsilon''_{3j} + \delta_{j3}\varepsilon''_{3i}\right). \end{aligned} \tag{2.248}$$

Коэффициенты Ω'_m и Ω''_m $(m = 1,\ 2, \ldots, 6)$ являются скалярными функциями совместных инвариантов тензоров ε'_{ij} и ε''_{ij}. Естественно, что эти инварианты должны быть функционально независимыми.

В дальнейшем ограничимся классом функций (2.246), допускающих разложения (2.248) с коэффициентами Ω'_m и Ω''_m, содержащими только линейные и квадратичные совместные инварианты тензоров ε'_{ij} и ε''_{ij}, т. е. инварианты (2.218) или (2.219).

Отметим, что квазилинейность представлений (2.248) не является дополнительным предположением, а получена из общих соображений. Единственным ограничением общности, возможно, есть ограниченный набор совместных инвариантов (2.219).

От представлений (2.248) требуем выполнения условий инвариантности относительно преобразования сдвига по времени в виде дифференциальных равенств (2.85). Для компактности выкладок используем оператор (2.102) со свойствами (2.103). Действие этого оператора на функцию переменных (2.219) определяется левой частью равенства (2.221).

Если ввести комплекснозначную функцию действительных переменных $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij}$, условия инвариантности (2.85) запишутся в виде одного равенства

$$A\left[\tilde{\sigma}_{ij}\right] = i\tilde{\sigma}_{ij}. \tag{2.249}$$

Перепишем в комплексной форме представления (2.248)

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\Omega}_1 \cdot \delta_{ij} + \tilde{\Omega}_2 \cdot \delta_{i3}\delta_{3j} + \tilde{\Omega}_3 \cdot \varepsilon'_{ij} + \tilde{\Omega}_4 \cdot \left(\delta_{i3}\varepsilon'_{3j} + \delta_{j3}\varepsilon'_{3i}\right) + \\ + \tilde{\Omega}_5 \cdot \varepsilon''_{ij} + \tilde{\Omega}_6 \cdot \left(\delta_{i3}\varepsilon''_{3j} + \delta_{j3}\varepsilon''_{3i}\right).\end{gathered} \tag{2.250}$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{\Omega}_m = \Omega'_m + i\Omega''_m \quad (m = 1,\ 2, \ldots, 6). \tag{2.251}$$

Подставив (2.250) в (2.249) и приравняв коэффициенты при величинах (2.247), получаем уравнения для функций (2.251)

$$A\left[\tilde{\Omega}_1\right] = i\tilde{\Omega}_1, \quad A\left[\tilde{\Omega}_2\right] = i\tilde{\Omega}_2, \tag{2.252}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A\left[\tilde{\Omega}_3\right] + \tilde{\Omega}_5 = i\tilde{\Omega}_3 \\ A\left[\tilde{\Omega}_5\right] - \tilde{\Omega}_3 = i\tilde{\Omega}_5, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A\left[\tilde{\Omega}_4\right] + \tilde{\Omega}_6 = i\tilde{\Omega}_4 \\ A\left[\tilde{\Omega}_6\right] - \tilde{\Omega}_4 = i\tilde{\Omega}_6. \end{array}\right. \tag{2.253}$$

После элементарных преобразований системы уравнений (2.253) сводятся к виду

$$\begin{cases} A\left[\tilde{\Omega}_3 + i\tilde{\Omega}_5\right] = 2i\left(\tilde{\Omega}_3 + i\tilde{\Omega}_5\right) \\ A\left[\tilde{\Omega}_3 - i\tilde{\Omega}_5\right] = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A\left[\tilde{\Omega}_4 + i\tilde{\Omega}_6\right] = 2i\left(\tilde{\Omega}_4 + i\tilde{\Omega}_6\right) \\ A\left[\tilde{\Omega}_4 - i\tilde{\Omega}_6\right] = 0. \end{cases} \tag{2.254}$$

Из вторых уравнений систем (2.254) следует, что функции

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}_3 - i\tilde{\Omega}_5\right), \quad \tilde{\mu}_2 = \tilde{\Omega}_4 - i\tilde{\Omega}_6 \tag{2.255}$$

являются функциями 9 инвариантов (2.222) – (2.224).

Техника решения уравнений (2.252) и первых уравнений систем (2.254) та же, что и в предыдущем параграфе: в качестве новых переменных выбираются инварианты $J_1,\, J_2,\, \ldots,\, J_9$ из (2.222) – (2.224) и некоторая функция инвариантов (2.219) $J = J\,(I_1,\, \ldots,\, I_{10})$, удовлетворяющая уравнению $A\,[J] = 1$. Тогда уравнения (2.252) и первые уравнения систем (2.254) принимают вид (2.146) и в новых переменных имеют общие решения (2.147) с произвольной функцией $\tilde{c} = \tilde{c}\,(J_1,\, J_2,\, \ldots,\, J_9)$ инвариантов (2.222) – (2.224).

В качестве новой переменной J можно взять, например,

$$J = \arcsin\frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}} \quad \text{или} \quad J = \arcsin\frac{I_4}{\sqrt{I_3^2 + I_4^2}}. \tag{2.256}$$

Перейдя в (2.147) к старым переменным (2.219) в соответствии с выражениями (2.256), получим искомые общие решения уравнений (2.252) и (2.254). Ниже эти общие решения будут использоваться в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 &= \tilde{c}_1 \cdot (I_1 + iI_2) + \tilde{c}_3 \cdot (I_3 + iI_4) = \tilde{c}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{c}_3 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33}, \\ \tilde{\Omega}_2 &= \tilde{c}_2 \cdot (I_3 + iI_4) + \tilde{c}_4 \cdot (I_1 + iI_2) = \tilde{c}_2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{c}_4 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}; \end{aligned} \tag{2.257}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}_3 + i\tilde{\Omega}_5\right) &= \tilde{c}_5 \cdot \left(I_1^2 - I_2^2 + i2I_1I_2\right) = \tilde{c}_5 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}^2, \\ \tilde{\Omega}_4 + i\tilde{\Omega}_6 &= \tilde{c}_6 \cdot \left(I_3^2 - I_4^2 + i2I_3I_4\right) = \tilde{c}_6 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33}^2, \end{aligned} \tag{2.258}$$

где $\tilde{c}_m$ $(m = 1,\, 2,\, \ldots,\, 6)$ – произвольные комплекснозначные функции инвариантов $J_1,\, J_2,\, \ldots,\, J_9$ из (2.222) – (2.224). Разумеется, представление коэффициентов $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$ в виде сумм не является обязательным и общие решения уравнений (2.252) можно было бы записать, например, в виде

$$\tilde{\Omega}_1 = \tilde{c}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}, \quad \tilde{\Omega}_2 = \tilde{c}_2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33}. \tag{2.259}$$

В силу равенств

$$A\left[\tilde{\varepsilon}_{kk}\right] = i\tilde{\varepsilon}_{kk}, \quad A\left[\tilde{\varepsilon}_{33}\right] = i\tilde{\varepsilon}_{33} \tag{2.260}$$

и произвольности функций $\tilde{c}_m$ всегда можно перейти от представлений (2.257) к представлениям (2.259) и наоборот. Однако запись общих решений в виде (2.259) не позволит нам в дальнейшем произвести необходимые упрощения.

Из (2.255) и (2.258) имеем

$$\begin{gathered} \tilde{\Omega}_3 = \tilde{\mu}_1 + \tilde{c}_5 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}^2, \quad \tilde{\Omega}_5 = i\left(\tilde{\mu}_1 - \tilde{c}_5 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}^2\right), \\ \tilde{\Omega}_4 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\mu}_2 + \tilde{c}_6 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33}^2\right), \quad \tilde{\Omega}_6 = \frac{1}{2} i\left(\tilde{\mu}_2 - \tilde{c}_6 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33}^2\right). \end{gathered} \tag{2.261}$$

Таким образом, требование инвариантности исходных представлений (2.248) или (2.250) к преобразованию сдвига по времени сводит их к виду

$$\begin{gathered} \tilde{\sigma}_{ij} = \left[\tilde{c}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{c}_3 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33}\right]\delta_{ij} + \left[\tilde{c}_2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{c}_4 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}\right]\delta_{i3}\delta_{3j} + \\ + \tilde{\mu}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_2 \cdot \left(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}\right) + \tilde{c}_5 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}^2 \bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \\ + \frac{1}{2}\tilde{c}_6 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33}^2\left(\delta_{i3}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{3j} + \delta_{j3}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{3i}\right). \end{gathered} \tag{2.262}$$

Здесь учтены обозначения (2.228).

Прежде чем приступить к анализу уравнений (2.262), запишем выражения для функций накопления и диссипации (2.152)

$$\bar{U} = Re\tilde{\Phi}, \quad \bar{D} = Im\tilde{\Phi}, \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}. \tag{2.263}$$

Учитывая (2.262), (2.219) и (2.222) – (2.224), получаем

$$\begin{gathered} \tilde{\Phi} = 2\tilde{c}_1 \cdot J_1 + 2\tilde{c}_2 \cdot J_2 + \left(\tilde{c}_3 + \tilde{c}_4\right) \cdot J_3 + 2\tilde{\mu}_1 \cdot J_5 + \\ + i\left(\tilde{c}_3 - \tilde{c}_4\right) \cdot \left(\varepsilon'_{kk}\varepsilon''_{33} - \varepsilon''_{kk}\varepsilon'_{33}\right) + \tilde{c}_5 \cdot \left(J_6 - iJ_7\right) + \tilde{c}_6 \cdot \left(J_8 - iJ_9\right). \end{gathered} \tag{2.264}$$

Заметим, что инвариант $\varepsilon'_{kk}\varepsilon''_{33} - \varepsilon''_{kk}\varepsilon'_{33} = \hat{\Gamma}_{kk33}$ (см. (2.110)) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.221)

$$A\left[\varepsilon'_{kk}\varepsilon''_{33} - \varepsilon''_{kk}\varepsilon'_{33}\right] = 0$$

и, следовательно, выражается через инварианты J_1, J_2, ..., J_9.

Запишем также уравнения (2.262) в развернутом виде (2.92)

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}\,(;\,)\,\tilde{\varepsilon}_{kl}, \tag{2.265}$$

где

$$\begin{gathered}
\tilde{C}_{ijkl}\,(;\,) = \tilde{c}_1 \cdot \delta_{ij}\delta_{kl} + \tilde{c}_2 \cdot \delta_{k3}\delta_{l3}\delta_{i3}\delta_{j3} + \tilde{c}_3 \cdot \delta_{k3}\delta_{l3}\delta_{ij} + \\
+\tilde{c}_4 \cdot \delta_{kl}\delta_{i3}\delta_{j3} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_1 \cdot (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \\
+\frac{1}{4}\tilde{\mu}_2 \cdot (\delta_{ik}\delta_{j3}\delta_{l3} + \delta_{il}\delta_{j3}\delta_{k3} + \delta_{jk}\delta_{i3}\delta_{l3} + \delta_{jl}\delta_{i3}\delta_{k3}) + \\
+\tilde{c}_5 \cdot \tilde{\varepsilon}_{nn}\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\tilde{c}_6 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33}\,(\delta_{i3}\bar{\bar{\varepsilon}}_{3j} + \delta_{j3}\bar{\bar{\varepsilon}}_{3i})\,\delta_{k3}\delta_{l3}.
\end{gathered} \tag{2.266}$$

Как и раньше, нас прежде всего интересуют условия, при которых уравнения (2.262) допускают концепцию комплексных модулей. Для материалов с произвольными нелинейными свойствами можно сделать следующее замечание

Замечание 1. Если процесс деформирования простой (монофазный), т. е. $\varepsilon''_{ij} = \alpha\varepsilon'_{ij}$ $(\alpha = const)$, то

$$J_7 = 0, \quad J_9 = 0, \quad J_6 = 4J_1J_4, \quad J_8 = 4J_2J_5 \tag{2.267}$$

и из (2.262) получаем амплитудные уравнения

$$\begin{gathered}
\tilde{\sigma}_{ij} = [\tilde{c}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{c}_3 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33}]\,\delta_{ij} + [\tilde{c}_2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{c}_4 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}]\,\delta_{i3}\delta_{j3} + \\
+\tilde{\mu}_{10} \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_{20} \cdot (\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i})
\end{gathered} \tag{2.268}$$

с комплексными модулями $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_3$, $\tilde{c}_4$ и

$$\tilde{\mu}_{10} = \tilde{\mu}_1 + 2\tilde{c}_5 \cdot J_1, \quad \tilde{\mu}_{20} = \tilde{\mu}_2 + 2\tilde{c}_6 \cdot J_2, \tag{2.269}$$

зависящими от инвариантов J_1, J_2, J_3, J_4 и J_5. Кроме того, при простом деформировании $J_3^2 = 4J_1J_2$. Заметим, что в общем случае материала с “несимметричными” нелинейными свойствами $\tilde{c}_3 \neq \tilde{c}_4$.

Перейдем к материалам с “симметричными” нелинейными свойствами, для которых коэффициенты (2.266) инвариантны к преобразованию (2.91). В результате этого преобразования инварианты J_7 и J_9 из (2.226) меняют знак, тогда как остальные инварианты остаются постоянными.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_1^* &= \tilde{c}_1\left(J_1,\ldots,J_6,-J_7,J_8,-J_9\right),\\
\tilde{c}_2^* &= \tilde{c}_2\left(J_1,\ldots,J_6,-J_7,J_8,-J_9\right),\\
\tilde{c}_3^* &= \tilde{c}_3\left(J_1,\ldots,J_6,-J_7,J_8,-J_9\right),\\
\tilde{c}_4^* &= \tilde{c}_4\left(J_1,\ldots,J_6,-J_7,J_8,-J_9\right),\\
\tilde{\mu}_1^* &= \tilde{\mu}_1\left(J_1,\ldots,J_6,-J_7,J_8,-J_9\right),\\
\tilde{\mu}_2^* &= \tilde{\mu}_2\left(J_1,\ldots,J_6,-J_7,J_8,-J_9\right),\\
\tilde{c}_5^* &= \tilde{c}_5\left(J_1,\ldots,J_6,-J_7,J_8,-J_9\right),\\
\tilde{c}_6^* &= \tilde{c}_6\left(J_1,\ldots,J_6,-J_7,J_8,-J_9\right)
\end{aligned} \tag{2.270}$$

и учесть равенства (см. (2.110))

$$\begin{gathered}
\tilde{\varepsilon}_{nn}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \Gamma_{ijnn} + i\hat{\Gamma}_{ijnn},\\
\tilde{\varepsilon}_{33}\left(\delta_{i3}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{3j} + \delta_{j3}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{3i}\right) =\\
= \delta_{i3}\Gamma_{3j33} + \delta_{j3}\Gamma_{3i33} + i\left(\delta_{i3}\hat{\Gamma}_{3j33} + \delta_{j3}\hat{\Gamma}_{3i33}\right),
\end{gathered} \tag{2.271}$$

отмеченное условие инвариантности коэффициентов (2.266) к преобразованию (2.91) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\left(\tilde{c}_1^* - \tilde{c}_1\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + \left(\tilde{c}_2^* - \tilde{c}_2\right)\delta_{k3}\delta_{l3}\delta_{i3}\delta_{j3} +\\
+\frac{1}{2}\left(\tilde{\mu}_1^* - \tilde{\mu}_1\right)\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) +\\
+\frac{1}{4}\left(\tilde{\mu}_2^* - \tilde{\mu}_2\right)\left(\delta_{ik}\delta_{j3}\delta_{l3} + \delta_{il}\delta_{j3}\delta_{k3} + \delta_{jk}\delta_{i3}\delta_{l3} + \delta_{jl}\delta_{i3}\delta_{k3}\right) +\\
+\left(\tilde{c}_3^* - \tilde{c}_3\right)\delta_{k3}\delta_{l3}\delta_{ij} + \left(\tilde{c}_4^* - \tilde{c}_4\right)\delta_{kl}\delta_{3i}\delta_{3j} +\\
+\left[\left(\tilde{c}_5^* - \tilde{c}_5\right)\Gamma_{ijnn} - i\left(\tilde{c}_5^* + \tilde{c}_5\right)\hat{\Gamma}_{ijnn}\right]\delta_{kl} +\\
+\frac{1}{2}\left[\left(\tilde{c}_6^* - \tilde{c}_6\right)\left(\delta_{i3}\Gamma_{3j33} + \delta_{j3}\Gamma_{3i33}\right) -\right.\\
\left. - i\left(\tilde{c}_6^* + \tilde{c}_6\right)\left(\delta_{i3}\hat{\Gamma}_{3j33} + \delta_{j3}\hat{\Gamma}_{3i33}\right)\right]\delta_{k3}\delta_{l3} = 0.
\end{gathered} \tag{2.272}$$

Здесь учтено, что величины $\hat{\Gamma}_{ijnn}$ и $\hat{\Gamma}_{3i33}$ в результате преобразования (2.91) меняют знак. Из (2.272) получаем равенства

$$\begin{gathered}
\tilde{c}_1^* = \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_2^* = \tilde{c}_2, \quad \tilde{\mu}_1^* = \tilde{\mu}_1, \quad \tilde{\mu}_2^* = \tilde{\mu}_2,\\
\tilde{c}_3^* = \tilde{c}_3, \quad \tilde{c}_4^* = \tilde{c}_4, \quad \tilde{c}_5 = 0, \quad \tilde{c}_6 = 0.
\end{gathered} \tag{2.273}$$

Воспользуемся теперь условием инвариантности к преобразованию (2.91) функции (2.264) (см. (2.235)). С учетом равенств (2.273) это условие сводится к виду

$$\tilde{c}_3 = \tilde{c}_4. \tag{2.274}$$

Заметим, что равенства $\tilde{c}_5 = 0$, $\tilde{c}_6 = 0$ и $\tilde{c}_3 = \tilde{c}_4$ можно получить, если потребовать симметрию коэффициентов (2.266) относительно перестановки пар индексов $\widetilde{C}_{ijkl}\,(;) = \widetilde{C}_{klij}\,(;)$.

Сформулируем полученный в данном пункте **результат** следующим образом: для трансверсально-изотропных материалов с "симметричными" нелинейными свойствами амплитудные уравнения в предположении их квазилинейности имеют вид

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij} = \left[\tilde{c}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{c}_3 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33}\right]\delta_{ij} + \left[\tilde{c}_2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{c}_3 \cdot \tilde{\varepsilon}_{kk}\right]\delta_{i3}\delta_{j3} + \\ + \tilde{\mu}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_2 \cdot \left(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}\right),\end{gathered} \tag{2.275}$$

где $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{\mu}_1$ и $\tilde{\mu}_2$ – произвольные функции инвариантов (2.222) – (2.224), удовлетворяющие условию

$$\tilde{c}_1^* = \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_2^* = \tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_3^* = \tilde{c}_3, \quad \tilde{\mu}_1^* = \tilde{\mu}_1, \quad \tilde{\mu}_2^* = \tilde{\mu}_2. \tag{2.276}$$

Замечание 2. Вместо инвариантов J_7 и J_9 в число аргументов функций из (2.275) можно включить инварианты (см. (2.219))

$$\bar{J}_7 = I_7^2 + I_9^2 = \frac{1}{4J_1^2}\left(J_6^2 + J_7^2\right) \quad \text{и} \quad \bar{J}_9 = I_8^2 + I_{10}^2 = \frac{1}{4J_2}\left(J_8^2 + J_9^2\right). \tag{2.277}$$

Тогда в (2.275) функции $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{\mu}_1$ и $\tilde{\mu}_2$ – произвольные функции инвариантов J_1, $J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, \bar{J}_7, J_8, \bar{J}_9$. Заметим, что $\bar{J}_7$ и $\bar{J}_9$ являются следующими инвариантами тензора Γ_{ijkl} из (2.110):

$$\bar{J}_7 = 2\Gamma_{ijkl}\Gamma_{ijkl} - \Gamma_{ijji}\Gamma_{kllk}, \quad \bar{J}_9 = 2\Gamma_{3k3l}\Gamma_{3k3l} - \Gamma_{3k3k}\Gamma_{3l3l}. \tag{2.278}$$

Замечание 3. Линейные амплитудные уравнения получаем из (2.275), положив $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2 = const$. Вместе с тем, эти уравнения можно получить независимо, если с самого начала воспользоваться линейными представлениями тензорных функций (2.248) или (2.250), положив

$$\begin{gathered}\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\alpha}_1\varepsilon'_{kk} + \tilde{\alpha}_2\varepsilon''_{kk} + \tilde{\alpha}_3\varepsilon'_{33} + \tilde{\alpha}_4\varepsilon''_{33}, \\ \tilde{\Omega}_2 = \tilde{\beta}_1\varepsilon'_{kk} + \tilde{\beta}_2\varepsilon''_{kk} + \tilde{\beta}_3\varepsilon'_{33} + \tilde{\beta}_4\varepsilon''_{33}, \\ \tilde{\alpha}_i = \alpha'_i + i\alpha''_i = const, \quad \tilde{\beta}_i = \beta'_i + i\beta''_i = const \quad (i = 1,\, 2, 3,\, 4), \\ \tilde{\Omega}_3 = const,\ \tilde{\Omega}_4 = const,\ \tilde{\Omega}_5 = const,\ \tilde{\Omega}_6 = const.\end{gathered} \tag{2.279}$$

Тогда из (2.252) получим равенства

$$\tilde{\alpha}_2 = i\tilde{\alpha}_1, \quad \tilde{\alpha}_4 = i\tilde{\alpha}_3, \quad \tilde{\beta}_2 = i\tilde{\beta}_1, \quad \tilde{\beta}_4 = i\tilde{\beta}_3, \tag{2.280}$$

а из (2.253) – равенства

$$\tilde{\Omega}_5 = i\tilde{\Omega}_3, \quad \tilde{\Omega}_6 = i\tilde{\Omega}_4. \tag{2.281}$$

В результате уравнения (2.250) преобразуются к виду

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \left[\tilde{\alpha}_1\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{\alpha}_3\tilde{\varepsilon}_{33}\right]\delta_{ij} + \left[\tilde{\beta}_3\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{\beta}_1\tilde{\varepsilon}_{kk}\right]\delta_{i3}\delta_{3j} + \tilde{\mu}_1\tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_2\left(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}\right), \tag{2.282}$$

где обозначено

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\Omega}_3 = const, \quad \frac{1}{2}\tilde{\mu}_2 = \tilde{\Omega}_4 = const. \tag{2.283}$$

Условие инвариантности функции $\tilde{\Phi} = \tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$ к преобразованию (2.91) приводит к равенству

$$\tilde{\alpha}_3 = \tilde{\beta}_1. \tag{2.284}$$

В результате получаем амплитудные уравнения, которые с точностью до обозначений коэффициентов совпадают с уравнениями (2.275), если в последних считать $\tilde{c}_1,\ \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{\mu}_1,\ \tilde{\mu}_2 = const$.

6.3. Большое число определяющих инвариантов делает экспериментальную конкретизацию амплитудных уравнений (2.275) в общем виде практически невозможной. Как и в предыдущем параграфе, можно ограничиться классом материалов, для которых в уравнениях (2.275) можно пренебречь зависимостью коэффициентов от инвариантов тензора Γ_{ijkl} второго порядка, оставив только инварианты первого порядка. В результате будем иметь амплитудные уравнения с пятью определяющими инвариантами J_1, J_2, J_3, J_4 и J_5 (см. 2.226).

Дальнейшее упрощение амплитудных уравнений (2.275) связано с предложением о их потенциальности, когда на коэффициенты этих уравнений, как функции инвариантов J_1, J_2, J_3, J_4 и J_5, накладываются условия взаимности. В результате придем к амплитудным уравнениям (2.241) с коэффициентами (2.240) и условиями (2.243).

Распишем уравнения (2.241), используя обычные обозначения коэффициентов:

$$\begin{gathered}
\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{C}_{11}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{C}_{12}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{C}_{13}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33},\\
\tilde{\sigma}_{22} = \tilde{C}_{12}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{C}_{11}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{C}_{13}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33},\\
\tilde{\sigma}_{33} = \tilde{C}_{13}(;)\left(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}\right) + \tilde{C}_{33}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33},\\
\tilde{\sigma}_{12} = \left(\tilde{C}_{11}(;) - \tilde{C}_{12}(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{12},\\
\tilde{\sigma}_{23} = \tilde{C}_{55}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{23},\\
\tilde{\sigma}_{13} = \tilde{C}_{55}(;)\,\tilde{\varepsilon}_{13}.
\end{gathered} \tag{2.285}$$

С учетом соотношений (2.240) коэффициенты уравнений (2.285) принимают вид

$$
\begin{gathered}
\tilde{C}_{11}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4}, \quad \tilde{C}_{12}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1}, \quad \tilde{C}_{13}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3}, \\
\tilde{C}_{33}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_2} + 2\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_5}, \\
\tilde{C}_{55}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_5}.
\end{gathered} \tag{2.286}
$$

С практической точки зрения вместо инвариантов (2.222) и (2.224) удобнее пользоваться инвариантами

$$
\begin{gathered}
\bar{J}_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}\right)^2 + \left(\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22}\right)^2\right], \\
\bar{J}_2 = \varepsilon'^2_{12} + \varepsilon''^2_{12} - \left(\varepsilon'_{11}\varepsilon'_{22} + \varepsilon''_{11}\varepsilon''_{22}\right), \\
\bar{J}_3 = \left(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}\right)\varepsilon'_{33} + \left(\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22}\right)\varepsilon''_{33}, \\
\bar{J}_4 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon'^{\,2}_{33} + \varepsilon''^2_{33}\right), \quad \bar{J}_5 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon'^{\,2}_{13} + \varepsilon''^2_{13} + \varepsilon'^{\,2}_{23} + \varepsilon''^2_{23}\right),
\end{gathered} \tag{2.287}
$$

связанными с инвариантами (2.222) и (2.224) соотношениями

$$
\begin{gathered}
\bar{J}_1 = J_1 + J_2 - J_3, \quad \bar{J}_2 = J_4 - 2J_5 - J_1 + J_3, \quad \bar{J}_3 = J_3 - 2J_2, \\
\bar{J}_4 = J_2, \quad \bar{J}_5 = 2\left(J_5 - J_2\right).
\end{gathered} \tag{2.288}
$$

Если комплексный потенциал $\tilde{U} = U + iD$ считать функцией инвариантов (2.287), выражения для коэффициентов уравнений (2.285) примут более компактный вид

$$
\begin{gathered}
\tilde{C}_{11}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{J}_1}, \quad \tilde{C}_{12}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{J}_1} - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{J}_2}, \quad \tilde{C}_{13}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{J}_3}, \\
\tilde{C}_{33}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{J}_4}, \quad \tilde{C}_{55}\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{J}_5}.
\end{gathered} \tag{2.289}
$$

Термодинамические ограничения на амплитудные уравнения (2.285) сводятся к неравенствам

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\bar{D} = C''_{11}\,(;)\,\bar{J}_1 + \left(C''_{11}\,(;) - C''_{12}\,(;)\right)\bar{J}_2 + C''_{13}\,(;)\,\bar{J}_3 + \\
+ C''_{33}\,(;)\,\bar{J}_4 + C''_{55}\,(;)\,\bar{J}_5 \geq 0, \\
\frac{1}{2}\bar{U} = C'_{11}\,(;)\,\bar{J}_1 + \left(C'_{11}\,(;) - C'_{12}\,(;)\right)\bar{J}_2 + C'_{13}\,(;)\,\bar{J}_3 + \\
+ C'_{33}\,(;)\,\bar{J}_4 + C'_{55}\,(;)\,J'_5 \geq 0, \\
C'_{ij}\,(;) + iC''_{ij}\,(;) = \tilde{C}_{ij}\,(;) \quad (ij = 11,\ 12,\ 13,\ 33,\ 55),
\end{gathered}
\tag{2.290}
$$

причем второе из них следует рассматривать как дополнительную гипотезу. В общем случае коэффициенты в (2.290), кроме инвариантов $\bar{J}_1,\ \bar{J}_2,\ \bar{J}_3,\ \bar{J}_4$ и $\bar{J}_5$, являются функциями частоты ω и температуры T.

Возможные подходы к экспериментальной конкретизации амплитудных уравнений (2.285) рассматриваются в следующей главе.

§ 7. Амплитудные уравнения для трансверсально-изотропного неупругого материала (без пьезоэффекта) в терминах ползучести. Обратимость амплитудных уравнений

7.1. Результаты § 6 отвечают релаксационной формулировке теории. Их формулировка в терминах ползучести не вызывает дополнительных затруднений. Соответствующие этому случаю уравнения в потенциалах имеют вид

$$
\varepsilon'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \sigma''_{ij}}, \quad \varepsilon''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma''_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \sigma'_{ij}}, \tag{2.291}
$$

или в комплексной форме

$$
\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \sigma'_{ij}} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \sigma''_{ij}}, \tag{2.292}
$$

где $\tilde{U} = U - iD$, причем

$$
\tilde{U} = \int\limits_0^1 \tilde{F}\left(\lambda\sigma'_{ij},\ \lambda\sigma''_{ij}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \tilde{F} = \bar{U} - i\bar{D}. \tag{2.293}
$$

Как и раньше, $\bar{U}$ и $\bar{D}$ – функции накопления и диссипации, рассматриваемые как функции независимых переменных, в данном случае переменных σ'_{ij} и σ''_{ij}.

Для получения окончательных результатов нет необходимости в повторении рассуждений предыдущего параграфа. Эти результаты получаются из представленных выше путем формальной замены

$$\sigma'_{ij} \to \varepsilon'_{ij}, \quad \sigma''_{ij} \to \varepsilon''_{ij}, \quad \varepsilon'_{ij} \to \sigma'_{ij}, \quad \varepsilon''_{ij} \to \sigma''_{ij} \tag{2.294}$$

и замены комплексных модулей $\tilde{C}$ на комплексные податливости $\tilde{S}$, причем последние в силу "несимметричности" функции диссипации относительно замены (2.294) удобно записывать в виде

$$\tilde{S}_{ij}\,(;) = S'_{ij}\,(;) - iS''_{ij}\,(;) \quad (ij = 11,\ 12,\ 13,\ 33,\ 55)\,. \tag{2.295}$$

Выполнив указанные замены в (2.285), получаем

$$\begin{gathered}
\tilde{\varepsilon}_{11} = \tilde{S}_{11}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{S}_{12}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{22} + \tilde{S}_{13}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{33}, \\
\tilde{\varepsilon}_{22} = \tilde{S}_{12}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{S}_{11}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{22} + \tilde{S}_{13}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{33}, \\
\tilde{\varepsilon}_{33} = \tilde{S}_{13}\,(;)\,(\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22}) + \tilde{S}_{33}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{33}, \\
\tilde{\varepsilon}_{12} = \left(\tilde{S}_{11}\,(;) - \tilde{S}_{12}\,(;)\right)\tilde{\sigma}_{12}, \\
\tilde{\varepsilon}_{23} = \tilde{S}_{55}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{23}, \\
\tilde{\varepsilon}_{13} = \tilde{S}_{55}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{13}.
\end{gathered} \tag{2.296}$$

Коэффициенты уравнений (2.296) являются функциями инвариантов (см. (2.287))

$$\begin{gathered}
J_1^{(\sigma)} = \frac{1}{2}\left[(\sigma'_{11} + \sigma'_{22})^2 + (\sigma''_{11} + \sigma''_{22})^2\right], \\
J_2^{(\sigma)} = \sigma'^{\,2}_{12} + \sigma''^{2}_{12} - (\sigma'_{11}\sigma'_{22} + \sigma''_{11}\sigma''_{22})\,, \\
J_3^{(\sigma)} = (\sigma'_{11} + \sigma'_{22})\,\sigma'_{33} + (\sigma''_{11} + \sigma''_{22})\,\sigma''_{33}, \\
J_4^{(\sigma)} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma'^{\,2}_{33} + \sigma''^{2}_{33}\right), \quad J_5^{(\sigma)} = \sigma'^{\,2}_{13} + \sigma''^{2}_{13} + \sigma'^{\,2}_{23} + \sigma''^{2}_{23}
\end{gathered} \tag{2.297}$$

и в предположении потенциальности этих уравнений имеют вид

$$\begin{gathered}
\tilde{S}_{11}\,(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_1^{(\sigma)}}, \;\; \tilde{S}_{12}\,(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_1^{(\sigma)}} - \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_2^{(\sigma)}}, \;\; \tilde{S}_{13}\,(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_3^{(\sigma)}}, \\
\tilde{S}_{33}\,(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_4^{(\sigma)}}, \;\; \tilde{S}_{55}\,(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_5^{(\sigma)}},
\end{gathered} \tag{2.298}$$

где $\tilde{U}$ – комплексный потенциал (2.293)

$$\tilde{U} = \int\limits_0^1 \tilde{F}\left(\lambda^2 J_1^{(\sigma)}, \ldots, \lambda^2 J_5^{(\sigma)}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \tilde{F} = \bar{U} - i\bar{D}. \tag{2.299}$$

Экспериментальному определению подлежат функции накопления и диссипации

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} &= \bar{U}\left(J_1^{(\sigma)}, \ldots, J_5^{(\sigma)}\right), \\ \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon'' &= \bar{D}\left(J_1^{(\sigma)}, \ldots, J_5^{(\sigma)}\right). \end{aligned} \tag{2.300}$$

7.2. Рассмотрим амплитудные уравнения (2.285) и (2.296), причем не обязательно потенциальные. Прежде чем перейти к вопросу о взаимной обратимости этих уравнений, исследуем их на “единственность”. Для этого предположим, что заданные напряженное и деформированное состояния допускают описание уравнениями (2.285) с разными наборами коэффициентов. Обозначим эти коэффициенты соответственно $\tilde{C}_{ij}\,(;)$ и $\tilde{c}_{ij}\,(;)$ $(ij = 11,\ 12,\ 13,\ 33,\ 55)$. Тогда должны выполняться равенства

$$\begin{gathered} \left(\tilde{C}_{11}(;) - \tilde{c}_{11}(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{11} + \left(\tilde{C}_{12}(;) - \tilde{c}_{12}(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{22} + \\ + \left(\tilde{C}_{13}(;) - \tilde{c}_{13}(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{33} = 0, \\ \left(\tilde{C}_{12}(;) - \tilde{c}_{12}(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{11} + \left(\tilde{C}_{11}(;) - \tilde{c}_{11}(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{22} + \\ + \left(\tilde{C}_{13}(;) - \tilde{c}_{13}(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{33} = 0, \\ \left(\tilde{C}_{13}(;) - \tilde{c}_{13}(;)\right)(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}) + \left(\tilde{C}_{33}(;) - \tilde{c}_{33}(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{33} = 0, \\ \left(\tilde{C}_{11}(;) - \tilde{c}_{11}(;)\right) - \left(\tilde{C}_{12}(;) - \tilde{c}_{12}(;)\right) = 0, \quad \tilde{C}_{55}(;) - \tilde{c}_{55}(;) = 0. \end{gathered} \tag{2.301}$$

В отличие от линейной теории, автоматическое выполнение всех равенств $\tilde{C}_{ij}\,(;) = \tilde{c}_{ij}\,(;)$ из (2.301) не следует. Первое, второе и четвертое уравнения из (2.301) зависимы, в результате чего можно записать

$$\begin{gathered} \left(\tilde{C}_{11}\,(;) - \tilde{c}_{11}\,(;)\right)(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}) + \left(\tilde{C}_{13}\,(;) - \tilde{c}_{13}\,(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{33} = 0, \\ \left(\tilde{C}_{13}\,(;) - \tilde{c}_{13}\,(;)\right)(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}) + \left(\tilde{C}_{33}\,(;) - \tilde{c}_{33}\,(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{33} = 0, \\ \tilde{C}_{12}\,(;) - \tilde{c}_{12}\,(;) = \tilde{C}_{11}\,(;) - \tilde{c}_{11}\,(;), \quad \tilde{C}_{55}\,(;) = \tilde{c}_{55}\,(;). \end{gathered} \tag{2.302}$$

Из первых двух уравнений (2.302), в частности, следует

$$\left(\tilde{C}_{11}\,(;) - \tilde{c}_{11}\,(;)\right)\left(\tilde{C}_{33}\,(;) - \tilde{c}_{33}\,(;)\right) - \left(\tilde{C}_{13}\,(;) - \tilde{c}_{13}\,(;)\right)^2 = 0. \tag{2.303}$$

Таким образом, связь между заданными комплексными амплитудами механических напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ в виде уравнений (2.285) допускает в общем случае некоторый произвол в выборе коэффициентов этих уравнений. Если какие-либо два коэффициента $\tilde{C}_{ij}\,(;)$ и $\tilde{c}_{ij}\,(;)$ $(ij = 11,\ 12,\ 13,\ 33)$ из двух наборов коэффициентов равны, то равны и все остальные коэффициенты.

Вместе с тем, уравнения (2.285) получены нами для материалов с "симметричными" нелинейными свойствами. В этом случае коэффициенты $\tilde{C}_{ij}\,(;)$ и $\tilde{c}_{ij}\,(;)$, как функции аргументов (2.287) (здесь и ниже рассматриваются амплитудные уравнения с пятью определяющими инвариантами), инварианты к замене (2.91). В связи с этим преобразуем, например, второе из уравнений (2.302), умножив его на $\bar{\tilde{\varepsilon}}_{33}$. В результате, учитывая (2.287), будем иметь

$$2\left(\tilde{C}_{33}\,(;) - \tilde{c}_{33}\,(;)\right)\bar{J}_4 + \left(\tilde{C}_{13}\,(;) - \tilde{c}_{13}\,(;)\right)\left(\bar{J}_3 - i\alpha\right) = 0, \tag{2.304}$$

где

$$\alpha = \left(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}\right)\varepsilon''_{33} - \left(\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22}\right)\varepsilon'_{33}. \tag{2.305}$$

В (2.304) все величины, за исключением α, инвариантны к замене (2.91). Что касается величины α, то она в результате этой замены меняет знак. Поэтому из (2.304) получаем $\tilde{C}_{13}\,(;) = \tilde{c}_{13}\,(;)$, а из (2.302) – равенства всех остальных коэффициентов.

Таким образом, для материалов с "симметричными" нелинейными свойствами

$$\begin{gathered}\tilde{C}_{11}\,(;) = \tilde{c}_{11}\,(;)\,, \quad \tilde{C}_{12}\,(;) = \tilde{c}_{12}\,(;)\,, \quad \tilde{C}_{13}\,(;) = \tilde{c}_{13}\,(;)\,, \\ \tilde{C}_{33}\,(;) = \tilde{c}_{33}\,(;)\,, \quad \tilde{C}_{55}\,(;) = \tilde{c}_{55}\,(;)\end{gathered} \tag{2.306}$$

и "единственность" уравнений (2.285) имеет место. Естественно, все изложенное выше автоматически переносится на уравнения (2.296).

7.3. "Заморозив" инварианты (2.287) и (2.297), уравнения (2.285) можно формально разрешить относительно комплексных амплитуд деформаций, а уравнения (2.296) - относительно комплексных амплитуд напряжений. В последнем случае от уравнений (2.296) переходим к уравнениям вида (2.285), но с коэффициентами

$$\begin{gathered}\tilde{C}_{11}\,(;) = \frac{\tilde{S}_{11}\,(;)\,\tilde{S}_{33}\,(;) - \tilde{S}^2_{13}\,(;)}{\tilde{P}\,(;)\left(\tilde{S}_{11}\,(;) - \tilde{S}_{12}\,(;)\right)}, \quad \tilde{C}_{12}\,(;) = \frac{\tilde{S}^2_{13}\,(;) - \tilde{S}_{12}\,(;)\,\tilde{S}_{33}\,(;)}{\tilde{P}\,(;)\left(\tilde{S}_{11}\,(;) - \tilde{S}_{12}\,(;)\right)}, \\ \tilde{C}_{13}\,(;) = -\frac{\tilde{S}_{13}\,(;)}{\tilde{P}\,(;)}, \quad \tilde{C}_{33}\,(;) = \frac{\tilde{S}_{11}\,(;) + \tilde{S}_{12}\,(;)}{\tilde{P}\,(;)}, \quad \tilde{C}_{55}\,(;) = \frac{1}{\tilde{S}_{55}\,(;)}, \\ \tilde{P}\,(;) = \tilde{S}_{33}\,(;)\left(\tilde{S}_{11}\,(;) + \tilde{S}_{12}\,(;)\right) - 2\tilde{S}^2_{13}\,(;)\,,\end{gathered} \tag{2.307}$$

зависящими, в отличие от коэффициентов уравнений (2.285), от инвариантов (2.297).

При разрешении уравнений (2.285) комплексные податливости и модули в (2.307) следует поменять местами.

Таким образом, коэффициенты уравнений (2.285) и (2.296) связаны такими же соотношениями, что и в линейной теории, а вопрос об обратимости этих уравнений с учетом изложенного в п. 7.2 сводится к вопросу об обратимости наборов инвариантов (2.287) и (2.297)

Используя уравнения (2.296), выразим инварианты (2.287) через составляющие механических напряжений. Для этого введем обозначения

$$\begin{gathered}
a_{11}(;) = \left|\tilde{S}_{11}(;) + \tilde{S}_{12}(;)\right|^2, \quad a_{12}(;) = a_{21}(;) = 0, \\
a_{13}(;) = a_{31}(;) = 2Re\left[\left(\tilde{S}_{11}(;) + \tilde{S}_{12}(;)\right)\bar{\tilde{S}}_{13}\right], \\
a_{14}(;) = a_{41}(;) = 4\left|\tilde{S}_{13}(;)\right|^2, \quad a_{15}(;) = a_{51}(;) = 0, \\
a_{22}(;) = \left|\tilde{S}_{11}(;) - \tilde{S}_{12}(;)\right|^2, \quad a_{23}(;) = a_{32}(;) = 0, \\
a_{24}(;) = a_{42}(;) = 0, \quad a_{25}(;) = a_{52}(;) = 0, \\
a_{33}(;) = Re\left[\left(\tilde{S}_{11}(;) + \tilde{S}_{12}(;)\right)\bar{\tilde{S}}_{33}(;)\right] + 2\left|\tilde{S}_{13}(;)\right|^2, \\
a_{34}(;) = a_{43}(;) = 4Re\left[\tilde{S}_{13}(;)\bar{\tilde{S}}_{33}(;)\right], \\
a_{35}(;) = a_{53}(;) = 0, \quad a_{44}(;) = 4\left|\tilde{S}_{33}(;)\right|^2, \\
a_{45}(;) = a_{54}(;) = 0, \quad a_{55}(;) = \left|\tilde{S}_{55}(;)\right|^2,
\end{gathered} \tag{2.308}$$

$$\begin{gathered}
b_1(;) = 2Im\left[\left(\tilde{S}_{11}(;) + \tilde{S}_{12}(;)\right)\bar{\tilde{S}}_{13}(;)\right], \quad b_2(;) = b_5(;) = 0, \\
b_3(;) = Im\left[\left(\tilde{S}_{11}(;) + \tilde{S}_{12}(;)\right)\bar{\tilde{S}}_{33}(;)\right], \\
b_4(;) = 4Im\left[\tilde{S}_{13}(;)\bar{\tilde{S}}_{33}(;)\right],
\end{gathered} \tag{2.309}$$

$$\beta = (\sigma'_{11} + \sigma'_{22})\,\sigma''_{33} - (\sigma''_{11} + \sigma''_{22})\,\sigma'_{33}. \tag{2.310}$$

Если вместо вторых инвариантов $\bar{J}_2$ и $J_2^{(\sigma)}$ из (2.287) и (2.297) временно ввести инварианты соответственно

$$\hat{J}_2 = \bar{J}_1 + 2\bar{J}_2 \ \text{ и } \ \hat{J}_2^{(\sigma)} = J_1^{\sigma} + 2J_2^{(\sigma)}, \tag{2.311}$$

а вместо инварианта $\bar{J}_4$ – инвариант $\hat{J}_4 = 4\bar{J}_4$, сохранив для инвариантов $\hat{J}_2$, $\hat{J}_2^{(\sigma)}$ и $\hat{J}_4$ прежние обозначения $\bar{J}_2$, $J_2^{(\sigma)}$ и $\bar{J}_4$, то искомые соотношения для инвариантов $\bar{J}_i$ с учетом выполненных замен можно представить в следующем виде

$$\bar{J}_i = \sum_{j=1}^{5} a_{ij}\,(;\,) J_j^{(\sigma)} + b_i\,(;\,)\,\beta \quad (i = 1, \ldots, 5)\,, \tag{2.312}$$

где, как и раньше, $(;\,) = \left(J_1^{(\sigma)}, \ldots, J_5^{(\sigma)}\right)$.

При фиксированных инвариантах $J_j^{(\sigma)}$ величина β (2.310) определяется с точностью до знака

$$\beta = \pm\sqrt{4J_1^{(\sigma)} J_4^{(\sigma)} - J_3^{(\sigma)^2}}. \tag{2.313}$$

Поэтому выразить однозначно инварианты $\bar{J}_i$ через инварианты $J_j^{(\sigma)}$ без тех или иных дополнительных предположений нельзя даже в рамках линейной теории.

Рассмотрим несколько частных случаев.

Предположим, что величины $\sigma_{11} + \sigma_{22}$ и σ_{33} имеют одинаковые фазы. В этом случае $\beta \equiv 0$ и инварианты $\bar{J}_i$ однозначно определяются инвариантами $J_j^{(\sigma)}$ $(i,\ j = 1, \ldots, 5)$.

То же самое будем иметь, если все $b_i\,(;\,) = 0$. С учетом обозначений (2.295) последние равенства сводятся к равенствам

$$\begin{gathered}\frac{S''_{13}(;\,)}{S'_{13}(;\,)} - \frac{S''_{11}(;\,) + S''_{12}(;\,)}{S'_{11}(;\,) + S'_{12}(;\,)} = 0, \quad \frac{S''_{33}(;\,)}{S'_{33}(;\,)} - \frac{S''_{11}(;\,) + S''_{12}(;\,)}{S'_{11}(;\,) + S'_{12}(;\,)} = 0,\\ \frac{S''_{33}(;\,)}{S'_{33}(;\,)} - \frac{S''_{13}(;\,)}{S'_{13}(;\,)} = 0.\end{gathered} \tag{2.314}$$

Заметим, что третье из равенств (2.314) является следствием двух первых равенств. Очевидно, что достаточным условием выполнения равенств (2.314) и, следовательно, достаточным условием однозначной определимости инвариантов $\bar{J}_i$ инвариантами $J_j^{(\sigma)}$ является равенство тангенсов углов потерь

$$\frac{S''_{11}\,(;\,)}{S'_{11}\,(;\,)} = \frac{S''_{12}\,(;\,)}{S'_{12}\,(;\,)} = \frac{S''_{13}\,(;\,)}{S'_{13}\,(;\,)} = \frac{S''_{33}\,(;\,)}{S'_{33}\,(;\,)}. \tag{2.315}$$

Уравнения (2.312) можно преобразовать, если воспользоваться равенством, связывающим инварианты $J_j^{(\sigma)}$ и величину β (2.310) с величиной α (2.305). Это равенство получается с использованием уравнений (2.296) и в обозначениях (2.309) имеет вид

$$\alpha = -\sum_{j=1}^{5} b_j\,(;\,)\,J_j^{(\sigma)} + \theta\,(;\,)\,\beta, \tag{2.316}$$

где (см. (2.307))

$$\theta\,(;\,) = \mathrm{Re}\left[\left(\tilde{S}_{11}\,(;\,) + \tilde{S}_{12}\,(;\,)\right)\bar{\tilde{S}}_{33}\,(;\,)\right] - 2\left|\tilde{S}_{13}\,(;\,)\right|^2 \neq 0. \tag{2.317}$$

Подставляя выражение для β из (2.316) в (2.312), будем иметь

$$\bar{J}_i = \sum_{j=1}^{5}\left[a_{ij}\,(;\,) + \frac{b_i\,(;\,)\,b_j\,(;\,)}{\theta\,(;\,)}\right] J_j^{(\sigma)} + \frac{b_i\,(;\,)}{\theta\,(;\,)}\alpha. \tag{2.318}$$

Неоднозначность в уравнения (2.318) вносит величина α

$$\alpha = \pm\sqrt{\bar{J}_1\bar{J}_4 - \bar{J}_3^2}, \tag{2.319}$$

где с учетом выполненной выше замены $\bar{J}_4 = 2\left(\varepsilon_{33}'^{\,2} + \varepsilon_{33}''^{2}\right)$.

Еще один частный случай однозначной определимости инвариантов $\bar{J}_i$ инвариантами $J_j^{(\sigma)}$ получаем при $\alpha = 0$. Это равенство выполняется, если одинаковые фазы имеют величины $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ и ε_{33}.

Напомним теперь, что амплитудные уравнения (2.285) с пятью определяющими инвариантами получены нами в результате пренебрежения зависимостью коэффициентов более общих уравнений (2.275) от инвариантов тензора Γ_{ijkl} второго порядка. Это оправдано в том случае, когда материал имеет малые внутренние потери. Здесь и ниже под малыми внутренними потерями будем понимать такие потери, квадратами и произведениями тангенсов углов которых по сравнению с единицей можно пренебречь. Сказанное, естественно, относится и к уравнениям (2.296).

При малых потерях рассмотренные выше частные случаи однозначной определимости инвариантов $\bar{J}_i$ инвариантами $J_j^{(\sigma)}$ приводят к одним и тем же соотношениям, которые в обозначениях (2.287) и (2.297) имеют вид

$$
\begin{gathered}
\bar{J}_1 = \big(S'_{11}\,(;\,) + S'_{12}\,(;\,)\big)^2 J_1^{(\sigma)} + \\
+2\big(S'_{11}\,(;\,) + S'_{12}\,(;\,)\big) S'_{13}\,(;\,)\, J_3^{(\sigma)} + 4{S'_{13}}^2\,(;\,)\, J_4^{(\sigma)}, \\
\bar{J}_1 + 2\bar{J}_2 = \big(S'_{11}\,(;\,) - S'_{12}\,(;\,)\big)\left(J_1^{(\sigma)} + 2J_2^{(\sigma)}\right), \\
\bar{J}_3 = 2\big(S'_{11}\,(;\,) + S'_{12}\,(;\,)\big) S'_{13}\,(;\,)\, J_1^{(\sigma)} + \\
+\left[\big(S'_{11}\,(;\,) + S'_{12}\,(;\,)\big) S'_{33}\,(;\,) + 2{S'_{13}}^2\,(;\,)\right] J_3^{(\sigma)} + \\
+4S'_{13}\,(;\,)\, S'_{33}\,(;\,)\, J_4^{(\sigma)}, \\
4\bar{J}_4 = 4{S'_{13}}^2\,(;\,)\, J_1^{(\sigma)} + 4S'_{13}\,(;\,)\, S'_{33}\,(;\,)\, J_3^{(\sigma)} + 4{S'_{33}}^2\,(;\,)\, J_4^{(\sigma)}, \\
\bar{J}_5 = {S'_{55}}^2\,(;\,)\, J_5^{(\sigma)}, \quad (;\,) = \left(J_1^{(\sigma)}, \ldots, J_5^{(\sigma)}\right).
\end{gathered}
\tag{2.320}
$$

Кроме того, при малых потерях предположение о выполнении равенства $\beta = 0$ или равенства $\alpha = 0$ можно ослабить, а именно, для получения уравнений (2.320) достаточно потребовать, чтобы порядок отношения $\frac{|\beta|}{\left|J_3^{(\sigma)}\right|}$ или $\frac{|\alpha|}{\left|\bar{J}_3\right|}$ не превышал порядка тангенсов углов потерь (см. (2.312) или (2.318)).

Возможность пренебрежения последними слагаемыми в правых частях уравнений (2.312) в случае требуемой малости отношения $\frac{|\beta|}{\left|J_3^{(\sigma)}\right|}$ является очевидной.Что касается уравнений (2.318), то при требуемой малости отношения $\frac{|\alpha|}{\left|\bar{J}_3\right|}$ очевидным является только пренебрежение последним слагаемым в третьем из этих уравнений (уравнении для $\bar{J}_3$). В остальных уравнениях (2.318) (речь идёт только о первом и четвертом из этих уравнений, поскольку $b_2(;\,) = 0$ и $b_5(;\,) = 0$) предварительно следует воспользоваться выражением для $J_3^{(\sigma)}$ из третьего уравнения (2.318).

Требуемая малость отношения $\frac{|\beta|}{\left|J_3^{(\sigma)}\right|}$ или $\frac{|\alpha|}{\left|\bar{J}_3\right|}$ всегда выполняется в случае квазистатических колебаний, при которых напряженно-деформированное состояние определяется действительными составляющими комплексных амплитуд полевых величин, а мнимыми составляющими этих амплитуд можно пренебречь.

Сказанное становится очевидным, если расписать выражение для величины β или α с учетом выражений для инвариантов (2.297) или

(2.287). Например,

$$\frac{|\beta|}{\left|J_3^{(\sigma)}\right|} = \sqrt{\frac{\left[(\sigma'_{11}+\sigma'_{22})^2+(\sigma''_{11}+\sigma''_{22})^2\right]\left[{\sigma'_{33}}^2+{\sigma''_{33}}^2\right]}{\left[(\sigma'_{11}+\sigma'_{22})\,\sigma'_{33}+(\sigma''_{11}+\sigma''_{22})\,\sigma''_{33}\right]^2}-1}. \qquad (2.321)$$

Для величины $\frac{|\alpha|}{|\bar{J}_3|}$ в правой части (2.321) составляющие напряжений следует заменить на составляющие деформаций.

Та же малость отношения $\frac{|\beta|}{\left|J_3^{(\sigma)}\right|}$ (при кинематическом возбуждении колебаний) или $\frac{|\alpha|}{|\bar{J}_3|}$ (при силовом возбуждении) имеет место и при резонансных колебаниях. В резонансной области мнимые составляющие комплексных амплитуд полевых величин достигают своих максимальных значений, тогда как действительные составляющие меняют знак, "переходя"через ноль (речь, конечно,идёт о комплексных амплитудах напряжений в случае кинематического возбуждения колебаний и комплексных амплитудах деформаций в случае силового возбуждения этих колебаний). При резонансных колебаниях в правой части соотношения типа (2.231) пренебрегается действительными составляющими комплексных амплитуд полевых величин. Проведенные авторами многочисленные расчеты резонансных колебаний неупругих тел [60, 71, 79, 104, 121 и др.] показали, что при нахождении резонансной частоты с точностью до 3 – 4 знаков после запятой действительные составляющие комплексных амплитуд полевых величин примерно на два порядка ниже мнимых составляющих этих амплитуд.

Кроме рассмотренных выше крайних случаев, те же расчеты свидетельствуют о достаточной малости отношения $\frac{|\beta|}{\left|J_3^{(\sigma)}\right|}$ (в случае кинематического возбуждения колебаний) или отношения $\frac{|\alpha|}{|\bar{J}_3|}$ (в случае силового возбуждения колебаний) для любого другого частотного диапазона.

Таким образом, при малых потерях связь между инвариантами (2.287) и (2.297) может быть описана “упругоподобными” соотношениями (2.320), а вопрос о переходе от уравнений в податливостях (2.296) к уравнениям в модулях (2.285) с помощью соотношений (2.307) сводится к вопросу о разрешимости соотношений (2.320) относительно инвариантов $J_1^{(\sigma)}, \ldots, J_5^{(\sigma)}$. Достаточным условием этой разрешимости является отличие от нуля соответствующего (2.320) якобиана.

Все изложенное выше автоматически переносится на случай перехода от уравнений (2.285) к уравнениям (2.296). Соответствующие "упругоподобные" соотношения, связывающие инварианты, получаются из (2.320) путем замены

$$\begin{gathered}\bar{J}_i \to J_i^{(\sigma)}, \quad J_i^{(\sigma)} \to \bar{J}_i \quad (i=1,\ldots,5)\,, \quad S'_{kl}\,(;\,) \to C'_{kl}\,(;\,) \\ (kl = 11,\ 12,\ 13,\ 33,\ 55)\,,\end{gathered} \tag{2.322}$$

а в соотношениях (2.307) следует поменять местами комплексные податливости и модули.

В заключение сделаем следующие замечания.

Замечание 1. Отличные от нулевых величины $b_1\,(;\,)$, $b_3\,(;\,)$ и $b_4\,(;\,)$ из (2.309) связаны соотношением

$$\tilde{S}_{33}\,(;\,)\,b_1\,(;\,) - 2\tilde{S}_{13}\,(;\,)\,b_3\,(;\,) + \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{11}\,(;\,) + \tilde{S}_{12}\,(;\,)\right) b_4\,(;\,) = 0. \tag{2.323}$$

Запишем выражение для функций накопления и диссипации $\tilde{\Phi} = \bar{U} + i\bar{D}$:

$$\frac{1}{2}\tilde{\Phi} = \tilde{C}_{11}\,(;)\,\bar{J}_1 + \left(\tilde{C}_{11}\,(;) - \tilde{C}_{12}\,(;)\right)\bar{J}_2 + \tilde{C}_{13}\,(;)\,\bar{J}_3 + \tilde{C}_{33}\,(;)\,\bar{J}_4 + \tilde{C}_{55}\,(;)\,\bar{J}_5, \tag{2.324}$$

где $(;\,) = \left(\bar{J}_1,\ldots,\bar{J}_5\right)$. Если воспользоваться формулами перехода (2.307) и связывающими инварианты формулами (2.312) (следует учесть, что в (2.312), в отличие от (2.324), под инвариантами $\bar{J}_2$, $J_2^{(\sigma)}$ и $\bar{J}_4$ понимаются инварианты (2.311) и $4\bar{J}_4$), выражение (2.324) с учетом (2.323) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\tilde{\Phi} = \bar{\tilde{S}}_{11}\,(;\,)\,J_1^{(\sigma)} + \left(\bar{\tilde{S}}_{11}\,(;\,) - \bar{\tilde{S}}_{12}\,(;\,)\right) J_2^{(\sigma)} + \bar{\tilde{S}}_{13}\,(;\,)\,J_3^{(\sigma)} + \\ + \bar{\tilde{S}}_{33}\,(;\,)\,J_4^{(\sigma)} + \bar{\tilde{S}}_{33}\,(;\,)\,J_5^{(\sigma)},\end{gathered} \tag{2.325}$$

где $(;\,) = \left(J_1^{(\sigma)},\ldots,J_5^{(\sigma)}\right)$. Следовательно, не зависимо от того, каковыми являются последние слагаемые в правых частях (2.312), они не дают вклад в функции накопления и диссипации. Вместе с тем, без пренебрежения этими слагаемыми в рамках малых потерь мы не смогли бы получить однозначное соответствие между инвариантами и переход от выражения (2.324) с коэффициентами, зависящими от инвариантов $\bar{J}_1,\ldots,\bar{J}_5$, к выражению (2.325) с коэффициентами, зависящими от инвариантов $J_1^{(\sigma)},\ldots,J_5^{(\sigma)}$, был бы не обоснован. В связи с этим перейдем ко второму замечанию.

Замечание 2. Вопрос о взаимной обратимости амплитудных уравнений (2.296) и (2.285) решался нами выше в предположении малости внутренних потерь материала. Вместе с тем, к решению этого вопроса можно было бы подойти с более общих позиций. А именно, после перехода от уравнений (2.312) к уравнениям (2.318) можно было бы ставить вопрос о разрешимости последних относительно инвариантов $J_1^{(\sigma)}, \ldots, J_5^{(\sigma)}$, считая α дополнительной переменной, независящей от инвариантов $\bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_5$. Если соответствующий уравнениям (2.318) якобиан отличен от нуля, уравнения (2.318) определяют неявно функции

$$J_i^{(\sigma)} = J_i^{(\sigma)}\left(\bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_5;\, \alpha\right) \quad (i = 1, \ldots, 5)\,. \tag{2.326}$$

Однозначно определяются и производные $\frac{\partial J_i^{(\sigma)}}{\partial \alpha}$. Обратимость уравнений (2.296) в этом случае означает, что правые части соотношений (2.307) с учетом (2.326) должны быть четными функциями α (см. (2.319)). Можно потребовать выполнения более жестокого условия, когда правые части соотношений (2.307) считаются независящими от α вовсе. Последнее условие приведет к некоторым дифференциальным равенствам, которым должны удовлетворять податливости $\tilde{S}_{ij}\,(;) \quad (ij = 11,\ 12,\ 13,\ 33,\ 55)$, как функции инвариантов $J_1^{(\sigma)}, \ldots J_5^{(\sigma)}$.

Глава 3.

Амплитудные уравнения для трансверсально-изотропных неупругих пьезоматериалов

В данной главе мы продолжаем построение замкнутых нелинейных амплитудных теорий для конкретных сред, начатые в §§ 5, 6, 7 предыдущей главы. Объектом исследования выступает неупругий физически нелинейный трансверсально-изотропный пьезоэлектрический материал. Строиться потенциальная теория амплитудных уравнений и более общая теория, основанная на представлениях тензорных функций. Рассматриваются вопросы об обратимости амплитудных уравнений и их экспериментальной конкретизации[1].

§ 1. Замкнутая потенциальная теория амплитудных уравнений

Как и в §§ 5, 6 предыдущей главы, начнем изложение материала данной главы с построения амплитудных уравнений, используя предположение о их потенциальности.

Итак, в качестве исходных уравнений данного параграфа примем уравнения в потенциалах (2.76)

[1]Часть результатов данной и предыдущей глав получены совместно с Лущиковым А.В.

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \\
E'_k &= \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k}, \quad E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k}.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Потенциалы U и D удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.20)

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} + \frac{\partial \Phi}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \Phi}{\partial D''_k} D'_k = 0 \tag{3.2}
$$

и поэтому являются, вообще говоря, функциями вида (см. (2.25))

$$
\begin{aligned}
U &= U\left(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{kl}, \hat{\Gamma}_{ijkl}, \hat{\Gamma}_{ijk}, \hat{\Gamma}_{kl}\right), \\
D &= D\left(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{kl}, \hat{\Gamma}_{ijkl}, \hat{\Gamma}_{ijk}, \hat{\Gamma}_{kl}\right),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Gamma_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}, \quad \Gamma_{ijk} = \varepsilon'_{ij} D'_k + \varepsilon''_{ij} D''_k, \\
\Gamma_{kl} = D'_k D'_l + D''_k D''_l,
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

$$
\begin{gathered}
\hat{\Gamma}_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{kl} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl}, \quad \hat{\Gamma}_{ijk} = \varepsilon'_{ij} D''_k - \varepsilon''_{ij} D'_k, \\
\hat{\Gamma}_{kl} = D'_k D''_l - D''_k D'_l.
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Величины (3.4) и (3.5) не являются независимыми и связаны соотношениями (2.26).

Для материалов с "симметричными" нелинейными свойствами зависимости (3.3) упрощаются (см. замечание 1 § 2):

$$
U = U\left(\Gamma_{ijkl},\ \Gamma_{ijk},\ \Gamma_{kl}\right), \quad D = D\left(\Gamma_{ijkl},\ \Gamma_{ijk},\ \Gamma_{kl}\right). \tag{3.6}
$$

Перейдем к трансверсально-изотропным пьезоматериалам с поляризацией вдоль оси Ox_3. Поскольку U и D – скаляры, их зависимости от тензоров (3.4) и (3.5) могут быть реализованы только через инварианты этих тензоров. По видимому, какие-либо общие представления трансверсально-изотропных скалярных функций от набора тензоров четвертого, третьего и второго рангов типа (3.4) и (3.5) в литературе отсутствуют. Вместе с тем, структура этих тензоров такова, что позволяет рассматривать функции U и D как трансверсально-изотропные скалярные функции двух симметричных тензоров второго ранга ε'_{mn},

ε''_{mn} и двух векторов D'_k, D''_k. Очевидно, что в этом случае от функций U и D, как функций совместных инвариантов тензоров ε'_{mn}, ε''_{mn} и векторов D'_k, D''_k, необходимо потребовать удовлетворения дифференциальному уравнению (3.2).

Из всевозможных совместных инвариантов тензоров ε'_{mn}, ε''_{mn} и векторов D'_k, D''_k, отвечающих трансверсальной изотропии, оставим только линейные и квадратичные инварианты

$$\begin{gathered}
I_1 = \varepsilon'_{kk}, \quad I_2 = \varepsilon''_{kk}, \quad I_3 = \varepsilon'_{33}, \quad I_4 = \varepsilon''_{33}, \quad I_5 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ji}, \\
I_6 = \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ji}, \quad I_7 = \varepsilon'_{3k}\varepsilon'_{k3}, \quad I_8 = \varepsilon''_{3k}\varepsilon''_{k3}, \quad I_9 = \varepsilon'_{3k}D'_k, \\
I_{10} = \varepsilon''_{3k}D''_k, \quad I_{11} = D'_3, \quad I_{12} = D''_3, \quad I_{13} = D'_kD'_k, \\
I_{14} = D''_kD''_k, \quad I_{15} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{ji}, \quad I_{16} = \varepsilon'_{3k}\varepsilon''_{k3}, \quad I_{17} = D'_kD''_k, \\
I_{18} = \varepsilon'_{3k}D''_k, \quad I_{19} = \varepsilon''_{3k}D'_k \quad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3)\,.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Вместо (3.7) можно взять инварианты

$$\begin{gathered}
i_1 = \varepsilon'_{\alpha\alpha}, \quad i_2 = \varepsilon''_{\alpha\alpha}, \quad i_3 = \varepsilon'_{33}, \quad i_4 = \varepsilon''_{33}, \quad i_5 = \varepsilon'_{\alpha\beta}\varepsilon'_{\beta\alpha}, \\
i_6 = \varepsilon''_{\alpha\beta}\varepsilon''_{\beta\alpha}, \quad i_7 = \varepsilon'_{3\alpha}\varepsilon'_{\alpha3}, \quad i_8 = \varepsilon''_{3\alpha}\varepsilon''_{\alpha3}, \quad i_9 = \varepsilon'_{3\alpha}D'_\alpha, \\
i_{10} = \varepsilon''_{3\alpha}D''_\alpha, \quad i_{11} = D'_3, \quad i_{12} = D''_3, \quad i_{13} = D'_\alpha D'_\alpha, \\
i_{14} = D''_\alpha D''_\alpha, \quad i_{15} = \varepsilon'_{\alpha\beta}\varepsilon''_{\beta\alpha}, \quad i_{16} = \varepsilon'_{3\alpha}\varepsilon''_{\alpha3}, \quad i_{17} = D'_\alpha D''_\alpha, \\
i_{18} = \varepsilon'_{3\alpha}D''_\alpha, \quad i_{19} = \varepsilon''_{3\alpha}D'_\alpha \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2)\,.
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Наборы инвариантов (3.7) и (3.8) связаны соотношениями

$$\begin{gathered}
I_1 = i_1 + i_3, \quad I_2 = i_2 + i_4, \quad I_3 = i_3, \quad I_4 = i_4, \\
I_5 = i_5 + 2i_7 + i_3^2, \quad I_6 = i_6 + 2i_8 + i_4^2, \quad I_7 = i_7 + i_3^2, \\
I_8 = i_8 + i_4^2, \quad I_9 = i_9 + i_3i_{11}, \quad I_{10} = i_{10} + i_4i_{12}, \\
I_{11} = i_{11}, \quad I_{12} = i_{12}, \quad I_{13} = i_{13} + i_{11}^2, \quad I_{14} = i_{14} + i_{12}^2, \\
I_{15} = i_{15} + 2i_{16} + i_3i_4, \quad I_{16} = i_{16} + i_3i_4, \\
I_{17} = i_{17} + i_{11}i_{12}, \quad I_{18} = i_{18} + i_3i_{12}, \quad I_{19} = i_{19} + i_4i_{11}
\end{gathered} \tag{3.9}$$

или обратными соотношениями

$$\begin{gathered}
i_1 = I_1 - I_3, \quad i_2 = I_2 - I_4, \quad i_3 = I_3, \quad i_4 = I_4, \\
i_5 = I_5 - 2I_7 + I_3^2, \quad i_6 = I_6 - 2I_8 + I_4^2, \quad i_7 = I_7 - I_3^2, \\
i_8 = I_8 - I_4^2, \quad i_9 = I_9 - I_3I_{11}, \quad i_{10} = I_{10} - I_4I_{12}, \quad i_{11} = I_{11}, \\
i_{12} = I_{12}, \quad i_{13} = I_{13} - I_{11}^2, \quad i_{14} = I_{14} - I_{12}^2, \\
i_{15} = I_{15} - 2I_{16} + I_3I_4, \quad i_{16} = I_{16} - I_3I_4, \quad i_{17} = I_{17} - I_{11}I_{12}, \\
i_{18} = I_{18} - I_3I_{12}, \quad i_{19} = I_{19} - I_4I_{11}.
\end{gathered} \tag{3.10}$$

Можно проверить, что матрица Якоби $\dfrac{\partial\left(i_1,\ i_2,\ldots,i_{19}\right)}{\partial\left(\varepsilon'_{11},\ \varepsilon'_{22},\ldots,D''_3\right)}$, размер которой 19×18, имеет ранг 16. Поэтому из набора инвариантов (3.8) или (3.7) необходимо исключить три инварианта.

Рассмотрим инварианты

$$\begin{gathered}
i_8=\varepsilon''^2_{13}+\varepsilon''^2_{23},\quad i_{16}=\varepsilon'_{13}\varepsilon''_{13}+\varepsilon'_{23}\varepsilon''_{23},\quad i_7=\varepsilon'^{\,2}_{13}+\varepsilon'^{\,2}_{23},\\
i_{10}=\varepsilon''_{13}D''_1+\varepsilon''_{23}D''_2,\quad i_{14}=D''^2_1+D''^2_2,\\
i_{18}=\varepsilon'_{13}D''_1+\varepsilon'_{23}D''_2
\end{gathered}\tag{3.11}$$

и повернем систему координат так, чтобы $\varepsilon''_{13}=0$. Тогда из (3.11) получаем

$$\begin{gathered}
\varepsilon''_{23}=\pm\sqrt{i_8},\quad \varepsilon'_{23}=\pm\frac{i_{16}}{\sqrt{i_8}},\quad \varepsilon'_{13}=\pm\sqrt{i_7-\frac{i_{16}^2}{i_8}},\\
D''_2=\pm\frac{i_{10}}{\sqrt{i_8}},\quad D''_1=\pm\sqrt{i_{14}-\frac{i_{10}^2}{i_8}},\\
i_{18}=\pm\sqrt{i_7-\frac{i_{16}^2}{i_8}}\sqrt{i_{14}-\frac{i_{10}^2}{i_8}}+\frac{i_{10}i_{16}}{i_8}.
\end{gathered}\tag{3.12}$$

Последнее равенство (3.12) перепишем в виде

$$\left(i_7i_8-i_{16}^2\right)\left(i_{14}i_8-i_{10}^2\right)-\left(i_{18}i_8-i_{10}i_{16}\right)^2=0.\tag{3.13}$$

Аналогично, можно получить равенство

$$\left(i_7i_8-i_{16}^2\right)\left(i_{13}i_7-i_9^2\right)-\left(i_{19}i_7-i_9i_{16}\right)^2=0.\tag{3.14}$$

Учитывая (3.13) и (3.14), исключаем из набора инвариантов (3.8) инварианты i_{18} и i_{19}. Далее, проверкой убеждаемся в справедливости равенства

$$\begin{gathered}
\left(i_{14}i_9^2i_8+i_{14}i_{16}^2i_{13}-i_7i_{10}^2i_{13}-i_7i_{17}^2i_8\right)^2-\\
-4\left(i_7i_{10}i_{17}-i_{14}i_9i_{16}\right)\left(i_9i_{16}i_{10}^2i_{13}+i_9i_{16}i_{17}^2i_8-i_9i_{16}i_{13}i_{14}i_8-\right.\\
\left.-\,i_{10}i_{17}i_9^2i_8-i_{10}i_{17}i_{16}^2i_{13}+i_{10}i_{17}i_7i_8i_{13}\right)=0,
\end{gathered}\tag{3.15}$$

из которого следует, что можно исключить или i_9, или i_{10}, или i_9-i_{10}, оставив i_9+i_{10}.

Ниже вместо некоторых пар инвариантов будем использовать их суммы и разности (обозначения инвариантов изменены):

$$
\begin{gathered}
I_1 = \varepsilon'_{kk}, \quad I_2 = \varepsilon''_{kk}, \quad I_3 = \varepsilon'_{33}, \quad I_4 = \varepsilon''_{33}, \\
I_5 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ji} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ji}, \quad I_6 = \varepsilon'_{3k}\varepsilon'_{k3} + \varepsilon''_{3k}\varepsilon''_{k3}, \\
I_7 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{ji} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{ji}, \quad I_8 = \varepsilon'_{3k}\varepsilon''_{k3} + \varepsilon''_{3k}\varepsilon'_{k3}, \\
I_9 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ji} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ji}, \quad I_{10} = \varepsilon'_{3k}\varepsilon'_{k3} - \varepsilon''_{3k}\varepsilon''_{k3}, \\
I_{11} = (\varepsilon'_{3k} + \varepsilon'_{k3})\, D'_k + (\varepsilon''_{3k} + \varepsilon''_{k3})\, D''_k, \quad I_{12} = D'_3, \\
I_{13} = D''_3, \quad I_{14} = D'_k D'_k + D''_k D''_k, \\
I_{15} = 2D'_k D''_k, \quad I_{16} = D'_k D'_k - D''_k D''_k.
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

Заметим, что первые десять инвариантов (3.16) – это инварианты (2.219).

Дифференциальное уравнение (3.2) с учетом выражений для производных (2.220), а также выражений

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial I_{11}}{\partial \varepsilon'_{kl}} = \delta_{k3} D'_l + \delta_{l3} D'_k, \quad \frac{\partial I_{11}}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \delta_{k3} D''_l + \delta_{l3} D''_k, \\
\frac{\partial I_{11}}{\partial D'_k} = 2\varepsilon'_{3k}, \quad \frac{\partial I_{11}}{\partial D''_k} = 2\varepsilon''_{3k}, \\
\frac{\partial I_{11}}{\partial D'_k} = \delta_{k3}, \quad \frac{\partial I_{13}}{\partial D''_k} = \delta_{k3}, \quad \frac{\partial I_{14}}{\partial D'_k} = 2D'_k, \quad \frac{\partial I_{14}}{\partial D''_k} = 2D''_k, \\
\frac{\partial I_{15}}{\partial D'_k} = 2D''_k, \quad \frac{\partial I_{15}}{\partial D''_k} = 2D'_k, \quad \frac{\partial I_{16}}{\partial D'_k} = 2D'_k, \quad \frac{\partial I_{16}}{\partial D''_k} = -2D''_k
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

принимает вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \Phi}{\partial I_2} I_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} I_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial I_4} I_3 - \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} I_4 + 2\frac{\partial \Phi}{\partial I_7} I_9 - 2\frac{\partial \Phi}{\partial I_9} I_7 + \\
+2\frac{\partial \Phi}{\partial I_8} I_{10} - 2\frac{\partial \Phi}{\partial I_{10}} I_8 + \frac{\partial \Phi}{\partial I_{13}} I_{12} - \frac{\partial \Phi}{\partial I_{12}} I_{13} + 2\frac{\partial \Phi}{\partial I_{15}} I_{16} - \\
-2\frac{\partial \Phi}{\partial I_{16}} I_{15} = 0.
\end{gathered}
\tag{3.18}
$$

Заметим, что инварианты I_5, I_6, I_{11}, I_{14} входят в уравнение (3.18) как параметры. Введем для них новые обозначения

$$
J_4 = \frac{1}{2} I_5, \quad J_5 = \frac{1}{2} I_6, \quad J_7 = \frac{1}{2} I_{14}, \quad J_9 = I_{11}. \tag{3.19}
$$

Легко проверить, что частными интегралами уравнения (3.18) являются (см. (2.222), (2.223))

$$\begin{gathered} J_1 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 + I_2^2\right), \quad J_2 = \frac{1}{2}\left(I_3^2 + I_4^2\right), \quad J_3 = I_1 I_3 + I_2 I_4, \\ J_6 = \frac{1}{2}\left(I_{12}^2 + I_{13}^2\right), \quad J_8 = I_1 I_{12} + I_2 I_{13}, \quad J_{10} = I_3 I_{12} + I_4 I_{13}, \end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered} J_{11} = 2I_1 I_2 I_7 + \left(I_1^2 - I_2^2\right) I_9, \quad J_{12} = \left(I_1^2 - I_2^2\right) I_7 - 2I_1 I_2 I_9, \\ J_{13} = 2I_3 I_4 I_8 + \left(I_3^2 - I_4^2\right) I_{10}, \quad J_{14} = \left(I_3^2 - I_4^2\right) I_8 - 2I_3 I_4 I_{10}, \\ J_{15} = 2I_{12} I_{13} I_{15} + \left(I_{12}^2 - I_{13}^2\right) I_{16}, \\ J_{16} = \left(I_{12}^2 - I_{13}^2\right) I_{15} - 2I_{12} I_{13} I_{16}. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Однако функционально независимых среди них только 11. Действительно, непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости равенства

$$J_1 J_{10}^2 + J_2 J_8^2 + J_6 J_3^2 - J_3 J_8 J_{10} - 4J_1 J_2 J_6 = 0, \tag{3.22}$$

из которого следует, что один из частных интегралов (3.20) можно исключить. Оставшиеся 11 интегралов (3.20) и (3.21) будут функционально независимыми. Добавив к ним инварианты (3.19), придем к общему представлению потенциалов U и D, как функций 15 инвариантов. Оставив временно в стороне вопрос о том, какой из интегралов (3.20) лучше исключить и стоит ли это делать вообще, рассмотрим потенциалы U и D как функции всех 16 инвариантов (3.19) – (3.21):

$$U = U\left(J_1, J_2, \ldots, J_{16}\right), \quad D = D\left(J_1, J_2, \ldots, J_{16}\right). \tag{3.23}$$

Естественно, что этим мы не нарушаем общности рассуждений, просто с самого начала в окончательных результатах предполагаются определенные связи.

Заметим, что аргументы функций (3.23) являются следующими инвариантами тензоров (3.4) и (3.5):

$$\begin{gathered} J_1 = \frac{1}{2}\Gamma_{iijj}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\Gamma_{3333}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\Gamma_{kk33}, \quad J_4 = \frac{1}{2}\Gamma_{ijij}, \\ J_5 = \frac{1}{2}\Gamma_{k3k3}, \quad J_6 = \frac{1}{2}\Gamma_{33}, \quad J_7 = \frac{1}{2}\Gamma_{kk}, \quad J_8 = \Gamma_{kk3}, \\ J_9 = 2\Gamma_{3kk}, \quad J_{10} = \Gamma_{333}, \quad J_{11} = 2\Gamma_{kkij}\Gamma_{ijll} - \Gamma_{kkll}\Gamma_{ijij}, \\ J_{12} = 2\Gamma_{kkij}\hat{\Gamma}_{llij}, \quad J_{13} = 2\Gamma_{333k}\Gamma_{k333} - \Gamma_{3333}\Gamma_{k3k3}, \\ J_{14} = 2\Gamma_{333k}\hat{\Gamma}_{333k}, \quad J_{15} = 2\Gamma_{3k}\Gamma_{k3} - \Gamma_{33}\Gamma_{kk}, \quad J_{16} = 2\Gamma_{3k}\hat{\Gamma}_{3k}. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Перейдем к уравнениям (3.1), которые с целью упрощения выкладок будем использовать в комплексной форме

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon'_{ij}} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \quad \tilde{\mathrm{E}}_k = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial D'_k} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial D''_k}, \tag{3.25}$$

где

$$\tilde{U} = U + iD, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij}, \quad \tilde{E}_k = E'_k + iE''_k. \tag{3.26}$$

Принимая во внимание зависимости (3.23) и учитывая выражения для производных (2.220) и (3.17), после необходимых выкладок получаем

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij} = \left\{\left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{1}{J_1}\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{11}} - i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{12}}\right)(J_{11} + i\,J_{12})\right]\tilde{\varepsilon}_{kk} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3}\tilde{\varepsilon}_{33} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8}\tilde{D}_3\right\}\delta_{ij} + \\ + \left\{\left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_2} + \frac{1}{J_2}\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{13}} - i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{14}}\right)(J_{13} + i\,J_{14})\right]\tilde{\varepsilon}_{33} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3}\tilde{\varepsilon}_{kk} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{10}}\tilde{D}_3\right\}\delta_{i3}\delta_{3j} + \\ + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4}\tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_5}\left(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}\right) + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9}\left(\delta_{i3}\tilde{D}_j + \delta_{j3}\tilde{D}_i\right) + \\ +2\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{11}} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{12}}\right)\tilde{\varepsilon}^2_{kk}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{13}} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{14}}\right)\tilde{\varepsilon}^2_{33}\left(\delta_{i3}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{3j} + \delta_{j3}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{3i}\right);\end{gathered} \tag{3.27}$$

$$\begin{gathered}\tilde{E}_k = \left\{\left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6} + \frac{1}{J_6}\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{15}} - i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{16}}\right)(J_{15} + iJ_{16})\right]\tilde{D}_3 + \right. \\ \left. + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8}\tilde{\varepsilon}_{kk} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{10}}\tilde{\varepsilon}_{33}\right\}\delta_{k3} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7}\tilde{D}_k + \\ +2\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9}\tilde{\varepsilon}_{k3} + 2\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{15}} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{16}}\right)\tilde{D}^2_3\bar{\tilde{D}}_k.\end{gathered} \tag{3.28}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}, \quad \tilde{D}_j = D'_j + iD''_j, \\ \bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} &= \varepsilon'_{ij} - i\varepsilon''_{ij}, \quad \bar{\tilde{D}}_k = D'_k - iD''_k.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Из (3.27) и (3.28) следует, что для трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала уравнения в потенциалах (3.1) или (3.25) допускают концепцию амплитудно-зависимых комплексных характеристик тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{11}}+i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{12}}=0,\quad \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{13}}+i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{14}}=0,\quad \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{15}}+i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{16}}=0 \tag{3.30}$$

или равносильные им действительные равенства (см. (3.26))

$$\frac{\partial U}{\partial J_{11}}=\frac{\partial D}{\partial J_{12}},\quad \frac{\partial U}{\partial J_{12}}=-\frac{\partial D}{\partial J_{11}}, \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial U}{\partial J_{13}}=\frac{\partial D}{\partial J_{14}},\quad \frac{\partial U}{\partial J_{14}}=-\frac{\partial D}{\partial J_{13}}, \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial U}{\partial J_{15}}=\frac{\partial D}{\partial J_{16}},\quad \frac{\partial U}{\partial J_{16}}=-\frac{\partial D}{\partial J_{15}}. \tag{3.33}$$

Равенства (3.31) – (3.33) – это условия Коши-Римана аналитичности функции $\tilde{U}=U+iD$ относительно комплексных аргументов соответственно $J_{11}+iJ_{12}$, $J_{13}+iJ_{14}$ и $J_{15}+iJ_{16}$.

С учетом (3.30) уравнения (3.27) и (3.28) принимает вид

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij}=\left\{\left[\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_1}+\frac{2}{J_1}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{11}}\left(J_{11}+iJ_{12}\right)\right]\tilde{\varepsilon}_{kk}+\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_3}\tilde{\varepsilon}_{33}+\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_8}\tilde{D}_3\right\}\delta_{ij}+\\ +\left\{\left[\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_2}+\frac{2}{J_2}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{13}}\left(J_{13}+iJ_{14}\right)\right]\tilde{\varepsilon}_{33}+\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_3}\tilde{\varepsilon}_{kk}+\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{10}}\tilde{D}_3\right\}\delta_{i3}\delta_{3j}+\\ +\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_4}\tilde{\varepsilon}_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_5}\left(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j}+\delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}\right)+\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_9}\left(\delta_{i3}\tilde{D}_j+\delta_{j3}\tilde{D}_i\right);\end{gathered} \tag{3.34}$$

$$\begin{gathered}\tilde{E}_k=\left\{\left[\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_6}+\frac{2}{J_6}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{15}}\left(J_{15}+iJ_{16}\right)\right]\tilde{D}_3+\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_8}\tilde{\varepsilon}_{kk}+\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{10}}\tilde{\varepsilon}_{33}\right\}\delta_{k3}+\\ +\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_7}\tilde{D}_k+2\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_9}\tilde{\varepsilon}_{k3}.\end{gathered} \tag{3.35}$$

Обратимся к функциям накопления и диссипации (2.37)

$$\bar{U}=Re\tilde{\Phi},\quad \bar{D}=Im\tilde{\Phi},\quad \tilde{\Phi}=\tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}+\tilde{\mathrm{E}}_k\bar{\tilde{D}}_k. \tag{3.36}$$

Если учесть (3.34) и (3.35), можно записать

$$\tilde{\Phi}=\tilde{\Phi}_0+4i\left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{11}}J_{12}+\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{13}}J_{14}+\frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{15}}J_{16}\right), \tag{3.37}$$

где

$$\tilde{\Phi}_0 = 2\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1}J_1 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_2}J_2 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3}J_3 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4}J_4 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_5}J_5 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6}J_6 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7}J_7 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8}J_8 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9}J_9 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{10}}J_{10}\right) + 4\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{11}}J_{11} + \tag{3.38}$$
$$+4\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{13}}J_{13} + 4\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{15}}J_{15}.$$

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на характер нелинейности материала. Перейдем теперь к материалам с “симметричными” нелинейными свойствами, для которых функции накопления $\bar{U}$ и диссипации $\bar{D}$, а также потенциалы U и D являются функциями вида (3.6) и, следовательно, инварианты к преобразованию (2.41). Из (3.24) видно, что в результате этого преобразования инварианты J_{12}, J_{14} и J_{16} меняют знак, тогда как остальные инварианты остаются постоянными. Поэтому должны выполняться равенства

$$\begin{gathered}\tilde{\Phi}\left(J_1, \ldots, J_{11}, -J_{12}, J_{13}, -J_{14}, J_{15}, -J_{16}\right) = \tilde{\Phi}\left(J_1, \ldots, J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}, J_{16}\right), \\ \tilde{U}\left(J_1, \ldots, J_{11}, -J_{12}, J_{13}, -J_{14}, J_{15}, -J_{16}\right) = \tilde{U}\left(J_1, \ldots, J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}, J_{16}\right).\end{gathered} \tag{3.39}$$

Но тогда из (3.37) получаем

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{11}}J_{12} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{13}}J_{14} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{15}}J_{16} = 0 \tag{3.40}$$

или с учетом (3.30)

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{12}}J_{12} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{14}}J_{14} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{16}}J_{16} = 0. \tag{3.41}$$

Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{12}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{14}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{16}} = 0, \tag{3.42}$$

а это значит (см. (3.30)), что и

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{11}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{13}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{15}} = 0. \tag{3.43}$$

Принимая во внимания равенства (3.43) и введя обозначения

$$\begin{gathered}
\tilde{\lambda}_\alpha\,(;) = \lambda'_\alpha\,(;) + i\lambda''_\alpha\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,3,4,5)\,; \\
\tilde{\beta}_1\,(;) = \beta'_1\,(;) + i\beta''_1\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6}, \quad \tilde{\beta}_2\,(;) = \beta'_2\,(;) + i\beta''_2\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7}; \\
\tilde{h}_1\,(;) = h'_1\,(;) + ih''_1\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8}, \quad \tilde{h}_3\,(;) = h'_3\,(;) + ih''_3\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9}, \\
\tilde{h}_2\,(;) = h'_2\,(;) + ih''_2\,(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{10}}, \\
(;) = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_8, J_9, J_{10})\,,
\end{gathered} \tag{3.44}$$

из (3.34) и (3.35) получаем

$$\begin{gathered}
\tilde{\sigma}_{ij} = \left[\tilde{\lambda}_1\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{\lambda}_3\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{h}_1\,(;)\,\tilde{D}_3\right]\delta_{ij} + \\
+ \left[\tilde{\lambda}_2\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{\lambda}_3\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{h}_2\,(;)\,\tilde{D}_3\right]\delta_{i3}\delta_{3j} + \tilde{\lambda}_4\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \\
+ \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_5\,(;)\,(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}) + \tilde{h}_3\,(;)\left(\delta_{3i}\tilde{D}_j + \delta_{3j}\tilde{D}_i\right);
\end{gathered} \tag{3.45}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathrm{E}}_k = \left[\tilde{\beta}_1\,(;)\,\tilde{D}_3 + \tilde{h}_1\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{h}_2\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}\right]\delta_{k3} + \\
+ \tilde{\beta}_2\,(;)\,\tilde{D}_k + 2\tilde{h}_3\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{k3}.
\end{gathered} \tag{3.46}$$

Очевидно, что при использовании в уравнениях (3.25) полной системы функционально независимых совместных инвариантов тензоров ε'_{ij}, ε''_{ij} и векторов D'_k, D''_k, отвечающих трансверсальной изотропии (кроме инвариантов (3.16) учесть инварианты третьего порядка, но не больше двух), нарушается квазилинейность выражений для $\tilde{\sigma}_{ij}$ и $\tilde{\mathrm{E}}_k$, которая предполагается концепцией амплитудно-зависимых комплексных характеристик. Поэтому приходим к следующему **результату**: для трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала с “симметричными” нелинейными свойствами уравнения в потенциалах (3.25) или в обычной записи (3.1) допускают комплексную форму представления (3.45) и (3.46) с амплитудно-зависимыми комплексными характеристиками тогда и только тогда, когда потенциалы (3.6) зависят только от инвариантов первого порядка тензоров (3.4), т.е. являются функциями вида

$$U = U\,(J_1,\,\ldots,\,J_{10})\,,\ \ D = D\,(J_1,\,\ldots,\,J_{10})\,. \tag{3.47}$$

В этом случае комплексные характеристики находятся по формулам (3.44). Используя эти формулы, легко записать соответствующие условия взаимности для комплексных характеристик. Для механических характеристик они имеют вид (2.243).

Экспериментальному определению подлежат функции накопления и диссипации

$$\begin{aligned} \bar{U}\left(J_1, \ldots, J_{10}\right) &= \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k, \\ \bar{D}\left(J_1, \ldots, J_{10}\right) &= \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k, \end{aligned} \tag{3.48}$$

после чего комплексный потенциал находится по формуле

$$\tilde{U} = \int_0^1 \tilde{\Phi}\left(\lambda^2 J_1, \ldots, \lambda^2 J_{10}\right) \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \tilde{\Phi} = \bar{U} + i\bar{D}. \tag{3.49}$$

Линейную теорию получаем, когда функции (3.48) аппроксимируются линейными функциями инвариантов $J_1, \ldots, J_{10}$.

§ 2. Теория амплитудных уравнений на основе представлений тензорных функций

В § 6 предыдущей главы показано, что концепция амплитудно-зависимых комплексных характеристик для трансверсально-изотропного (непьезоактивного) материала с “симметричными” нелинейными свойствами обоснована, если коэффициенты в общих представлениях тензорных функций содержат только линейные и квадратичные инварианты. Ниже этот вопрос исследуется для трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала. При этом по аналогии с §§ 5, 6 гл. 2 мы хотим показать, что концепция комплексных характеристик для трансверсально-изотропных пьезоэлектрических материалов с “симметричными” нелинейными свойствами допускает более широкий спектр амплитудных зависимостей, чем те, которые описываются уравнениями (3.45) и (3.46).

Включим в число аргументов тензорных функций (2.16) образующие тензоры трансверсальной изотропии δ_{ij} и δ_{j3} и для сокращения записи представим эти функции в комплексной форме

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} &= \tilde{\sigma}_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k, \delta_{ij}, \delta_{j3}\right), \\ \tilde{\mathrm{E}}_j &= \tilde{\mathrm{E}}_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k, \delta_{ij}, \delta_{j3}\right), \end{aligned} \tag{3.50}$$

где учтены обозначения (3.26).

Рассмотрим тензоры

$$\begin{gathered}\delta_{ij},\quad \delta_{i3}\delta_{j3},\quad \varepsilon'_{ij},\quad \delta_{i3}\varepsilon'_{3j}+\delta_{j3}\varepsilon'_{3i},\quad \varepsilon''_{ij},\quad \delta_{i3}\varepsilon''_{3j}+\delta_{j3}\varepsilon''_{3i},\\ \delta_{i3}D'_j+\delta_{j3}D'_i,\quad \delta_{i3}D''_j+\delta_{j3}D''_i.\end{gathered} \tag{3.51}$$

Любые шесть из них можно взять в качестве тензорного базиса (очевидно, что всех таких базисов $C_8^6 = 28$) и разложить в этом базисе тензорную функцию $\tilde{\sigma}_{ij}$ из (3.50). Если наборы совместных инвариантов тензоров ε'_{ij}, ε''_{ij} и векторов D'_k, D''_k, как аргументы коэффициентов в таких разложениях, считать полными, то все эти разложения будут равносильными.

Аналогично, любые три вектора из набора

$$\delta_{j3},\ \ D'_j,\ \ D''_j,\ \ \varepsilon'_{3j},\ \ \varepsilon''_{3j} \tag{3.52}$$

можно использовать в качестве базиса для разложения векторной функции $\tilde{\mathrm{E}}_j$ из (3.50). Здесь также все эти $C_5^3 = 10$ разложений будут равносильными, если соответствующие наборы совместных инвариантов тензорных и векторных аргументов в коэффициентах этих разложений считать полными.

Выделим класс функций (3.50), которые допускают разложение в том или ином из упомянутых базисов, но с коэффициентами, зависящими только от линейных и квадратичных совместных инвариантов тензоров ε'_{ij}, ε''_{ij} и векторов D'_k, D''_k. В предыдущем параграфе показано, что из 19 таких инвариантов функционально независимых 16. Будем использовать их в виде (3.16). Путем всевозможных линейных комбинаций функций выделенного класса можно построить множества тензорных и векторных функций (3.50) вида

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij}=\tilde{\Omega}_1\cdot\delta_{ij}+\tilde{\Omega}_2\cdot\delta_{i3}\delta_{3j}+\tilde{\Omega}_3\cdot\varepsilon'_{ij}+\tilde{\Omega}_4\cdot\left(\delta_{i3}\varepsilon'_{3j}+\delta_{j3}\varepsilon'_{3i}\right)+\\ +\tilde{\Omega}_5\cdot\varepsilon''_{ij}+\tilde{\Omega}_6\cdot\left(\delta_{i3}\varepsilon''_{3j}+\delta_{j3}\varepsilon''_{3i}\right)+\tilde{\Omega}_7\cdot\left(\delta_{i3}D'_j+\delta_{j3}D'_i\right)+\\ +\tilde{\Omega}_8\cdot\left(\delta_{i3}D''_j+\delta_{j3}D''_i\right),\end{gathered} \tag{3.53}$$

$$\tilde{\mathrm{E}}_j=\tilde{F}_1\cdot\delta_{j3}+\tilde{F}_2\cdot D'_j+\tilde{F}_3\cdot D''_j+\tilde{F}_4\cdot\varepsilon'_{j3}+\tilde{F}_5\cdot\varepsilon''_{j3}, \tag{3.54}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{\Omega}_m=\Omega'_m+i\Omega''_m\quad(m=1,\,2,\,\ldots,\,8)\,,\\ \tilde{F}_n=F'_n+iF''_n\quad(n=1,\,2,\,\ldots,\,5)\end{gathered} \tag{3.55}$$

– скалярные функции инвариантов (3.16).

Замечание 1. Проверим, что представление (3.53) определяет единственную тензорную, а представление (3.54) – единственную векторную функции. Другими словами, покажем, что из равенства нулю левых частей этих представлений следуют равенства нулю всех фигурирующих в них коэффициентов $\tilde{\Omega}_m$ и $\tilde{F}_n$.

Расписав представление (5.53) при $\tilde{\sigma}_{ij} = 0$ для наборов индексов $(i = 1,\ j = 1)$, $(i = 2,\ j = 2)$, $(i = 1,\ j = 2)$, получаем систему

$$\begin{cases} \tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_3 \cdot \varepsilon'_{11} + \tilde{\Omega}_5 \cdot \varepsilon''_{11} = 0 \\ \tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_3 \cdot \varepsilon'_{22} + \tilde{\Omega}_5 \cdot \varepsilon''_{22} = 0 \\ \qquad \tilde{\Omega}_3 \cdot \varepsilon'_{12} + \tilde{\Omega}_5 \cdot \varepsilon''_{12} = 0. \end{cases}$$

В общем случае немонофазной деформации определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon'_{11} & \varepsilon''_{11} \\ 1 & \varepsilon'_{22} & \varepsilon''_{22} \\ 0 & \varepsilon'_{12} & \varepsilon''_{12} \end{vmatrix} = \left(\varepsilon'_{22} - \varepsilon'_{11}\right) \varepsilon''_{12} - \left(\varepsilon''_{22} - \varepsilon''_{11}\right) \varepsilon'_{12} \neq 0.$$

Поэтому

$$\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\Omega}_3 = \tilde{\Omega}_5 = 0.$$

Учитывая эти равенства в (3.53) и полагая $i = 3,\ j = 3$ и $\tilde{\sigma}_{33} = 0$, а также, принимая во внимание обозначения (3.16), приходим к равенству

$$\tilde{\Omega}_2 + 2\tilde{\Omega}_4 \cdot I_3 + 2\tilde{\Omega}_6 \cdot I_4 + 2\tilde{\Omega}_7 \cdot I_{12} + 2\tilde{\Omega}_8 \cdot I_{13} = 0.$$

Если предположить, что хотя бы один из коэффициентов $\tilde{\Omega}_m$ в последнем равенстве отличен от нуля, получим противоречие с функциональной независимостью системы инвариантов (3.16). Поэтому

$$\tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_4 = \tilde{\Omega}_6 = \tilde{\Omega}_7 = \tilde{\Omega}_8 = 0.$$

Аналогично, полагая в (3.54) $j = 3$, $\tilde{E}_3 = 0$ и учитывая обозначения (3.16), приходим к равенству

$$\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 \cdot I_{12} + \tilde{F}_3 \cdot I_{13} + \tilde{F}_4 \cdot I_3 + \tilde{F}_5 \cdot I_4 = 0.$$

Из тех же соображений получаем, что

$$\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 = \tilde{F}_3 = \tilde{F}_4 = \tilde{F}_5 = 0.$$

От представлений (3.53) и (3.54) требуем выполнения условий инвариантности относительно преобразования сдвига по времени (2.18). С целью упрощения выкладок введем оператор

$$A\left[\tilde{\beta}\right] = \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} + \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial D''_k} D'_k - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial D'_k} D''_k, \qquad (3.56)$$

позволяющий записать равенства (2.18) в компактном виде

$$A\left[\,\tilde{\sigma}_{ij}\right] = i\,\tilde{\sigma}_{ij}, \quad A\left[\tilde{\mathrm{E}}_j\right] = i\,\tilde{\mathrm{E}}_j. \tag{3.57}$$

Очевидно, что оператор $A\left[\tilde{\beta}\right]$ имеет свойства, аналогичные (2.103), и его действие на функцию переменных (3.16) определяется левой частью равенства (3.18).

Подставляя (3.53) и (3.54) в (3.57), получаем после необходимых преобразований следующие уравнения для коэффициентов:

$$A\left[\tilde{\Omega}_1\right] = i\Omega_1, \quad A\left[\tilde{\Omega}_2\right] = i\tilde{\Omega}_2, \quad A\left[\tilde{F}_1\right] = i\tilde{F}_1, \tag{3.58}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A\left[\tilde{\Omega}_3 + i\tilde{\Omega}_5\right] = 2i\left(\tilde{\Omega}_3 + i\tilde{\Omega}_5\right) \\ A\left[\tilde{\Omega}_3 - i\tilde{\Omega}_5\right] = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A\left[\tilde{\Omega}_4 + i\tilde{\Omega}_6\right] = 2i\left(\tilde{\Omega}_4 + i\tilde{\Omega}_6\right) \\ A\left[\tilde{\Omega}_4 - i\tilde{\Omega}_6\right] = 0, \end{array}\right. \tag{3.59}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A\left[\tilde{F}_2 + i\tilde{F}_3\right] = 2i\left(\tilde{F}_2 + i\tilde{F}_3\right) \\ A\left[\tilde{F}_2 - i\tilde{F}_3\right] = 0, \end{array}\right. \tag{3.60}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A\left[\tilde{\Omega}_7 + i\tilde{\Omega}_8\right] = 2i\left(\tilde{\Omega}_7 + i\tilde{\Omega}_8\right) \\ A\left[\tilde{\Omega}_7 - i\tilde{\Omega}_8\right] = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A\left[\tilde{F}_4 + i\tilde{F}_5\right] = 2i\left(\tilde{F}_4 + i\tilde{F}_5\right) \\ A\left[\tilde{F}_4 - i\tilde{F}_5\right] = 0. \end{array}\right. \tag{3.61}$$

Из вторых уравнений систем (3.59) – (3.61) следует, что функции

$$\begin{gathered} \tilde{\mu}_1\,(;\,;) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}_3 - i\tilde{\Omega}_5\right), \quad \tilde{\mu}_2\,(;\,;) = \tilde{\Omega}_4 - i\tilde{\Omega}_6, \\ \tilde{\beta}_2\,(;\,;) = \frac{1}{2}\left(\tilde{F}_2 - i\tilde{F}_3\right), \\ \tilde{h}_3\,(;\,;) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}_7 - i\tilde{\Omega}_8\right), \quad \tilde{h}_6\,(;\,;) = \frac{1}{2}\left(\tilde{F}_4 - i\tilde{F}_5\right) \end{gathered} \tag{3.62}$$

являются функциями 15 инвариантов из (3.19) – (3.21) (один из шести инвариантов (3.20) в силу равенства (3.22) может быть исключен из числа аргументов функций (3.62)). Здесь и ниже такие наборы из 15 инвариантов J_k обозначаем $(;\,;)$. Поскольку строго не оговаривается, какой именно из инвариантов (3.20) исключать, наборы $(;\,;)$ для функций (3.62) могут отличаться. Техника решения уравнений (3.58) и первых уравнений систем (3.59) – (3.61) такая же, как и в §5, 6 гл. 2: в качестве новых переменных выбирается один из возможных наборов $(;\,;)$ инвариантов из (3.19) – (3.21) и некоторая функция $J = J\,(I_1,\,\ldots,\,I_{16})$ инвариантов из (3.16), удовлетворяющая уравнению $A\,[J] = 1$. Тогда уравнения (3.58) и первые уравнения систем (3.59) – (3.61) преобразуются к виду (2.146) и в новых переменных имеют общие решения (2.147) с произвольной функцией $\tilde{c} = \tilde{c}\,(;;)$ из множества решений уравнения $A\left[\tilde{\beta}\right] = 0$.

Новая переменная J может выбираться относительно произвольной, например,

$$
\begin{gathered}
J = \arcsin\frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}, \quad J = \arcsin\frac{I_4}{\sqrt{I_3^2 + I_4^2}}, \\
J = \arcsin\frac{I_{13}}{\sqrt{I_{12}^2 + I_{13}^2}}.
\end{gathered}
\tag{3.63}
$$

Перейдя в (2.147) к старым переменным (3.16) в соответствии с выражениями (3.63), получим искомые общие решения уравнений (3.58) – (3.61). Ниже эти общие решения будут использоваться в виде (см. (2.257), (2.258))

$$
\begin{gathered}
\tilde{\Omega}_1 = \tilde{c}_1\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{c}_3\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{h}_1\,(;;)\,\tilde{D}_3, \\
\tilde{\Omega}_2 = \tilde{c}_2\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{c}_4\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{h}_2\,(;;)\,\tilde{D}_3, \\
\tilde{F}_1 = \tilde{\beta}_1\,(;;)\,\tilde{D}_3 + \tilde{h}_4\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{h}_5\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk};
\end{gathered}
\tag{3.64}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}_3 + i\tilde{\Omega}_5\right) = \tilde{c}_5\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk}^2, \quad \tilde{\Omega}_4 + i\tilde{\Omega}_6 = \tilde{c}_6\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}^2, \\
\frac{1}{2}\left(\tilde{F}_2 + i\tilde{F}_3\right) = \tilde{c}_7\,(;;)\,\tilde{D}_3^2, \\
\frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}_7 + i\tilde{\Omega}_8\right) = \tilde{c}_8\,(;;)\,\tilde{D}_3^2, \quad \frac{1}{2}\left(\tilde{F}_4 + i\tilde{F}_5\right) = \tilde{c}_9\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}^2.
\end{gathered}
\tag{3.65}
$$

Здесь, как и в § 6 гл. 2 (см. (2.259), (2.260)), для проведения необходимых упрощений в дальнейшем общие решения уравнений (3.58) записаны в виде сумм (3.64).

Из (3.62) и (3.65) получаем

$$
\begin{gathered}
\tilde{\Omega}_3 = \tilde{\mu}_1\,(;;) + \tilde{c}_5\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk}^2, \quad \tilde{\Omega}_5 = i\Big(\tilde{\mu}_1\,(;;) - \tilde{c}_5\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk}^2\Big), \\
\tilde{\Omega}_4 = \frac{1}{2}\Big(\tilde{\mu}_2\,(;;) + \tilde{c}_6\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}^2\Big), \quad \tilde{\Omega}_6 = \frac{1}{2}i\Big(\tilde{\mu}_2\,(;;) - \tilde{c}_6\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}^2\Big), \\
\tilde{F}_2 = \tilde{\beta}_2\,(;;) + \tilde{c}_7\,(;;)\,\tilde{D}_3^2, \quad F_3 = i\left(\tilde{\beta}_2\,(;;) - \tilde{c}_7\,(;;)\,\tilde{D}_3^2\right), \\
\tilde{\Omega}_7 = \tilde{h}_3\,(;;) + \tilde{c}_8\,(;;)\,\tilde{D}_3^2, \quad \tilde{\Omega}_8 = i\left(\tilde{h}_3\,(;;) - \tilde{c}_8\,(;;)\,\tilde{D}_3^2\right), \\
F_4 = \tilde{h}_6\,(;;) + \tilde{c}_9\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}^2, \quad F_5 = i\left(\tilde{h}_6\,(;;) - \tilde{c}_9\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}^2\right).
\end{gathered}
\tag{3.66}
$$

Таким образом, требование инвариантности исходных представлений (3.53) и (3.54) к преобразованию сдвига по времени сводит их к виду

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij} = \left[\tilde{c}_1\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{c}_3\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{h}_1\,(;;)\,\tilde{D}_3\right]\delta_{ij} + \\ + \left[\tilde{c}_2\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{c}_4\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{h}_2\,(;;)\,\tilde{D}_3\right]\delta_{i3}\delta_{3j} + \tilde{\mu}_1\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \\ + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_2\,(;;)\left(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}\right) + \tilde{h}_3\,(;;)\left(\delta_{3i}\tilde{D}_j + \delta_{3j}\tilde{D}_i\right) + \\ + \tilde{c}_5\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk}^2 \cdot \bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \frac{1}{2}\tilde{c}_6\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}^2\left(\delta_{i3}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{3j} + \delta_{j3}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{3i}\right) + \\ + \tilde{c}_8\,(;;)\,\tilde{D}_3^2\left(\delta_{i3}\bar{\tilde{D}}_j + \delta_{j3}\bar{\tilde{D}}_i\right),\end{gathered} \tag{3.67}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\mathrm{E}}_j = \left[\tilde{\beta}_1\,(;;)\,\tilde{D}_3 + \tilde{h}_4\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{h}_5\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}\right]\delta_{j3} + \tilde{\beta}_2\,(;;)\,\tilde{D}_j + \\ + \tilde{h}_6\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{j3} + \tilde{c}_7\,(;;)\,\tilde{D}_3^2\bar{\tilde{D}}_j + \tilde{c}_9\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}^2\bar{\tilde{\varepsilon}}_{j3}.\end{gathered} \tag{3.68}$$

Здесь учтены обозначения (3.29).

Прежде чем перейти к материалам с “симметричными” нелинейными свойствами, сделаем по аналогии с §§ 5, 6 гл. 2 следующее замечание.

Замечание 1. Если компоненты деформации и индукции электрического поля монофазны, т. е. $\varepsilon''_{ij} = \alpha_1\varepsilon'_{ij}$ $(\alpha_1 = \mathrm{const})$ и $D''_j = \alpha_2 D'_j$ $(\alpha_2 = \mathrm{const})$, то из (3.24) получаем

$$J_{12} = 0,\ J_{14} = 0,\ J_{16} = 0,\ J_{11} = 4J_1J_4,\ J_{13} = 4J_2J_5,\ J_{15} = 4J_6J_7. \tag{3.69}$$

В этом случае уравнения (3.67) и (3.68) преобразуются в уравнения

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij} = \left[\tilde{c}_1\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{c}_3\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{h}_1\,(;)\,\tilde{D}_3\right]\delta_{ij} + \left[\tilde{c}_2\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{c}_4\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \right. \\ \left. + \tilde{h}_2\,(;)\,\tilde{D}_3\right]\delta_{i3}\delta_{3j} + \tilde{\mu}_{10}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_{20}\,(;)\left(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}\right) + \\ + \tilde{h}_{30}\,(;)\left(\delta_{3i}\tilde{D}_j + \delta_{3j}\tilde{D}_i\right),\end{gathered} \tag{3.70}$$

$$\tilde{\mathrm{E}}_j = \left[\tilde{\beta}_1\,(;)\,\tilde{D}_3 + \tilde{h}_4\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{h}_5\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}\right]\delta_{j3} + \tilde{\beta}_{20}\,(;)\,\tilde{D}_j + \tilde{h}_{60}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{j3} \tag{3.71}$$

с комплексными характеристиками $\tilde{c}_1\,(;)$, $\tilde{c}_2\,(;)$, $\tilde{c}_3\,(;)$, $\tilde{c}_4\,(;)$, $\tilde{h}_1\,(;)$, $\tilde{h}_2\,(;)$, $\tilde{\beta}_1\,(;)$, $\tilde{h}_4\,(;)$, $\tilde{h}_5\,(;)$ и

$$\begin{gathered}\tilde{\mu}_{10}\,(;) = \tilde{\mu}_1\,(;;) + 2\tilde{c}_5\,(;;)\,J_1,\quad \tilde{\mu}_{20}\,(;) = \tilde{\mu}_2\,(;;) + 2\tilde{c}_6\,(;;)\,J_2, \\ \tilde{h}_{30}\,(;) = \tilde{h}_3\,(;;) + 2\tilde{c}_8\,(;;)\,J_6,\quad \tilde{\beta}_{20}\,(;) = \tilde{\beta}_2\,(;;) + 2\tilde{c}_7\,(;;)\,J_6, \\ \tilde{h}_{60}\,(;) = \tilde{h}_6\,(;;) + 2\tilde{c}_9\,(;;)\,J_2,\end{gathered} \tag{3.72}$$

зависящими только от линейных инвариантов (3.19) и (3.20) тензоров (3.4).

Таким образом, монофазность независимых переменных является достаточным условием представления амплитудных уравнений в терминах концепции амплитудно-зависимых комплексных модулей вне зависимости от характера нелинейных свойств материала. Заметим однако, что для материалов с "несимметричными" нелинейными свойствами, вообще говоря, $\tilde{c}_3\,(;) \neq \tilde{c}_4\,(;)$, $\tilde{h}_{60}\,(;) \neq 2\tilde{h}_{30}\,(;)$ (см. (3.45), (3.46)) и т. д.

Перейдем к материалам с "симметричными" нелинейными свойствами. Чтобы провести соответствующие этому случаю упрощения, запишем уравнения (3.67) и (3.68) в развернутом виде (2.27):

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}^D_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl} + \tilde{h}_{kij}\tilde{D}_k, \quad \tilde{E}_j = \tilde{h}^*_{jkl}\tilde{\varepsilon}_{kl} + \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{ij}\tilde{D}_i. \tag{3.73}$$

Механические величины $\tilde{C}^D_{ijkl}$ получим из (2.266), если заменить $\tilde{c}_n$ на $\tilde{c}_n\,(;;)$ $(n = 1 \div 6)$, а $\tilde{\mu}_m$ – на $\tilde{\mu}_m\,(;;)$ $(m = 1,\, 2)$.

Для остальных величин из (3.73) можно записать

$$\begin{gathered}\tilde{h}_{kij} = \tilde{h}_1\,(;;)\,\delta_{k3}\delta_{ij} + \tilde{h}_2\,(;;)\,\delta_{k3}\delta_{i3}\delta_{j3} + \tilde{h}_3\,(;;)\,[\delta_{ki}\delta_{j3} + \delta_{kj}\delta_{i3}] + \\ +\tilde{c}_8\,(;;)\,\tilde{D}_3\delta_{k3}\left(\delta_{i3}\bar{\tilde{D}}_j + \delta_{j3}\bar{\tilde{D}}_i\right),\end{gathered} \tag{3.74}$$

$$\begin{gathered}\tilde{h}^*_{jkl} = \tilde{h}_4\,(;;)\,\delta_{j3}\delta_{kl} + \tilde{h}_5\,(;;)\,\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3} + \\ + \frac{1}{2}\tilde{h}_6\,(;;)\,[\delta_{jk}\delta_{l3} + \delta_{jl}\delta_{k3}] + \tilde{c}_9\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3},\end{gathered} \tag{3.75}$$

$$\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\beta}_1\,(;;)\,\delta_{j3}\delta_{i3} + \tilde{\beta}_2\,(;;)\,\delta_{ji} + \tilde{c}_7\,(;;)\,\tilde{D}_3\bar{\tilde{D}}_j\delta_{i3}. \tag{3.76}$$

Для материалов с "симметричными" нелинейными свойствами величины $\tilde{C}^D_{ijkl}$, $\tilde{h}_{kij}$, $\tilde{h}^*_{jkl}$, $\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{ij}$ инвариантны к преобразованию (2.41). В результате этого преобразования инварианты J_{12}, J_{14}, и J_{16} из (3.24) меняют знак, тогда как остальные инварианты остаются постоянными.

Если ввести обозначения

$$\begin{gathered}\tilde{c}^*_n\,(;;) = \tilde{c}_n\,(J_1, \ldots, J_{11}, -J_{12}, J_{13}, -J_{14}, J_{15}, -J_{16}) \;\; (n = 1,2,3,4)\,, \\ \tilde{\mu}^*_m\,(;;) = \tilde{\mu}_m\,(J_1, \ldots, J_{11}, -J_{12}, J_{13}, -J_{14}, J_{15}, -J_{16}) \quad (m = 1,2)\,, \\ \tilde{h}^*_l(;;) = \tilde{h}_l\,(J_1, \ldots, J_{11}, -J_{12}, J_{13}, -J_{14}, J_{15}, -J_{16}) \; (l = 1,2,\ldots,6)\,, \\ \tilde{\beta}^*_k\,(;;) = \tilde{\beta}_k\,(J_1, \ldots, J_{11}, -J_{12}, J_{13}, -J_{14}, J_{15}, -J_{16}) \quad (k = 1,2)\end{gathered} \tag{3.77}$$

и учесть равенства (2.271) и равенства

$$\begin{gathered}\tilde{D}_3\left(\delta_{i3}\bar{\tilde{D}}_j + \delta_{j3}\bar{\tilde{D}}_i\right) = \delta_{i3}\Gamma_{3j} + \delta_{j3}\Gamma_{3i} + i\left(\delta_{i3}\hat{\Gamma}_{3j} + \delta_{j3}\hat{\Gamma}_{3i}\right), \\ \tilde{\varepsilon}_{33}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{j3} = \Gamma_{33j3} + i\hat{\Gamma}_{33j3}, \quad \tilde{D}_3\bar{\tilde{D}}_j = \Gamma_{3j} + i\hat{\Gamma}_{3j},\end{gathered} \tag{3.78}$$

отмеченное выше условие инвариантности коэффициентов из (3.73) к преобразованию (2.41) приведет к равенствам

$$\begin{gathered}\tilde{c}_5\,(;;) = 0,\ \tilde{c}_6\,(;;) = 0,\ \tilde{c}_7\,(;;) = 0,\ \tilde{c}_8\,(;;) = 0,\ \tilde{c}_9\,(;;) = 0,\\ \tilde{c}_n\,(;;) = \tilde{c}_n^*\,(;;)\,,\ \tilde{\mu}_m\,(;;) = \tilde{\mu}_m^*\,(;;)\,,\ \tilde{h}_l\,(;;) = \tilde{h}_l^*\,(;;)\,,\ \tilde{\beta}_k\,(;;) = \tilde{\beta}_k^*\,(;;)\\ (n = 1,\,2,3,4)\ \ (m = 1,\,2)\ \ (l = 1,\,2,3,4,\,5,\,6)\ \ (k = 1,\,2)\,.\end{gathered} \tag{3.79}$$

Обратимся к функциям накопления и диссипации (3.36), которые для материалов с “симметричными” нелинейными свойствами также удовлетворяют условию инвариантности относительно преобразования (2.41) (см. (3.39)). С учетом соотношений (3.67), (3.68) и равенств (3.79) это условие принимает вид

$$\begin{gathered}\Big(\tilde{c}_3\,(;;) - \tilde{c}_4\,(;;)\Big)\Big(\varepsilon'_{kk}\varepsilon''_{33} - \varepsilon''_{kk}\varepsilon'_{33}\Big) + \Big(\tilde{h}_1\,(;;) - \tilde{h}_4\,(;;)\Big) \times\\ \times\Big(\varepsilon'_{kk}D''_3 - \varepsilon''_{kk}D'_3\Big) + \Big(\tilde{h}_2\,(;;) - \tilde{h}_5\,(;;)\Big)\Big(\varepsilon'_{33}D''_3 - \varepsilon''_{33}D'_3\Big) +\\ + \Big(2\tilde{h}_3\,(;;) - \tilde{h}_6\,(;;)\Big)\Big(\varepsilon'_{3j}D''_j - \varepsilon''_{3j}D'_j\Big) = 0.\end{gathered} \tag{3.80}$$

Равенство (3.80) удовлетворяется автоматически, если

$$\begin{gathered}\tilde{c}_3\,(;;) = \tilde{c}_4\,(;;)\,,\quad \tilde{h}_1\,(;;) = \tilde{h}_4\,(;;)\,,\quad \tilde{h}_2\,(;;) = \tilde{h}_5\,(;;)\,,\\ \tilde{h}_6\,(;;) = 2\tilde{h}_3\,(;;)\,.\end{gathered} \tag{3.81}$$

Введем инварианты (см. (2.277))

$$\begin{aligned}\bar{J}_{12} &= I_7^2 + I_9^2 = \frac{1}{4J_1^2}\left(J_{11}^2 + J_{12}^2\right),\\ \bar{J}_{14} &= I_8^2 + I_{10}^2 = \frac{1}{4J_2^2}\left(J_{13}^2 + J_{14}^2\right),\\ \bar{J}_{16} &= I_{15}^2 + I_{16}^2 = \frac{1}{4J_6^2}\left(J_{15}^2 + J_{16}^2\right)\end{aligned} \tag{3.82}$$

или (см. (2.278))

$$\begin{gathered}\bar{J}_{12} = 2\Gamma_{ijkl}\Gamma_{ijkl} - \Gamma_{ijji}\Gamma_{kllk},\\ \bar{J}_{14} = 2\Gamma_{3k3l}\Gamma_{3k3l} - \Gamma_{3k3k}\Gamma_{3l3l},\\ \bar{J}_{16} = 2\Gamma_{kl}\Gamma_{kl} - \Gamma_{kk}\Gamma_{ll}.\end{gathered} \tag{3.83}$$

Тогда **результат** данного параграфа можно сформировать следующим образом: для трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала с “симметричными” нелинейными свойствами амплитудные уравнения одночастотного приближения в предположении их квазилинейности допускают концепцию амплитудно-зависимых комплексных характеристик и имеют вид

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij} = \left[\tilde{c}_1\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{c}_3\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{h}_1\,(;;)\,\tilde{D}_3\right]\delta_{ij} + \\ + \left[\tilde{c}_2\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{c}_3\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{h}_2\,(;;)\,\tilde{D}_3\right]\delta_{i3}\delta_{3j} + \tilde{\mu}_1\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{ij} + \\ + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_2\,(;;)\left(\delta_{i3}\tilde{\varepsilon}_{3j} + \delta_{j3}\tilde{\varepsilon}_{3i}\right) + \tilde{h}_3\,(;;)\left(\delta_{3i}\tilde{D}_j + \delta_{3j}\tilde{D}_i\right),\end{gathered} \tag{3.84}$$

$$\begin{gathered}\tilde{E}_j = \left[\tilde{\beta}_1\,(;;)\,\tilde{D}_3 + \tilde{h}_1\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{kk} + \tilde{h}_2\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}\right]\delta_{j3} + \tilde{\beta}_2\,(;;)\,\tilde{D}_j + \\ + 2\tilde{h}_3\,(;;)\,\tilde{\varepsilon}_{j3},\end{gathered} \tag{3.85}$$

где $\tilde{c}_1\,(;;)$, $\tilde{c}_2\,(;;)$, $\tilde{c}_3\,(;;)$, $\tilde{\mu}_1\,(;;)$, $\tilde{\mu}_2\,(;;)$, $\tilde{h}_1\,(;;)$, $\tilde{h}_2\,(;;)$, $\tilde{h}_3\,(;;)$, $\tilde{\beta}_1\,(;;)$, $\tilde{\beta}_2\,(;;)$ – произвольные комплекснозначные функции линейных из (3.19) и (3.20) (см. также (3.24)) и квадратичных J_{11}, J_{13}, J_{15}, $\bar{J}_{12}$, $\bar{J}_{14}$, $\bar{J}_{16}$ из (3.24) и (3.83) инвариантов тензоров (3.4).

Выше, при построении общих решений дифференциальных уравнений, предполагалось, что один из линейных инвариантов (3.20) в силу равенства (3.22) исключается из числа аргументов всех функций. Поскольку общие решения (3.64), (3.65) строились с использованием соотношений (3.63) и в окончательных результатах осуществлен переход к инвариантам (3.82), из числа аргументов функций из (3.84) и (3.85) может быть исключен только один из линейных инвариантов J_3, J_8 или J_{10}. Вместе с тем, без каких-либо ограничений общности рассуждений можно и удобно считать ниже коэффициенты уравнений (3.84) и (3.85) функциями всех 10 линейных инвариантов (3.19) и (3.20).

Линейные амплитудные уравнения получаем из (3.84) и (3.85), считая все коэффициенты постоянными величинами. На пьезоэлектрические материалы легко обобщить вариант построения линейных амплитудных уравнений, изложенный в замечании 3 § 6 гл. 2.

§ 3. Об упрощении амплитудных уравнений и их экспериментальной конкретизации

Зависимостью комплексных характеристик $\tilde{c}_1\,(;;)\,, \ldots, \tilde{\beta}_2\,(;;)$ от инвариантов 2-го порядка J_{11}, $\bar{J}_{12}$, J_{13}, $\bar{J}_{14}$, J_{15} и $\bar{J}_{16}$ отражается, в первую очередь, нелинейность по фазам колебаний для тех пьезоэлектрических материалов, которые обладают очень большой вязкостью, в том числе “диэлектрической” вязкостью. Для пьезоэлектрических материалов с незначительными внутренними потерями (к числу таких материалов можно отнести, например, традиционные пьезокерамики) зависимостью комплексных характеристик от инвариантов 2-го порядка можно пренебречь. Тогда одночастотное приближение колебаний таких материалов будет описываться амплитудными уравнениями (3.84) и (3.85) с 10 определяющими линейными инвариантами $J_1, \ldots, J_{10}$ (квадратичными по компонентам деформации и индукции электрического поля) из (3.19) и (3.20).

Дальнейшее упрощение амплитудных уравнений (3.84) и (3.85) связано с предположением об их потенциальности, когда на коэффициенты этих уравнений, как функции инвариантов $J_1, \ldots, J_{10}$, накладываются соответствующие условия взаимности. В результате придем к амплитудным уравнениям (3.45) и (3.46) с коэффициентами (3.44). На данном этапе развития экспериментальной базы использование в теоретических расчетах именно этих последних уравнений представляется нам наиболее перспективным.

Распишем уравнения (3.45) и (3.46), используя обычные обозначения коэффициентов

$$\begin{gathered}
\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{C}^D_{11}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{C}^D_{12}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{C}^D_{13}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{h}_{31}\,(;)\,\tilde{D}_3,\\
\tilde{\sigma}_{22} = \tilde{C}^D_{12}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{C}^D_{11}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{C}^D_{13}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{h}_{31}\,(;)\,\tilde{D}_3,\\
\tilde{\sigma}_{33} = \tilde{C}^D_{13}\,(;)\left(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}\right) + \tilde{C}^D_{33}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{h}_{33}\,(;)\,\tilde{D}_3,\\
\tilde{\sigma}_{12} = \left(\tilde{C}^D_{11}\,(;) - \tilde{C}^D_{12}\,(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{12},\\
\tilde{\sigma}_{23} = \tilde{C}^D_{55}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{23} + \tilde{h}_{15}\,(;)\,\tilde{D}_2,\\
\tilde{\sigma}_{13} = \tilde{C}^D_{55}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{13} + \tilde{h}_{15}\,(;)\,\tilde{D}_1,\\
\tilde{E}_1 = \tilde{\beta}^\varepsilon_{11}\,(;)\,\tilde{D}_1 + 2\tilde{h}_{15}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{13},\\
\tilde{E}_2 = \tilde{\beta}^\varepsilon_{11}\,(;)\,\tilde{D}_2 + 2\tilde{h}_{15}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{23},\\
\tilde{E}_3 = \tilde{\beta}^\varepsilon_{33}\,(;)\,\tilde{D}_3 + \tilde{h}_{31}\,(;)\left(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}\right) + \tilde{h}_{33}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}.
\end{gathered} \tag{3.86}$$

С учетом соотношений (3.44) коэффициенты уравнений (3.86) принимают вид

$$\tilde{C}^{D}_{11}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4},\ \tilde{C}^{D}_{12}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1},\ \tilde{C}^{D}_{13}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3},$$
$$\tilde{C}^{D}_{33}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_2} + 2\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_5},$$
$$\tilde{C}^{D}_{55}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_5}, \tag{3.87}$$

$$\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{11}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7},\ \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{33}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7},$$
$$\tilde{h}_{31}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8},\ \tilde{h}_{33}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{10}} + 2\frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9},\ \tilde{h}_{15}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9}.$$

На практике удобнее вместо инвариантов (3.19) и (3.20) пользоваться следующими инвариантами:

$$\bar{J}_1 = \frac{1}{2}\left[(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22})^2 + (\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22})^2\right],$$
$$\bar{J}_2 = \varepsilon'^{\,2}_{12} + \varepsilon''^{2}_{12} - (\varepsilon'_{11}\varepsilon'_{22} + \varepsilon''_{11}\varepsilon''_{22}),$$
$$\bar{J}_3 = (\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22})\,\varepsilon'_{33} + (\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22})\,\varepsilon''_{33},\ \bar{J}_4 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon'^{\,2}_{33} + \varepsilon''^{2}_{33}\right),$$
$$\bar{J}_5 = \varepsilon'^{\,2}_{13} + \varepsilon''^{2}_{13} + \varepsilon'^{\,2}_{23} + \varepsilon''^{2}_{23}; \tag{3.88}$$
$$\bar{J}_6 = (\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22})\,D'_3 + (\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22})\,D''_3,\ \ \bar{J}_7 = \varepsilon'_{33}D'_3 + \varepsilon''_{33}D''_3,$$
$$\bar{J}_8 = 2\,(\varepsilon'_{13}D'_1 + \varepsilon''_{13}D''_1 + \varepsilon'_{23}D'_2 + \varepsilon''_{23}D''_2);$$
$$\bar{J}_9 = \frac{1}{2}\left(D'^{\,2}_1 + D''^{2}_1 + D'^{\,2}_2 + D''^{2}_2\right),\ \ \bar{J}_{10} = \frac{1}{2}\left(D'^{\,2}_3 + D''^{2}_3\right).$$

Физическое содержание этих инвариантов раскрывается равенствами

$$\bar{J}_i = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega} I_i dt, \quad i = 1, \ldots, 10, \tag{3.89}$$

где

$$I_1 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2,\ \ I_2 = 2\left(\varepsilon^2_{12} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\right),\ \ I_3 = 2\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\,\varepsilon_{33},$$
$$I_4 = \varepsilon^2_{33},\ \ I_5 = \varepsilon^2_{13} + \varepsilon^2_{23},\ \ I_6 = 2\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\,D_3,\ \ I_7 = 2\varepsilon_{33}D_3, \tag{3.90}$$
$$I_8 = 4\,(\varepsilon_{13}D_1 + \varepsilon_{23}D_2),\ \ I_9 = D^2_1 + D^2_2,\ \ I_{10} = D^2_3,$$

а ε_{ij} и D_k – одночастотные приближения деформации и индукции электрического поля (2.2).

Инварианты (3.88) связаны с инвариантами (3.19) и (3.20) соотношениями

$$\begin{gathered}\bar{J}_1 = J_1 + J_2 - J_3, \ \ \bar{J}_2 = J_4 - 2J_5 - J_1 + J_3, \ \ \bar{J}_3 = J_3 - 2J_2, \\ \bar{J}_4 = J_2, \ \ \bar{J}_5 = 2\left(J_5 - J_2\right), \ \ \bar{J}_6 = J_8 - J_{10}, \ \ \bar{J}_7 = J_{10}, \\ \bar{J}_8 = J_9 - 2J_{10}, \ \ \bar{J}_9 = J_7 - J_6, \ \ \bar{J}_{10} = J_6.\end{gathered} \tag{3.91}$$

Если комплексный потенциал $\tilde{U} = U + iD$ считать функцией инвариантов (3.88), выражения для коэффициентов уравнений (3.86) примут более компактный вид

$$\begin{gathered}\tilde{C}^{D}_{11}\left(;\right) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_1}, \quad \tilde{C}^{D}_{12}\left(;\right) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_1} - \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_2}, \quad \tilde{C}^{D}_{13}\left(;\right) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_3}, \\ \tilde{C}^{D}_{33}\left(;\right) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_4}, \quad \tilde{C}^{D}_{55}\left(;\right) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_5}; \\ \tilde{h}_{31}\left(;\right) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_6}, \quad \tilde{h}_{33}\left(;\right) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_7}, \quad \tilde{h}_{15}\left(;\right) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_8}; \\ \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{11}\left(;\right) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_9}, \quad \tilde{\beta}^{\varepsilon}_{33}\left(;\right) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{J}_{10}}.\end{gathered} \tag{3.92}$$

Выбирая потенциалы U и D в виде линейных функций инвариантов (3.88), получим линейные амплитудные уравнения.

Представление потенциалов в виде функций инвариантов (3.88) в равной степени относится и к функциям накопления $\bar{U}$ и диссипации $\bar{D}$ (3.48):

$$\bar{U} = \bar{U}\left(\bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_{10}\right), \quad \bar{D} = \bar{D}\left(\bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_{10}\right). \tag{3.93}$$

Заметим, что именно эти функции подлежат экспериментальному определению и последующему использованию в соотношениях (3.49), где $J_1, \ldots, J_{10}$ следует заменить на $\bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_{10}$.

В основе экспериментальной конкретизации каких бы то ни было определяющих уравнений всегда лежит некоторая гипотеза. Одной из наиболее простых гипотез о форме зависимости нелинейных консервативной $\bar{U}$ и диссипативной $\bar{D}$ характеристик материала от набора инвариантов (3.88) является гипотеза об их зависимости от соответствующих линейных характеристик

$$\bar{U} = F\left(\bar{U}_L\right), \quad \bar{D} = \Phi\left(\bar{D}_L\right), \tag{3.94}$$

где

$$\frac{1}{2}\bar{U}_L = C'_{11}\bar{J}_1 + (C'_{11} - C'_{12})\,\bar{J}_2 + C'_{13}\bar{J}_3 + C'_{33}\bar{J}_4 + C'_{55}\bar{J}_5 + \\ + h'_{31}\bar{J}_6 + h'_{33}\bar{J}_7 + h'_{15}\bar{J}_8 + \beta'_{11}\bar{J}_9 + \beta'_{33}\bar{J}_{10}. \tag{3.95}$$

Выражение для $\bar{D}_L$ получаем из (3.95) путем замены C'_{11} на C''_{11} и т. д. Здесь C'_{11}, $C''_{11}, \ldots$ – известные параметры (коэффициенты в амплитудных уравнениях линейной теории). Конкретизация зависимостей (3.94) проводится по данным одномерного эксперимента. Коэффициенты в амплитудных уравнениях (3.86) в рамках гипотез (3.94) имеют вид

$$\tilde{C}^D_{11}\,(;\,) = \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L}C'_{11} + i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L}C''_{11}, \quad \tilde{h}_{31}\,(;\,) = \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L}h'_{31} + i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L}h''_{31} \quad \text{и} \quad \text{т. д.} \tag{3.96}$$

При необходимости гипотезы (3.94) можно ослабить, считая параметры $C'_{11}, \ldots$ в (3.95) неизвестными. Один из этих параметров, например, C'_{55} (или C''_{55} в выражении для $\bar{D}_L$) может быть произвольным, например, равным соответствующему линейному параметру. Тогда другие находятся из условия единых кривых зависимостей (3.94) для серии одномерных экспериментов с использованием, например, метода наименьших квадратов. Предположение о зависимости нелинейных консервативной и диссипативной характеристик от линейных комбинаций (3.95) значительно упрощает экспериментально-теоретическую программу определения нелинейных свойств пьезоматериала и позволяет перенести результаты одномерных экспериментов на сложное электромеханическое состояние.

Более подробно вопрос об экспериментальной конкретизации амплитудных уравнений в рамках гипотез (3.94) (с описанием серии одномерных экспериментов) рассматривается в главе 6.

§ 4. Амплитудные уравнения с другими независимыми переменными

Все изложенное в предыдущих параграфах данной главы легко переносится на случай других наборов независимых переменных. Например, аналогично уравнениям (3.86) можно получить уравнения

$$
\begin{gathered}
\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{C}^{E}_{11}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{C}^{E}_{12}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{C}^{E}_{13}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} - \tilde{e}_{31}\,(;)\,\tilde{E}_{3},\\
\tilde{\sigma}_{22} = \tilde{C}^{E}_{12}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{C}^{E}_{11}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{C}^{E}_{13}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} - \tilde{e}_{31}\,(;)\,\tilde{E}_{3},\\
\tilde{\sigma}_{33} = \tilde{C}^{E}_{13}\,(;)\left(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}\right) + \tilde{C}^{E}_{33}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33} - \tilde{e}_{33}\,(;)\,\tilde{E}_{3},\\
\tilde{\sigma}_{12} = \left(\tilde{C}^{E}_{11}\,(;) - \tilde{C}^{E}_{12}\,(;)\right)\tilde{\varepsilon}_{12},\\
\tilde{\sigma}_{23} = \tilde{C}^{E}_{55}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{23} - \tilde{e}_{15}\,(;)\,\tilde{E}_{2},\\
\tilde{\sigma}_{13} = \tilde{C}^{E}_{55}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{13} - \tilde{e}_{15}\,(;)\,\tilde{E}_{1},\\
\tilde{D}_{1} = \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{11}\,(;)\,\tilde{E}_{1} + 2\tilde{e}_{15}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{13},\\
\tilde{D}_{2} = \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{11}\,(;)\,\tilde{E}_{2} + 2\tilde{e}_{15}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{23},\\
\tilde{D}_{3} = \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{33}\,(;)\,\tilde{E}_{3} + \tilde{e}_{31}\,(;)\left(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}\right) + \tilde{e}_{33}\,(;)\,\tilde{\varepsilon}_{33}.
\end{gathered}
\tag{3.97}
$$

Коэффициенты этих уравнений зависят от набора инвариантов (3.88) с учетом замены D'_k и D''_k соответственно на E'_k и E''_k. Для удобства использования в дальнейшем введем для этих инвариантов новые обозначения

$$
\begin{gathered}
J^{(\varepsilon)}_{1} = \frac{1}{2}\left[\left(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}\right)^{2} + \left(\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22}\right)^{2}\right],\\
J^{(\varepsilon)}_{2} = \varepsilon'^{\,2}_{12} + \varepsilon'^{\,2}_{12} - \left(\varepsilon'_{11}\varepsilon'_{22} + \varepsilon''_{11}\varepsilon''_{22}\right),\\
J^{(\varepsilon)}_{3} = \left(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}\right)\varepsilon'_{33} + \left(\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22}\right)\varepsilon''_{33},\quad J^{(\varepsilon)}_{4} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon'^{\,2}_{33} + \varepsilon''^{2}_{33}\right),\\
J^{(\varepsilon)}_{5} = \varepsilon'^{\,2}_{13} + \varepsilon''^{2}_{13} + \varepsilon'^{\,2}_{23} + \varepsilon''^{2}_{23},\\
J^{(\varepsilon)}_{6} = \left(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}\right)E'_{3} + \left(\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22}\right)E''_{3},\quad J^{(\varepsilon)}_{7} = \varepsilon'_{33}E'_{3} + \varepsilon''_{33}E''_{3},\\
J^{(\varepsilon)}_{8} = 2\left(\varepsilon'_{13}E'_{1} + \varepsilon''_{13}E''_{1} + \varepsilon'_{23}E'_{2} + \varepsilon''_{23}E''_{2}\right),\\
J^{(\varepsilon)}_{9} = \frac{1}{2}\left(E'^{\,2}_{1} + E''^{2}_{1} + E'^{\,2}_{2} + E''^{2}_{2}\right),\quad J^{(\varepsilon)}_{10} = \frac{1}{2}\left(E'^{\,2}_{3} + E''^{2}_{3}\right).
\end{gathered}
\tag{3.98}
$$

В предположении потенциальности уравнений (3.97) их коэффициенты выражаются через комплексный потенциал с помощью формул, аналогичных (3.92):

$$
\begin{gathered}
\tilde{C}_{11}^{E}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1^{(\varepsilon)}},\ \ \tilde{C}_{12}^{E}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_1^{(\varepsilon)}} - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_2^{(\varepsilon)}},\ \ \tilde{C}_{13}^{E}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_3^{(\varepsilon)}},\\
\tilde{C}_{33}^{E}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_4^{(\varepsilon)}},\ \ \tilde{C}_{55}^{E}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_5^{(\varepsilon)}},\\
\tilde{e}_{31}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_6^{(\varepsilon)}},\ \ \tilde{e}_{33}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_7^{(\varepsilon)}},\ \ \tilde{e}_{15}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_8^{(\varepsilon)}},\\
\tilde{\mu}_{11}^{\varepsilon}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_9^{(\varepsilon)}},\ \ \tilde{\mu}_{33}^{\varepsilon}(;) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial J_{10}^{(\varepsilon)}}.
\end{gathered}
\tag{3.99}
$$

Здесь

$$
\tilde{U} = \int\limits_0^1 \tilde{\Phi}\left(\lambda^2 J_1^{(\varepsilon)}, \ldots, \lambda^2 J_{10}^{(\varepsilon)}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \tilde{\Phi} = \bar{H} + i\bar{D}\ , \tag{3.100}
$$

а $\bar{H}$ – амплитудный аналог электрической энтальпии (2.48). В основе получения уравнений (3.97) лежат уравнения в потенциалах (2.79).

В главе 6 нам понадобятся амплитудные уравнения, в которых в качестве независимых переменных выступают механические напряжения и напряженность электрического поля. Соответствующие этому случаю уравнения в потенциалах имеют вид

$$
\begin{gathered}
\varepsilon'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \sigma''_{ij}}, \quad \varepsilon''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma''_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \sigma'_{ij}},\\
D'_k = \frac{\partial U}{\partial E'_k} + \frac{\partial D}{\partial E''_k}, \quad D''_k = \frac{\partial U}{\partial E''_k} + \frac{\partial D}{\partial E'_k}
\end{gathered}
\tag{3.101}
$$

или в комплексной форме

$$
\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \sigma'_{ij}} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \sigma''_{ij}}, \quad \tilde{D}_k = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial E'_k} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial E''_k}\ , \tag{3.102}
$$

где $\tilde{U} = U - iD$, причем

$$
\tilde{U} = \int\limits_0^1 \tilde{F}\left(\lambda\sigma'_{ij},\ \lambda\sigma''_{ij},\ \lambda E'_k,\ \lambda E''_k\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \tilde{F} = \bar{U} - i\bar{D}. \tag{3.103}
$$

Как и раньше, $\bar{U}$ и $\bar{D}$ – функции накопления и диссипации, рассматриваемые как функции независимых переменных, в данном случае переменных σ'_{ij}, σ''_{ij}, E'_k и E''_k.

Здесь также нет необходимости в повторении всех рассуждений предыдущих параграфов. Окончательные результаты получаются из представленных в § 3 путем формальной замены

$$\begin{array}{llll} \sigma'_{ij} \to \varepsilon'_{ij}, & \sigma''_{ij} \to \varepsilon''_{ij}, & \varepsilon'_{ij} \to \sigma'_{ij}, & \varepsilon''_{ij} \to \sigma''_{ij}, \\ E'_k \to D'_k, & E''_k \to D''_k, & D'_k \to E'_k, & D''_k \to E''_k, \end{array} \tag{3.104}$$

а также замены комплексных модулей $\tilde{C}^D$, пьезоэлектрических $\tilde{h}$ и диэлектрических $\tilde{\beta}^\varepsilon$ величин соответственно на комплексные податливости $\tilde{S}^E$, пьезоэлектрические коэффициенты $\tilde{d}$ и диэлектрические проницаемости $\tilde{\mu}^\sigma$. При этом последние в силу "несимметричности" функции диссипации относительно замены (3.104) удобно записывать в виде

$$\begin{array}{ll} \tilde{S}^E_{ij}\,(;) = S^{E'}_{ij}\,(;) - iS^{E''}_{ij}\,(;) & (ij = 11,\ 12,\ 13,\ 33,\ 55)\,, \\ \tilde{d}_{kl}\,(;) = d'_{kl}\,(;) - id''_{kl}\,(;) & (kl = 31,\ 33,\ 15)\,, \\ \tilde{\mu}^\sigma_{mn}\,(;) = \mu^{\sigma'}_{mn}\,(;) - i\mu^{\sigma''}_{mn}\,(;) & (mn = 11,\ 33)\,. \end{array} \tag{3.105}$$

Выполнив указанные замены в (3.86), получаем

$$\begin{gathered} \tilde{\varepsilon}_{11} = \tilde{S}^E_{11}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{S}^E_{12}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{22} + \tilde{S}^E_{13}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{33} + \tilde{d}_{31}\,(;)\,\tilde{E}_3, \\ \tilde{\varepsilon}_{22} = \tilde{S}^E_{12}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{S}^E_{11}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{22} + \tilde{S}^E_{13}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{33} + \tilde{d}_{31}\,(;)\,\tilde{E}_3, \\ \tilde{\varepsilon}_{33} = \tilde{S}^E_{13}\,(;)\left(\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22}\right) + \tilde{S}^E_{33}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{33} + \tilde{d}_{33}\,(;)\,\tilde{E}_3, \\ \tilde{\varepsilon}_{12} = \left(\tilde{S}^E_{11}\,(;) - \tilde{S}^E_{12}\,(;)\right)\tilde{\sigma}_{12}, \\ \tilde{\varepsilon}_{23} = \tilde{S}^E_{55}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{23} + \tilde{d}_{15}\,(;)\,\tilde{E}_2, \\ \tilde{\varepsilon}_{13} = \tilde{S}^E_{55}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{13} + \tilde{d}_{15}\,(;)\,E_1, \\ \tilde{D}_1 = \tilde{\mu}^\sigma_{11}\,(;)\,\tilde{E}_1 + 2\tilde{d}_{15}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{13}, \\ \tilde{D}_2 = \tilde{\mu}^\sigma_{11}\,(;)\,\tilde{E}_2 + 2\tilde{d}_{15}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{23}, \\ \tilde{D}_3 = \tilde{\mu}^\sigma_{33}\,(;)\,\tilde{E}_3 + \tilde{d}_{31}\,(;)\left(\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22}\right) + \tilde{d}_{33}\,(;)\,\tilde{\sigma}_{33}. \end{gathered} \tag{3.106}$$

Коэффициенты уравнений (3.106) являются функциями инвариантов (см. (3.88), (3.98))

$$\begin{gathered}
J_1^{(\sigma)} = \frac{1}{2}\left[\left(\sigma'_{11} + \sigma'_{22}\right)^2 + \left(\sigma''_{11} + \sigma'_{22}\right)^2\right], \\
J_2^{(\sigma)} = {\sigma'_{12}}^2 + {\sigma''_{12}}^2 - \left(\sigma'_{11}\sigma'_{22} + \sigma''_{11}\sigma''_{22}\right), \\
J_3^{(\sigma)} = \left(\sigma'_{11} + \sigma'_{22}\right)\sigma'_{33} + \left(\sigma''_{11} + \sigma''_{22}\right)\sigma''_{33}, \\
J_4^{(\sigma)} = \frac{1}{2}\left({\sigma'_{33}}^2 + {\sigma''_{33}}^2\right), \quad J_5^{(\sigma)} = {\sigma'_{13}}^2 + {\sigma''_{13}}^2 + {\sigma'_{23}}^2 + {\sigma''_{23}}^2, \\
J_6^{(\sigma)} = \left(\sigma'_{11} + \sigma'_{22}\right)E'_3 + \left(\sigma''_{11} + \sigma''_{22}\right)E''_3, \\
J_7^{(\sigma)} = \sigma'_{33}E'_3 + \sigma''_{33}E''_3, \\
J_8^{(\sigma)} = 2\left(\sigma'_{13}E'_1 + \sigma''_{13}E''_1 + \sigma'_{23}E'_2 + \sigma''_{23}E''_2\right), \\
J_9^{(\sigma)} = \frac{1}{2}\left({E'_1}^2 + {E''_1}^2 + {E'_2}^2 + {E''_2}^2\right), \quad J_{10}^{(\sigma)} = \frac{1}{2}\left({E'_3}^2 + {E''_3}^2\right)
\end{gathered} \tag{3.107}$$

и в предположении потенциальности этих уравнений имеют вид

$$\begin{gathered}
\tilde{S}^E_{11}(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_1^{(\sigma)}}, \quad \tilde{S}^E_{12}(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_1^{(\sigma)}} - \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_2^{(\sigma)}}, \quad \tilde{S}^E_{13}(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_3^{(\sigma)}}, \\
\tilde{S}^E_{33}(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_4^{(\sigma)}}, \quad \tilde{S}^E_{55}(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_5^{(\sigma)}}, \\
\tilde{d}_{31}(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_6^{(\sigma)}}, \quad \tilde{d}_{33}(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_7^{(\sigma)}}, \quad \tilde{d}_{15}(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_8^{(\sigma)}}, \\
\tilde{\mu}^\sigma_{11}(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_9^{(\sigma)}}, \quad \tilde{\mu}^\sigma_{33}(;) = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial J_{10}^{(\sigma)}},
\end{gathered} \tag{3.108}$$

где $\tilde{U}$ – комплексный потенциал (3.103)

$$\tilde{U} = \int_0^1 \tilde{F}\left(\lambda^2 J_1^{(\sigma)}, \ldots, \lambda^2 J_{10}^{(\sigma)}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \tilde{F} = \bar{U} - i\bar{D}. \tag{3.109}$$

Экспериментальному определению подлежат функции накопления и диссипации

$$\begin{gathered}
\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k = \bar{U}\left(J_1^{(\sigma)}, \ldots, J_{10}^{(\sigma)}\right), \\
\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k = \bar{D}\left(J_1^{(\sigma)}, \ldots, J_{10}^{(\sigma)}\right).
\end{gathered} \tag{3.110}$$

И, наконец, для случая, когда в качестве независимых переменных выступают механические напряжения и индукция электрического поля, уравнения в потенциалах имеют вид

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \sigma''_{ij}}, \quad \varepsilon''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma''_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \sigma'_{ij}},$$
$$E'_k = -\frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k}, \quad E''_k = -\frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k}.$$

Формальное переобозначение электромеханических коэффициентов и замены (3.104) в этом случае необходимо произвести в соотношениях (3.97) – (3.100), заменив при этом функцию $\tilde{\Phi}$ из (3.100) на функцию $\tilde{\Phi} = \bar{H} - i\bar{D}$. Мнимые части комплексных характеристик также удобно брать, в отличие, от характеристик из (3.97), со знаком минус.

Для всех возможных наборов независимых переменных остается в силе изложенный в §3 вариант конкретизации амплитудных уравнений с использованием гипотез (3.94). При этом вместо величины $\bar{U}$ (и $\bar{U}_L$) используется консервативная характеристика, соответствующая этому набору. Например, в случае уравнений (3.97) – это функция $\bar{H}$. Напомним, что консервативная характеристика материала, соответствующая тому или иному набору независимых переменных, находится путем расписывания выражения для функции диссипации с использованием соответствующих условий инвариантности относительно преобразования сдвига по времени в дифференциальной форме (см. п. 2.3 § 2 гл. 2).

Коэффициенты уравнений (3.106), например, в рамках гипотез (3.94) имеют вид

$$\tilde{S}^E_{11}(;) = \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} S'_{11_L} - i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} S''_{11_L}, \quad \tilde{d}_{31}(;) = \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} d'_{31_L} - i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} d''_{31_L},$$
$$\tilde{\mu}^\sigma_{33}(;) = \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} \mu^{\sigma'}_{33_L} - i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} \mu^{\sigma''}_{33_L} \quad \text{и т. д.} \tag{3.111}$$

В простейшем случае $S^{','',}_{11_L}$, $d^{','',}_{31_L}$, $\mu^{\sigma','',}_{33_L}$, ... – коэффициенты линейный амплитудных уравнений.

В число аргументов механических, пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов всех типов амплитудных уравнений необходимо включить частоту ω и температуру T.

§ 5. Об обратимости амплитудных уравнений

5.1 Прежде чем перейти к вопросу об обратимости амплитудных уравнений, докажем единственность набора фигурирующих в них коэффициентов. Доказательство проведем на примере уравнений (3.97). Предположим, что эти уравнения допускают два различных набора коэффициентов и обозначим разности соответствующих коэффициентов через $\Delta\tilde{C}_{ij}$ $(ij = 11,\ 12,\ 13,\ 33,\ 55)$, $\Delta\tilde{e}_{kl}$ $(kl = 31,\ 33,\ 15)$ и $\Delta\tilde{\mu}_{mn}$ $(mn = 11,\ 33)$. Эти разности являются функциями того же набора аргументов, что и коэффициенты уравнений (3.97). С учетом принятых обозначений из (3.97) получаем

$$\begin{gathered}
\Delta\tilde{C}_{11}\cdot\tilde{\varepsilon}_{11}+\Delta\tilde{C}_{12}\cdot\tilde{\varepsilon}_{22}+\Delta\tilde{C}_{13}\cdot\tilde{\varepsilon}_{33}-\Delta\tilde{e}_{31}\cdot\tilde{E}_3=0,\\
\Delta\tilde{C}_{12}\cdot\tilde{\varepsilon}_{11}+\Delta\tilde{C}_{11}\cdot\tilde{\varepsilon}_{22}+\Delta\tilde{C}_{13}\cdot\tilde{\varepsilon}_{33}-\Delta\tilde{e}_{31}\cdot\tilde{E}_3=0,\\
\Delta\tilde{C}_{13}\cdot(\tilde{\varepsilon}_{11}+\tilde{\varepsilon}_{22})+\Delta\tilde{C}_{33}\cdot\tilde{\varepsilon}_{33}-\Delta\tilde{e}_{33}\cdot\tilde{E}_3=0,\\
\left(\Delta\tilde{C}_{11}-\Delta\tilde{C}_{12}\right)\cdot\tilde{\varepsilon}_{12}=0,\\
\Delta\tilde{C}_{55}\cdot\tilde{\varepsilon}_{23}-\Delta\tilde{e}_{15}\cdot\tilde{E}_2=0,\\
\Delta\tilde{C}_{55}\cdot\tilde{\varepsilon}_{13}-\Delta\tilde{e}_{15}\cdot\tilde{E}_1=0,\\
\Delta\tilde{\mu}_{11}\cdot\tilde{E}_1+2\Delta\tilde{e}_{15}\cdot\tilde{\varepsilon}_{13}=0,\\
\Delta\tilde{\mu}_{11}\cdot\tilde{E}_2+2\Delta\tilde{e}_{15}\cdot\tilde{\varepsilon}_{23}=0,\\
\Delta\tilde{\mu}_{33}\cdot\tilde{E}_3+\Delta\tilde{e}_{31}\cdot(\tilde{\varepsilon}_{11}+\tilde{\varepsilon}_{22})+\Delta\tilde{e}_{33}\cdot\tilde{\varepsilon}_{33}=0.
\end{gathered}\tag{3.112}$$

Равенство нулю некоторых разностей является очевидным, а именно,

$$\Delta\tilde{C}_{55}=0,\quad \Delta\tilde{e}_{15}=0,\quad \Delta\tilde{\mu}_{11}=0.\tag{3.113}$$

Для остальных разностей с учетом

$$\Delta\tilde{C}_{12}=\Delta\tilde{C}_{11}\tag{3.114}$$

получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}
\Delta\tilde{C}_{11}\cdot(\tilde{\varepsilon}_{11}+\tilde{\varepsilon}_{22})+\Delta\tilde{C}_{13}\cdot\tilde{\varepsilon}_{33}-\Delta\tilde{e}_{31}\cdot\tilde{E}_3=0,\\
\Delta\tilde{C}_{13}\cdot(\tilde{\varepsilon}_{11}+\tilde{\varepsilon}_{22})+\Delta\tilde{C}_{33}\cdot\tilde{\varepsilon}_{33}-\Delta\tilde{e}_{33}\cdot\tilde{E}_3=0,\\
\Delta\tilde{e}_{31}\cdot(\tilde{\varepsilon}_{11}+\tilde{\varepsilon}_{22})+\Delta\tilde{e}_{33}\cdot\tilde{\varepsilon}_{33}+\Delta\tilde{\mu}_{33}\cdot\tilde{E}_3=0.
\end{gathered}\tag{3.115}$$

Умножим первое, второе и третье уравнения системы (3.115) соответственно на $\overline{\tilde{\varepsilon}_{11}+\tilde{\varepsilon}_{22}}$, $\bar{\tilde{\varepsilon}}_{11}$ и $\bar{\tilde{E}}_3$. Тогда с учетом обозначений (3.98) эта система преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{C}_{11}\cdot 2J_1^{(\varepsilon)}+\Delta\tilde{C}_{13}\cdot\left(J_3^{(\varepsilon)}+i\alpha_1\right)-\Delta\tilde{e}_{31}\cdot\left(J_6^{(\varepsilon)}+i\alpha_2\right)=0,\\
\Delta\tilde{C}_{13}\cdot\left(J_3^{(\varepsilon)}-i\alpha_1\right)+\Delta\tilde{C}_{33}\cdot 2J_4^{(\varepsilon)}-\Delta\tilde{e}_{33}\cdot\left(J_7^{(\varepsilon)}+i\alpha_3\right)=0,\\
\Delta\tilde{e}_{31}\cdot\left(J_6^{(\varepsilon)}-i\alpha_2\right)+\Delta\tilde{e}_{33}\cdot\left(J_7^{(\varepsilon)}-i\alpha_3\right)+\Delta\tilde{\mu}_{33}\cdot 2J_{10}^{(\varepsilon)}=0,
\end{aligned}\tag{3.116}$$

где

$$\begin{gathered}
\alpha_1=\left(\varepsilon'_{11}+\varepsilon'_{22}\right)\varepsilon''_{33}-\left(\varepsilon''_{11}+\varepsilon''_{22}\right)\varepsilon'_{33},\\
\alpha_2=\left(\varepsilon'_{11}+\varepsilon'_{22}\right)E''_3-\left(\varepsilon''_{11}+\varepsilon''_{22}\right)E'_3,\quad \alpha_3=\varepsilon'_{33}E''_3-\varepsilon''_{33}E'_3.
\end{gathered}\tag{3.117}$$

Напомним теперь, что уравнения (3.97) соответствуют материалам с “симметричными” нелинейными свойствами. В этом случае коэффициенты $\tilde{C}^{E}_{ij}\,(;)$, $\tilde{e}_{kl}\,(;)$ и $\tilde{\mu}_{mn}\,(;)$ этих уравнений, как функции аргументов (3.98), а, следовательно, и разности $\Delta\tilde{C}_{ij}$, $\Delta\tilde{e}_{kl}$ и $\Delta\tilde{\mu}_{mn}$ инвариантны к преобразованию (2.41) (в рассматриваемом случае величины D'_k и D''_k в (2.41) следует заменить соответственно на E'_k и E''_k). Если учесть, что в результате этого преобразования величины (3.117) меняют знак и в следствие этого каждое из уравнений (3.116) распадается на два уравнения, систему (3.116) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\Delta\tilde{C}_{11}\cdot 2J_1^{(\varepsilon)}+\Delta\tilde{C}_{13}\cdot J_3^{(\varepsilon)}-\Delta\tilde{e}_{31}\cdot J_6^{(\varepsilon)}=0,\\
\Delta\tilde{C}_{13}\cdot\alpha_1-\Delta\tilde{e}_{31}\cdot\alpha_2=0,\\
\Delta\tilde{C}_{13}\cdot J_3^{(\varepsilon)}+\Delta\tilde{C}_{33}\cdot 2J_4^{(\varepsilon)}-\Delta\tilde{e}_{33}\cdot J_7^{(\varepsilon)}=0,\\
\Delta\tilde{C}_{13}\cdot\alpha_1+\Delta\tilde{e}_{33}\cdot\alpha_3=0,\\
\Delta\tilde{e}_{31}\cdot J_6^{(\varepsilon)}+\Delta\tilde{e}_{33}\cdot J_7^{(\varepsilon)}+\Delta\tilde{\mu}_{33}\cdot 2J_{10}^{(\varepsilon)}=0,\\
\Delta\tilde{e}_{31}\cdot\alpha_2+\Delta\tilde{e}_{33}\cdot\alpha_3=0.
\end{gathered}\tag{3.118}$$

Система из шести уравнений (3.118) связывает шесть функций $\Delta\tilde{C}_{11}$, $\Delta\tilde{C}_{13}$, $\Delta\tilde{C}_{33}$, $\Delta\tilde{e}_{31}$, $\Delta\tilde{e}_{33}$ и $\Delta\tilde{\mu}_{33}$. Вместе с тем, последнее уравнение этой системы является следствием второго и четвертого уравнений. Для получения недостающего уравнения обратимся, например, к третьему уравнению (3.115), которое умножим на $\overline{\tilde{\varepsilon}_{11}+\tilde{\varepsilon}_{22}}$. В результате придем к уравнению

$$\Delta\tilde{e}_{31}\cdot 2J_1^{(\varepsilon)}+\Delta\tilde{e}_{33}\cdot\left(J_3^{(\varepsilon)}+i\alpha_1\right)+\Delta\tilde{\mu}_{33}\cdot\left(J_6^{(\varepsilon)}+i\alpha_2\right)=0,\tag{3.119}$$

распадающемуся, подобно уравнениям (3.116), на два уравнения

$$\begin{gathered} \Delta\tilde{e}_{31} \cdot 2J_1^{(\varepsilon)} + \Delta\tilde{e}_{33} \cdot J_3^{(\varepsilon)} + \Delta\tilde{\mu}_{33} \cdot J_6^{(\varepsilon)} = 0, \\ \Delta\tilde{e}_{33} \cdot \alpha_1 + \Delta\tilde{\mu}_{33} \cdot \alpha_2 = 0. \end{gathered} \tag{3.120}$$

Заменим последнее уравнение системы (3.118) одним из уравнений (3.120), например, вторым и рассмотрим полученную систему как однородную систему уравнений относительно неизвестных $\Delta\tilde{C}_{11}$, $\Delta\tilde{C}_{13}$, $\Delta\tilde{C}_{33}$, $\Delta\tilde{e}_{31}$, $\Delta\tilde{e}_{33}$ и $\Delta\tilde{\mu}_{33}$. Поскольку определитель этой системы в общем случае немонофазных состояний отличен от нуля

$$\begin{vmatrix} 2J_1^{(\varepsilon)} & J_3^{(\varepsilon)} & 0 & -J_6^{(\varepsilon)} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_3^{(\varepsilon)} & 2J_4^{(\varepsilon)} & 0 & -J_7^{(\varepsilon)} & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_6^{(\varepsilon)} & J_7^{(\varepsilon)} & 2J_{10}^{(\varepsilon)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \\ = 8J_1^{(\varepsilon)} J_4^{(\varepsilon)} J_6^{(\varepsilon)} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0, \tag{3.121}$$

получаем

$$\Delta\tilde{C}_{11} = \Delta\tilde{C}_{13} = \Delta\tilde{C}_{33} = \Delta\tilde{e}_{31} = \Delta\tilde{e}_{33} = \Delta\tilde{\mu}_{33} = 0. \tag{3.122}$$

Принимая во внимание (3.114), также имеем

$$\Delta\tilde{C}_{12} = 0. \tag{3.123}$$

Таким образом, набор коэффициентов амплитудных уравнений (3.97), как функций инвариантов (3.98), единственен. Подобным образом доказывается аналогичное утверждение для амплитудных уравнений с другими наборами независимых переменных.

5.2 Обратимость амплитудных уравнений изучим на примере перехода от уравнений (3.106) к уравнениям (3.97). “Заморозив” инварианты (3.107), механическую часть уравнений (3.106) можно формально разрешить относительно комплексных амплитуд механических напряжений. Используя полученные соотношения в электрической части этих уравнений, придем к уравнениям вида (3.97), но с коэффициентами

$$\begin{gathered} \tilde{C}_{11}^E(;) = \frac{\tilde{S}_{11}^E(;)\,\tilde{S}_{33}^E(;) - \tilde{S}_{13}^{E^2}(;)}{\tilde{P}(;)\left(\tilde{S}_{11}^E(;) - \tilde{S}_{12}^E(;)\right)}, \quad \tilde{C}_{12}^E(;) = \frac{\tilde{S}_{13}^{E^2}(;) - \tilde{S}_{12}^E(;)\,\tilde{S}_{33}^E(;)}{\tilde{P}(;)\left(\tilde{S}_{11}^E(;) - \tilde{S}_{12}^E(;)\right)}, \\ \tilde{C}_{13}^E(;) = -\frac{\tilde{S}_{13}^E(;)}{\tilde{P}(;)}, \quad \tilde{C}_{33}^E(;) = \frac{\tilde{S}_{11}^E(;) + \tilde{S}_{12}^E(;)}{\tilde{P}(;)}, \quad \tilde{C}_{55}^E(;) = \frac{1}{\tilde{S}_{55}^E(;)}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{e}_{31}(;)=\frac{\tilde{d}_{31}(;)\,\tilde{S}^{E}_{33}(;)-\tilde{d}_{33}(;)\,\tilde{S}^{E}_{13}(;)}{\tilde{P}(;)},\quad \tilde{e}_{15}(;)=\frac{\tilde{d}_{15}(;)}{\tilde{S}^{E}_{55}(;)},\\
\tilde{e}_{33}(;)=\frac{\tilde{d}_{33}(;)\left(\tilde{S}^{E}_{11}(;)+\tilde{S}^{E}_{12}(;)\right)-2\tilde{d}_{31}(;)\,\tilde{S}^{E}_{13}(;)}{\tilde{P}(;)},\\
\tilde{\mu}^{\varepsilon}_{33}(;)=\tilde{\mu}^{\sigma}_{33}(;)-\\
-\frac{\tilde{d}^{2}_{33}(;)\left(\tilde{S}^{E}_{11}(;)+\tilde{S}^{E}_{12}(;)\right)+2\tilde{d}^{2}_{31}(;)\,\tilde{S}^{E}_{33}(;)-4\tilde{d}_{33}(;)\,\tilde{d}_{31}(;)\,\tilde{S}^{E}_{13}(;)}{\tilde{P}(;)},\\
\tilde{\mu}^{\varepsilon}_{11}(;)=\tilde{\mu}^{\sigma}_{11}(;)-\frac{\tilde{d}^{2}_{15}(;)}{\tilde{S}^{E}_{55}(;)},\\
\tilde{P}(;)=\tilde{S}^{E}_{33}(;)\left(\tilde{S}^{E}_{11}(;)+\tilde{S}^{E}_{12}(;)\right)-2\tilde{S}^{E^{2}}_{13}(;),
\end{gathered}\tag{3.124}$$

зависящими, в отличие от коэффициентов уравнений (3.97), от инвариантов (3.107). Следовательно, вопрос о переходе от уравнений (3.106) к уравнениям (3.97) в силу изложенного в пункте 5.1 сводится к вопросу о переходе от системы инвариантов (3.107) к системе инвариантов (3.98). Если механические, диэлектрические и “пьезоэлектрические” потери малы (квадратами и произведениями тангенсов углов всех потерь пренебрегается), этот переход осуществляется с использованием “упругоподобных” соотношений

$$\begin{gathered}
J^{(\varepsilon)}_{1}-4d'^{\,2}_{31}(;)\,J^{(\varepsilon)}_{10}=\left(S^{E'}_{11}(;)+S^{E'}_{12}(;)\right)^{2}J^{(\sigma)}_{1}+2\left(S^{E'}_{11}(;)+S^{E'}_{12}(;)\right)S^{E'}_{13}(;)\,J^{(\sigma)}_{3}+\\
+4S^{E'^{2}}_{13}(;)\,J^{(\sigma)}_{4}+2\left(S^{E'}_{11}(;)+S^{E'}_{12}(;)\right)d'_{31}(;)\,J^{(\sigma)}_{6}+4S^{E'}_{13}(;)\,d'_{31}(;)\,J^{(\sigma)}_{7},\\
J^{(\varepsilon)}_{1}+2J^{(\varepsilon)}_{2}=\left(S^{E'}_{11}(;)-S^{E'}_{12}(;)\right)^{2}\left(J^{(\sigma)}_{1}+2J^{(\sigma)}_{2}\right),\\
J^{(\varepsilon)}_{3}-4d'_{31}(;)\,d'_{33}(;)\,J^{(\varepsilon)}_{10}=2\left(S^{E'}_{11}(;)+S^{E'}_{12}(;)\right)S^{E'}_{13}(;)\,J^{(\sigma)}_{1}+\\
+\left[\left(S^{E'}_{11}(;)+S^{E'}_{12}(;)\right)S^{E'}_{33}(;)+2S^{E'^{2}}_{13}(;)\right]J^{(\sigma)}_{3}+4S^{E'}_{13}(;)\,S^{E'}_{33}(;)\,J^{(\sigma)}_{4}+\\
+\left[\left(S^{E'}_{11}(;)+S^{E'}_{12}(;)\,d'_{33}(;)+2S^{E'}_{13}(;)\,d'_{31}(;)\right)\right]J^{(\sigma)}_{6}+\\
+2\left[S^{E'}_{13}(;)\,d'_{33}(;)+S^{E'}_{33}(;)\,d'_{31}(;)\right]J^{(\sigma)}_{7},\\
J^{(\varepsilon)}_{4}-d'^{\,2}_{33}(;)\,J^{(\varepsilon)}_{10}=S^{E'^{2}}_{13}(;)\,J^{(\sigma)}_{1}+S^{E'}_{13}(;)\,S^{E'}_{33}(;)\,J^{(\sigma)}_{3}+S^{E'^{2}}_{33}(;)\,J^{(\sigma)}_{4}+\\
+S^{E'}_{13}(;)\,d'_{33}(;)\,J^{(\sigma)}_{6}+S^{E'}_{33}(;)\,d'_{33}(;)\,J^{(\sigma)}_{7},
\end{gathered}\tag{3.125}$$

$$
\begin{gathered}
J_5^{(\varepsilon)} - 2d_{15}'^{\,2}\,(;)\,J_9^{(\varepsilon)} = S_{55}^{E'^2}\,(;)\,J_5^{(\sigma)} + S_{55}^{E'}\,(;)\,d_{15}'\,(;)\,J_8^{(\sigma)},\\
J_6^{(\varepsilon)} - 4d_{31}'\,(;)\,J_{10}^{(\varepsilon)} = \left(S_{11}^{E'}\,(;) + S_{12}^{E'}\,(;)\right) J_6^{(\sigma)} + 2S_{13}^{E'}\,(;)\,J_7^{(\sigma)},\\
J_7^{(\varepsilon)} - 2d_{33}'\,(;)\,J_{10}^{(\varepsilon)} = S_{13}^{E'}\,(;)\,J_6^{(\sigma)} + S_{33}^{E'}\,(;)\,J_7^{(\sigma)},\\
J_8^{(\varepsilon)} - 4d_{15}'\,(;)\,J_9^{(\varepsilon)} = S_{55}^{E'}\,(;)\,J_8^{(\sigma)}, \quad J_9^{(\varepsilon)} = J_9^{(\sigma)}, \quad J_{10}^{(\varepsilon)} = J_{10}^{(\sigma)},\\
(;) = \left(J_1^{(\sigma)}, J_2^{(\sigma)}, J_3^{(\sigma)}, J_4^{(\sigma)}, J_5^{(\sigma)}, J_6^{(\sigma)}, J_7^{(\sigma)}, J_8^{(\sigma)}, J_9^{(\sigma)}, J_{10}^{(\sigma)}\right).
\end{gathered}
$$

При этом, естественно, предполагается разрешимость этих соотношений относительно инвариантов $J_1^{(\sigma)}, \ldots, J_8^{(\sigma)}$, т.е отличие от нуля соответствующего уравнениям (3.125) якобиана.

Для обоснования соотношений (3.125) следует исходить из того факта, что сами амплитудные уравнения с 10 определяющими инвариантами получены в предположении малости потерь (см. изложенное в начале § 3) и повторить рассуждения, аналогичные рассуждениям п. 7.3 § 7 гл. 2.

Здесь также получаемые с использованием амплитудных уравнений (3.106) выражения для инвариантов $J_1^{(\varepsilon)}$, $J_2^{(\varepsilon)}$, $J_3^{(\varepsilon)}$, $J_4^{(\varepsilon)}$, $J_6^{(\varepsilon)}$ и $J_7^{(\varepsilon)}$ из (3.98) через инварианты (3.107) неоднозначны (в общем случае даже для линейных уравнений (3.106)). Неоднозначность вносится величинами (см. (2.310))

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= (\sigma_{11}' + \sigma_{12}')\,\sigma_{33}'' - (\sigma_{11}'' + \sigma_{22}'')\,\sigma_{33}',\\
\beta_2 &= (\sigma_{11}' + \sigma_{12}')\,E_3'' - (\sigma_{11}'' + \sigma_{22}'')\,E_3',\\
\beta_3 &= \sigma_{33}'E_3'' - \sigma_{33}''E_3',
\end{aligned}
\tag{3.126}
$$

которые входят в эти выражения линейно (в виде слагаемых типа $b_i\,(;)\,\beta$ из (2.312)) и определяются через инварианты (3.107) с точностью до знака (см. (2.313))

$$
\begin{gathered}
\beta_1 = \pm\sqrt{4J_1^{(\sigma)}J_4^{(\sigma)} - J_3^{(\sigma)^2}}, \quad \beta_2 = \pm\sqrt{4J_1^{(\sigma)}J_{10}^{(\sigma)} - J_6^{(\sigma)^2}},\\
\beta_3 = \pm\sqrt{4J_4^{(\sigma)}J_{10}^{(\sigma)} - J_7^{(\sigma)^2}}.
\end{gathered}
\tag{3.127}
$$

Что касается инвариантов $J_5^{(\varepsilon)}$ и $J_8^{(\varepsilon)}$ из (3.98), то для них общие выражения с учетом равенства $J_9^{(\sigma)} = J_9^{(\varepsilon)}$ имеют вид

$$J_5^{(\varepsilon)} - 2\left|\tilde{d}_{15}(;)\right|^2 J_9^{(\varepsilon)} = \left|\tilde{S}_{55}^E(;)\right|^2 J_5^{(\sigma)} +$$
$$+Re\left[\tilde{S}_{55}^E(;)\,\tilde{d}_{15}(;)\right] J_8^{(\sigma)} + Im\left[\tilde{S}_{55}^E(;)\,\tilde{d}_{15}(;)\right]\beta_4, \tag{3.128}$$
$$J_8^{(\varepsilon)} - 4d'_{15}(;)\,J_9^{(\varepsilon)} = S_{55}^{E'}(;)\,J_8^{(\sigma)} - S_{55}^{E''}(;)\,\beta_4,$$

где

$$\beta_4 = 2\left(\sigma'_{13}E''_1 - \sigma''_{13}E'_1 + \sigma'_{23}E''_2 - \sigma''_{23}E'_2\right). \tag{3.129}$$

В отличие от величин β_1, β_2 и β_3, величину β_4 вообще нельзя выразить через инварианты (3.107). Она определяется как инвариантами из (3.107), так и инвариантами высшего порядка (инвариантами типа (3.21), если в них произвести замену $\varepsilon'_{ij} \to \sigma'_{ij}$, $\varepsilon''_{ij} \to \sigma''_{ij}$, $D'_k \to E'_k$, $D''_k \to E''_k$), которыми мы ранее пренебрегли.

При малых потерях общие выражения для инвариантов $J_i^{(\varepsilon)}$ $(i = 1, \ldots 8)$ принимают “упругоподобный” вид (3.125) вне зависимости от частоты и способа электромеханического возбуждения колебаний. Остановимся подробнее на колебаниях, возбуждаемых электрически. Предварительно сформулируем для этого случая следующее замечание.

Замечание 1. Многочисленные расчеты линейных колебаний пьезоэлектрических тел, проведенные авторами данной книги, свидетельствуют, что вне зависимости от частоты и способа электрического возбуждения колебаний (электрическим током или электрическим напряжением) отношение $\dfrac{|\beta_1|}{|J_3^{(\sigma)}|}$ всегда остается малым, порядок которого не превышает порядка тангенсов углов потерь (см. соотношение (2.321)). Такую же малость имеют отношения $\dfrac{|\beta_2|}{|J_6^{(\sigma)}|}$, $\dfrac{|\beta_3|}{|J_7^{(\sigma)}|}$ и $\dfrac{|\beta_4|}{|J_8^{(\sigma)}|}$, но при возбуждении колебаний электрическим током. Если колебания возбуждаются электрическим напряжением, малыми того же порядка являются отношения

$$\frac{|\alpha_2|}{\left|\hat{J}_6\right|}, \quad \frac{|\alpha_3|}{\left|\hat{J}_7\right|}, \quad \frac{|\alpha_4|}{\left|\hat{J}_8\right|}, \tag{3.130}$$

где

$$\begin{gathered}\alpha_2 = \left(\sigma'_{11} + \sigma'_{22}\right)D''_3 - \left(\sigma''_{11} + \sigma''_{22}\right)D'_3, \quad \alpha_3 = \sigma'_{33}D''_3 - \sigma''_{33}D'_3,\\ \alpha_4 = 2\left(\sigma'_{13}D''_1 - \sigma''_{13}D'_1 + \sigma'_{23}D''_2 - \sigma''_{23}D'_2\right);\end{gathered} \tag{3.131}$$

$$\begin{gathered}\hat{J}_6 = \left(\sigma'_{11} + \sigma'_{22}\right)D'_3 + \left(\sigma''_{11} + \sigma''_{22}\right)D''_3, \quad \hat{J}_7 = \sigma'_{33}D'_3 + \sigma''_{33}D''_3,\\ \hat{J}_8 = 2\left(\sigma'_{13}D'_1 + \sigma''_{13}D''_1 + \sigma'_{23}D'_2 + \sigma''_{23}D''_2\right).\end{gathered} \tag{3.132}$$

Особенно малыми все отмеченные выше отношения становится при колебаниях на резонансных частотах, которые с практической точки зрения являются для пьезоэлектрических тел наиболее интересными.

При возбуждении колебаний электрическим током переход от общих выражений для инвариантов $J_i^{(\varepsilon)}$ к соотношениями (3.125) является очевидным и осуществляется с учетом малости отношений $\dfrac{|\beta_1|}{|J_3^{(\sigma)}|}$, $\dfrac{|\beta_2|}{|J_6^{(\sigma)}|}$, $\dfrac{|\beta_3|}{|J_7^{(\sigma)}|}$ и $\dfrac{|\beta_4|}{|J_8^{(\sigma)}|}$. Этот переход аналогичен переходу от выражений (3.128) соответственно к пятому и восьмому соотношениям (3.125).

Если же колебания возбуждаются электрическим напряжением, величины

$$\begin{gathered}
\beta_2 = Im\left[\tilde{E}_3\left(\overline{\tilde{\sigma}_{11}+\tilde{\sigma}_{22}}\right)\right], \quad J_6^{(\sigma)} = Re\left[\tilde{E}_3\left(\overline{\tilde{\sigma}_{11}+\tilde{\sigma}_{22}}\right)\right], \\
\beta_3 = Im\left[\tilde{E}_3\bar{\tilde{\sigma}}_{33}\right], \quad J_7^{(\sigma)} = Re\left[\tilde{E}_3\bar{\tilde{\sigma}}_{33}\right], \\
\beta_4 = 2Im\left[\tilde{E}_1\bar{\tilde{\sigma}}_{13}+\tilde{E}_2\bar{\tilde{\sigma}}_{23}\right], \quad J_8^{(\sigma)} = 2Re\left[\tilde{E}_1\bar{\tilde{\sigma}}_{13}+\tilde{E}_2\bar{\tilde{\sigma}}_{23}\right]
\end{gathered} \tag{3.133}$$

следует преобразовать, заменив комплексные амплитуды составляющих напряженности электрического поля $\tilde{E}_k$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ их выражениями из трех последних уравнений (3.106), а затем воспользоваться малостью отношений (3.130). Например, для величин β_4 и $J_8^{(\sigma)}$ при малых потерях будем иметь

$$\begin{gathered}
\beta_4 = \frac{1}{\mu_{11}^{\sigma'}(;)}\left[\frac{\mu_{11}^{\sigma''}(;)}{\mu_{11}^{\sigma'}(;)}\hat{J}_8 + \alpha_4 - 4d'_{15}(;)\left(\frac{\mu_{11}^{\sigma''}(;)}{\mu_{11}^{\sigma'}(;)} - \frac{d''_{15}(;)}{d'_{15}(;)}\right)J_5^{(\sigma)}\right], \\
J_8^{(\sigma)} = \frac{1}{\mu_{11}^{\sigma'}(;)}\left[\hat{J}_8 - \frac{\mu_{11}^{\sigma''}(;)}{\mu_{11}^{\sigma'}(;)}\alpha_4 - 4d'_{15}(;)\,J_5^{(\sigma)}\right].
\end{gathered} \tag{3.134}$$

Если подставить (3.134) в соотношения (3.128) и учесть в последних малость потерь и малость отношения $\dfrac{|\alpha_4|}{|\hat{J}_8|}$, придём к пятому и восьмому соотношениям (3.125).

Применимость "упругоподобных" соотношений (3.125) при малых потерях в случае других возможных способов возбуждения колебаний (как механических, так и электромеханических) обосновывается аналогично. При этом следует учесть сказанное в п. 7.3 § 7 гл. 2.

Подобно изложенному в данном параграфе, в рамках малых потерь исследуется обратимость амплитудных уравнений с другими возможными наборами независимых переменных.

В заключение отметим, что полученные в этой и предыдущих главах соотношения для пьезоэлектрических тел могут быть перенесены на случай пьезомагнитных тел путем замены электрических полевых величин на соответствующие магнитные величины.

Глава 4.

Интегральные характеристики колебаний пьезоэлектрических тел

Данная глава посвящена вопросам оценки энергопреобразования и диссипации в объёме пьезоэлектрических тел. В качестве количественной меры эффективности преобразования энергии используется эффективный коэффициент электромеханической связи (КЭМС). Получены соотношения, упрощающие методику нахождения КЭМС в рамках энергетического подхода [166, 167]. Дано обобщение этих соотношений на случай электромеханических колебаний пьезоэлектрических тел с учетом потерь. Введена универсальная характеристика внутренней диссипации в пьезоэлектрических телах при гармонических электромеханических процессах в резонансном и нерезонансном режимах. Рассмотрен её энергетический смысл. Приведены приближенные соотношения, характеризующие связь этой характеристики диссипации с КЭМС и проводимостью пьезоэлемента на резонансных и антирезонансных частотах.

§ 1. КЭМС в задачах электроупругости

Наиболее полным по физическому содержанию является определение КЭМС, используемое авторами работ [27, 166, 167]. Квадрат КЭМС определяется ими как отношение способной к обращению запасенной в объёме пьезоэлектрического тела электрической (механической) энергии ко всей подведенной из вне к телу механической (электрической) энергии. В частности, для простейших типов однородных электроупругих полей это определение приводит к табличным значениям статических коэффициентов связи, что следует из рассмотрения идеализированных циклов изменения электрического или упругого состояния пьезоэлектрического образца [136]. Вместе с тем, в случае однородных полей существуют простые формально-математические правила вычисления КЭМС, приводящие к одним и тем же правильным значениям для статических коэффициентов [11, 27]. Однако перенесение этих правил на случай неоднородных электроупругих полей является ошибочным в смысле приведенного выше определения КЭМС как характеристики энергопреобразования. Это связано с тем, что при неоднородной деформации пьезоэлектрического тела не вся преобразуемая в локальных объемах энергия способна к обращению (например, снятию с электродов), причём при данной деформации доля способной к обращению энергии зависит от расположения электродов [27].

Для оценки эффективности преобразования энергии на резонансных частотах колебаний пьезоэлементов с неоднородным деформированием широко используется формула для нахождения КЭМС, предложенная Мэзоном [11]:

$$k_d^2 = \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2} \tag{4.1}$$

Входящие в (4.1) резонансные ω_r и антирезонансные ω_a частоты легко определяются экспериментально по кривой проводимости. Найденные по формуле (4.1) значения КЭМС на резонансных частотах колебаний кольца, тонкого цилиндра и сферы, для которых распределение деформаций является однородным, совпадают со статическими значениями [11, 27]. Однако, если деформация неоднородная по объёму пьезоэлемента, значение динамических КЭМС ниже статических значений. При этом предполагается, что расположение поверхностных электродов, через которые осуществляется подвод электрической энергии, остаётся одним и тем же на всех частотах колебаний. Эта ситуация, как отмечается в работе [27], может измениться, если использовать внутренние или поверхностные раздельные электроды. Однако в любом случае формула (4.1) приводит к динамическим значениям КЭМС, которые всегда ниже их статических значений на однородной деформации. Вопросы, касающиеся использования формулы Мэзона для анализа эффективности энергопреобразования, достаточно широко освещены в литературе. Однако, как отмечается в монографии [27], попыток привести эту формулу в соответствие с энергетическим определением КЭМС в формулировке, приведенной выше, по-видимому, не предпринималось. Отметим ещё один существенный момент, касающийся формулы Мэзона. Дело в том, что определение КЭМС по этой формуле в принципе невозможно для нерезонансных частот колебаний. Кроме того, имеются трудности в её применении для случаев возбуждения колебаний механическими нагрузками.

Наиболее полной и физически содержательной характеристикой эффективности преобразования энергии при электроупругих процессах является в настоящее время КЭМС, определяемый согласно энергетическому подходу, разработанному в работах [166, 167] и подробно изложенному в монографии [27]. Основная идея этого подхода состоит в том, что КЭМС, находясь в соответствии с приведенным в начале главы определением, должен полностью определяться полем деформаций (перемещений) в объёме тела и характером расположения электродов. При этом несущественными являются сами способы механического и электрического нагружения, приводящие к заданному деформированному состоянию. Для применения энергетического подхода должна быть решена соответствующая краевая задача электроупругости. Все необходимые для этого разрешающие уравнения имеются в § 4 гл. 1. Причём для получения уравнений линейной электроупругости, в рамках которой построена энергетическая теория КЭМС [166, 167], следует функционалы в уравнениях состояния (1.144) или (1.146) заменить на квадратичные функции соответствующих аргументов. Кроме того, температурными эффектами временно пренебрегаем. В результате будем иметь уравнения [27]

$$\begin{gathered} \sigma_{ij,i} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j, \quad D_{j,j} = 0, \quad E_j = -\varphi_{,j}, \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\sigma_{ij} = \overset{E}{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k, \quad D_k = e_{kij}\varepsilon_{ij} + \mu^{\varepsilon}_{ki}E_i, \tag{4.3}$$

механические граничные условия

$$\sigma_{ij}n_j\,\big|_{S_\sigma} = t_i(\vec{x}, t), \quad u_j\,\big|_{S_u} = u_{\circ j}(\vec{x}, t) \quad (S = S_\sigma \cup S_u), \tag{4.4}$$

начальные условия

$$u_j(\vec{x}, 0) = \overset{\circ}{u}_j(\vec{x}), \quad \dot{u}_j(\vec{x}, 0) = \overset{\circ}{v}_j(\vec{x}). \tag{4.5}$$

Электрические граничные условия сформулируем в виде [27, 38]

$$\varphi\,\big|_{S_k} = \varphi_k(t), \quad \bigcup_{k=1}^{N} S_k = S_\varphi; \quad (n_i D_i)\,\big|_{S - S_\varphi} = 0. \tag{4.6}$$

Если электрод S_k подключен к генератору напряжения, то соответствующее φ_k известно. Если же задано значение тока через электрод S_k, в частности ток может равняться нулю (пассивный электрод), для нахождения неизвестного потенциала $\varphi_k\,(t)$ используется величина заданного полного заряда $Q_k\,(t)$ (равного нулю для пассивных электродов) [27, 38]

$$\int\limits_{S_k} n_i\, D_i\, dS = -Q_k\,(\,t\,). \tag{4.7}$$

Сказанное остаётся в силе, если некоторые из электродов находятся внутри тела (внутренние электроды). В этом случае необходимо лишь заменить подынтегральное выражение в (4.7) на скачок нормальной составляющей индукции при переходе через внутренний электрод [27]. Относительно электродов пока предполагается, что они являются бесконечно тонкими идеальными проводниками. Поэтому их механическим влиянием на функциональные характеристики пьезоэлемента можно пренебречь. В частности, наряду с непрерывностью электрического потенциала не претерпевают разрыв при переходе через внутренний электрод и механические переменные сопряженного поля.

Обратимся к определению КЭМС, приведенному в [27]. Поскольку это определение является исчерпывающим только в случае двухэлектродного тела, в (4.6) временно положим $N = 2$. Пусть пьезоэлектрическое тело объёма V, ограниченного поверхностью S, отнесено к декартовой системе координат. Расположение электродов известно, в частности, они могут быть внутренними. Предположим, что задача (4.2) – (4.7), называемая в дальнейшем основной, решена для некоторых, вообще произвольных, внешних механических и электрических нагрузок и $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\,\vec{x}, t_\circ\,)$ – найденное распределение деформаций в некоторый фиксированный момент времени $t_\circ$. Тогда согласно [27] нахождение КЭМС на этой деформации связано с интегрированием уравнения для электрического потенциала

$$(\mu^{\varepsilon}_{ki}\varphi_{,i})_{,k} = \,(\,e_{kij}\,\varepsilon_{ij})_{,k} \tag{4.8}$$

при разомкнутых и короткозамкнутых электродах, т.е. при граничных условиях соответственно

$$\int\limits_{S_1(S_2)} n_i\, D_i\, dS = 0, \qquad (\,n_i\, D_i\,)\,\big|_{S-S_\varphi} = 0 \tag{4.9}$$

и

$$\varphi\,\big|_{S_1} - \varphi\,\big|_{S_2} = 0, \qquad (\,n_i\,D_i\,)\,\big|_{S-S_\varphi} = 0. \tag{4.10}$$

Уравнение (4.8) является следствием вторых уравнений (4.2) и (4.3). После решения задач (4.8), (4.9) и (4.8), (4.10) и нахождения соответствующих распределений электрического потенциала φ^p и φ^k по формуле [27]

$$\begin{gathered} U = \frac{1}{2}\int\limits_V (\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} + E_k\,D_k)\,dV = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(C^{E}_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl} + \mu^{\varepsilon}_{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j}\right) dV \end{gathered} \tag{4.11}$$

определяются внутренние энергии тела при разомкнутых и короткозамкнутых электродах соответственно

$$U^p = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(C^{E}_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl} + \mu^{\varepsilon}_{ij}\varphi^{\,p}_{,i}\varphi^{\,p}_{,j}\right) dV \tag{4.12}$$

и

$$U^k = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(C^{E}_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl} + \mu^{\varepsilon}_{ij}\varphi^{\,k}_{,i}\varphi^{\,k}_{,j}\right) dV. \tag{4.13}$$

Величина КЭМС $k_э$ на деформациях $\varepsilon_{ij}\,(\,\vec{x}, t_\circ\,)$ определяется согласно энергетическому подходу следующим образом

$$k_э^2 = \frac{U^p - U^k}{U^p}. \tag{4.14}$$

Разность

$$U^p - U^k = \frac{1}{2}\int\limits_V \mu^{\varepsilon}_{ij}\left(\varphi^{\,p}_{,i}\varphi^{\,p}_{,j} - \varphi^{\,k}_{,i}\varphi^{\,k}_{,j}\right) dV \tag{4.15}$$

равна той части электрической энергии, запасенной в объёме тела, которая способна к обращению (к снятию с электродов) на данной деформации $\varepsilon_{ij}\,(\,\vec{x}, t_\circ\,)$. Предположение о неизменности деформированного состояния в процессе снятия электрической энергии является основополагающим в рассмотренной теории, поскольку в противном случае определение способной к обращению энергии сильно усложняется. Величина U^p, фигурирующая в знаменателе формулы (4.14), в силу отсутствия потока электрической энергии через электроды, отождествляется с работой некоторых внешних механических сил, вызывающих данное деформированное состояние $\varepsilon_{ij}\,(\,\vec{x}, t_\circ\,)$ пьезоэлектрического тела с разомкнутыми электродами, причём имеет смысл “всей подведенной из вне к телу механической энергии”, если процесс деформирования тела указанными силами считать статическим.

Определяя аналогичным образом величину $k_э$ для распределения деформаций $\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t)$, соответствующего произвольному моменту времени t, приходим к коэффициенту электромеханической связи как некоторой функции времени $k_э = k_э(t)$. Далее можно вводить в рассмотрение средние в течении некоторых характерных времён процесса значения КЭМС или характеризовать эффективность преобразования энергии максимальными и предельными значениями КЭМС. На статике величина $k_э$ постоянна. Если деформации представимы в виде $\varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij}\,(\,\vec{x}\,)\,f(t)$, временный множитель $f(t)$, фигурирующий в соотношениях (4.8) – (4.13) как параметр, в окончательном выражении (4.14) сокращается и КЭМС в этом случае также является постоянной величиной.

§ 2. Упрощение методики нахождение КЭМС в рамках энергетической теории

Непосредственное использование рассмотренной выше методики нахождения КЭМС заключает в себе определённые трудности в плане реализации, связанные с необходимостью решения наряду с основной задачей электроупругости двух дополнительных задач для электрического потенциала. Некоторые затруднения с точки зрения точности вычислений возникают при решении указанных задач численными методами, поскольку в правой части уравнения (4.8) фигурируют производные от деформаций. Следуя работам [110, 111], покажем, что методику нахождения КЭМС в рамках энергетического подхода можно существенно упростить. При этом, в отличие от указанных работ, не будем ограничиваться случаем только колебательных процессов. Обозначим через $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$, $\Delta\varphi = \Delta\varphi(t) = \varphi(t)\big|_{S_1} - \varphi(t)\big|_{S_2}$ и $Q_1 = Q_1(t) = -\int\limits_{S_1} n_i D_i dS$ соответственно распределение электрического потенциала, разность потенциалов на электродах и заряд электрода в некоторый момент времени t, отвечающие основной задаче электроупругости. Заметим, что в рамках используемого предположения об отсутствии электрических полей рассеивания вне тела [27] $Q_2 = -\int\limits_{S_2} n_i\, D_i\, dS = -Q_1$. В этом можно убедиться, проинтегрировав по объёму второе уравнение (4.2) с использованием нулевого граничного условия для нормальной составляющей электрической индукции (4.6) вне электродов. Легко проверить, что решение задачи (4.8), (4.10) φ^k представимо в виде $\varphi^k = \varphi - \varphi^\circ$, где $\varphi^\circ = \varphi^\circ(\vec{x}, t)$ решение следующей задачи:

$$\begin{gathered}\left(\mu^\varepsilon_{ij}\varphi^\circ_{,j}\right)_{,i} = 0, \quad \mu^\varepsilon_{ij}\varphi^\circ_{,j} n_i\,\big|_{S-S_\varphi} = 0,\\ \varphi^\circ\big|_{S_1} - \varphi^\circ\big|_{S_2} = \Delta\varphi(t),\end{gathered} \tag{4.16}$$

т.е. φ° является решением задачи электростатики при заданной на электродах разности потенциалов $\Delta\varphi(t)$ из основной задачи электроупругости. Время t фигурирует в (4.16) как параметр. Для внутренней энергии U^k из (4.13) имеем

$$\begin{aligned}U^k &= \frac{1}{2}\int\limits_V \left[\overset{E}{C}_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl} + \mu^\varepsilon_{ij}\left(\varphi_{,i} - \varphi^\circ_{,i}\right)\left(\varphi_{,j} - \varphi^\circ_{,j}\right)\right] dV = \\ &= U - \frac{1}{2}C_\varepsilon\,(\Delta\varphi)^2 + \int\limits_V \mu^\varepsilon_{ij}\varphi^\circ_{,j}\left(\varphi^\circ_{,i} - \varphi_{,i}\right) dV.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Здесь $U = U(t)$ – внутренняя энергия тела из основной задачи, определяемая по формуле (4.11), а

$$C_\varepsilon = \int\limits_V \mu^\varepsilon_{ij}\varphi^\circ_{,i}\varphi^\circ_{,j}\, dV/(\,\Delta\varphi\,)^2 \tag{4.18}$$

представляет собой ёмкость [12] пьезоэлемента на нулевых деформациях, которую в дальнейшем будем называть статической ёмкостью пьезоэлемента [39]. Очевидно, что C_ε не зависит от параметра t, если μ^ε_{ij} во времени постоянны. Используя формулу Гаусса-Остроградского с учетом соотношений (4.16), можно показать, что интеграл в правой части (4.17) равен нулю, так что

$$U^k = U - \frac{1}{2}C_\varepsilon\,(\Delta\varphi)^2\,. \tag{4.19}$$

Аналогично, величину φ^p, являющуюся решением задачи (4.8),(4.9), можно представить в виде $\varphi^p = \varphi - \varphi^*$, где $\varphi^* = \varphi^*(\vec{x}, t)$ – решение задачи электростатики в случае, когда на электроде задан заряд $Q_1\,(t)$ из основной задачи электроупругости:

$$\left(\mu_{ij}^{\varepsilon} \varphi_{,j}^{*}\right)_{,i} = 0, \qquad \mu_{ij}^{\varepsilon} \varphi_{,j}^{*} n_i \,\big|_{S-S_\varphi} = 0,$$
$$\int\limits_{S_1(S_2)} \mu_{ij}^{\varepsilon} \varphi_{,j}^{*} n_i \, dS = \pm Q_1\,(t). \tag{4.20}$$

Для U^p можно записать

$$U^p = \frac{1}{2} \int\limits_V \left[C_{ijkl}^{E}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} + \mu_{ij}^{\varepsilon} \left(\varphi_{,i} - \varphi_{,i}^{*}\right) \left(\varphi_{,j} - \varphi_{,j}^{*}\right) \right] dV =$$
$$= U + \frac{1}{2} Q_1^2 / C_\varepsilon - \int\limits_V \mu_{ij}^{\varepsilon} \varphi_{,i} \varphi_{,j}^{*} \, dV, \tag{4.21}$$

где

$$C_\varepsilon = Q_1^2 \Big/ \int\limits_V \mu_{ij}^{\varepsilon} \varphi_{,i}^{*} \varphi_{,j}^{*} \, dV. \tag{4.22}$$

Очевидно, что соотношения (4.18) и (4.22) дают одно и тоже значение статической ёмкости C_ε. Используя формулу Гаусса-Остроградского и учитывая (4.20), можно показать, что

$$\int\limits_V \mu_{ij}^{\varepsilon} \varphi_{,i} \varphi_{,j}^{*} \, dV = \Delta\varphi Q_1. \tag{4.23}$$

Внутренняя энергия в случае разомкнутых электродов примет вид

$$U^p = U + \frac{1}{2} Q_1^2 / C_\varepsilon - \Delta\varphi Q_1. \tag{4.24}$$

На основании представлений (4.19) и (4.24) можно записать следующие соотношения для нахождения КЭМС (4.14) в момент времени t:

$$k_э^2 = k_э^2\,(t) = \frac{k^2}{1 + k^2}, \qquad k^2 = \frac{\left(Q_1(t) - C_\varepsilon \Delta\varphi(t)\right)^2 C_\varepsilon^{-1}}{2U(t) - C_\varepsilon (\Delta\varphi(t))^2}. \tag{4.25}$$

Соотношения (4.25), находясь в полном соответствии с энергетическим подходом [27], значительно упрощают методику нахождения КЭМС в конкретных задачах электроупругости. Для их использования необходимо перед решением каждой такой задачи определить статическую ёмкость C_ε путём решения задачи электростатики при том же расположении электродов, что и в основной задаче. Если диэлектрические проницаемости μ^ε_{ij} во времени постоянны, то таковой является и ёмкость C_ε. Поэтому указанная электростатическая задача должна быть решена только один раз. В то же время дополнительные задачи для электрического потенциала (4.8), (4.9) и (4.8), (4.10) в непосредственной методике энергетического подхода необходимо решать каждый раз, как только характер распределения деформаций по объёму тела меняется. Другими словами, эти задачи решаются для каждого момента времени. К сказанному следует добавить, что во многих практически важных случаях ёмкость C_ε известна и необходимость в решении электростатической задачи отпадает. Если диэлектрические проницаемости μ^ε_{ij} каким-либо образом изменяются во времени или, скажем, при циклических процессах, являются функциями частоты, ёмкость C_ε должна определяться каждый раз, как только время (или частота) меняются. Однако и в этом случае соотношения (4.25) имеют существенные преимущества по сравнению с непосредственной методикой энергетического подхода, поскольку электростатическая задача типа (4.16) значительно проще в решении, чем дополнительные задачи (4.8), (4.9) и (4.8), (4.10). Зная C_ε, величину КЭМС $k_э$ можно найти по формулам (4.25) сразу же из решения основной задачи электроупругости. При определении Q_1 (или $\Delta\varphi$) может оказаться полезной формула

$$Q_1\Delta\varphi = \int\limits_V \left(\mu^\varepsilon_{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j} - e_{ijk}\varphi_{,i}\varepsilon_{jk}\right) dV, \tag{4.26}$$

использовать которую на практике иногда значительно удобнее, чем интегрировать нормальную составляющую индукции электрического поля по поверхности электрода. В справедливости этой формулы легко убедиться, если воспользоваться уравнениями электростатики из (4.2), вторым определяющим соотношением (4.3) и формулой Гаусса-Остроградского. В конкретных случаях соотношения (4.25) могут упрощаться. Так, при работе пьезоэлемента в режиме “приёма” выражение для

КЭМС приобретает простой и удобный вид

$$k_{\text{э}}^2 = \frac{C_\varepsilon(\Delta\varphi(t))^2}{2U}, \tag{4.27}$$

в частности, на статике $\Delta\varphi = const$ – возникающая на электродах разность потенциалов, $2U = \int\limits_S t_i u_i dS + \int\limits_V \rho b_i u_i dV$ – работа внешних механических сил на произведенных ими перемещениях. При статическом электрическом нагружении пьезоэлемента

$$k_{\text{э}}^2 = 1 - \frac{C_\varepsilon \Delta\varphi}{Q_1}; \quad \Delta\varphi, Q_1 = const. \tag{4.28}$$

В случае гармонических колебаний временный множитель $cos\omega t$ в соотношениях (4.25) сокращается и все величины заменяются своими амплитудными значениями

$$\begin{gathered} k_{\text{э}}^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \qquad k^2 = \frac{\left(\hat{Q}_1 - C_\varepsilon \Delta\hat{\varphi}\right)^2 C_\varepsilon^{-1}}{2U_{\text{т}} - C_\varepsilon \left(\Delta\hat{\varphi}\right)^2}, \\ U_{\text{т}} = \frac{1}{2}\int\limits_V (C_{ijkl}^E \hat{\varepsilon}_{ij}\hat{\varepsilon}_{kl} + \mu_{ij}^\varepsilon \hat{\varphi}_{,i}\hat{\varphi}_{,j})dV, \end{gathered} \tag{4.29}$$

где $U_{\text{т}}$ – удвоенная средняя за период внутренняя энергия. В отличии от формулы Мэзона (4.1), соотношения (4.29) позволяют оценить эффект преобразования энергии как на резонансных, так и нерезонансных частотах электроупругих колебаний пьезоэлектрических тел.

В качестве **примера** найдём КЭМС в случае продольных колебаний свободного от механической нагрузки и поляризованного по длине стержня, на электродированных торцах которого поддерживается электрический потенциал $\varphi|_{z=\pm h} = \pm\dfrac{\Delta\hat{\varphi}}{2}cos\omega t$. Задача электростатики по определению ёмкости C_ε имеет вид

$$\frac{d\hat{D}_z}{dz} = 0, \quad \hat{D}_z = \mu_{33}^\varepsilon E_z, \quad \hat{E}_z = -\frac{d\hat{\varphi}}{dz}, \quad \hat{\varphi}\,\big|_{z=\pm h} = \pm\frac{\Delta\hat{\varphi}}{2}, \tag{4.30}$$

так что

$$C_\varepsilon = \frac{\mu_{33}^\varepsilon S}{2h}, \tag{4.31}$$

где S – площадь поперечного сечения стержня. Решение основной задачи имеет вид [166]

$$\hat{\varepsilon}_z = -d_{33}\left(1-k_{33}^2\right)\frac{\Delta\hat{\varphi}}{2h}\frac{cos\lambda z}{\Delta},$$

$$\hat{E}_z = -\frac{\Delta\hat{\varphi}}{2h}\frac{1}{\Delta}\left(cos\lambda h - k_{33}^2 cos\lambda z\right), \tag{4.32}$$

$$D_z = -\mu_{33}^{\sigma}\left(1-k_{33}^2\right)\frac{\Delta\hat{\varphi}}{2h}\frac{cos\lambda h}{\Delta}, \quad \Delta = cos\lambda h - k_{33}^2\frac{sin\lambda h}{\lambda h}.$$

Здесь $k_{33}^2 = \dfrac{d_{33}^2}{S_{33}^{E}\mu_{33}^{\sigma}}$ – продольный КЭМС материала, λh – безразмерная частота. Для заряда на торце имеем

$$\hat{Q}_1 = -S\hat{D}_z = S\mu_{33}^{\sigma}\left(1-k_{33}^2\right)\frac{\Delta\hat{\varphi}}{2h}\frac{cos\lambda h}{\Delta}. \tag{4.33}$$

С учетом соотношений $C_{33}^{E} = 1/S_{33}^{E}$, $\mu_{33}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\sigma}\left(1-k_{33}^2\right)$ находим внутреннюю энергию по формуле

$$U_{\text{т}} = \frac{S}{2}\int\limits_{-h}^{h}\left(C_{33}^{E}\hat{\varepsilon}_z^2 + \mu_{33}^{\varepsilon}\hat{E}_z^2\right)dz. \tag{4.34}$$

После простых вычислений получаем

$$U_{\text{т}} = \frac{S}{2\Delta^2}\left(\frac{\Delta\hat{\varphi}}{2h}\right)^2\left(1-k_{33}^2\right)\mu_{33}^{\sigma}\left[2\Delta cos\lambda h + k_{33}^2\left(-\frac{sin2\lambda h}{2\lambda h}\right)\right]. \tag{4.35}$$

Подставляя величины (4.31), (4.33), (4.35) в формулы (4.29), убеждаемся, что

$$k_{\text{э}}^2 = 2k_{33}^2\frac{sin^2\lambda h}{(\lambda h)^2}\;\frac{1}{1+\dfrac{sin2\lambda h}{2\lambda h}}. \tag{4.36}$$

Такое же выражение для КЭМС $k_{\text{э}}$ получится, если провести процедуру его вычисления непосредственно по формуле (4.14) [166]. С использованием соотношений (4.29) можно прийти к формульным представлениям КЭМС и в других простейших одномерных задачах электроупругости, в частности, задачах о продольных колебаниях стержня с неэлектродированными участками у торцов и продольных колебаниях цилиндра с заглубленными электродами, на примере которых в работе [27] проведено сравнение энергетической теории КЭМС с резонансной теорией Мэзона. Однако в полную силу указанные выше преимущества соотношений (4.25) или (4.29) над непосредственной методикой энергетического подхода проявляются при нахождении КЭМС в задачах, решение которых без привлечения численных методов не представляется возможным.

§ 3. КЭМС произвольного поля деформаций и КЭМС отдельных мод колебаний

Используя соотношения (4.29), получим выражения для КЭМС на деформациях, соответствующих собственным формам колебаний пьезоэлектрических тел. Для этого на собственной частоте при закороченных электродах ω_r (частоте резонанса) в (4.29) необходимо положить $\Delta\hat{\varphi} = 0$, а на собственной частоте при разомкнутых электродах ω_a (частоте антирезонанса) – $\hat{Q}_1 = 0$. При собственных колебаниях выполняются равенства

$$\begin{aligned} U_{\text{т}}^{(r)} &= K_{\text{т}}^{(r)} = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\omega_r^2 \hat{u}_i^{(r)}\hat{u}_i^{(r)} dV, \\ U_{\text{т}}^{(a)} &= K_{\text{т}}^{(a)} = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\omega_a^2 \hat{u}_i^{(a)}\hat{u}_i^{(a)} dV, \end{aligned} \tag{4.37}$$

где $K_{\text{т}}^{(r)}$ и $K_{\text{т}}^{(a)}$ – удвоенные средние за период значения кинетической энергии тела на собственных перемещениях соответственно $\hat{u}_i^{(r)}$ и $\hat{u}_i^{(a)}$. Поэтому на частотах ω_r и ω_a получаем соответственно

$$k_{\text{э}}^{(r)^2} = \frac{k^{(r)^2}}{1 + k^{(r)^2}}, \qquad k^{(r)^2} = \frac{\hat{Q}_1^2}{C_\varepsilon \int\limits_V \rho\omega_r^2 \hat{u}_i^{(r)}\hat{u}_i^{(r)}\, dV} \tag{4.38}$$

и

$$k_{\text{э}}^{(a)^2} = \frac{C_\varepsilon(\Delta\hat{\varphi})^2}{\int\limits_V \rho\omega_a^2 \hat{u}_i^{(a)}\hat{u}_i^{(a)} dV}. \tag{4.39}$$

Далее, положив $\mathcal{U}_i^{(r)} = A\hat{u}_i^{(r)}$, $\mathcal{U}_i^{(a)} = B\hat{u}_i^{(a)}$, выбираем размерные постоянные A и B из условий

$$\int\limits_V \rho \mathcal{U}_i^{(r)} \mathcal{U}_i^{(r)}\, dV = 1, \qquad \int\limits_V \rho \mathcal{U}_i^{(a)} \mathcal{U}_i^{(a)} dV = 1. \tag{4.40}$$

Тем самым устраняется произвол в выборе как самих собственных перемещений, так и генерируемых ими электрических зарядов и напряжений. С учетом сказанного соотношения (4.38) и (4.39) перепишутся в виде

$$k_{\text{э}}^{(r)^2} = \frac{k^{(r)^2}}{1 + k^{(r)^2}}, \qquad k^{(r)^2} = \frac{Q_1^2}{C_\varepsilon \omega_r^2}; \tag{4.41}$$

$$k_{\text{э}}^{(a)^2} = \frac{C_\varepsilon (\Delta\Psi)^2}{\omega_a^2}, \tag{4.42}$$

где $Q_1 = A\hat{Q}_1$, $\Delta\Psi = B\Delta\hat{\varphi}$. Аналогичные выражения для КЭМС могут быть записаны для любой пары собственных частот ω_{r_m} и ω_{a_m} $(m = 1, 2, 3\ldots)$:

$$k_{\text{э}}^{(r_m)^2} = \frac{k^{(r_m)^2}}{1 + k^{(r_m)^2}}, \qquad k^{(r_m)^2} = \frac{Q_1^{(m)^2}}{C_\varepsilon \omega_{r_m}^2}; \tag{4.43}$$

$$k_{\text{э}}^{(a_m)^2} = \frac{C_\varepsilon (\Delta\Psi^{(m)})^2}{\omega_{a_m}^2}, \quad m = 1, 2, 3\ldots. \tag{4.44}$$

Ёмкость C_ε, вообще говоря, является функцией собственной частоты. Не следует забывать, что величины $\Delta\Psi^{(m)}$ и $Q_1^{(m)}$, характеризующие электрическое напряжение и собственный (поляризационный, связанный) заряд, индуцируемые на электродах нормированной согласно (4.40) m-й собственной функцией (собственным перемещением) соответственно на частотах ω_{a_m} и ω_{r_m} имеют размерности $\text{В}\cdot(\text{кг})^{-1/2}\cdot(\text{м})^{-1}$ и $\text{Кл}\cdot(\text{кг})^{-1/2}\cdot(\text{м})^{-1}$.

Имея выражения (4.43) и (4.44) для КЭМС отдельных мод колебаний, естественно поставить вопрос о возможной связи между ними и КЭМС (4.25) заданного поля деформаций (перемещений). Этот вопрос рассматривался автором работы [38] на основе метода собственных функций (МСФ), развиваемого им же для задач динамической электроупругости в работе [37]. Прежде чем перейти к указанному вопросу, остановимся кратко на основных положениях МСФ [38]. Согласно этому методу механические перемещения и электрический потенциал задачи электроупругости (4.2) – (4.7) представляются в виде

$$u_i = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_i^{(m)}(\vec{x}) q_m(t), \quad \varphi = \psi(\vec{x}, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \Psi^{(m)}(\vec{x}) q_m(t), \tag{4.45}$$

где $\mathcal{U}_i^{(m)}$ и $\Psi^{(m)}$ – решения задачи на собственные значения

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij,i}^{(m)} + \rho\omega_m^2 \mathcal{U}_j^{(m)} = 0, \quad D_{j,j}^{(m)} = 0, \quad E_j^{(m)} = -\Psi_{,j}^{(m)}, \\
\varepsilon_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{U}_{i,j}^{(m)} + \mathcal{U}_{j,i}^{(m)}\right), \\
\sigma_{ij}^{(m)} = C_{ijkl}^{E} \varepsilon_{kl}^{(m)} - e_{kij} E_k^{(m)}, \quad D_k^{(m)} = e_{kij}\varepsilon_{ij}^{(m)} + \mu_{ki}^{\varepsilon} E_i^{(m)};
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij}^{(m)} n_j \big|_{S_\sigma} = 0, \qquad \mathcal{U}_j^{(m)} \big|_{S_u} = 0; \\
\Delta\Psi^{(m)} = \Psi^{(m)}_{|_{S_1}} - \Psi^{(m)}_{|_{S_2}} = 0
\end{gathered} \tag{4.46}$$

или

$$\begin{gathered}
Q_1^{(m)} = -Q_2^{(m)} = -\int\limits_{S_1} D_i^{(m)} n_i ds = 0; \\
\left(n_i D_i^{(m)}\right) \big|_{S-S_\varphi} = 0,
\end{gathered}$$

соответствующие собственным частотам ω_m. Векторные собственные функции перемещений $\mathcal{U}_i^{(m)}$ ортогональны с весом $\rho(\vec{x})$ в объёме тела [37, 126]:

$$\int\limits_V \rho\,\mathcal{U}_i^{(m)} \mathcal{U}_i^{(n)} dV = 0, \quad m \neq n. \tag{4.47}$$

Ниже считаем их также нормированными согласно (4.40). Скалярные собственные функции электрического потенциала $\Psi^{(m)}$ в общем случае ортогональными не являются [37]. Несвязанная составляющая электрического потенциала $\psi(\vec{x}, t)$ определяется в результате решения задачи электростатики типа (4.16), (4.20) при тех же электрических граничных условиях, что и в основной задаче электроупругости. Время входит в задачу электростатики как параметр. Функции времени $q_m(t)$

в разложениях (4.45) находятся по начальным и граничным условиям основной задачи (4.4) – (4.7) [38]:

$$
\begin{gathered}
q_m(t) = q_m(0) cos\omega_m t + \\
+ \dot{q}_m(0)\frac{sin\omega_m t}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_m}\int\limits_0^t \Phi_m(\tau) sin\omega_m(t-\tau)d\tau, \\
q_m(0) = \int\limits_V \rho \overset{\circ}{u}_j(\vec{x})\,\mathcal{U}_j^{(m)}(\vec{x})\,dV, \quad \dot{q}_m(0) = \int\limits_V \rho \overset{\circ}{v}_j(\vec{x})\,\mathcal{U}_j^{(m)}(\vec{x})\,dV, \\
\Phi_m(t) = \int\limits_V \rho b_j(\vec{x},t)\,\mathcal{U}_j^{(m)}(\vec{x})\,dV - \int\limits_{S_u} \sigma_{ij}^{(m)}(\vec{x})\,n_j u_{\circ i}(\vec{x},t)\,dS + \\
+ \int\limits_{S_\sigma} \mathcal{U}_j^{(m)}(\vec{x})\,t_j(\vec{x},t)\,dS + \Delta\varphi(t)\,Q_1^{(m)} - \Delta\Psi^{(m)} Q_1(t).
\end{gathered}
\tag{4.48}
$$

Здесь $\Delta\varphi(t)$, и $Q_1(t)$ – электрическое напряжение на электродах и заряд электрода из основной задачи электроупругости. Если в этой задаче электроды подключены к генератору тока ($Q_1(t)$ – задано, в частности, равно нулю при разомкнутых электродах), неизвестная разность потенциалов $\Delta\varphi(t)$ умножается на нулевой собственный заряд $Q_1^{(m)} = 0$ (задача на собственные значения решается при разомкнутых электродах) и не входит в выражение для $q_m(t)$. Когда в основной задаче известно напряжение $\Delta\varphi(t)$, задача на собственные значения решается при закороченных электродах ($\Delta\Psi^{(m)} = 0$). В этом случае из выражения для $q_m(t)$ выпадает неизвестный заряд $Q_1(t)$.

Возможность представления решения задачи электроупругости в виде (4.45) изучена в работе [37] в предположении полноты векторных собственных функций $\mathcal{U}_i^{(m)}$ в объёме тела. В каждом конкретном случае это предположение, как и предположение о бесконечном дискретном спектре частот, требует проверки, т.е., по сути, решения задачи на собственные значения [37].

Подставляя разложения (4.45) в формулу для внутренней энергии (4.11) и используя соотношения (4.46), условия (4.40), (4.47), а также учитывая электростатическую природу несвязанного потенциала ψ, после необходимых преобразований можно получить [38]

$$U(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m^2 q_m^2(t) + Q_1^u(t)\Delta\varphi(t) - \frac{1}{2}Q_1^u(t)\Delta\psi(t), \tag{4.49}$$

где

$$Q_1^u(t) = \int\limits_{S_1}\mu_{kj}^{\varepsilon}\psi_{,j}n_k dS = -Q_2^u(t) \tag{4.50}$$

– несвязанный заряд электрода. Для полного заряда разложения (4.45) дают

$$Q_1(t) = -Q_2(t) = Q_1^u(t) + \sum_{m=1}^{\infty}Q_1^{(m)}q_m(t). \tag{4.51}$$

Принимая во внимание пропорциональность несвязанного заряда разности несвязанных потенциалов

$$Q_1^u = C_\varepsilon\Delta\psi = C_\varepsilon(\psi_1 - \psi_2), \tag{4.52}$$

где C_ε – введённая ранее статическая ёмкость пьезоэлемента, перепишем соотношения (4.49), (4.51) в виде

$$2U(t) - C_\varepsilon(\Delta\varphi(t))^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\omega_m^2 q_m^2(t) - C_\varepsilon\left(\sum_{m=1}^{\infty}\Delta\Psi^{(m)}q_m(t)\right)^2, \tag{4.53}$$

$$Q_1(t) - C_\varepsilon\Delta\varphi(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(Q_1^{(m)} - C_\varepsilon\Delta\Psi^{(m)}\right)q_m(t). \tag{4.54}$$

Пусть (4.45) представляют собой разложения полей перемещений и электрического потенциала по собственным функциям, найденным при короткозамкнутых электродах. Тогда, подставляя (4.53) и (4.54) с учетом равенства $\Delta\Psi^{(m)} = 0$ в формулы (4.25) и обозначая собственные частоты ω_m и коэффициенты $q_m(t)$ соответственно через ω_{r_m} (частота резонанса) и $q_{r_m}(t)$, для КЭМС на данном поле перемещений (деформаций) получаем

$$k_э^2(t) = \frac{k^2(t)}{1 + k^2(t)}, \qquad k^2(t) = \frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}Q_1^{(m)}q_{r_m}(t)\right)^2 C_\varepsilon^{-1}}{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\omega_{r_m}^2 q_{r_m}^2(t)}. \tag{4.55}$$

Аналогичным образом, из (4.53), (4.54) и (4.25) получаем выражение для КЭМС, соответствующее разложениям (4.45) по собственным функциям при разомкнутых электродах, когда $Q_1^{(m)} = 0$:

$$k_э^2(t) = \frac{C_\varepsilon \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \Delta\Psi^{(m)} q_{a_m}(t) \right)^2}{\sum\limits_{m=1}^{\infty} \omega_{a_m}^2 q_{a_m}^2(t)}. \tag{4.56}$$

Если в (4.55) и (4.56) положить q_{r_m} и q_{a_m} для всех m, кроме одного, равными нулю, будем иметь выражения для КЭМС отдельных нормальных мод (4.43) и (4.44), полученные ранее. Исключая из равенств (4.55) и (4.43) величину собственного заряда $Q_1^{(m)}$, приходим к искомой связи между КЭМС произвольного поля деформаций $k_э$ и КЭМС нормальных мод при короткозамкнутых электродах $k_э^{(r_m)}$:

$$k_э^2(t) = \frac{k^2(t)}{1 + k^2(t)}, \quad k^2(t) = \frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \omega_{r_m} q_{r_m}(t) k^{(r_m)} \right)^2}{\sum\limits_{m=1}^{\infty} \omega_{r_m}^2 q_{r_m}^2(t)}, \qquad k^{(r_m)} = \frac{k_э^{(r_m)}}{\sqrt{1 - k_э^{(r_m)2}}}. \tag{4.57}$$

Аналогичным образом, исключая из (4.56) и (4.44) электрическое напряжение $\Delta\Psi^{(m)}$, получаем связь $k_э$ и КЭМС нормальных мод $k_э^{(a_m)}$, соответствующих разомкнутым электродам

$$k_э^2(t) = \frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \omega_{a_m} q_{a_m}(t) k_э^{(a_m)} \right)^2}{\sum\limits_{m=1}^{\infty} \omega_{a_m}^2 q_{a_m}^2(t)}. \tag{4.58}$$

Разумеется, величины КЭМС $k_э$, вычисляемые согласно (4.57) и (4.58), будут одинаковыми.

Формулы (4.57) и (4.58) получены ранее в указанной выше работе [38]. Однако автору этой работы соотношения (4.25), по-видимому, были неизвестны. Поэтому приведенное им доказательство формул (4.57) и (4.58) основано на использовании непосредственной методики энергетического подхода (4.8) – (4.14). Следуя работе [38], применим формулы (4.57) и (4.58) для оценки максимальных значений КЭМС, достижимых при данном расположении электродов. По неравенству Коши из (4.57) и (4.58) имеем

$$k^2(t) \leq \sum_{m=1}^{\infty} k^{(r_m)^2}, \quad k_э^2(t) \leq \sum_{m=1}^{\infty} k_э^{(a_m)^2}. \tag{4.59}$$

Знак равенства достигается при

$$\omega_{r_m} q_{r_m}(t) = A(t) k^{(r_m)}, \quad \omega_{a_m} q_{a_m}(t) = B(t) k_э^{(a_m)}, \tag{4.60}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – не зависящие от m произвольные функции времени. Поскольку $k_э$ есть возрастающая функция k, реализующие максимальный КЭМС перемещения u_i могут быть определены по одной из двух формул

$$\begin{aligned} u_i &= A(t) \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{r_m}^{-1} k^{(r_m)} \mathcal{U}_i^{(r_m)}(\vec{x}), \\ u_i &= B(t) \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{a_m}^{-1} k_э^{(a_m)} \mathcal{U}_i^{(a_m)}(\vec{x}). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Результат, разумеется, будет одним и тем же. Здесь нормированные собственные перемещения при короткозамкнутых и разомкнутых электродах обозначены соответственно через $\mathcal{U}_i^{(r_m)}$ и $\mathcal{U}_i^{(a_m)}$. Временные множители $A(t)$ и $B(t)$ являются несущественными, поскольку выпадают из выражения для КЭМС (4.14) или (4.25).

§ 4. КЭМС многоэлектродного тела

Определение КЭМС по формуле (4.14) является исчерпывающим для двухэлектродного тела, поскольку в этом случае имеется только один способ “снятия электрической энергии” путём перевода тела из электрически разомкнутого в короткозамкнутое состояние. Вместе с тем широкое применение находят такие многоэлектродные тела, часть электродов которых закорочена через один, а другая часть – через другой электроды, что имеет место, например, в используемых на практике многослойных преобразователях [130]. Такие тела являются по сути двухэлектродными и нахождение КЭМС для них может быть проведено по описанным ранее методикам, использующим формулы (4.14), (4.25) или (4.57), (4.58). Результаты при этом будут одинаковыми. Кроме того, для каждой из разделённых электродами пьезопластин многослойного преобразователя может быть найден свой КЭМС, например, по формулам (4.25). Соседние пьезопластины подобно пассивным (непьезоактивным) слоям выступают при этом в качестве внешней механической нагрузки, участвующей в образовании деформации данной пластины. Примеры таких преобразователей рассматриваются в главе 7.

В общем случае многоэлектродного пьезоэлектрического тела существует неопределенность в понятиях разомкнутого и короткозамкнутого электрических состояний, фигурирующих в энергетической теории КЭМС. Любое, не обязательно полное, закорачивание электродов на заданной и неизменной деформации приводит к уменьшению внутренней энергии и, следовательно, может интерпретироваться как "снятие электрической энергии". Поэтому, когда речь идёт о вычислении КЭМС многоэлектродного тела по формуле (4.14), должно быть четко оговорено, к какой группе электродов оно относится, т.е. какие электроды предполагаются одновременно разомкнутыми или короткозамкнутыми при заданных деформациях (перемещениях) в объёме. Кроме того, должны быть сформулированы электрические граничные условия на остальных электродах, при которых предполагается снятие энергии. При выполнении этих требований формулу (4.14) можно использовать для вычисления КЭМС относительно двух, трёх и т.д. электродов, в частности, в случае, когда тело переводится из полностью разомкнутого электрического состояния в полностью короткозамкнутое, т.е., когда "снятие электрической энергии" осуществляется путём одновременного закорачивания всех электродов. В большинстве устройств пьезоэлектроники съем энергии в каждый момент времени осуществляется с одной пары электродов, при этом понятие "электрод" включает в себя и несколько конструктивно закороченных электродов [130, 137]. Поэтому остановимся подробнее на вычислении КЭМС многоэлектродного тела для пары электродов.

Пусть имеется пьезоэлектрическое тело с $N \geq 3$ электродами, часть которых может находиться внутри объёма. Если несколько электродов конструктивно закорочены, они рассматриваются как один. Предположим, что электроды S_k, $k = 3, 4, ..., M$ подключены к генераторам напряжения, а электроды S_k, $k = M + 1, M + 2, ..., N$ – к генераторам тока или являются пассивными. На электродах S_1 и S_2, по отношению к которым будем находить КЭМС, предполагаются известными либо заряды, либо разность потенциалов, либо они замыкаются внешней цепью с известной проводимостью. Наряду с описанным электрическим нагружением на тело одновременно могут действовать и внешние механические нагрузки. Предположим, что сопряженное электроупругое поле в результате решения начально-граничной задачи (4.2) – (4.7) найдено и $\varepsilon_{ij}(\vec{x},t)$ – деформация в объёме тела. Считая её в дальнейшем неизменной, КЭМС для пары электродов S_1 и S_2 будем вычислять согласно формуле (4.14). При выборе электрических граничных условий на электродах S_k, $k=3,4,...,N$, необходимых для решения вспомогательных электростатических задач (4.8), (4.9) и (4.8), (4.10), можно рассуждать следующим образом: **а)** как и в случае двухэлектродного тела, абстрагируемся от истинных причин, вызвавших данную деформацию. В качестве всей подведенной энергии, отождествляемой с работой некоторых внешних механических сил, рассматриваем внутреннюю энергию тела на данной деформации в полностью разомкнутом электрическом состоянии. Способная к обращению электрическая энергия извлекается путём замыкания только пары электродов S_1 и S_2. Граничным условием на электродах S_k, $k=3,4,...,N$ при таком упрощенном подходе является нулевой заряд; **б)** в определении КЭМС для пары электродов привязываемся к способу электрического подключения остальных электродов, который имеет место в основной задаче. Однако считаем, что способная к обращению электрическая энергия на данной деформации пьезоэлектрического тела извлекается при замыкании пары электродов S_1 и S_2, а возможное перераспределение энергии между телом и генераторами через остальные электроды исключаем из рассмотрения. Такой подход предлагается в работе [38], в которой граничные условия на электродах S_k, $k=3,4,...,N$ для задач (4.8), (4.9) и (4.8), (4.10) выбираются следующим образом: на электродах, подключенных к генераторам напряжения, полагаются равными нулю значения электрического потенциала, а на электродах, подключенных к генераторам тока или пассивных электродах – значения полных зарядов. При таких граничных условиях потоки энергии через электроды равны нулю [38]. Используемая формулировка граничного условия на электродах, питаемых генераторами напряжения, равносильна следующей: все эти электроды считаются закороченными и рассматриваются как один электрод с нулевым полным зарядом. Тогда постановки задач (4.8), (4.9) и (4.8), (4.10) будут иметь такой же тип, как и в случае подхода а), хотя их решения на одной и той же деформации для обеих подходов принципиально различаются. В случае а) на рассматриваемых электродах при одинаковых (нулевых) полных зарядах будут различные потенциалы, а в случае б) – при одинаковых (нулевых) потенциалах, вообще говоря, разные заряды, дающие нулевой заряд в сумме. В частности, если все электроды, кроме S_1 и S_2, являются в некоторой задаче электроупругости пассивными или запитаны от генераторов тока, подходы а) и б) приводят к одинаковым результатам, хотя и основаны на разных соображениях; **в)** учитываем способы подключения электродов и сохраняем при переводе тела из разомкнутого по отношению к электродам S_1 и S_2 в короткозамкнутое состояние те же электрические граничные условия на электродах $S_k,\ k = 3, 4, ..., N$, что и в основной задаче электроупругости. Это тем более оправдано, поскольку электрические источники – генераторы напряжения или тока всегда предполагаются достаточно мощными и поэтому поддерживаемые ими электрические напряжения или токи (заряды) можно считать неизменными при переходе от состояния с разомкнутыми к состоянию с короткозамкнутыми электродами S_1 и S_2. Однако при этом переходе изменятся электрические заряды на электродах S_k, $k = 3, 4, ..., M$, подключенных к генераторам напряжения и электрические потенциалы на электродах S_k, $k = M+1, M+2, ..., N$, подключенных к генераторам тока. В связи с этим произойдёт некоторое перераспределение энергии между телом и генераторами, могущее повлиять на величину той части электрической энергии, которая способна к снятию с электродов S_1 и S_2.

Остановимся на нахождении КЭМС для электродов S_1 и S_2 согласно подходу в). Очевидно, что результаты в рамках первых двух подходов а), б) будут следовать как частный случай. Итак, согласно энергетической теории КЭМС [27] и предположениям подхода в) нахождение КЭМС многоэлектродного тела для пары электродов S_1 и S_2 связано с решением дополнительных электростатических задач (4.8), (4.9) и (4.8), (4.10) при следующих граничных условиях на остальных электродах:

$$\begin{gathered}\varphi\big|_{S_k} = \varphi_k, \quad k = 3, 4, ..., M; \\ \int\limits_{S_k} n_i D_i dS = -Q_k, \quad k = M+1, M+2, ..., N,\end{gathered} \tag{4.62}$$

где φ_k и Q_k – электрические потенциалы и заряды, заданные на этих электродах в основной задаче электроупругости. После решения указанных задач и нахождения соответствующих распределений электрического потенциала φ^p и φ^k в объёме тела находятся внутренние энергии (4.12) и (4.13). КЭМС вычисляется по формуле (4.14).

Проведя те же рассуждения, что и в § 2, можно показать, что решения дополнительных задач (4.8), (4.9), (4.62) и (4.8), (4.10), (4.62) не являются обязательными. Для этого их решения представляются в виде

$$\varphi^k = \varphi - \varphi^\circ, \qquad \varphi^p = \varphi - \varphi^*, \tag{4.63}$$

где φ – распределение электрического потенциала в объёме тела, найденное в основной задаче электроупругости, а φ° и φ^* – решения задач электростатики (4.16) и (4.20) при дополнительных граничных условиях соответственно

$$\begin{gathered} \varphi^\circ\big|_{S_k} = 0, \quad k = 3, 4, ..., M, \\ Q_k^\circ = \int\limits_{S_k} n_i \mu_{ij}^\varepsilon \varphi_{,j}^\circ dS = 0, \quad k = M+1, M+2, ..., N \end{gathered} \tag{4.64}$$

и

$$\begin{gathered} \varphi^*\big|_{S_k} = 0, \quad k = 3, 4, ..., M, \\ Q_k^* = \int\limits_{S_k} n_i \mu_{ij}^\varepsilon \varphi_{,j}^* dS = 0, \quad k = M+1, M+2, ..., N. \end{gathered} \tag{4.65}$$

Как и раньше, электрическое напряжение в задаче (4.16) и заряд в задаче (4.20) соответствуют основной задаче электроупругости. Относительно заряда в (4.20) отметим следующее. Равенство

$$Q_2 = -Q_1 \tag{4.66}$$

в случае двухэлектродного тела выполняется автоматически. Требование о его выполнении для N-электродного тела ($N \geq 3$) продиктовано корректностью определения КЭМС для пары электродов S_1 и S_2. Действительно, когда мы говорим о КЭМС пары электродов (или любого другого количества электродов), мы всегда подразумеваем, что их замыкание происходит внешней электрической цепью, не связанной с другими электродами тела. Условие $Q_2 = -Q_1$ отражает непрерывность тока в этой цепи. С другой стороны, выполнение этого условия означает, что съем (или подвод) электрической энергии через электроды S_1 и S_2 осуществляется в условиях равенства нулю суммарного по всем остальным электродам электрического заряда вне зависимости от способа их подключения. В случае короткозамкнутых электродов S_1 и S_2, что имеет место в постановке вспомогательной задачи (4.8), (4.10), (4.62), равенство

$$Q_2^k = -Q_1^k, \quad Q_{1,2}^k = -\int\limits_{S_{1,2}} n_i(e_{imn}\varepsilon_{mn} - \mu_{ij}^{\varepsilon}\varphi_{,j}^{\,k})dS \tag{4.67}$$

означает отсутствие привнесенных сторонних зарядов.

Вернёмся к задачам (4.16), (4.64) и (4.20), (4.65). Согласно условиям (4.66), (4.67) и представлениям (4.63) имеем

$$Q_2^\circ = -Q_1^\circ, \quad Q_2^* = -Q_1^* = -Q_1 = Q_2. \tag{4.68}$$

Отсюда, в частности, следуют равенства

$$\sum_{k=3}^{M} Q_k^\circ = 0, \qquad \sum_{k=3}^{M} Q_k^* = 0. \tag{4.69}$$

Подставляя (4.63) в (4.12), (4.13), после необходимых преобразований получаем

$$U^k = U - \frac{1}{2}Q_1^\circ\Delta\varphi - \sum_{k=3}^{M} Q_k^\circ\varphi_{\,k}, \tag{4.70}$$

$$U^p = U + \frac{1}{2}Q_1\Delta\varphi^* - Q_1\Delta\varphi - \sum_{k=3}^{M} Q_k^*\varphi_k. \tag{4.71}$$

Способная к обращению энергия равна

$$U^p - U^k = \frac{1}{2}\left(Q_1\Delta\varphi^* - 2Q_1\Delta\varphi + Q_1^\circ\Delta\varphi\right) - \sum_{k=3}^{M}\left(Q_k^* - Q_k^\circ\right)\varphi_k, \tag{4.72}$$

причём $Q_n^* - Q_n^\circ = Q_n^k - Q_n^p$, $n = 3, 4, ..., M$. Заметим, что вклад во внутренние энергии U^p и U^k электрических зарядов на электродах, подключенных к генераторам тока, неявно содержится в величине U и при снятии энергии не изменяется. Этим объясняется отсутствие сумм по указанным электродам в (4.70) – (4.72), где, как и раньше, U – внутренняя энергия в объёме тела, $\Delta\varphi$ – электрическое напряжение на электродах S_1 и S_2, Q_1 – заряд электрода $S_1(Q_2 = -Q_1)$, соответствующие основной задаче электроупругости. Для нахождения электрического напряжения $\Delta\varphi^* = \varphi_1^* - \varphi_2^*$, заряда $Q_1^\circ = -Q_2^\circ$ и зарядов Q_k° и Q_k^*, $k = 3, 4, ..., M$ нет необходимости решать задачи обычной электростатики (4.16), (4.64) и (4.20), (4.65), если известна матрица статических емкостей $\|C_{mn}\|$ данного N-электродного тела. С помощью этой матрицы электростатические потенциалы и заряды на электродах при нулевых деформациях тела связаны соотношениями [156]

$$Q_m^\circ = \sum_{n=1}^{N} C_{mn}\varphi_n^\circ, \quad m = 1, 2, ..., N. \tag{4.73}$$

Матрица $\|C_{mn}\|$ симметричная и вырожденная:

$$C_{mn} = C_{nm}, \quad \sum_{n=1}^{N} C_{mn} = 0, \quad m = 1, 2, ..., N. \tag{4.74}$$

Последнее свойство является следствием равенства нулю общего заряда

$$\sum_{m=1}^{N} Q_m^\circ = 0 \qquad \forall\varphi_n^\circ, \quad n = 1, 2, ..., N. \tag{4.75}$$

В случае двухэлектродного тела $(N = 2)$ симметричная и вырожденная матрица содержит один независимый элемент C_ε, названный в §2 статической ёмкостью пьезоэлемента. Компоненты матрицы $\|C_{mn}\|$ отыскиваются из задачи электростатического нагружения пьезоэлектрического тела при нулевых деформациях и считаются известными. Записывая соотношения (4.73) с учетом граничных условий задачи (4.16), (4.64) и исключая из них все потенциалы, кроме φ_1°, φ_2°, получаем выражения для ненулевых зарядов

$$Q_k^\circ = \hat{C}_{k1}\varphi_1^\circ + \hat{C}_{k2}\varphi_2^\circ, \quad k = 1, 2, ..., M. \tag{4.76}$$

Величины $\hat{C}_{k1}$, $\hat{C}_{k2}$ в каждом конкретном случае легко находятся по компонентам матрицы емкостей $\|C_{mn}\|$, в частности, когда $M = N$, т.е. когда все электроды S_k, $k = 3, 4, ..., N$ в основной задаче электроупругости подключены к генераторам напряжения, $\hat{C}_{k1} = C_{k1}$, $\hat{C}_{k2} = C_{k2}$, $k = 1, 2, ..., N$. Указанные величины удовлетворяют равенствам

$$\sum_{k=1}^{M} \hat{C}_{k1} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{M} \hat{C}_{k2} = 0. \tag{4.77}$$

На электродах S_1 и S_2 из (4.76), в частности, имеем

$$Q_1^\circ = \hat{C}_{11}\varphi_1^\circ + \hat{C}_{12}\varphi_2^\circ, \quad Q_2^\circ = \hat{C}_{21}\varphi_1^\circ + \hat{C}_{22}\varphi_2^\circ. \tag{4.78}$$

Если все электроды, кроме S_1 и S_2, имеют нулевые заряды (являются пассивными), матрица $\left\|\hat{C}_{ij}\right\|$ $(i, j = 1, 2)$ в (4.78) будет симметричной и вырожденной 2×2-матрицей. В общем же случае $\hat{C}_{11}\hat{C}_{22} - \hat{C}_{12}^2 \neq 0$. Из (4.78) с учетом условия (4.68) получаем

$$Q_1^\circ = C_\varepsilon(\varphi_1^\circ - \varphi_2^\circ) = C_\varepsilon \Delta\varphi^\circ \tag{4.79}$$

где

$$C_\varepsilon = \left(\hat{C}_{11} \cdot \hat{C}_{22} - \hat{C}_{12}^2\right) / \left(\hat{C}_{11} + 2\hat{C}_{12} + \hat{C}_{22}\right) \tag{4.80}$$

– приведенная ёмкость относительно электродов S_1 и S_2. Для зарядов на остальных электродах имеем

$$\begin{gathered} Q_k^\circ = \xi_k Q_1^\circ = C_\varepsilon \Delta\varphi^\circ \xi_k, \quad k = 3, 4, ..., M, \\ \xi_k = \frac{\hat{C}_{k1}\left(\hat{C}_{22} + \hat{C}_{12}\right) - \hat{C}_{k2}\left(\hat{C}_{11} + \hat{C}_{12}\right)}{\hat{C}_{11}\hat{C}_{22} - \hat{C}_{12}^2}, \end{gathered} \tag{4.81}$$

причём $\sum\limits_{k=3}^{M} \xi_k = 0$. Аналогичные соотношения могут быть записаны для величин со звездочками, соответствующих задаче (4.20), (4.65):

$$Q_1^* = C_\varepsilon \Delta\varphi^*, \quad Q_k^* = \xi_k Q_1^*, \quad k = 3, 4, ..., M. \tag{4.82}$$

Учитывая, что $Q_1^* = Q_1$, $\Delta\varphi^\circ = \Delta\varphi$, где Q_1 и $\Delta\varphi$ – заряд и напряжение из основной задачи электроупругости, будем иметь

$$\begin{gathered} Q_1^\circ = C_\varepsilon \Delta\varphi, \quad \Delta\varphi^* = Q_1/C_\varepsilon, \quad Q_k^\circ = C_\varepsilon \Delta\varphi \xi_k, \\ Q_k^* = Q_1 \xi_k, \qquad k = 3, 4, ..., M. \end{gathered} \tag{4.83}$$

Подставляя (4.83) в выражения для энергий (4.70) – (4.72) и используя затем формулу (4.14), после некоторых преобразований получаем

$$k_э^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \qquad k^2 = \frac{\left(Q_1 - C_\varepsilon \Delta\varphi\right)\left(Q_1 - C_\varepsilon\left[\Delta\varphi + \bar{\varphi}\right]\right) C_\varepsilon^{-1}}{2U - C_\varepsilon \Delta\varphi\left[\Delta\varphi + \bar{\varphi}\right]}, \qquad (4.84)$$

где

$$\bar{\varphi} = 2\sum_{k=3}^{M} \xi_k \varphi_k. \qquad (4.85)$$

Напомним, что φ_k – электрические потенциалы на электродах, подключенных к генераторам напряжения.

Таким образом, как и в случае двухэлектродного тела КЭМС для пары электродов N-электродного тела ($N \geq 3$) может быть найден сразу же по решению основной задачи электроупругости. Для этого достаточно знать приведенную статическую ёмкость тела относительно указанной пары электродов C_ε (4.80) и набор безразмерных величин ξ_k из (4.81), представляющих собой определённую комбинацию элементов матрицы емкостей. Необходимое для этого количество элементов матрицы $\|C_{mn}\|$ определяется граничными условиями (4.64). Всё сказанное в § 2 относительно преимуществ использования формул (4.25) по сравнению с непосредственной методикой энергетического подхода остаётся в силе и по отношению формул (4.84). Перераспределение электрической энергии между телом и генераторами при замыкании электродов S_1 и S_2, для которых определяется КЭМС, учитывается в формулах (4.84) параметром $\bar{\varphi}$ (4.85) и происходит только через те электроды, которые подключены к генераторам напряжения. В случае четырехэлектродного тела, например, пьезотрансформатора $\bar{\varphi} = 2\xi\Delta\bar{\varphi}$, где $\xi = \xi_3 = -\xi_4$, а $\Delta\bar{\varphi}$ – электрическое напряжение на электродах S_3 и S_4.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть электродов, подключенных к генераторам напряжения, нет. Тогда в формулах (4.84) параметр $\bar{\varphi}$ (4.85) необходимо отбросить. В соотношениях (4.78) матрица $\left\|\hat{C}_{ij}\right\|$ $(i, j = 1, 2)$ для данного случая содержит один независимый элемент $\hat{C}_{11}$ и $Q_1^\circ = \hat{C}_{11}\Delta\varphi^\circ$. Формулы для КЭМС (4.84) принимают такой же вид, как и в случае двухэлектродного тела, но с приведенной статической ёмкостью $C_\varepsilon = \hat{C}_{11}$. Подключены ли электроды в рассматриваемом случае к генераторам тока или являются пассивными, несущественно, поскольку на вид формул для КЭМС это никаким образом не сказывается. Как частный случай, к соотношениям (4.25) сводится методика нахождения КЭМС в рамках описанного выше подхода а).

Пусть электроды S_k, $k = 3, 4, ..., M$ закорачиваются, т.е. $\varphi_k = \varphi_\circ = const$, а остальные электроды подключаются к генераторам тока либо являются пассивными. Тогда

$$\bar{\varphi} = 2\sum_{k=3}^{M}\xi_k\varphi_k = 2\varphi_\circ\sum_{k=3}^{M}\xi_k = 0$$

и, следовательно, также приходим к соотношениям (4.25). Приведенная ёмкость C_ε вычисляется в этом случае согласно (4.80). Как частный случай, к (4.25) сводится методика нахождения КЭМС согласно подхода б), когда на электродах, запитанных от генераторов напряжения, сохраняется нулевой потенциал, а на электродах, запитанных от генераторов тока или пассивных электродах – нулевой заряд [38]. При этих однородных граничных условиях КЭМС для пары электродов S_1 и S_2, как и в случае двухэлектродного тела, можно представить в виде разложений по КЭМС отдельных нормальных мод, имеющих вид (4.57) и (4.58) [38]. Для этого необходимо представить решение основной задачи электроупругости в виде (4.45) и найти собственные функции из задачи (4.46) при следующих дополнительных условиях

$$\Psi^{(m)}_{|S_k} = 0,\ k = 3, 4, ..., M;\ \ Q^{(m)}_{|S_k} = 0,\ k = M+1, M+2, ..., N. \qquad (4.86)$$

На электродах S_1 и S_2 собственные функции удовлетворяют одному из граничных условий (4.46), соответствующему либо короткозамкнутым электродам S_1 и S_2 либо разомкнутым. Выражения для модовых КЭМС (4.43) и (4.44) сохраняют свой вид с той лишь разницей, что C_ε означает приведенную ёмкость, определяемую согласно (4.80). При указанных выше однородных условиях на электродах S_k, $k = 3, 4, ..., N$ остаются в силе соотношения (4.49) – (4.54). Поэтому формулы (4.57) и (4.58) не изменяются. Имеют место оценки (4.59) и явные выражения для реализующих максимальный КЭМС перемещений (4.61). Выше отмечалось, что формула (4.14) может использоваться при любом количестве электродов, предполагаемых одновременно разомкнутыми или короткозамкнутыми на данной деформации, если электрические граничные условия на остальных электродах соответствующим образом сформулированы. Принимая эти условия такими же как и в основной задаче электроупругости и представляя решения необходимых для применения формулы (4.14) вспомогательных задач электростатики в виде (4.63), можно показать, что КЭМС для любого количества электродов также определяется электроупругим состоянием, найденным из решения основной задачи, и матрицей статических емкостей.

§ 5. Нахождение КЭМС в рамках численных методов

Использование соотношений (4.25) или (4.84) значительно упрощает нахождение КЭМС при численном решении задач электроупругости, в частности, задач о вынужденных колебаниях пьезоэлектрических тел. Вместе с тем в рамках численных методов (конечно-разностного, вариационно-разностного, конечных элементов) величину КЭМС можно определять по методике [181], основанной на снижении числа независимых переменных в системе разрешающих алгебраических уравнений, что, однако, требует значительных преобразований в матрице этой системы. Уменьшение числа независимых переменных возможно благодаря условию эквипотенциальности электродированных поверхностей. Как отмечается в работе [110], указанная методика нахождения КЭМС находится в полном соответствии с энергетическим подходом [27, 166]. Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере решения задачи о вынужденных колебаниях двухэлектродного пьезоэлектрического тела с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Следуя работе [181], выпишем необходимые конечноэлементные соотношения электроупругости в матричной форме. Определяющие уравнения имеют вид

$$|\hat{\sigma}>= \left[C^{E}\right] |\hat{\varepsilon}> - [e]^t |\hat{E}>, \quad |\hat{D}>= [e]\, |\hat{\varepsilon}> + [\mu^{\varepsilon}]\, |\hat{E}>, \tag{4.87}$$

где $\left[C^{E}\right]$, $[e]$ и $[\mu^{\varepsilon}]$ – соответственно упругая, пьезоэлектрическая и диэлектрическая матрицы; индекс t означает транспонирование матрицы. Матрица-столбец деформаций $|\hat{\varepsilon}>$ выражается через матрицу-столбец перемещений следующим образом

$$|\hat{\varepsilon}>= [L_u]\, |\hat{u}>,$$

где $[L_u]$ – известный дифференциальный оператор. Электрическое поле представляется как градиент электрического потенциала

$$|\hat{E}>= -grad\hat{\varphi}.$$

После дискретизации области конечноэлементной сеткой перемещения и электрический потенциал представляются в виде

$$|\hat{u} >= [N_u]\,|\hat{u}_i >, \qquad \hat{\varphi} = [N_\varphi]\,|\hat{\varphi}_i >, \tag{4.88}$$

где $|\hat{u}_i>$ и $|\hat{\varphi}_i>$ – матрицы-столбцы узловых значений величин; $[N_u]$ и $[N_\varphi]$ – интерполяционные матрицы. С учетом (4.88) деформации и электрическое поле принимают следующую форму

$$|\hat{\varepsilon} >= [B_u]\,|\hat{u}_i >, \qquad |\hat{E} >= -\,[B_\varphi]\,|\hat{\varphi}_i >, \tag{4.89}$$

причём

$$[B_u] = [L_u]\,[N_u]\,, \qquad [B_\varphi] = grad\,[N_\varphi]\,. \tag{4.90}$$

На основе вариационного принципа Гамильтона конечноэлементная формулировка задачи электроупругости сводится к системе линейных алгебраических уравнений следующей структуры

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2[M_{uu}] & \vdots & [K_{u\varphi}] \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ [K_{u\varphi}]^t & \vdots & [K_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} |\hat{u}_i > \\ \dots\dots \\ |\hat{\varphi}_i > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\hat{t}_i > \\ \dots\dots \\ |\hat{Q}_i > \end{bmatrix}, \tag{4.91}$$

где $[K_{uu}]$, $[K_{u\varphi}]$, $[K_{\varphi\varphi}]$ и $[M_{uu}]$ – соответственно матрицы жесткости, пьезоэлектрической "жесткости", диэлектрической "жесткости" и массы; $|\hat{t}_i>$ и $|\hat{Q}_i>$ – матрицы-столбцы соответственно узловых усилий на границе тела и электрических зарядов на электродах. Указанные матрицы имеют вид

$$\begin{gathered} [K_{uu}] = \int\limits_V [B_u]^t[C^E][B_u]dV, \;\; [K_{u\varphi}] = \int\limits_V [B_u]^t[e]^t[B_\varphi]dV, \\ [K_{\varphi\varphi}] = -\int\limits_V [B_\varphi]^t[\mu^\varepsilon][B_\varphi]dV, \;\; [M_{uu}] = \rho\int\limits_V [N_u]^t[N_u]dV, \\ |\hat{t}_i >= \int\limits_{S_\sigma} [N_u]^t\,\vec{\hat{t}}\,dS. \end{gathered} \tag{4.92}$$

Представление узловых зарядов в виде $|\hat{Q}_i >= \int\limits_{S_\varphi} \hat{\sigma}_{пов}[N_\varphi]dS$ носит условный характер, поскольку плотность электрического заряда на электроде заранее неизвестна.

С учетом эквипотенциальности электродированной части поверхности и главных граничных условий для перемещений (например, некоторая часть границы тела жестко защемлена) количество неизвестных в системе (4.91) можно уменьшить [181], преобразовав её к виду

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{uu}]-\omega^2[\bar{M}_{uu}] & \vdots & [K'_{u\varphi}> & \vdots & [\bar{K}_{u\varphi}] \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ <K'_{u\varphi}| & \vdots & K''_{\varphi\varphi} & \vdots & <K'_{\varphi\varphi}| \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ [\bar{K}_{u\varphi}]^t & \vdots & |K'_{\varphi\varphi}> & \vdots & [\bar{K}_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} |\hat{u}_i> \\ \dots\dots \\ \Delta\hat{\varphi} \\ \dots\dots \\ |\hat{\varphi}_i> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\hat{t}_i> \\ \dots\dots \\ |\hat{Q}_1> \\ \dots\dots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.93}$$

где $\Delta\hat{\varphi}=\hat{\varphi}_1-\hat{\varphi}_2$ – разность потенциалов на электродах, $\hat{Q}_1$ – заряд электрода, а $|\hat{\varphi}_i>$ – потенциалы в узлах, не принадлежащих электродам, для которых из (4.93) можно записать

$$|\hat{\varphi}_i>=-[\bar{K}_{\varphi\varphi}]^{-1}\left([\bar{K}_{u\varphi}]^t|\hat{u}_i>+|K'_{\varphi\varphi}>\Delta\hat{\varphi}\right), \tag{4.94}$$

где -1 означает обращение матрицы. С учетом (4.94) неизвестные $|\hat{\varphi}_i>$ из системы (4.93) исключаются, после чего она принимает вид

$$\begin{bmatrix} [H_{uu}]-\omega^2[\bar{M}_{uu}] & \vdots & |H_{u\varphi}> \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ <H_{u\varphi}| & \vdots & -H_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} |\hat{u}_i> \\ \dots\dots \\ \Delta\hat{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\hat{t}_i> \\ \dots\dots \\ -\hat{Q}_1 \end{bmatrix}, \tag{4.95}$$

где

$$\begin{aligned} &[H_{uu}]=[\bar{K}_{uu}]-[\bar{K}_{u\varphi}][\bar{K}_{\varphi\varphi}]^{-1}[\bar{K}_{u\varphi}]^t, \\ &|H_{u\varphi}>=|K'_{u\varphi}>-[\bar{K}_{u\varphi}][\bar{K}_{\varphi\varphi}]^{-1}|K'_{\varphi\varphi}>, \\ &H_{\varphi\varphi}=-K''_{\varphi\varphi}+<K'_{\varphi\varphi}|[\bar{K}_{\varphi\varphi}]^{-1}|K'_{\varphi\varphi}>. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Система уравнений (4.95) связывает узловые перемещения $|\hat{u}_i>$, разность потенциалов на электродах $\Delta\hat{\varphi}$ и электрический заряд электрода $\hat{Q}_1$. Заметим, что первоначально ленточная структура матрицы системы (4.91) в результате проведенных преобразований нарушается и матрица системы (4.95) становится полностью заполненной. Из проведенных выше рассуждений и окончательного вида разрешающей системы (4.95) следует, в частности, физический смысл постоянной $H_{\varphi\varphi}$, представляющей ёмкость пьезоэлектрического тела на нулевых деформациях (перемещениях), так что

$$H_{\varphi\varphi} = C_\varepsilon. \tag{4.97}$$

Обратимся к выражению для внутренней энергии (4.29) и приведём конечноэлементные аналоги входящих в него слагаемых

$$\begin{gathered}
\int\limits_V C^E_{ijkl}\hat{\varepsilon}_{ij}\hat{\varepsilon}_{kl}dV =< \hat{u}_i|[K_{uu}]|\hat{u}_i >=< \hat{u}_i|[\bar{K}_{uu}]|\hat{u}_i >, \\
\int\limits_V \mu^\varepsilon_{ij}\hat{\varphi}_{,i}\hat{\varphi}_{,j}dV = -< \hat{\varphi}_i|[K_{\varphi\varphi}]|\hat{\varphi}_i >= \\
= -\left[\Delta\hat{\varphi} \vdots < \hat{\varphi}_i|\right] \begin{bmatrix} K''_{\varphi\varphi} & \vdots & < K'_{\varphi\varphi}| \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ |K'_{\varphi\varphi} > & \vdots & [\bar{K}_{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\hat{\varphi} \\ \cdots \\ |\hat{\varphi}_i > \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{4.98}$$

Используя (4.94), обозначения (4.96) и выполнив необходимые матричные операции, можно преобразовать (4.98) к виду

$$\begin{gathered}
\int\limits_V C^E_{ijkl}\hat{\varepsilon}_{ij}\hat{\varepsilon}_{kl}dV =< \hat{u}_i|[H_{uu}]|\hat{u}_i > -B, \\
\int\limits_V \mu^\varepsilon_{ij}\hat{\varphi}_{,i}\hat{\varphi}_{,j}dV = C_\varepsilon(\Delta\hat{\varphi})^2 + B,
\end{gathered} \tag{4.99}$$

где

$$B =< \hat{u}_i|([H_{uu}] - [\bar{K}_{uu}])|\hat{u}_i >, \tag{4.100}$$

а для для внутренней энергии записать

$$2U_{\text{т}} =< \hat{u}_i|[H_{uu}]|\hat{u}_i > + C_\varepsilon(\Delta\hat{\varphi})^2. \tag{4.101}$$

Из (4.95) для заряда на электроде получаем

$$\hat{Q}_1 = C_\varepsilon\Delta\hat{\varphi} - < \hat{u}_i||H_{u\varphi} > . \tag{4.102}$$

Подставляя величины (4.101), (4.102) в (4.29), приходим к соотношениям

$$k_э^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \qquad k^2 = \frac{(<\hat{u}_i||H_{u\varphi}>)^2 C_\varepsilon^{-1}}{<\hat{u}_i|[H_{uu}]|\hat{u}_i>}, \tag{4.103}$$

позволяющим найти КЭМС по известным перемещениям в узлах конечноэлементной разбивки. В соотношениях (4.103) в явном виде отражается основная идея энергетической теории КЭМС [27, 166], состоящая в том, что эта характеристика эффективности преобразования энергии пьезоэлектрическим телом с заданным расположением электродов полностью определяется полем деформаций (перемещений) в объёме тела. Очень просто можно получить соотношения (4.103) и на основании формулы (4.14). Действительно, при разомкнутых электродах ($\hat{Q}_1 = 0$) внутренняя энергия, согласно (4.101) и (4.102), принимает вид

$$2U_т^p =<\hat{u}_i|[H_{uu}]|\hat{u}_i> + \frac{(<\hat{u}_i||H_{u\varphi}>)^2}{C_\varepsilon}. \tag{4.104}$$

При короткозамкнутых электродах

$$2U_т^k =<\hat{u}_i|[H_{uu}]|\hat{u}_i> . \tag{4.105}$$

Подставляя (4.104) и (4.105) в формулу (4.14), получаем

$$k_э^2 = \frac{(<\hat{u}_i||H_{u\varphi}>)^2 C_\varepsilon^{-1}}{<\hat{u}_i|[H_{uu}]|\hat{u}_i> + (<\hat{u}_i||H_{u\varphi}>)^2 C_\varepsilon^{-1}}. \tag{4.106}$$

Формула (4.106) равносильна соотношениям (4.103)

Рассмотрим случай собственных колебаний пьезоэлектрического тела, положив в (4.95) $|\hat{t}_i>=|0>$. Собственные частоты и узловые значения собственных перемещений при закороченных ($\Delta\hat{\varphi} = 0$) и разомкнутых ($\hat{Q}_1 = 0$) электродах находятся, согласно (4.95), из решения матричных задач соответственно [181]

$$\left([H_{uu}] - \omega_r^2[\bar{M}_{uu}]\right)|\hat{u}_i^{(r)}>=|0> \tag{4.107}$$

и

$$\left([H'_{uu}] - \omega_a^2[\bar{M}_{uu}]\right)|\hat{u}_i^{(a)}>=|0>, \tag{4.108}$$

где

$$[H'_{uu}] = [H_{uu}] + \frac{|H_{u\varphi}><H_{u\varphi}|}{C_\varepsilon}. \tag{4.109}$$

Из (4.107) можно записать

$$< \hat{u}_i^{(r)}|[H_{uu}]|\hat{u}_i^{(r)} >= \omega_r^2 < \hat{u}_i^{(r)}|[\bar{M}_{uu}]|\hat{u}_i^{(r)} >, \tag{4.110}$$

так что для КЭМС на собственной частоте ω_r из (4.103) получаем

$$k_э^{(r)^2} = \frac{k^{(r)^2}}{1+k^{(r)^2}}, \qquad k^{(r)^2} = \frac{(< \hat{u}_i^{(r)}||H_{u\varphi} >)^2 C_\varepsilon^{-1}}{\omega_r^2 < \hat{u}_i^{(r)}|[\bar{M}_{uu}]|\hat{u}_i^{(r)} >}. \tag{4.111}$$

Аналогично, записав на основании (4.108) и (4.109) равенство

$$\begin{gathered} < \hat{u}_i^{(a)}|[H_{uu}]|\hat{u}_i^{(a)} > +(< \hat{u}_i^{(a)}||H_{u\varphi} >)^2 C_\varepsilon^{-1} = \\ = \omega_a^2 < \hat{u}_i^{(a)}|[\bar{M}_{uu}]|\hat{u}_i^{(a)} >, \end{gathered} \tag{4.112}$$

из (4.106) получаем выражение для КЭМС на собственной частоте ω_a

$$k_э^{(a)^2} = \frac{(< \hat{u}_i^{(a)}||H_{u\varphi} >)^2 C_\varepsilon^{-1}}{\omega_a^2 < \hat{u}_i^{(a)}|[\bar{M}_{uu}]|\hat{u}_i^{(a)} >}. \tag{4.113}$$

Отметим, что равенства (4.110), (4.112) и формулы для КЭМС (4.111), (4.113) являются конечноэлементными аналогами равенств (4.37) и формул (4.38), (4.39), если учесть выражения для внутренних энергий (4.104), (4.105) и соотношение (4.102), согласно которому $< \hat{u}_i^{(r)}||H_{u\varphi} >= -\hat{Q}_1$ и $< \hat{u}_i^{(a)}||H_{u\varphi} >= C_\varepsilon \Delta\hat{\varphi}$.

Отметим одну возможную интерпретацию соотношений (4.103). Следуя работе [181], назовём величины

$$\begin{gathered} E_c = \frac{1}{2} < \hat{u}_i|[H_{uu}]|\hat{u}_i >, \quad E_\mu = \frac{1}{2} C_\varepsilon \left(\Delta\hat{\varphi}\right)^2, \\ E_e = \frac{1}{2} < \hat{u}_i||H_{u\varphi} > \Delta\hat{\varphi} \end{gathered} \tag{4.114}$$

соответственно упругой, диэлектрической и пьезоэлектрической энергиями. Тогда с учетом (4.114) соотношения (4.103) перепишутся в виде

$$k_э^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \qquad k^2 = \frac{E_e^2}{E_c \cdot E_\mu}, \tag{4.115}$$

т.е. величину k^2 можно интерпретировать как отношение квадрата пьезоэлектрической энергии к произведению упругой и диэлектрической энергий. Сразу же заметим, что соотношения (4.115) не следует отождествлять с известными в литературе соотношениями подобного рода, которые в своё время предлагались в качестве определения КЭМС [11, 192], однако для общего случая неоднородной деформации пьезоэлектрического тела оказались непригодными [27]. Имеются в виду соотношения типа (4.115), в которых под упругой, диэлектрической и пьезоэлектрической энергиями понимаются величины соответственно

$$Э_c = \frac{1}{2}\int\limits_V C^E_{ijkl}\hat{\varepsilon}_{ij}\hat{\varepsilon}_{kl}dV, \quad Э_\mu = \frac{1}{2}\int\limits_V \mu^\varepsilon_{ij}\hat{E}_i\hat{E}_j,$$
$$Э_e = \frac{1}{2}\int\limits_V e_{kij}\hat{E}_k\hat{\varepsilon}_{ij}dV \tag{4.116}$$

или их конечноэлементные аналоги

$$Э_c = \frac{1}{2} < \hat{u}_i|[K_{uu}]|\hat{u}_i >, \;\; Э_\mu = -\frac{1}{2} < \hat{\varphi}_i|[K_{\varphi\varphi}]|\hat{\varphi}_i >,$$
$$Э_e = -\frac{1}{2} < \hat{u}_i|[K_{u\varphi}]|\hat{\varphi}_i > . \tag{4.117}$$

Для последней величины (4.116) (или ((4.117)) подобно соотношениям (4.99) можно получить равенство

$$2Э_e = \int\limits_V e_{kij}\hat{E}_k\hat{\varepsilon}_{ij}dV = - < \hat{u}_i||H_{u\varphi} > \Delta\hat{\varphi} - B. \tag{4.118}$$

Из (4.114) и (4.117) видно, что величины E_c, E_μ, E_e записываются по отношению к преобразованной системе уравнений (4.95), в то время как величины $Э_c$, $Э_\mu$, $Э_e$ – по отношению к первоначальной системе (4.91) и в этом их существенное различие. В заключение отметим, что термин "энергия" для величин E_e и $Э_e$ является не совсем корректным, поскольку они могут принимать отрицательные значения .

§ 6. К оценке накопления электромеханической энергии при колебаниях неупругих пьезоэлектрических тел

Все рассмотренные в предыдущих параграфах соотношения записаны в предположении отсутствия потерь в пьезоматериале. В действительности пьезоматериалам (в том числе и пьезокерамике) свойственны механические и диэлектрические потери, которые приводят при гармонических процессах нагружения к рассеиванию части электромеханической энергии и затуханию колебаний. Как правило, принято считать, что вся рассеиваемая энергия превращается в тепло, хотя в термомеханике, например, известны результаты, согласно которым в тепло превращается только часть рассеиваемой механической энергии [77, 159]. Другая её часть, по мнению автора работ [224, 225], идёт на изменение молекулярной структуры материала. Какие-либо результаты подобного рода для пьезоэлектрических материалов нам неизвестны.

Учёт потерь важен при оценке надежности и эффективности работы пьезопреобразователей и может быть проведен на основании комплексно-амплитудных соотношений предыдущей главы, например соотношений (3.86) или (3.97). В этих соотношениях комплексное представление имеют не только механические и диэлектрические, но и пьезоэлектрические коэффициенты. С комплексным представлением в амплитудных уравнениях пьезоэлектрических характеристик материала принято связывать так называемые "пьезоэлектрические потери", которые трактуются в литературе как потери на несовершенство преобразования энергии [194]. Хотя механизм "пьезоэлектрических потерь" до настоящего времени ещё не выяснен и не поддается такой простой интерпретации, как для потерь механических и диэлектрических, распространение концепции о тангенсе угла потерь на пьезомодуль уже давно получило экспериментальное подтверждение [193]. Благодаря введению комплексного пьезомодуля удается лучше согласовывать расчетные и экспериментальные данные. Это в первую очередь относится к анализу полной проводимости и диссипации на характеристических частотах колебаний пьезоэлементов [46]. Необходимость использования комплексных пьезоэлектрических характеристик при анализе колебаний пьезоэлектрических тел подтверждает гипотезу о наследственной зависимости между механическими и электрическими величинами. Со своей стороны, экспериментальное изучение ядер, отвечающих в наследственных функционалах за электромеханическую связь, могло бы, по-видимому, внести некоторую ясность в понимание сущности "пьезоэлектрических потерь".

Основными интегральными (энергетическими) характеристиками колебаний пьезоэлектрических тел являются диссипация и накопление электромеханической энергии. Мощность диссипации в среднем за период полностью электромеханически детерминирована и описывается соотношением (1.184) или (1.188). Трудности возникают с выбором меры накопления электромеханической энергии. Используемая в гл. 2 функция накопления $\bar{U}$ введена нами формально и её точный смысл остался неясным. Вопросы, связанные с неоднозначностью выбора меры накопления механической энергии и её зависимости от вида НДС при колебаниях вязкоупругих тел без пьезоэффекта, рассматриваются в статье [150]. Обобщение её результатов на случай колебаний пьезоэлектрических тел дано в работе [116].

Следуя работе [116], рассмотрим монофазные деформацию и индукцию электрического поля в элементарном объёме пьезоэлектрического тела с температурой $\Theta(t) = \Theta_0 = const$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \varepsilon^{\circ}_{ij} cos\left(\omega t + \varphi^{\varepsilon}\right) = \varepsilon'_{ij} cos\omega t - \varepsilon''_{ij} sin\omega t, \\ D_j(t) &= D^{\circ}_j cos\left(\omega t + \varphi^{D}\right) = D'_j cos\omega t - D''_j sin\omega t. \end{aligned} \tag{4.119}$$

Соответствующие реакции механических напряжений и напряженности электрического поля примем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma^{\circ}_{ij} cos\left(\omega t + \varphi^{\sigma}_{ij}\right) = \sigma'_{ij} cos\omega t - \sigma''_{ij} sin\omega t, \\ E_j(t) &= E^{\circ}_j cos\left(\omega t + \varphi^{E}_j\right) = E'_j cos\omega t - E''_j sin\omega t. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Выше обозначено:

$$\varepsilon^{','' }_{ij} = \varepsilon^{\circ}_{ij}\left\{cos\varphi^{\varepsilon}, sin\varphi^{\varepsilon}\right\}, \qquad D^{','' }_j = D^{\circ}_j\left\{cos\varphi^{D}, sin\varphi^{D}\right\},$$

$$\sigma^{','' }_{ij} = \sigma^{\circ}_{ij}\left\{cos\varphi^{\sigma}_{ij}, sin\varphi^{\sigma}_{ij}\right\}, \qquad E^{','' }_j = E^{\circ}_j\left\{cos\varphi^{E}_j, sin\varphi^{E}_j\right\}$$

(по индексам i, j не суммировать).

Предположим, что $\varphi^{\varepsilon} = \varphi^{D} = \varphi$ и введём замену $\omega t + \varphi = \omega z - \pi/2$. Тогда соотношения (4.119), (4.120) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{ij}(z) = \varepsilon^{\circ}_{ij} sin\omega z, \qquad D_j(z) = D^{\circ}_j sin\omega z, \\ &\sigma_{ij}(z) = \hat{\sigma}'_{ij} cos\omega z + \hat{\sigma}''_{ij} sin\omega z, \\ &E_j(z) = \hat{E}'_j cos\omega z + \hat{E}''_j sin\omega z, \end{aligned} \tag{4.121}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}'_{ij} &= \sigma^{\circ}_{ij}\left(sin\varphi^{\sigma}_{ij}cos\varphi - cos\varphi^{\sigma}_{ij}sin\varphi\right), \\ \hat{\sigma}''_{ij} &= \sigma^{\circ}_{ij}\left(cos\varphi^{\sigma}_{ij}cos\varphi + sin\varphi^{\sigma}_{ij}sin\varphi\right), \\ \hat{E}'_{j} &= E^{\circ}_{j}\left(sin\varphi^{E}_{j}cos\varphi - cos\varphi^{E}_{j}sin\varphi\right), \\ \hat{E}''_{j} &= E^{\circ}_{j}\left(cos\varphi^{E}_{j}cos\varphi + sin\varphi^{E}_{j}sin\varphi\right). \end{aligned} \tag{4.122}$$

Для рассмотрения вопросов диссипации и накопления электромеханической энергии обратимся ко второму закону термодинамики в форме обобщенного неравенства Планка (1.141), которое перепишем в виде

$$\dot{\Phi} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + E_j\dot{D}_j - D'_{\text{эм}}, \quad D'_{\text{эм}} \geq 0. \tag{4.123}$$

В линейной теории скорость диссипации $D'_{\text{эм}}$ является квадратичным функционалом историй деформаций и индукции электрического поля, так что для гармонических процессов (4.121) будем иметь

$$D'_{\text{эм}} = \bar{D}'_{\text{эм}} + D'_c cos2\omega z + D'_s sin2\omega z. \tag{4.124}$$

Интегрируя равенство (4.123) от 0 до z с учетом (4.121), (4.124) и используя условие периодичности $\Phi(0) = \Phi(2\pi/\omega)$, получаем

$$\begin{gathered} \bar{D}'_{\text{эм}} = \frac{\omega}{2}\left(\hat{\sigma}'_{ij}\varepsilon^{\circ}_{ij} + \hat{E}'_j D^{\circ}_j\right), \\ \Phi(z) - \Phi(0) = \bar{\Phi} + \Phi_c cos2\omega z + \Phi_s sin2\omega z, \end{gathered} \tag{4.125}$$

где

$$\begin{gathered} \bar{\Phi} = -\Phi_c = \frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}''_{ij}\varepsilon^{\circ}_{ij} + \hat{E}''_j D^{\circ}_j - \frac{2}{\omega}D'_s\right), \\ \Phi_s = \frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}'_{ij}\varepsilon^{\circ}_{ij} + \hat{E}'_j D^{\circ}_j - \frac{2}{\omega}D'_c\right). \end{gathered} \tag{4.126}$$

Из второго равенства (4.125) и первого равенства (4.126) можно записать

$$\Phi\left(\pi/2\omega\right) - \Phi(0) = \Delta\Phi_{\text{т}/4} = 2\bar{\Phi}, \tag{4.127}$$

т.е. электромеханическая энергия, накапливаемая за четверть периода в процессе изменения величин $\varepsilon_{ij}(z)$ и $D_i(z)$ из нулевого состояния, равна удвоенной средней накапливаемой энергии. Интересно выяснить, как эта величина соотносится с максимальным значением накапливаемой за период энергии. Согласно (4.125) и (4.126), максимум функции $\Phi(z) - \Phi(0)$, равный $\bar{\Phi} + (\,\Phi_c^2 + \Phi_s^2\,)^{1/2}$, достигается в момент времени

$$z = (\pi - \mathcal{H})\,/2\omega,$$

где

$$\mathcal{H} = arctg\left[\left(\hat{\sigma}'_{ij}\varepsilon^{\circ}_{ij} + \hat{E}'_j D^{\circ}_j - \frac{2}{\omega}D'_c\right)\Big/\left(\hat{\sigma}''_{ij}\varepsilon^{\circ}_{ij} + \hat{E}''_j D^{\circ}_j - \frac{2}{\omega}D'_s\right)\right].$$

Этот максимум достигается в момент $z = \pi/2\omega$ и совпадает с энергией $2\bar{\Phi}$ при условии $\mathcal{H} = 0$ или $D'_c = (\omega/2)(\hat{\sigma}'_{ij}\varepsilon^{\circ}_{ij} + \hat{E}'_j D^{\circ}_j) = \bar{D}'_{\text{эм}}$.

В качестве примера рассмотрим электровязкоупругий материал типа Кельвина-Фойгта [58]:

$$\begin{gathered}
\Phi = \Phi\big(\varepsilon_{ij}, D_k\big), \quad \Psi = \Psi\big(\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{D}_k\big), \\
\sigma_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}, \quad E_k = \frac{\partial\Phi}{\partial D_k} + \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{D}_k}, \\
D'_{\text{эм}} = \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{D}_k}\dot{D}_k.
\end{gathered} \tag{4.128}$$

Для линейной модели

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{2}\left(C^{(\varepsilon)}_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + 2C^{(D\varepsilon)}_{kij}D_k\varepsilon_{ij} + C^{(D)}_{ij}D_iD_j\right), \\
\Psi &= \frac{1}{2}\left(D^{(\varepsilon)}_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{kl} + 2D^{(D\varepsilon)}_{kij}\dot{D}_k\dot{\varepsilon}_{ij} + D^{(D)}_{ij}\dot{D}_i\dot{D}_j\right).
\end{aligned} \tag{4.129}$$

При электромеханическом процессе (4.121) будем иметь

$$\begin{aligned}
\bar{D}'_{\text{эм}} &= D'_c = \frac{\omega}{2}\left(\hat{\sigma}'_{ij}\varepsilon^{\circ}_{ij} + \hat{E}'_j D^{\circ}_j\right), \quad D'_s = 0, \\
\bar{\Phi} &= -\Phi_c = \frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}''_{ij}\varepsilon^{\circ}_{ij} + \hat{E}''_j D^{\circ}_j\right), \quad \Phi_s = 0.
\end{aligned} \tag{4.130}$$

Следовательно, для рассматриваемой модели максимум накапливаемой электромеханической энергии при простом (монофазном) гармоническом изменении величин $\varepsilon_{ij}(z), D_j(z)$ из нулевого состояния достигается в точности через четверть периода, причём этот максимум равен удвоенному среднему значению накапливаемой энергии.

В общем случае для средней за период электромеханической энергии в элементарном объёме тела при простой гармонической деформации и индукции электрического поля, согласно (4.125), (4.126) и (4.122), имеем

$$<\Phi>=\frac{1}{4}\left(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}+E'_jD'_j+\sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}+E''_jD''_j-\frac{2}{\omega}D'_s+4\Phi(0)\right). \qquad (4.131)$$

Отметим, что величина $4\Phi(0)-2\omega^{-1}D'_s$ не определяется с помощью чисто электромеханических экспериментов, а может быть оценена лишь посредством тонких термо- и калориметрических измерений [77]. Кроме того, эта величина пренебрежимо мала по сравнению с остальной частью выражения (4.131), в частности для рассмотренной выше модели пьезоматериала типа Кельвина-Фойгта она равна нулю. Поэтому, чтобы определить характеристику накопления энергии в терминах полностью электромеханически детерминированных и измеряемых величин, следует слагаемое $4\Phi(0)-2\omega^{-1}D'_s$ в (4.131) отбросить. В результате приходим к электромеханически определимой и в общем случае приближённой оценке средней за период электромеханической энергии

$$<\Phi>=\frac{1}{4}\left(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}+E'_jD'_j+\sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}+E''_jD''_j\right), \qquad (4.132)$$

которая может использоваться при произвольных (не обязательно простых) гармонических деформациях и индукции электрического поля

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(t)&=\varepsilon^{\circ}_{ij}\cos\left(\omega t+\varphi^{\varepsilon}_{ij}\right)=\varepsilon'_{ij}\cos\omega t-\varepsilon''_{ij}\sin\omega t,\\ D_j(t)&=D^{\circ}_j\cos\left(\omega t+\varphi^{\varepsilon}_j\right)=D'_j\cos\omega t-D''_j\sin\omega t.\end{aligned} \qquad (4.133)$$

Рассмотрим для процесса (4.133) и (4.120) функцию

$$\bar U_{эм}=<\sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t)+E_j(t)D_j(t)>,\quad <(\cdot)>=\frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}(\cdot)dt, \qquad (4.134)$$

которую в ряде работ формально связывают с накоплением электромеханической энергии. Энергетическое содержание функции (4.134) или

$$\bar U_{эм}=\frac{1}{2}\left(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}+E'_jD'_j+\sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}+E''_jD''_j\right) \qquad (4.135)$$

в некоторой мере раскрывается соотношениями (4.131) и (4.132). В последующих параграфах выражение (4.135) будет использоваться для оценки (вообще говоря, приближённой) удвоенной средней за период электромеханической энергии в элементарном объёме пьезоэлектрического тела.

С учетом линейных амплитудных уравнений (1.197) выражение для (4.135) можно записать в виде

$$\bar{U}_{эм} = \frac{1}{2}\Big[C^{D'}_{ijkl}\left(\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}\right) + 2h'_{kij}\left(\varepsilon'_{ij}D'_k + \varepsilon''_{ij}D''_k\right) + \\ + \beta^{\varepsilon'}_{ij}\left(D'_iD'_j + D''_iD''_j\right)\Big]. \tag{4.136}$$

Отметим, что положительность функции $\bar{U}_{эм}$ не следует из термодинамики и в общем случае должна постулироваться дополнительно. При этом требование о выполнении неравенства $\bar{U}_{эм} = \left\langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + E_jD_j \right\rangle \geq 0$ даёт физически содержательные ограничения на консервативные характеристики материала $C^{D'}_{ijkl}$, h'_{kij}, $\beta^{\varepsilon'}_{ij}$. Действительно, потребовав неотрицательности выражения (4.136) для величин ε_{ij} и D_k, имеющих фазу 0 или π, приходим к тем же ограничениям на характеристики, что и в теории электроупругости.

Выражение для $\bar{U}_{эм}$ можно записать в терминах других наборов независимых переменных, например, с учетом линейных амплитудных уравнений (1.200) получаем

$$\bar{U}_{эм} = \frac{1}{2}\Big[C^{E'}_{ijkl}\left(\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}\right) + 2e''_{kij}\left(\varepsilon'_{ij}E''_k - \varepsilon''_{ij}E'_k\right) + \\ + \mu^{\varepsilon'}_{ij}\left(E'_iE'_j + E''_iE''_j\right)\Big]. \tag{4.137}$$

Расчёты колебаний линейных вязкоупругих пьезоэлектрических тел [60, 71, 79, 104, 121 и др.] показывают, что слагаемое $2e''_{kij}\left(\varepsilon'_{ij}E''_k - \varepsilon''_{ij}E'_k\right)$ в выражении (4.137) независимо от способов и частоты возбуждения колебаний на несколько порядков меньше остальных слагаемых в этом выражении и поэтому при вычислении величины $\bar{U}_{эм}$ по формуле (4.137) может быть отброшено.

Все проведенные выше рассуждения относились к случаю линейного пьезоэлектрического материала. Рассмотрим теперь физически нелинейный вязкоупругий пьезоэлектрический материал, для которого деформация $\varepsilon_{ij}(z) = \varepsilon^{\circ}_{ij} sin\omega z$ и индукция электрического поля $D_j(z) =$

$= D_j^\circ sin\omega z$ возбуждают кратные гармоники в реакциях механических напряжений, напряженности электрического поля и скорости диссипации [105]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(z) &= \sum_{n=1,3,5,\ldots} \left(\hat{\sigma}_{ij}^{(n)'} cosn\omega z + \hat{\sigma}_{ij}^{(n)''} sinn\omega z\right), \\
E_j(z) &= \sum_{n=1,3,5,\ldots} \left(\hat{E}_j^{(n)'} cosn\omega z + \hat{E}_j^{(n)''} sinn\omega z\right), \\
D'_{\text{эм}} &= \bar{D}_{\text{эм}} + \sum_{n=2,4,6,\ldots} \left(D_c^{(n)'} cosn\omega z + D_s^{(n)'} sinn\omega z\right).
\end{aligned} \tag{4.138}$$

Подставляя (4.138) в равенство (4.123) и интегрируя последнее от 0 до z, а также учитывая условие периодичности $\Phi(2\pi/\omega) = \Phi(0)$, после необходимых преобразований получаем следующее выражение для свободной энергии

$$\Phi(z) - \Phi(0) = \sum_{n=2,4,6,\ldots} \left[\Phi_c^{(n)}(1 - cosn\omega z) + \Phi_s^{(n)} sinn\omega z\right], \tag{4.139}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_c^{(n)} = \frac{1}{2n} \Bigg[&\left(\hat{\sigma}_{ij}^{(n-1)''} + \hat{\sigma}_{ij}^{(n+1)''}\right) \varepsilon_{ij}^\circ + \\
&+ \left(\hat{E}_j^{(n-1)''} + \hat{E}_j^{(n+1)''}\right) D_j^\circ - \frac{2D_s^{(n)'}}{\omega} \Bigg],
\end{aligned} \tag{4.140}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_s^{(n)} = \frac{1}{2n} \Bigg[&\left(\hat{\sigma}_{ij}^{(n-1)'} + \hat{\sigma}_{ij}^{(n+1)'}\right) \varepsilon_{ij}^\circ + \\
&+ \left(\hat{E}_j^{(n-1)'} + \hat{E}_j^{(n+1)'}\right) D_j^\circ - \frac{2D_c^{(n)'}}{\omega} \Bigg], \quad n = 2, 4, 6\ldots .
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Для средней за период скорости диссипации имеем

$$\bar{D}'_{\text{эм}} = \frac{\omega}{2} \left(\hat{\sigma}_{ij}^{(1)'} \varepsilon_{ij}^\circ + \hat{E}_j^{(1)'} D_j^\circ\right). \tag{4.142}$$

Согласно (4.142) амплитуды высших гармоник механических напряжений и напряженности электрического поля в среднем за период не дают вклада в диссипацию. Однако они не исчезают из выражения для средней за период накапливаемой энергии, которое, согласно (4.139) и (4.140), имеет вид

$$
\begin{gathered}
<\Phi(z)-\Phi(0)>=\sum_{n=2,4,6,\ldots}\frac{1}{2n}\left[\left(\hat{\sigma}_{ij}^{(n-1)''}+\hat{\sigma}_{ij}^{(n+1)''}\right)\varepsilon_{ij}^{\circ}+\right.\\
\left.+\left(\hat{E}_{j}^{(n-1)''}+\hat{E}_{j}^{(n+1)''}\right)D_{j}^{\circ}-\frac{2D_{s}^{(n)'}}{\omega}\right].
\end{gathered}
\tag{4.143}
$$

Как и в линейной теории, электромеханически определимое приближение для средней за период электромеханической энергии получается отбрасыванием в (4.143) величин $\Phi(0)$ и $2D_s^{(n)'}/\omega$:

$$
\begin{gathered}
<\Phi>=\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{2(n+1)}\left[\left(\hat{\sigma}_{ij}^{(n)''}+\hat{\sigma}_{ij}^{(n+2)''}\right)\varepsilon_{ij}^{\circ}+\right.\\
\left.+\left(\hat{E}_{j}^{(n)''}+\hat{E}_{j}^{(n+2)''}\right)D_{j}^{\circ}\right].
\end{gathered}
\tag{4.144}
$$

Аппроксимация, учитывающая лишь амплитуды механических напряжений и напряженности электрического поля на частоте возбуждения, имеет вид

$$<\Phi>=\frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_{ij}^{(1)''}\varepsilon_{ij}^{\circ}+\hat{E}_{j}^{(1)''}D_{j}^{\circ}\right) \tag{4.145}$$

или

$$<\Phi>=\frac{1}{4}\left(\sigma_{ij}^{(1)'}\varepsilon'_{ij}+E_{j}^{(1)'}D_{j}'+\sigma_{ij}^{(1)''}\varepsilon''_{ij}+E_{j}^{(1)''}D_{j}''\right). \tag{4.146}$$

Выражение (4.146) по виду полностью совпадает с выражением (4.132) линейной теории.

Как и в линейном случае, рассмотрим на изотермических историях (4.133) функцию (4.134). Подобно средней за период скорости диссипации она не содержит амплитуд высших гармоник и по виду совпадает с (4.135):

$$\bar{U}_{\text{эм}}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^{(1)'}\varepsilon'_{ij}+E_{j}^{(1)'}D_{j}'+\sigma_{ij}^{(1)''}\varepsilon''_{ij}+E_{j}^{(1)''}D_{j}''\right). \tag{4.147}$$

Сравнение (4.147) с (4.146) и (4.144) показывает, что использование функции $\bar{U}_{\text{эм}}$ (4.134) в качестве характеристики накопления электромеханической энергии в случае физически нелинейного вязкоупругого пьезоэлектрического материала оправдано только тогда, когда реакция материала на гармоническое электромеханическое воздействие допускает моногармоническое приближение и, следовательно, описывается амплитудными определяющими уравнениями предыдущей главы. С учетом этих уравнений функцию $\bar{U}_{\text{эм}}$ (4.147) можно записать в виде (4.136) или (4.137), но с амплитуднофазозависимыми коэффициентами. Последние, как и в линейной теории, являются также функциями частоты и, в общем случае, температуры.

§ 7. Нахождение КЭМС при расчетах колебаний пьезоэлектрических тел с учетом потерь в материале

Обратимся к колебаниям пьезоэлектрического тела, имеющим вид

$$f = \{\varepsilon_{ij},\, E_j, \sigma_{ij},\, D_j\} = f'(\vec{x})cos\omega t - f''(\vec{x})sin\omega t \tag{4.148}$$

и воспользуемся для оценки (в общем случае, приближённой) удвоенной средней за период колебаний электромеханической энергии в элементарном объёме тела величиной $\bar{U}_{\text{эм}}$ (4.135). Для соответствующей энергии в полном объёме тела будем иметь

$$U_{\text{т}} = \int\limits_V \bar{U}_{\text{эм}} dV. \tag{4.149}$$

Очевидно, что для более простого случая – задачи электростатики при учете диэлектрических потерь в качестве характеристики удвоенной средней за период электрической энергии в объёме тела согласно (4.134) может использоваться величина

$$\begin{aligned} U_{\text{т}} = \int\limits_V < E_j D_j > dV = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(E'_j D'_j + E''_j D''_j\right) dV = \\ = \frac{1}{2} Re \int\limits_V \tilde{E}_j \bar{\tilde{D}}_j dV. \end{aligned} \tag{4.150}$$

Используя уравнения электростатики из (1.172) и формулу Гаусса-Остроградского, преобразуем (4.150) к виду

$$U_{\text{т}} = \frac{1}{2}\left(\Delta\varphi' Q_1' + \Delta\varphi'' Q_1''\right) = < \Delta\varphi Q_1 > = \frac{1}{2} Re\left(\Delta\tilde{\varphi}\bar{\tilde{Q}}_1\right), \qquad (4.151)$$

где

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi' cos\omega t - \Delta\varphi'' sin\omega t, \quad Q_1 = Q_1' cos\omega t - Q_1'' sin\omega t \qquad (4.152)$$

– разность потенциалов на электродах и заряд электрода, а

$$\Delta\tilde{\varphi} = \Delta\varphi' + i\Delta\varphi'', \quad \tilde{Q}_1 = Q_1' + iQ_1'' \qquad (4.153)$$

– их комплексные амплитуды. Если ввести комплексную ёмкость [81]

$$\tilde{C}_\varepsilon = C_\varepsilon' + iC_\varepsilon'' = \tilde{Q}_1/\Delta\tilde{\varphi}, \qquad (4.154)$$

то выражение для энергии (4.151) примет вид

$$U_{\text{т}} = \frac{1}{2} C_\varepsilon' \left[(\Delta\varphi')^2 + (\Delta\varphi'')^2\right] = \frac{1}{2} C_\varepsilon' |\Delta\tilde{\varphi}|^2 \qquad (4.155)$$

или

$$U_{\text{т}} = \frac{1}{2}\frac{C_\varepsilon'}{C_\varepsilon'^2 + C_\varepsilon''^2}\left(Q_1'^2 + Q_1''^2\right) = \frac{1}{2}\frac{C_\varepsilon'}{|\tilde{C}_\varepsilon|^2}|\tilde{Q}_1|^2. \qquad (4.156)$$

Комплексная ёмкость $\tilde{C}_\varepsilon$ может быть найдена путём решения задачи электростатики (4.16), где все величины следует считать комплексными.

Обратимся теперь к соотношениям (4.29) и перепишем второе из них в виде

$$k^2 = \frac{U_{\text{т}}^Q}{U_{\text{т}} - U_{\text{т}}^\varphi}, \qquad (4.157)$$

где $U_{\text{т}}$ – как и раньше, удвоенная средняя за период внутренняя электромеханическая энергия (4.29) в объёме пьезоэлектрического тела, а величины

$$U_{\text{т}}^\varphi = \frac{1}{2} C_\varepsilon \left(\Delta\hat{\varphi}\right)^2, \quad U_{\text{т}}^Q = \frac{1}{2}\left(\hat{Q}_1 - C_\varepsilon\Delta\hat{\varphi}\right)^2 C_\varepsilon^{-1} \qquad (4.158)$$

могут рассматриваться как удвоенные средние за период электрические энергии в объёме тела на нулевых деформациях, причём в первом случае – при заданном на электродах электрическом напряжении $\Delta\hat{\varphi}$, а во втором – при заданном на электроде электрическом заряде $\hat{Q}_1 - C_\varepsilon \Delta\hat{\varphi}$. Заметим, что величина $\hat{Q}_1 - C_\varepsilon \Delta\hat{\varphi}$ представляет собой разность между зарядом на электроде из основной задачи и зарядом, который возникал бы на электроде при том же напряжении $\Delta\hat{\varphi}$, но на нулевых деформациях. Заряды $C_\varepsilon \Delta\hat{\varphi}$ и $\hat{Q}_1 - C_\varepsilon \Delta\hat{\varphi}$ можно трактовать соответственно как свободный и связанный заряд электрода, а энергии $U_{\text{т}}^{\varphi}$ и $U_{\text{т}}^{Q}$ – как энергии свободного и связанного заряда.

Перейдём к колебаниям вида (4.148). Предположим, что из решения задачи электростатики известна комплексная ёмкость $\tilde{C}_\varepsilon = C'_\varepsilon + iC''_\varepsilon$, а из решения основной задачи электровязкоупругости – комплексные амплитуды электрического напряжения на электродах $\Delta\tilde{\varphi} = \Delta\varphi' + i\Delta\varphi''$, заряда электрода $\tilde{Q}_1 = Q'_1 + iQ''_1$ и характеризующая электромеханическую энергию величина $U_{\text{т}}$ (4.149). Действительные величины электрического напряжения и заряда имеют вид (4.152). Удвоенная средняя за период колебаний внутренняя электрическая энергия в объёме тела на нулевых деформациях в случае приложения к электродам напряжения $\Delta\tilde{\varphi}$, согласно (4.155), равна

$$U_{\text{т}}^{\varphi} = \frac{1}{2} C'_\varepsilon |\Delta\tilde{\varphi}|^2. \tag{4.159}$$

При этом на электроде возникает электрический заряд

$$q = q' cos\omega t - q'' sin\omega t \tag{4.160}$$

с комплексной амплитудой $\tilde{q} = \tilde{C}_\varepsilon \Delta\tilde{\varphi}$. Определим заряд

$$Q = Q_1 - q = (Q'_1 - q') cos\omega t - (Q''_1 - q'') sin\omega t \tag{4.161}$$

с комплексной амплитудой

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}_1 - \tilde{C}_\varepsilon \Delta\tilde{\varphi}. \tag{4.162}$$

Для удвоенной средней за период электрической энергии в объёме тела на нулевых деформациях и при заданном на электроде заряде (4.162), согласно (4.156), имеем

$$U_{\text{т}}^{Q} = \frac{1}{2} \frac{C'_\varepsilon}{|\tilde{C}_\varepsilon|^2} \left| \tilde{Q}_1 - \tilde{C}_\varepsilon \Delta\tilde{\varphi} \right|^2. \tag{4.163}$$

Подставляя (4.163), (4.159) в (4.157), получаем следующее обобщение формул (4.29) на случай колебаний неупругих тел с пьезоэффектом [113]:

$$k_э^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \qquad k^2 = \frac{\left|\tilde{Q}_1 - \tilde{C}_\varepsilon \Delta\tilde{\varphi}\right|^2}{2U_т - C'_\varepsilon \left|\Delta\tilde{\varphi}\right|^2} \cdot \frac{C'_\varepsilon}{|\tilde{C}_\varepsilon|^2},$$

$$U_т = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + E'_j D'_j + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_j D''_j\right) dV = \tag{4.164}$$

$$= \frac{1}{2} Re \int\limits_V \left(\tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \tilde{E}_j \bar{\tilde{D}}_j\right) dV,$$

где

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij}, \ \ \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}, \ \ \tilde{E}_j = E'_j + iE''_j, \ \ \tilde{D}_j = D'_j + iD''_j.$$

Если потери малы и величиной $\left(\dfrac{C''_\varepsilon}{C'_\varepsilon}\right)^2$ в выражении

$$\left|\tilde{C}_\varepsilon\right|^2 = C'^2_\varepsilon \left[1 + \left(\frac{C''_\varepsilon}{C'_\varepsilon}\right)^2\right]$$

по сравнению с единицей можно пренебречь, соотношения (4.164) преобразуются к виду

$$k_э^2 = \frac{k^2}{1+k^2},$$

$$k^2 = \frac{\left[(Q'_1 - C_\varepsilon\Delta\varphi')^2 + (Q''_1 - C_\varepsilon\Delta\varphi'')^2\right] C_\varepsilon^{-1}}{2U - C_\varepsilon\left[(\Delta\varphi')^2 + (\Delta\varphi'')^2\right]}, \quad C_\varepsilon = C'_\varepsilon. \tag{4.165}$$

Отметим, что второе из соотношений (4.165) может быть получено формально путём усреднения за период числителя и знаменателя второго из соотношений (4.25), если в последнем формулу для энергии записать в виде

$$U_т = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + E_j D_j\right) dV \tag{4.166}$$

и положить

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = Q_1' cos\omega t - Q_1'' sin\omega t, \quad \Delta\varphi = \Delta\varphi' cos\omega t - \Delta\varphi'' sin\omega t,\\
&\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{'} cos\omega t - \varepsilon_{ij}^{''} sin\omega t, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{'} cos\omega t - \sigma_{ij}^{''} sin\omega t, \qquad (4.167)\\
&E_j = E_j' cos\omega t - E_j'' sin\omega t, \quad D_j = D_j' cos\omega t - D_j'' sin\omega t.
\end{aligned}
$$

Как и в электроупругости, выражения для КЭМС в некоторых частных случаях могут упрощаться. Так, при работе пьезоэлемента в режиме “приёма” по напряжению ($\tilde{Q}_1 = 0$) можно записать

$$
k_э^2 = \frac{C_\varepsilon' \left[(\Delta\varphi')^2 + (\Delta\varphi'')^2 \right]}{2U}. \qquad (4.168)
$$

Подобно электроупругому соотношению (4.26) при нахождении комплексной амплитуды электрического заряда $\tilde{Q}_1$ (или напряжения $\Delta\tilde{\varphi}$) можно использовать формулу

$$
\tilde{Q}_1 \Delta\tilde{\varphi} = \int\limits_V \left(\tilde{\mu}_{ij}^{\varepsilon} \tilde{\varphi}_{,i} \tilde{\varphi}_{,j} - \tilde{e}_{ijk} \tilde{\varphi}_{,i} \tilde{\varepsilon}_{jk} \right) dV, \qquad (4.169)
$$

для доказательства которой необходимо воспользоваться уравнениями электростатики в комплексной форме (1.185), определяющими уравнениями в виде (1.200) и формулой Гаусса-Остроградского.

Расчёты колебаний [62, 72, 98, 112 и др.] пьезокерамических тел различной формы и размеров с известными в литературе [136, 171] вязкоупругими свойствами материала показали, что значения КЭМС, вычисляемые по формулам (4.164) или (4.165), с точностью до 2-3 знаков совпадают с соответствующими электроупругими значениями КЭМС, вычисляемыми по формулам (4.29). Это совпадение характерно как для резонансных так и нерезонансных частот колебаний. Исключение составляют пьезоэлектрически очень слабые резонансные частоты, для которых ширина пьезоактивного участка $\omega_a - \omega_p$ соизмерима с “размазыванием” резонансной области вследствие вязкоупругих свойств материала, а также частоты, на которых электроупругий КЭМС обращается в нуль [27]. Для первых из указанных частот формулы (4.164) или (4.165) дают бóльшие по сравнению с формулой (4.29) значения КЭМС, а для вторых – хотя и очень малые, но отличные от нуля значения

КЭМС. При этом указанные различия качественную картину зависимости КЭМС от частоты не меняют.

В качестве **примера** найдём КЭМС для продольных колебаний вязкоупругого пьезоэлектрического стержня, возбуждаемого электрическим полем, перпендикулярным к его длине. Для этого воспользуемся решением задачи, приведенным, например, в [58]:

$$\tilde{\varepsilon}_x = -\frac{\Delta\tilde{\varphi}\tilde{d}_{31}}{h} \cdot \frac{cos\tilde{\eta}x}{cos\tilde{\mathcal{H}}}; \quad \tilde{\sigma}_x = \frac{\tilde{d}_{31}}{\tilde{S}^E_{11}} \frac{\Delta\tilde{\varphi}}{h} \left(1 - \frac{cos\tilde{\eta}x}{cos\tilde{\mathcal{H}}}\right);$$

$$\tilde{E}_z = -\frac{\Delta\tilde{\varphi}}{h}; \quad \tilde{D}_z = -\frac{\Delta\tilde{\varphi}}{h}\tilde{\mu}^\sigma_{33}\left[1 - \tilde{k}^2_{31}\left(1 - \frac{cos\tilde{\eta}x}{cos\tilde{\mathcal{H}}}\right)\right];$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\tilde{\eta}l}{2}; \tag{4.170}$$

$$\tilde{\eta}^2 = \rho\omega^2\tilde{S}^E_{11}; \quad \tilde{k}^2_{31} = \frac{\tilde{d}^2_{31}}{\tilde{S}^E_{11}\tilde{\mu}^\sigma_{33}}; \quad \tilde{S}^E_{11} = S^E_{11}\left(1 - i\delta^S_{11}\right);$$

$$\tilde{d}_{31} = d_{31}\left(1 - i\delta^d_{31}\right); \quad \tilde{\mu}^\sigma_{33} = \mu^\sigma_{33}\left(1 - i\delta^\mu_{33}\right); \quad -\frac{l}{2} \le x \le \frac{l}{2}.$$

Здесь l – длина, а h – толщина стержня, $\Delta\tilde{\varphi}$ – электрическое напряжение на электродах, покрывающих грани $z = \pm h/2$; S^E_{11}, d_{31}, μ^σ_{33} – "упругоподобные" характеристики материала; δ^S_{11}, δ^d_{31}, δ^μ_{33} – тангенсы углов потерь. В дальнейшем квадратами и произведениями тангенсов углов потерь по сравнению с единицей пренебрегаем. Поэтому можно записать

$$\begin{gathered} \tilde{k}^2_{31} = k'^2_{31}\left[1 + i\left(\delta^S_{11} - 2\delta^d_{31} + \delta^\mu_{33}\right)\right], \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}'\left(1 - i\frac{\delta^s_{11}}{2}\right), \\ \mathcal{H}' = \frac{\omega l}{2}\sqrt{\rho S^E_{11}}, \quad \tilde{\eta} = \frac{2\mathcal{H}'}{l}\left(1 - i\frac{\delta^s_{11}}{2}\right), \; k'^2_{31} = \frac{d^2_{31}}{S^E_{11}\mu^\sigma_{33}}, \end{gathered} \tag{4.171}$$

где k'^2_{31} – поперечный коэффициент электромеханической связи материала. Для заряда $\tilde{Q}_1 = -b\int\limits_{-l/2}^{l/2}\tilde{D}_z(x)dx$, где b – ширина стержня, после некоторых преобразований получаем

$$\tilde{Q}_1 = \Delta\tilde{\varphi}\frac{bl}{h}\mu_{33}^{\sigma}\Bigg[1 - k_{31}^{'2} - i\left(\delta_{33}^{\mu} + k_{31}^{'2}\big[\delta_{11}^{S} - 2\delta_{31}^{d}\big]\right) + \\ + k_{31}^{'2}\left(1 + i\left[\frac{3}{2}\delta_{11}^{S} - 2\delta_{31}^{d}\right]\right)\frac{sin2\mathcal{H}' - ish(\mathcal{H}'\delta_{11}^{s})}{\mathcal{H}'\left(cos2\mathcal{H}' + ch(\mathcal{H}'\delta_{11}^{s})\right)}\Bigg]. \tag{4.172}$$

Комплексную ёмкость $\tilde{C}_{\varepsilon} = \tilde{\mu}_{33}^{\varepsilon}\, bl/h$ с учетом равенства

$$\tilde{\mu}_{33}^{\varepsilon} = \tilde{\mu}_{33}^{\sigma}\left(1 - \tilde{k}_{31}^{2}\right)$$

можно представить в виде

$$\tilde{C}_{\varepsilon} = C'_{\varepsilon} + iC''_{\varepsilon}\frac{bl}{h}\mu_{33}^{\sigma}\left[1 - k_{31}^{'2} - i\left(\delta_{33}^{\mu} + k_{31}^{'2}[\delta_{11}^{S} - 2\delta_{31}^{d}]\right)\right]. \tag{4.173}$$

Найдем величину

$$2U_{\text{т}} = Re\int\limits_{V}\left(\tilde{\sigma}_x\bar{\tilde{\varepsilon}}_x + \tilde{E}_z\bar{\tilde{D}}_z\right)dV = bhRe\int\limits_{-l/2}^{l/2}\left(\tilde{\sigma}_x\bar{\tilde{\varepsilon}}_x + \tilde{E}_z\bar{\tilde{D}}_z\right)dx.$$

После необходимых преобразований получаем

$$2U_{\text{т}} = \frac{bl}{h}\mu_{33}^{\sigma}\left[k_{31}^{'2}\frac{\dfrac{sin2\mathcal{H}'}{2\mathcal{H}'} + \dfrac{sh(\mathcal{H}'\delta_{11}^{s})}{\mathcal{H}'\delta_{11}^{s}}}{cos2\mathcal{H}' + ch(\mathcal{H}'\delta_{11}^{s})} + 1 - k_{31}^{'2}\right]|\Delta\tilde{\varphi}|^2. \tag{4.174}$$

Подставляя (4.172) – (4.174) в (4.164) и выполняя элементарные преобразования, приходим к искомым соотношениям для КЭМС

$$k_{\text{э}}^2 = \frac{k^2}{1 + k^2},\quad k^2 = \frac{k_{31}^{'2}}{1 - k_{31}^{'2}}\cdot\frac{2sin^2\mathcal{H}' + 2sh^2\left(\mathcal{H}'\delta_{11}^{S}/2\right)}{\mathcal{H}'^2\left(\dfrac{sh(\mathcal{H}'\delta_{11}^{S})}{\mathcal{H}'\delta_{11}^{S}} + \dfrac{sin2\mathcal{H}'}{2\mathcal{H}'}\right)}. \tag{4.175}$$

Поскольку для разумных значений $\mathcal{H}'$ величина $\mathcal{H}'\overset{S}{\delta}_{11}$ остаётся малой, представим для бóльшей наглядности соотношения (4.175) в виде

$$k_э^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \quad k^2 = \frac{k_{31}^{'2}}{1-k_{31}^{'2}} \cdot \frac{\dfrac{2sin^2\mathcal{H}'}{\mathcal{H}'^2} + \dfrac{(\overset{S}{\delta}_{11})^2}{2}}{1+\dfrac{sin2\mathcal{H}'}{2\mathcal{H}'}}. \tag{4.176}$$

При $\overset{S}{\delta}_{11} = 0$ из (4.175) или (4.176) получаем соотношения для электроупругого КЭМС

$$k_э^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \quad k^2 = \frac{k_{31}^{'2}}{1-k_{31}^{'2}} \cdot \frac{2\dfrac{sin^2\mathcal{H}'}{\mathcal{H}'^2}}{1+\dfrac{sin2\mathcal{H}'}{2\mathcal{H}'}}, \tag{4.177}$$

которые также можно получить независимо, используя формулы (4.29) для электроупругой постановки задачи.

Рассмотренный пример демонстрирует отмеченное выше совпадение электровязкоупругого и электроупругого КЭМС, поскольку добавка $\dfrac{(\overset{S}{\delta}_{11})^2}{2}$ в числителе (4.176) является несущественной и может быть отброшена. Та роль, которую играет эта добавка при очень малом или даже нулевом первом слагаемом в числителе (4.176), с практической точки зрения интереса не представляет.

В заключение отметим, что малость потерь является не единственной и даже не основной причиной, по которой значения КЭМС, вычисляемые по формулам (4.29) и (4.164), практически совпадают. Слабая реакция КЭМС на потери в материале обусловлена в первую очередь самой структурой формулы (4.164) или (4.157) и является специфической особенностью КЭМС как характеристики энергопреобразования.

§ 8. Определение коэффициента затухания электромеханических колебаний и его связь с другими интегральными характеристиками

Наличие различного рода потерь, а также амплитуднофазовая зависимость коэффициентов, описывающих эти потери, значительно усложняют количественный анализ диссипации энергии при колебаниях пьезоэлектрических тел. При введении универсальной количественной характеристики диссипативных свойств основная проблема возникает с выбором меры накопления электромеханической энергии. Некоторые аспекты этой проблемы рассмотрены в §6.

Универсальная характеристика внутренней диссипации в материалах (без пьезоэффекта) и элементах конструкций предложена и энергетически обоснована в работе [150]: для моногармонической деформации $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} cos\omega t - \varepsilon''_{ij} sin\omega t$ и соответствующей реакции напряжений $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} cos\omega t - \sigma''_{ij} sin\omega t$ в качестве относительной меры потерь в элементарном объёме материала предлагается использовать величину

$$\psi = 2\pi \left(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}\right) / \left(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}\right), \tag{4.178}$$

в которой диссипация энергии характеризуется точно, а накопление, в общем случае – приближённо [150]. Важной особенностью характеристики (4.178) является её определимость через механически измеряемые величины.

Обобщение соотношения (4.178) на случай гармонических колебаний вязкоупругих пьезоэлектрических тел дано в работе [105]. Рассмотрим изотермические электромеханические колебания вида (4.148) и определим коэффициент затухания этих колебаний как отношение энергии

$$\bar{D}'_{эм}\frac{2\pi}{\omega} = \pi \left(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_j D'_j - E'_j D''_j\right), \tag{4.179}$$

диссипированной в элементарном объёме тела за период колебаний, к удвоенному среднему за период значению накапливаемой энергии, для оценки которого (вообще говоря, приближённой) воспользуемся соотношением (4.135)

$$\bar{U}_{эм} = \frac{1}{2}\left(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + E'_j D'_j + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_j D''_j\right). \tag{4.180}$$

В результате будем иметь

$$\psi = 2\pi \frac{\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_j D'_j - E'_j D''_j}{\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + E'_j D'_j + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_j D''_j}. \tag{4.181}$$

Введенный согласно (4.181) коэффициент затухания электромеханических колебаний (КЗЭМК) может использоваться при произвольном напряженно-деформированном и электрическом состоянии в резонансном и нерезонансном режимах колебаний. Используя амплитудные определяющие уравнения, КЗЭМК можно представить в терминах независимых переменных, например ε_{ij} и D_k:

$$\psi = 2\pi \frac{C^{D''}_{ijkl}(\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}) + 2h''_{kij}(\varepsilon'_{ij}D'_k + \varepsilon''_{ij}D''_k) + \beta^{\varepsilon''}_{ij}(D'_iD'_j + D''_iD''_j)}{C^{D'}_{ijkl}(\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}) + 2h'_{kij}(\varepsilon'_{ij}D'_k + \varepsilon''_{ij}D''_k) + \beta^{\varepsilon'}_{ij}(D'_iD'_j + D''_iD''_j)}. \tag{4.182}$$

КЗЭМК для полного объёма тела V определим как отношение энергии, диссипированной в V за период колебаний, к удвоенному среднему за период значению накапливаемой энергии в V:

$$\psi_V = 2\pi \frac{\int\limits_V \left(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_jD'_j - E'_jD''_j\right) dV}{\int\limits_V \left(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + E'_jD'_j + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_jD''_j\right) dV}. \tag{4.183}$$

Согласно изложенному в § 6 соотношения (4.181), (4.182) и (4.183) могут использоваться и в случае физически нелинейного пьезоэлектрического материала, допускающего моногармоническое приближение реакций на гармоническое воздействие. При этом в (4.182) все коэффициенты являются функциями набора переменных (2.21). КЗЭМК можно записать через комплексные амплитуды:

$$\psi = 2\pi Im\left(\tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \tilde{E}_j\bar{\tilde{D}}_j\right) / Re\left(\tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \tilde{E}_j\bar{\tilde{D}}_j\right), \tag{4.184}$$

$$\psi_V = 2\pi Im \int\limits_V \left(\tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \tilde{E}_j\bar{\tilde{D}}_j\right) dV / Re \int\limits_V \left(\tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \tilde{E}_j\bar{\tilde{D}}_j\right) dV. \tag{4.185}$$

Обратимся к **примеру** из предыдущего параграфа и запишем выражение для величины

$$Im \int\limits_V \left(\tilde{\sigma}_x\bar{\tilde{\varepsilon}}_x + \tilde{E}_z\bar{\tilde{D}}_z\right) dV = bhIm \int\limits_{-l/2}^{l/2} \left(\tilde{\sigma}_x\bar{\tilde{\varepsilon}}_x + \tilde{E}_z\bar{\tilde{D}}_z\right) dx = \frac{\omega}{2} D_{\text{т}} :$$

$$\frac{\omega}{2}D_{\text{т}} = \frac{bl}{h}\mu_{33}^{\sigma}\left[k_{31}^{'2}\frac{\dfrac{sh(\mathcal{H}'\delta_{11}^{s})}{\mathcal{H}'\delta_{11}^{s}}\delta_{11}^{s} - \dfrac{sin2\mathcal{H}'}{2\mathcal{H}'}(3\delta_{11}^{s} - 4\delta_{31}^{d})}{cos2\mathcal{H}' + ch\mathcal{H}'\delta_{11}^{s}} + \right. \\ \left. + k_{31}^{'2}\left(\delta_{11}^{s} - 2\delta_{31}^{d}\right) + \delta_{33}^{\mu}\right]|\Delta\tilde{\varphi}|^{2}. \tag{4.186}$$

Подставив (4.174) и (4.186) в (4.185), можно получить формулу для КЗЭМК ψ_V. Для случая колебаний стержня на резонансной $\left(\mathcal{H}'_p = \pi/2\right)$ и антирезонансной $\left(tg\mathcal{H}'_a = -\dfrac{\mathcal{H}'_a(1 - k_{31}^{'2})}{k_{31}^{'2}}\right)$ [58] частотах эта формула даёт приближенные соотношения

$$\psi_V^{(p)} = 2\pi\delta_{11}^{S}; \ \psi_V^{(a)} = \psi_V^{(p)} + 2\pi\frac{k_{\text{э}}^{(a)^2}}{1 - k_{31}^{'2}}\left(\delta_{11}^{S} - 2\delta_{31}^{d} + \delta_{33}^{\mu}\right), \tag{4.187}$$

где $k_{\text{э}}^{(a)^2}$ – КЭМС на антирезонансной частоте, вычисляемый согласно (4.177):

$$k_{\text{э}}^{(a)^2} = 2k_1^{'2} / \left(\mathcal{H}_a^{'2} + k_1^{'2} + k_1^{'4}\right), \quad k_1^{'2} = \frac{k_{31}^{'2}}{1 - k_{31}^{'2}}. \tag{4.188}$$

Заметим, что $k_{\text{э}}^{(a)^2}$, как и безразмерная частота антирезонанса $\mathcal{H}'_a$, является характеристикой материала. Соотношения (4.187) свидетельствуют, что уровни затухания электромеханических колебаний на резонансных и антирезонансных частотах различны.

При квазистатических колебаниях стержня КЗЭМК, согласно (4.185), (4.174) и (4.186), определяется преимущественно тангенсом угла диэлектрических потерь:

$$\psi_V = 2\pi\delta_{33}^{\mu}. \tag{4.189}$$

Аналогичным образом можно получить простые соотношения для ψ_V на примере других простейших одномерных задач электровязкоупругости, рассмотренных, например, в работе [58].

Введенный выше КЗЭМК определенными соотношениями связывается с другими интегральными характеристиками колебаний пьезоэлектрических тел. В качестве **примера** получим соотношение, выражающее КЗЭМК через проводимость пьезоэлемента при электрическом возбуждении колебаний. Введём комплексную проводимость $\tilde{Y}$ с помощью равенства

$$\tilde{Q}_1 = -i\tilde{Y}\Delta\tilde{\varphi}/\omega, \tag{4.190}$$

где $\tilde{Q}_1$ и $\Delta\tilde{\varphi}$ – комплексные амплитуды электрического заряда и напряжения на электродах. Используя определение КЗЭМК ψ_V, для удвоенной средней за период внутренней энергии $U_т$ в объёме пьезоэлемента можно записать

$$U_т = \frac{1}{\psi_V}\frac{2\pi}{\omega}D_т, \tag{4.191}$$

где $D_т$ – средняя за период мощность диссипации в объёме пьезоэлемента, равная подводимой активной электрической мощности, так что

$$D_т = \frac{1}{2}Re\tilde{Y}|\Delta\tilde{\varphi}|^2. \tag{4.192}$$

С учетом (4.192) равенство (4.191) перепишется в виде

$$2U_т = \frac{2\pi}{\omega\psi_V}Re\tilde{Y}|\Delta\tilde{\varphi}|^2. \tag{4.193}$$

Подставляя (4.190) и (4.193) во второе соотношение (4.164), после элементарных преобразований получаем

$$\psi_V = 2\pi\frac{Re\tilde{Y}k^2\omega|\tilde{C}_\varepsilon|^2/C'_\varepsilon}{|\tilde{Y}-i\tilde{C}_\varepsilon\omega|^2+k^2|\tilde{C}_\varepsilon|^2\omega^2}, \quad k^2 = \frac{k_э^2}{1-k_э^2}. \tag{4.194}$$

Для применяемых в настоящее время составов пьезокерамики потери всех видов сравнительно малы (порядка $10^{-3}-10^{-2}$); поэтому мнимую часть комплексной ёмкости $\tilde{C}_\varepsilon$ можно положить равной нулю. С учетом этого первое соотношение (4.194) перепишем в виде

$$\psi_V = 2\pi\frac{Re\tilde{Y}}{|\tilde{Y}-iC'_\varepsilon\omega|^2+k^2(C'_\varepsilon\omega)^2}k^2C'_\varepsilon\omega. \tag{4.195}$$

Дальнейшее упрощение соотношения (4.195) связано с рассмотрением практически важных случаев колебаний пьезоэлемента на резонансных и антирезонансных частотах. Прежде всего заметим, что отмеченные выше уровни потерь на эти частоты практически не влияют. Кроме того, при таких потерях не следует делать различия между резонансными частотами и частотами максимальной проводимости с одной стороны, и антирезонансными частотами и частотами минимальной проводимости – с другой. На указанных частотах можно пренебречь реактивной компонентой проводимости. Сказанное выше подтверждается многочисленными расчетами [46, 78, 79, 121 и др.] и наглядно демонстрируется примерами простейших одномерных колебаний пьезоэлементов [58].

На резонансной частоте $\omega_p: \ |\tilde{Y}| \approx Re\tilde{Y} = Y_m$, кроме того, для пьезоактивных частот проводимость Y_m на несколько порядков больше величины $C'_\varepsilon \omega_p$ (проводимости пьезоэлемента на нулевых деформациях). Поэтому из (4.195) получаем

$$\psi_{_V}^{(p)} = 2\pi k^2 \frac{\omega_p C'_\varepsilon}{Y_m}, \qquad k^2 = \frac{k_э^{(p)^2}}{1 - k_э^{(p)^2}}. \tag{4.196}$$

На антирезонансной частоте $\omega_a: \ |\tilde{Y}| \approx Re\tilde{Y} = Y_n$ и Y_n намного меньше величины $C'_\varepsilon \omega_a$. Следовательно,

$$\psi_{_V}^{(a)} = 2\pi k_э^{(a)^2} \frac{Y_n}{\omega_a C'_\varepsilon} \tag{4.197}$$

Приближенные формулы (4.196) и (4.197) позволяют оценить величину КЗЭМК на резонансных и антирезонансных частотах по известным (вычисленным или измеренным) значениям максимальной Y_m и минимальной Y_n проводимости. Входящие в эти формулы частоты ω_p и ω_a, ёмкость C'_ε и значения КЭМС $k_э^{(p)^2}$ и $k_э^{(a)^2}$ отождествляются (последние – в силу сказанного в предыдущем параграфе) с соответствующими электроупругими характеристиками. Заметим, что хотя ёмкость C'_ε и не может быть измерена на частотах ω_p и ω_a, она, а, следовательно, и величины $k_э^{(p)^2}$ и $k_э^{(a)^2}$ всегда могут быть вычислены по известным свойствам материала без учёта потерь.

Нетрудно проверить, что для случаев простейших одномерных задач КЗЭМК $\psi_{_V}$ на резонансных и антирезонансных частотах, определяемый равенствами (4.196) и (4.197), вырождается в характеристику материала. В частности, при продольных колебаниях стержня в электрическом поле, перпендикулярном его оси, соотношения (4.196) и (4.197) переходят в соотношения (4.187).

Глава 5.

Осесимметричная задача термоэлектровязкоупругости пьезоэлектрических тел с неоднородностью непрерывного типа

Данная глава посвящена связанной осесимметричной задаче термоэлектровязкоупругости (ТЭВУ). Под неоднородностью непрерывного типа понимается неоднородность, порождаемая зависимостью свойств пьезоматериала от температуры и связанностью полей.

Для решения нелинейной задачи используется шаговый по времени метод. Возникающие на каждом шаге линейные задачи электромеханики и теплопроводности представлены в вариационной формулировке. Решение вариационных задач осуществляется с помощью метода конечных элементов. Приведены некоторые результаты решений задач об осесимметричных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругих конических пьезоэлементов, пьезоэлементов в форме полых цилиндра и шара с отверстием, а также пьезоэлектрического тела вращения, имеющего сложное меридиональное сечение.

Основное внимание уделено эффектам, порождаемым зависимостью свойств материала от температуры и связанностью полей, приводящих к размягчению пьезоматериала и появлению в нём нелинейности мягкого типа.

В конце главы рассмотрен пример решения осесимметричной задачи ТЭВУ с учетом физической нелинейности пьезоматериала.

§ 1. Линеаризация задачи и вариационные формулировки линейных задач

В соответствии со сказанным в конце главы 1 решение связанной нелинейной задачи (1.185) – (1.191), (1.200) осуществляется шаговым методом, суть которого в следующем:

1) по заданному в начальный момент времени $t = t_0$ распределению температуры решается задача электромеханики (1.185), (1.186), (1.200);

2) по найденным электромеханическим переменным определяется диссипативная функция (1.188);

3) на интервале времени $[t_0, t_1]$ решается задача теплопроводности (1.189) – (1.191) с известным источником тепла, причём выбор момента t_1 зависит от степени чувствительности свойств материала к изменению температуры;

4) по известному распределению температуры в момент времени t_1 определяются измененные характеристики материала (1.202) и по ним находятся электромеханические переменные и диссипативная функция;

5) по известной диссипативной функции и распределению температуры в момент времени t_1 решается задача теплопроводности на следующем интервале $[t_1, t_2]$; в дальнейшем процесс повторяется.

Описанный алгоритм позволяет исследовать поведение пьезоэлектрического тела как в установившемся тепловом состоянии, так и в процессе выхода температуры на стационарный режим.

Решения на каждой итерации (временном шаге) линеаризованных задач электромеханики и теплопроводности с характеристиками материала, вычисляемыми на предыдущем шаге во времени, находятся методом конечных элементов, для чего используются вариационные формулировки этих задач [60]. Рассмотрим их.

Пусть имеется множество достаточно гладких функций $P = \{\tilde{u}_j, \tilde{\varphi}\}$, удовлетворяющих граничным условиям (1.186). Предположим, что выполняются соотношения Коши, градиентное уравнение для электрического потенциала (1.185) и определяющие уравнения (1.200). Определим на множестве P функционал

$$\tilde{Э} = \frac{1}{2}\int\limits_V (\tilde{C}^{E}_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{kl} - 2\tilde{e}_{ijk}\tilde{E}_i\tilde{\varepsilon}_{jk} - \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{ij}\tilde{E}_i\tilde{E}_j - \rho\omega^2 u_k u_k)dV - \\ - \int\limits_S (\tilde{t}_i\tilde{u}_i - \tilde{\tilde{\sigma}}\tilde{\varphi})dS, \tag{5.1}$$

где V – объём, занимаемый пьезоэлектрическим телом и ограниченный поверхностью $S = S_\sigma \cup S_u = S_D \cup S_\varphi$ (см. (1.186)). Тогда

$$\delta\tilde{Э}(\tilde{u}_i, \tilde{\varphi}) = 0 \tag{5.2}$$

на множестве P только в том случае, когда $\tilde{u}_i$ и $\tilde{\varphi}$ являются решением задачи электромеханики (1.185), (1.186), (1.200).

Действительно, проварьировав функционал (5.1) и применив формулу Гаусса-Остроградского, приходим к выражению

$$\delta\tilde{Э}(\tilde{u}_i, \tilde{\varphi}) = -\int\limits_V \{(\tilde{\sigma}_{ji,j} + \rho\omega^2\tilde{u}_i)\delta\tilde{u}_i + \tilde{D}_{i,i}\delta\tilde{\varphi}\}dV + \\ + \int\limits_S \{(\tilde{\sigma}_{ij}n_j - \tilde{t}_i)\delta\tilde{u}_i + (\tilde{D}_i n_i + \tilde{\tilde{\sigma}})\delta\tilde{\varphi}\}dS, \tag{5.3}$$

доказывающему сформулированный вариационный принцип. Если на S_u заданы перемещения, то здесь $\delta\tilde{u}_i = 0$. Если на S_φ задан электрический потенциал, то соответственно $\delta\tilde{\varphi} = 0$. Граничные условия для механических напряжений и индукции электрического поля являются естественными для данного вариационного принципа.

С помощью интегрального преобразования Лапласа [124]

$$\bar{T}(x_i, p) = \int\limits_0^\infty T(x_i, t)e^{-pt}dt \tag{5.4}$$

задачу теплопроводности (1.189) – (1.191) с известным источником тепла (1.188) можно свести к следующей краевой задаче в пространстве изображений

$$\rho c_{\scriptscriptstyle T}\left(p\bar{T} - \mathring{T}\right) = (\lambda_{ij}\bar{T}_{,i})_{,j} + \bar{\bar{D}}'_{эм}, \tag{5.5}$$

$$\lambda_{ij}\bar{T}_{,i}n_j + \alpha_{_T}\left(\bar{T} - \bar{T}^c\right) = 0 \quad - \text{на} \quad S, \tag{5.6}$$

где $\bar{T}, \bar{\bar{D}}'_{\text{эм}}$ и $\bar{T}^c$ – изображения соответственно температуры тела, мощности внутренних источников тепла и температуры окружающей среды. Рассмотрим в пространстве изображений функционал [124]

$$\begin{gathered}\bar{I} = \int\limits_V \left(\lambda_{ij}\bar{T}_{,i}\bar{T}_{,j} + \rho c_{_T}\bar{T}\left(p\bar{T} - 2\overset{\circ}{T}\right) - 2\bar{\bar{D}}'_{\text{эм}}\bar{T}\right)dV + \\ + \int\limits_S \alpha_{_T}(\bar{T} - 2\bar{T}^c)\bar{T}dS.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Проварьировав (5.7) по $\bar{T}$ с применением формулы Гаусса-Остроградского, приходим к выражению

$$\begin{gathered}\delta\bar{I} = \int\limits_S \left\{\rho c_{_T}\left(p\bar{T} - \overset{\circ}{T}\right) - (\lambda_{ij}\bar{T}_{,i})_{,j} - \bar{\bar{D}}'_{\text{эм}}\right\}\delta\bar{T}dV + \\ + \int\limits_S \left\{\lambda_{ij}\bar{T}_{,i}n_j + \alpha_{_T}\left(\bar{T} - \bar{T}^c\right)\right\}\delta\bar{T}dS,\end{gathered} \tag{5.8}$$

доказывающему, что

$$\delta\bar{I}(\bar{T}) = 0 \tag{5.9}$$

тогда и только тогда, когда $\bar{T}$ является решением краевой задачи (5.5), (5.6).

Представим функционалы $\tilde{Э}, \bar{I}$ в цилиндрической системе координат (z, r, φ) для случая осесимметричных электромеханических и тепловых полей. Вводя обозначения

$$\begin{gathered}\tilde{C}_{zz} = \tilde{C}^E_{1111},\, \tilde{C}_{rr} = \tilde{C}^E_{2222},\, \tilde{C}_{\varphi\varphi} = \tilde{C}^E_{3333},\, \tilde{C}_{zr} = \tilde{C}^E_{1122}, \\ \tilde{C}_{z\varphi} = \tilde{C}^E_{1133},\; \tilde{C}_{r\varphi} = \tilde{C}^E_{2233},\; \tilde{C}_{zzr} = \tilde{C}^E_{1112},\; \tilde{C}_{rrz} = \tilde{C}^E_{2212}, \\ \tilde{C}_{\varphi zr} = \tilde{C}^E_{3312},\; \tilde{C}_{zrzr} = \tilde{C}^E_{1212},\; \tilde{e}_{zzz} = \tilde{e}_{111},\; \tilde{e}_{zrr} = \tilde{e}_{122}, \\ \tilde{e}_{z\varphi\varphi} = \tilde{e}_{133},\; \tilde{e}_{zzr} = \tilde{e}_{112},\; \tilde{e}_{rzz} = \tilde{e}_{211},\; \tilde{e}_{rrr} = \tilde{e}_{222}, \\ \tilde{e}_{r\varphi\varphi} = \tilde{e}_{233},\; \tilde{e}_{rrz} = \tilde{e}_{221},\; \tilde{\mu}_{zz} = \tilde{\mu}^\varepsilon_{11},\; \tilde{\mu}_{rr} = \tilde{\mu}^\varepsilon_{22}, \\ \tilde{\mu}_{zr} = \tilde{\mu}^\varepsilon_{12},\; \lambda_{zz} = \lambda_{11},\; \lambda_{rr} = \lambda_{22},\; \lambda_{zr} = \lambda_{12}\end{gathered} \tag{5.10}$$

и учитывая, что в цилиндрической системе координат $dV = rdrdzd\varphi$, после интегрирования по окружной координате φ получаем

$$\begin{gathered}
\tilde{Э} = \pi \iint\limits_F \Big[\tilde{C}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{zz}^2 + \tilde{C}_{rr}\tilde{\varepsilon}_{rr}^2 + \tilde{C}_{\varphi\varphi}\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^2 + 4\tilde{C}_{zrzr}\tilde{\varepsilon}_{zr}^2 + \\
+2\tilde{C}_{zr}\tilde{\varepsilon}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{rr} + 2\tilde{C}_{z\varphi}\tilde{\varepsilon}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + 2\tilde{C}_{r\varphi}\tilde{\varepsilon}_{rr}\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + 4\tilde{C}_{zzr}\tilde{\varepsilon}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{zr} + \\
+4\tilde{C}_{rrz}\tilde{\varepsilon}_{rr}\tilde{\varepsilon}_{zr} + 4\tilde{C}_{\varphi zr}\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}\tilde{\varepsilon}_{zr} - \tilde{\mu}_{zz}\,\tilde{E}_z^2 - \tilde{\mu}_{rr}\,\tilde{E}_r^2 - \\
-2\tilde{\mu}_{zr}\tilde{E}_z\tilde{E}_r - 2(\tilde{e}_{zzz}\tilde{E}_z\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{e}_{zrr}\tilde{E}_z\tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{e}_{z\varphi\varphi}\tilde{E}_z\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + \\
+2\tilde{e}_{rrz}\tilde{E}_r\tilde{\varepsilon}_{zr} + \tilde{e}_{rrr}\tilde{E}_r\tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{e}_{rzz}\tilde{E}_r\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{e}_{r\varphi\varphi}\tilde{E}_r\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + \\
+2\tilde{e}_{zzr}\tilde{E}_z\tilde{\varepsilon}_{zr}) - \rho\omega^2(\tilde{u}^2 + \tilde{w}^2)\Big]\, rdrdz - \\
-2\pi \int\limits_L \Big(\tilde{t}_{rn}\tilde{u} + \tilde{t}_{zn}\tilde{w} - \tilde{\tilde{\sigma}}\tilde{v}\Big)\, rdl,
\end{gathered} \tag{5.11}$$

$$\begin{gathered}
\bar{I} = \pi \iint\limits_F \left[\lambda_{zz}\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\right)^2 + \lambda_{rr}\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}\right)^2 + 2\lambda_{zr}\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\frac{\partial\overline{T}}{\partial r} + \right. \\
\left. +\rho c_{_T}\bar{T}(p\bar{T} - 2\overset{\circ}{T}) - 2\bar{\bar{D}}'_{эм}\bar{T}\right] rdrdz + \\
+\pi \int\limits_L \alpha_{_T}(\bar{T} - \bar{T}^c)\bar{T}dl,
\end{gathered} \tag{5.12}$$

где F – меридиональное сечение тела, ограниченное контуром L; $\tilde{u}, \tilde{w}$ – комплексные амплитуды радиальной и осевой составляющих вектора перемещения; $\tilde{t}_{rn}, \tilde{t}_{zn}$ – комплексные амплитуды составляющих вектора поверхностной нагрузки, которые могут выражаться через составляющие акустического импеданса, заданного на поверхности. Комплексная амплитуда электрического потенциала обозначается в дальнейшем через $\tilde{v}$.

С учетом (1.188), (1.200), (5.10) осесимметричная диссипативная функция в цилиндрической системе координат принимает вид

$$\begin{gathered}
\bar{D}'_{эм} = \frac{\omega}{2}\Big\{C''_{zz}(\varepsilon'^2_{zz} + \varepsilon''^2_{zz}) + C''_{rr}(\varepsilon'^2_{rr} + \varepsilon''^2_{rr}) + C''_{\varphi\varphi}(\varepsilon'^2_{\varphi\varphi} + \varepsilon''^2_{\varphi\varphi}) + \\
+4C''_{zrzr}(\varepsilon'^2_{zr} + \varepsilon''^2_{zr}) + 2C''_{zr}(\varepsilon'_{zz}\varepsilon'_{rr} + \varepsilon''_{zz}\varepsilon''_{rr}) + 2C''_{z\varphi}(\varepsilon'_{zz}\varepsilon'_{\varphi\varphi} + \\
+\varepsilon''_{zz}\varepsilon''_{\varphi\varphi}) + 2C''_{r\varphi}(\varepsilon'_{rr}\varepsilon'_{\varphi\varphi} + \varepsilon''_{rr}\varepsilon''_{\varphi\varphi}) + 4C''_{zzr}(\varepsilon'_{zz}\varepsilon'_{zr} + \varepsilon''_{zz}\varepsilon''_{zr}) + \\
+4C''_{rrz}(\varepsilon'_{rr}\varepsilon'_{zr} + \varepsilon''_{rr}\varepsilon''_{zr}) + 4C''_{\varphi zr}(\varepsilon'_{\varphi\varphi}\varepsilon'_{zr} + \varepsilon''_{\varphi\varphi}\varepsilon''_{zr}) - \\
-2\Big[e''_{zzz}(E'_z\varepsilon'_{zz} + E''_z\varepsilon''_{zz}) + e''_{zrr}(E'_z\varepsilon'_{rr} + E''_z\varepsilon''_{rr}) + \\
+e''_{z\varphi\varphi}(E'_z\varepsilon'_{\varphi\varphi} + E''_z\varepsilon''_{\varphi\varphi}) + 2e''_{rrz}(E'_r\varepsilon'_{zr} + E''_r\varepsilon''_{zr}) + \\
+e''_{rrr}(E'_r\varepsilon'_{rr} + E''_r\varepsilon''_{rr}) + e''_{rzz}(E'_r\varepsilon'_{zz} + E''_r\varepsilon''_{zz}) + \\
+e''_{r\varphi\varphi}(E'_r\varepsilon'_{\varphi\varphi} + E''_r\varepsilon''_{\varphi\varphi}) + 2e''_{zzr}(E'_z\varepsilon'_{zr} + E''_z\varepsilon''_{zr})\Big] - \\
-\Big[\mu''_{zz}(E'^2_z + E''^2_z) + \mu''_{rr}(E'^2_r + E''^2_r) + 2\mu''_{zr}(E'_zE'_r + E''_zE''_r)\Big]\Big\}.
\end{gathered} \tag{5.13}$$

В общем случае, когда направление поляризации не совпадает с направлениями координатных осей, в функционалах (5.11) и (5.12) содержатся десять отличных от нуля комплексных модулей $\tilde{C}$, восемь пьезоконстант $\tilde{e}$, три комплексных диэлектрических проницаемости $\tilde{\mu}$ и три коэффициента теплопроводности λ (нижние индексы величин опущены). Эти величины могут быть вычислены через известные характеристики трансверсально-изотропного материала и угол α между направлением поляризации и осью вращения тела по формулам

$$\begin{gathered}
\tilde{C}_{zz} = \tilde{C}^E_{33}cos^4\alpha + \tilde{C}^E_{11}sin^4\alpha + 2\tilde{C}^E_{13}cos^2\alpha sin^2\alpha + 4\tilde{C}^E_{55}cos^2\alpha sin^2\alpha, \\
\tilde{C}_{rr} = \tilde{C}^E_{33}sin^4\alpha + \tilde{C}^E_{11}cos^4\alpha + 2\tilde{C}^E_{13}cos^2\alpha sin^2\alpha + 4\tilde{C}^E_{55}cos^2\alpha sin^2\alpha, \\
\tilde{C}_{\varphi\varphi} = \tilde{C}^E_{11},\ \tilde{C}_{z\varphi} = \tilde{C}^E_{13}cos^2\alpha + \tilde{C}^E_{12}sin^2\alpha,\ \tilde{C}_{r\varphi} = \tilde{C}^E_{13}sin^2\alpha + \tilde{C}^E_{12}cos^2\alpha,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{C}_{zrzr} = (\tilde{C}^E_{33} + \tilde{C}^E_{11} - 2\tilde{C}^E_{13})cos^2\alpha sin^2\alpha + \tilde{C}^E_{55}cos^2 2\alpha, \\
\tilde{C}_{zr} = (\tilde{C}^E_{33} + \tilde{C}^E_{11} - 4\tilde{C}^E_{55})cos^2\alpha sin^2\alpha + \tilde{C}^E_{13}(cos^4\alpha + sin^4\alpha), \\
\tilde{C}_{zzr} = [\tilde{C}^E_{33}cos^2\alpha - \tilde{C}^E_{11}sin^2\alpha - (2\tilde{C}^E_{55} + \tilde{C}^E_{13})cos2\alpha]cos\alpha sin\alpha, \\
\tilde{C}_{rrz} = [\tilde{C}^E_{33}sin^2\alpha - \tilde{C}^E_{11}cos^2\alpha + (2\tilde{C}^E_{55} + \tilde{C}^E_{13})cos2\alpha]cos\alpha sin\alpha, \\
\tilde{C}_{\varphi zr} = (\tilde{C}^E_{13} - \tilde{C}^E_{12})cos\alpha sin\alpha,
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
\tilde{e}_{zzz} = \tilde{e}_{33} cos^3\alpha + (\tilde{e}_{31} + 2\tilde{e}_{15}) sin^2\alpha cos\alpha, \\
\tilde{e}_{rrr} = \tilde{e}_{33} sin^3\alpha + (\tilde{e}_{31} + 2\tilde{e}_{15}) cos^2\alpha sin\alpha, \\
\tilde{e}_{zrr} = \tilde{e}_{31} cos^3\alpha + (\tilde{e}_{33} - 2\tilde{e}_{15}) sin^2\alpha cos\alpha, \\
\tilde{e}_{z\varphi\varphi} = \tilde{e}_{31} cos\alpha, \;\; \tilde{e}_{r\varphi\varphi} = \tilde{e}_{31} sin\alpha, \\
\tilde{e}_{zzr} = (\tilde{e}_{33} - \tilde{e}_{31}) cos^2\alpha sin\alpha - \tilde{e}_{15} sin\alpha cos 2\alpha, \\
\tilde{e}_{rzz} = (\tilde{e}_{33} - 2\tilde{e}_{15}) cos^2\alpha sin\alpha + \tilde{e}_{31} sin^3\alpha, \\
\tilde{e}_{rzr} = (\tilde{e}_{33} - \tilde{e}_{31}) sin^2\alpha cos\alpha + \tilde{e}_{15} cos\alpha cos 2\alpha, \\
\tilde{\mu}_{zz} = \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{33} cos^2\alpha + \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{11} sin^2\alpha, \; \tilde{\mu}_{rr} = \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{33} sin^2\alpha + \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{11} cos^2\alpha, \\
\tilde{\mu}_{zr} = (\tilde{\mu}^{\varepsilon}_{33} - \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{11}) sin\alpha cos\alpha, \\
\lambda_{zz} = \lambda_{33} cos^2\alpha + \lambda_{11} sin^2\alpha, \;\; \lambda_{rr} = \lambda_{33} sin^2\alpha + \lambda_{11} cos^2\alpha, \\
\lambda_{zr} = (\lambda_{33} - \lambda_{11}) sin\alpha cos\alpha.
\end{gathered}
\tag{5.14}
$$

§ 2. Решение вариационных задач методом конечных элементов

Применению метода конечных элементов к решению осесимметричных задач термоэлектровязкоупругости при гармоническом нагружении с использованием линейного треугольного конечного элемента и изопараметрических четырехугольных элементов с билинейной и квадратичной аппроксимацией величин посвящены работы [59, 60, 71, 89, 91 и др.]. В указанных работах сделан вывод, что для рассматриваемого в них класса задач наиболее высокую точность и эффективность вычислений обеспечивает изопараметрический четырехугольный квадратичный элемент, что особенно заметно для задач с изгибными формами колебаний.

Приведенные в данной книге результаты расчётов получены с использованием изопараметрического четырехугольного квадратичного элемента. Построение этого элемента представляет собой преобразование безразмерного прямоугольного элемента с восемью узлами в криволинейный элемент с тем же количеством узлов и со сторонами в виде произвольных парабол [140] (рис. 5.1). После того, как в результате преобразования элемент делается криволинейным, неизвестные функции на элементе аппроксимируются многочленами от локальных координат (ξ, η).

Для решения сформулированных в § 1 вариационных задач область меридионального сечения тела разбивается N узловыми точками на M

Рис. 5.1.

восьмиузловых четырехугольных элементов. В пределах каждого элемента перемещения, электрический потенциал и температура аппроксимируются выражениями [140]

$$\tilde{w} = \sum_{n=1}^{8} \varphi_n \tilde{w}_n, \quad \tilde{u} = \sum_{n=1}^{8} \varphi_n \tilde{u}_n, \quad \tilde{v} = \sum_{n=1}^{8} \varphi_n \tilde{v}_n, \quad \bar{T} = \sum_{n=1}^{8} \varphi_n \bar{T}_n, \tag{5.15}$$

где $\tilde{w}_n, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \bar{T}_n$ – узловые значения величин; φ_n – функции формы, имеющие вид

$$\begin{gathered}
\varphi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), \quad \varphi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \\
\varphi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad \varphi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), \\
\varphi_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad \varphi_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi), \\
\varphi_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad \varphi_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi), \quad -1 \le \xi, \eta \le 1,
\end{gathered} \tag{5.16}$$

причём $\sum\limits_{n=1}^{8} \varphi_n = 1$. Связь между цилиндрическими координатами r, z и местными ξ, η осуществляется при помощи зависимостей

$$r = \sum_{n=1}^{8} r_n \varphi_n, \quad z = \sum_{n=1}^{8} z_n \varphi_n, \tag{5.17}$$

где r_n, z_n – узловые значения координат. Так как получить зависимости вида [5] $\xi = \xi(z, r)$, $\eta = \eta(z, r)$, обратные к (5.17), не представляется возможным, частные производные от величин следует вычислять по ξ, η, а затем полученные зависимости разрешать относительно производных по цилиндрическим координатам. В результате можно записать

$$
\begin{gathered}
\tilde{\varepsilon}_{zz} = \sum_{n=1}^{8} \Phi_n \tilde{w}_n, \quad \tilde{\varepsilon}_{rr} = \sum_{n=1}^{8} \Psi_n \tilde{u}_n, \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{8} \varphi_n \tilde{u}_n, \\
\tilde{\varepsilon}_{zr} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{8} (\Psi_n \tilde{w}_n + \Phi_n \tilde{u}_n), \qquad \tilde{E}_r = -\sum_{n=1}^{8} \Psi_n \tilde{v}_n, \\
\tilde{E}_z = -\sum_{n=1}^{8} \Phi_n \tilde{v}_n,
\end{gathered} \tag{5.18}
$$

$$
\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = \sum_{n=1}^{8} \Phi_n \bar{T}_n, \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} = \sum_{n=1}^{8} \Psi_n \bar{T}_n, \tag{5.19}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Phi_n = \frac{1}{\Im} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right), \quad \Psi_n = \frac{1}{\Im} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right), \\
\Im = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \quad \text{– якобиан.}
\end{gathered} \tag{5.20}
$$

Учитывая выражения (5.18), из условия стационарности функционала (5.11) получаем комплексную систему $3N$ линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений амплитуд перемещений и электрического потенциала

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \tilde{Э}}{\partial \tilde{w}_l} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial \tilde{Э}_m}{\partial \tilde{w}_l} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{Э}}{\partial \tilde{u}_l} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial \tilde{Э}_m}{\partial \tilde{u}_l} = 0, \\
\frac{\partial \tilde{Э}}{\partial \tilde{v}_l} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial \tilde{Э}_m}{\partial \tilde{v}_l} = 0 \quad (l = \overline{1, N}).
\end{gathered} \tag{5.21}
$$

Для элемента m, часть границы которого L_m совпадает с границей меридионального сечения тела L, производные для узла k имеют вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{Э}}{\partial \tilde{w}_k} &= \sum_{j=1}^{8} (\tilde{a}^m_{kj}\tilde{w}_j + \tilde{b}^m_{kj}\tilde{u}_j + \tilde{A}^m_{kj}\tilde{v}_j) + \tilde{f}^w_k, \\
\frac{\partial \tilde{Э}}{\partial \tilde{u}_k} &= \sum_{j=1}^{8} (\tilde{c}^m_{kj}\tilde{w}_j + \tilde{d}^m_{kj}\tilde{u}_j + \tilde{B}^m_{kj}\tilde{v}_j) + \tilde{f}^u_k, \\
\frac{\partial \tilde{Э}}{\partial \tilde{v}_k} &= \sum_{j=1}^{8} (\tilde{P}^m_{kj}\tilde{w}_j + \tilde{Q}^m_{kj}\tilde{u}_j + \tilde{R}^m_{kj}\tilde{v}_j) + \tilde{f}^v_k \qquad (k = \overline{1,8}),
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

причём, в отличие от (5.21), нумерация узлов в (5.22) является локальной. Коэффициенты в (5.22) определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}^m_{ij} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Big[\tilde{C}_{zz}\Phi_i\Phi_j + \tilde{C}_{zrzr}\Psi_i\Psi_j + \tilde{C}_{zzr}(\Phi_i\Psi_j + \Psi_i\Phi_j) - \\
&\qquad - \rho\omega^2\varphi_i\varphi_j\Big] r\,|\,\Im\,|\,d\xi d\eta, \\
\tilde{b}^m_{ij} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Big[\tilde{C}_{zzr}\Phi_i\Phi_j + \tilde{C}_{rzr}\Psi_i\Psi_j + \tilde{C}_{zrzr}\Psi_i\Phi_j + \tilde{C}_{zr}\Phi_i\Psi_j + \\
&\qquad + \tilde{C}_{z\varphi}\frac{1}{r}\Phi_i\varphi_j + \tilde{C}_{\varphi zr}\frac{1}{r}\Psi_i\varphi_j\Big] r\,|\,\Im\,|\,d\xi d\eta, \\
\tilde{A}^m_{ij} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Big[\tilde{e}_{zzz}\Phi_i\Phi_j + \tilde{e}_{rzr}\Psi_i\Psi_j + \tilde{e}_{rzz}\Phi_i\Psi_j + \tilde{e}_{zzr}\Psi_i\Phi_j\Big] \times \\
&\qquad \times r\,|\,\Im\,|\,d\xi d\eta, \\
\tilde{d}^m_{ij} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Big[\tilde{C}_{zrzr}\Phi_i\Phi_j + \tilde{C}_{rr}\Psi_i\Psi_j + \tilde{C}_{rzr}(\Psi_i\Phi_j + \Phi_i\Psi_j) + \\
&\qquad + \tilde{C}_{\varphi zr}\frac{1}{r}(\varphi_i\Phi_j + \Phi_i\varphi_j) + \tilde{C}_{r\varphi}\frac{1}{r}(\Psi_i\varphi_j + \Psi_j\varphi_i) + \\
&\qquad + \tilde{C}_{\varphi\varphi}\frac{1}{r^2}\varphi_i\varphi_j - \rho\omega^2\varphi_i\varphi_j\Big] r\,|\,\Im\,|\,d\xi d\eta,
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

$$\tilde{B}_{ij}^m = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\Big[\tilde{e}_{zzr}\Phi_i\Phi_j + \tilde{e}_{rrr}\Psi_i\Psi_j + \tilde{e}_{rzr}\Phi_i\Psi_j + \tilde{e}_{zrr}\Psi_i\Phi_j +$$
$$+\tilde{e}_{z\varphi\varphi}\frac{1}{r}\varphi_i\Phi_j + \tilde{e}_{r\varphi\varphi}\frac{1}{r}\varphi_i\Psi_j\Big] r\,|\,\Im\,|\,d\xi d\eta,$$
$$\tilde{R}_{ij}^m = -\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\big[\tilde{\mu}_{zz}\Phi_i\Phi_j + \tilde{\mu}_{rr}\Psi_i\Psi_j + \tilde{\mu}_{zr}(\Phi_i\Psi_j + \Psi_i\Phi_j)\big]\times$$
$$\times r\,|\,\Im\,|\,d\xi d\eta,$$
$$\tilde{c}_{ij}^m = \tilde{b}_{ji}^m, \qquad \tilde{P}_{ij}^m = \tilde{A}_{ji}^m, \qquad \tilde{Q}_{ij}^m = \tilde{B}_{ji}^m,$$
$$\tilde{f}_i^w = -2\int\limits_{L_m}\tilde{t}_{zn}\varphi_i r dl, \qquad \tilde{f}_i^u = -2\int\limits_{L_m}\tilde{t}_{rn}\varphi_i r dl,$$
$$\tilde{f}_i^v = 2\int\limits_{L_m}\tilde{\hat{\sigma}}\varphi_i r dl \qquad (i,j=\overline{1,8}).$$

Переходя к глобальной нумерации узлов и суммируя для каждого узла выражения (5.22) по всем элементам, на которые разбито меридиональное сечение тела, получаем систему (5.21).

Для нахождения интегралов (5.23) применяется квадратурная формула Гаусса [41]

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi\, d\eta \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i\, H_j f\,(\xi_i,\eta_j), \tag{5.24}$$

в которой ξ_i, η_i – координаты точек интегрирования, $H_iH_j = \bar{H}_{ij}$ – весовые множители. Вычисление интегралов (5.23) производилось с использованием девяти точек интегрирования ($n = 3$), расположение которых показано на рис. 5.2, при следующих значениях координат и весовых множителей:

$$\{\xi_i,\eta_j\} = -\xi_\circ, 0, \xi_\circ; \quad \{H_i, H_j\} = H_\circ, \hat{H}_\circ, H_\circ;$$
$$\xi_\circ = \sqrt{3/5}, \quad H_\circ = 5/9, \quad \hat{H}_\circ = 8/9.$$

Для вычисления контурных интегралов значение dl находится по

Рис. 5.2.

формулам

$$
\begin{aligned}
dl &= \left[\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2\right]^{1/2} d\xi \text{ -- на стороне } \eta = const, \\
dl &= \left[\left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\eta}\right)^2\right]^{1/2} d\eta \text{ -- на стороне } \xi = const,
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

после чего применяется одномерная формула интегрирования Гаусса.

В результате построения конечноэлементной модели описанным выше способом естественные граничные условия удовлетворяются автоматически при формировании матриц элементов. Если предположить, что механические напряжения и нормальная составляющая индукции электрического поля известны на всей границе тела, то получаемая система разрешающих алгебраических уравнений относительно узловых значений перемещений и электрического потенциала не требует никаких преобразований и готова к решению. Однако такая ситуация является скорее исключением, чем правилом. На практике подвод или снятие электрической энергии с динамически деформируемого пьезоэлектрического тела осуществляется с помощью электродных покрытий, находящихся на части поверхности (или внутри) тела (относительно этих покрытий пока предполагается, что они являются бесконечно тонкими идеальными проводниками). Формулировка граничного условия для нормальной составляющей вектора индукции электрического поля на электродированной поверхности в виде $\tilde{D}_i n_i = -\,\tilde{\hat{\sigma}}$ не является физически содержательной, поскольку плотность электрического заряда на этой поверхности, как правило, заранее не известна и должна находиться в процессе решения задачи. Физически реализуемым электрическим граничным условием на электроде является либо значение электрического потенциала, одинаковое для всех точек электрода, либо величина протекающего через него общего тока [27]. Что касается механических граничных условий, то вместо напряжений на части поверхности могут задаваться перемещения.

Главные граничные условия, в нашем случае механические перемещения и электрический потенциал на соответствующих поверхностях тела, не учтенные при формировании матриц элементов, могут быть удовлетворены без изменения структуры и размеров разрешающей системы одним из способов, описанных в работах [40, 140]. В настоящей работе для этой цели используется умножение диагонального элемента глобальной матрицы, соответствующего заданному узловому значению перемещения или электрического потенциала, на очень большое число (10^{30}) и модификация соответствующего элемента вектора правой части [40, 140].

Определённые трудности возникают при конечноэлементной реализации электрических граничных условий на электродах, запитанных от генератора тока и пассивных электродах. Эти трудности связаны с необходимостью снижения на основе условия эквипотенциальности электродов числа независимых переменных разрешающей системы, поскольку и узловые заряды и потенциалы на электродах в этом случае неизвестны. Учёт эквипотенциальности электродов требует значительных преобразований в матрице разрешающей системы [181], приводящих в конечном итоге к изменению размерности этой матрицы и нарушению её ленточной структуры. Тем самым теряется основное достоинство описанного выше подхода к формированию матриц элементов и сборке глобальных матриц и вектора правой части. С другой стороны, во многих практически важных случаях пьезоэлементы являются двухэлектродными, при этом под электродом понимаются и несколько конструктивно закороченных электродов. При возбуждении колебаний таких пьезоэлементов током с амплитудой $\tilde{I}$ задача может быть решена без каких-либо структурных изменений матрицы конечноэлементной системы следующим образом [121]: вначале на той же частоте возбуждения находится решение задачи при некотором значении электрического напряжения на электродах $\Delta\tilde{\varphi}_\circ$. Решение такой задачи не вызывает никаких затруднений. По найденному решению определяется комплексное сопротивление $\tilde{R}$ пьезоэлемента на данной частоте, которое является характеристикой пьезоэлемента и не зависит от способа возбуждения колебаний. Неизвестное (искомое) напряжение на электродах $\Delta\tilde{\varphi}_1$ определяется согласно формуле $\Delta\tilde{\varphi}_1 = \tilde{R}\cdot\tilde{I}$. При этом для нахождения полевых электромеханических величин, соответствующих этому напряжению (или заданному току $\tilde{I}$) нет необходимости в повторном конечноэлементном решении задачи. Достаточно, в силу линейности этой задачи, произвести простой пересчет всех полевых величин, найденных для $\Delta\tilde{\varphi}_\circ$, умножив их на коэффициент

$\tilde{\alpha} = \Delta\tilde{\varphi}_1/\Delta\tilde{\varphi}_\circ$.

В общем случае преобразования конечноэлементной системы, связанные с реализацией условий эквипотенциальности, являются неизбежными.

Определив в результате решения алгебраической системы уравнений (5.21) перемещения и электрический потенциал в узловых точках, по формулам (5.18) можно найти компоненты тензора деформаций и вектора напряженности электрического поля в любой точке четырехугольного элемента. Однако погрешность определения указанных величин различна в разных точках элемента. Наибольшей точностью, практически равной точности узловых перемещений и потенциалов, обладают деформации и напряженности электрического поля, найденные в точках интегрирования [128, 178]. В настоящей работе вычисления компонент тензора деформации и вектора напряженности электрического поля по формулам (5.18), а также компонент тензора напряжений и вектора электрической индукции по формулам

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{zz} &= \tilde{C}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{C}_{zr}\tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{C}_{z\varphi}\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + 2\tilde{C}_{zzr}\tilde{\varepsilon}_{rz} - \tilde{e}_{zzz}\tilde{E}_z - \tilde{e}_{rzz}\tilde{E}_r,\\
\tilde{\sigma}_{rr} &= \tilde{C}_{zr}\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{C}_{rr}\tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{C}_{r\varphi}\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + 2\tilde{C}_{rzr}\tilde{\varepsilon}_{rz} - \tilde{e}_{zrr}\tilde{E}_z - \tilde{e}_{rrr}\tilde{E}_r,\\
\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= \tilde{C}_{z\varphi}\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{C}_{r\varphi}\tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{C}_{\varphi\varphi}\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + 2\tilde{C}_{\varphi zr}\tilde{\varepsilon}_{rz} - \tilde{e}_{z\varphi\varphi}\tilde{E}_z - \tilde{e}_{r\varphi\varphi}\tilde{E}_r,\\
\tilde{\sigma}_{rz} &= \tilde{C}_{zzr}\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{C}_{rzr}\tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{C}_{\varphi zr}\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + 2\tilde{C}_{zrzr}\tilde{\varepsilon}_{rz} - \tilde{e}_{zzr}\tilde{E}_z - \tilde{e}_{rzr}\tilde{E}_r,\\
\tilde{D}_z &= \tilde{\mu}_{zz}\tilde{E}_z + \tilde{\mu}_{zr}\tilde{E}_r + \tilde{e}_{zzz}\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{e}_{zrr}\tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{e}_{z\varphi\varphi}\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + 2\tilde{e}_{zzr}\tilde{\varepsilon}_{rz},\\
\tilde{D}_r &= \tilde{\mu}_{zr}\tilde{E}_z + \tilde{\mu}_{rr}\tilde{E}_r + \tilde{e}_{rzz}\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{e}_{rrr}\tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{e}_{r\varphi\varphi}\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + 2\tilde{e}_{rzr}\tilde{\varepsilon}_{rz}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

проводятся в точках интегрирования. При необходимости найденные значения могут быть экстраполированы на остальные точки элемента [178].

Учитывая выражение (5.15) для температуры и (5.19) для её производных, а также аппроксимируя температуру окружающей среды, коэффициент теплоотдачи и начальное распределение температуры полиномами (5.16)

$$\bar{T}^c = \sum_{n=1}^{8} \varphi_n \bar{T}_n^c, \quad \alpha_{_T} = \sum_{n=1}^{8} \varphi_n \alpha_{_{T_n}}, \quad \mathring{T} = \sum_{n=1}^{8} \varphi_n \mathring{T}_n, \tag{5.27}$$

из условия стационарности функционала (5.12) получаем систему N

линейных алгебраических уравнений относительно узловых величин $\bar{T}_i$

$$\frac{\partial \overline{I}}{\partial \overline{T}_i} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial \overline{I}_m}{\partial \overline{T}_i} = 0 \qquad (i = \overline{1, N}). \tag{5.28}$$

Для k-го узла ($k = \overline{1, 8}$) элемента m в самом общем случае, когда любая сторона четырехугольника может принадлежать границе меридионального сечения тела, имеем

$$\frac{\partial \overline{I}_m}{\partial \overline{T}_k} = \sum_{j=1}^{8} [\overset{m}{H}_{kj}(s\bar{T}_j - \overset{\circ}{T}_j) + (\overset{m}{S}_{kj} + \overset{m}{L}_{kj})\bar{T}_j] - \overset{m}{\bar{D}}_k - \overset{m}{\bar{F}}_k. \tag{5.29}$$

Здесь

$$\overset{m}{H}_{kj} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \rho c_{\scriptscriptstyle T} \varphi_k \varphi_j r \,|\, \Im \,|\, d\xi d\eta,$$

$$\overset{m}{S}_{kj} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\lambda_{zz} \Phi_k \Phi_j + \lambda_{rr} \Psi_k \Psi_j + \lambda_{zr} (\Phi_k \Psi_j + \Phi_j \Psi_k)] \times$$
$$\times r \,|\, \Im \,|\, d\xi d\eta, \tag{5.30}$$

$$\overset{m}{\bar{D}}_k = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=1}^{8} \varphi_n \bar{\bar{D}}'_{\text{эм}_n} \right) \varphi_k r \,|\, \Im \,|\, d\xi d\eta,$$

$$\overset{m}{L}_{kj} = \int_{L} \left(\sum_{n=1}^{8} \varphi_n \alpha_{\scriptscriptstyle T_n} \right) \varphi_k \varphi_j r dl, \qquad \overset{m}{\bar{F}}_k = \sum_{n=1}^{8} \bar{T}_n^c \overset{m}{L}_{kn}.$$

Для случая, когда с границей меридионального сечения тела совпадает одна сторона четырехугольника, например, сторона с номерами узлов $1, 2, 5$ рисунка 5.1, $\overset{m}{L}_{kj}$ имеет вид

$$\overset{m}{L}_{kj} = \int_{L_{1,2,5}} \left(\alpha_{\scriptscriptstyle T_1} \varphi_1 + \alpha_{\scriptscriptstyle T_2} \varphi_2 + \alpha_{\scriptscriptstyle T_5} \varphi_5 \right) \varphi_k \varphi_j r dl, \tag{5.31}$$

причём, если один из индексов k, j отличен от $1, 2, 5$, то $\overset{m}{L}_{kj} = 0$. Входящие в (5.30) и (5.31) величины φ_i, Φ_i, Ψ_i определяются выражениями

(5.16), (5.20). Выполнив над системой (5.28) обратное преобразование Лапласа, для определения температуры T в узлах разбивки меридионального сечения тела получаем систему N линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнение, записанное для узла k $(k=\overline{1,8})$ четырехугольника m, имеет вид

$$\sum_{j=1}^{8}\left[\overset{m}{H}_{kj}\frac{dT_j}{dt}+\left(\overset{m}{S}_{kj}+\overset{m}{L}_{kj}\right)T_j\right]=\overset{m}{D}_k+\overset{m}{F}_k. \tag{5.32}$$

Этому уравнению соответствуют начальные условия

$$T_j=\overset{\circ}{T}_j \quad \text{при} \quad t=t_0 \qquad (j=\overline{1,8}). \tag{5.33}$$

Для решения системы линейных дифференциальных уравнений применяется метод конечных разностей [23], в котором производные по времени заменяются соотношениями

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{\Delta t}[T(t+\Delta t)-T(t)]. \tag{5.34}$$

Для нахождения температуры в момент времени $t+\Delta t$ используются уравнения, неизвестные в которых записаны также для значения $t+\Delta t$. Это позволяет реализовать неявную схему решения задачи, т.е. для определения температуры получить N линейных алгебраических уравнений. Алгебраическое уравнение для узла k сводится к виду

$$\sum_{j=1}^{8}\left(\frac{\overset{m}{H}_{kj}}{\Delta t}+\overset{m}{S}_{kj}+\overset{m}{L}_{kj}\right)T_j(t+\Delta t)=\sum_{j=1}^{8}\frac{\overset{m}{H}_{kj}}{\Delta t}T_j(t)+\overset{m}{D}_k+\overset{m}{F}_k \quad (k=\overline{1,8}). \tag{5.35}$$

Переходя к глобальной нумерации узлов и суммируя для каждого узла выражения (5.35) по всем элементам разбивки меридионального сечения, которым принадлежит данный узел, для нахождения температуры в узловых точках в момент времени $t+\Delta t$ получаем систему N линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{N}A_{ij}T_j(t+\Delta t)=P_i(t) \qquad (i=\overline{1,N}). \tag{5.36}$$

Решение конечноэлементных систем линейных алгебраических уравнений (5.21) и (5.36) находится методом Гаусса без выбора главного элемента.

Необходимая густота сетки элементов при решении задачи электровязкоупругости определяется путём решения одной и той же задачи при различном количестве конечных элементов и сопоставлением результатов, а также проверкой удовлетворения решений естественным граничным условиям. При решении задачи теплопроводности густота разбивки и точки интегрирования выбираются такими, как и при решении задачи электровязкоупругости. Диссипативная функция вычисляется в точках интегрирования. Практическое значение шага во времени выбирается путём решения одной и той же задачи с разным шагом по времени с последующим сравнением полученных результатов.

В заключение остановимся на нахождении в рамках используемого конечноэлементного подхода характеристических частот пьезоэлемента. Поскольку потери существенно не влияют на резонансные и антирезонансные частоты колебаний, нахождение этих частот можно проводить, используя электроупругую постановку задачи. Для этого необходимо отбросить мнимые части в электромеханических константах материала и во всех приведенных выше соотношениях электромеханики все величины считать действительными. В общем случае температурной зависимости свойств имеем электроупругую задачу для неоднородного материала.

Резонансные частоты можно находить в рамках решения обобщенной задачи на собственные значения свободных электроупругих колебаний пьезоэлемента, вычисляя определитель конечноэлементной системы

$$det([K] - \omega^2[M]). \tag{5.37}$$

Из получаемого таким образом частотного спектра не все частоты возбуждаются при электрическом возбуждении колебаний с заданным расположением электродов. Для выявления возбуждаемых резонансных частот необходимо просчитывать задачу полностью на каждой частоте спектра, найденного с помощью (5.37).

Что касается антирезонансных частот, то их нахождение в рамках обобщенной задачи на собственные значения возможно только при значительных преобразованиях глобальной матрицы, при которых её первоначально ленточная структура нарушается [181].

В данной книге резонансные и антирезонансные частоты находятся в результате решения задач на вынужденные колебания электроупругого тела, возбуждаемого электрическим напряжением на электродах. При этом используется перемена знака электрического заряда электрода Q при переходе через резонансные $(Q = \infty)$ и антирезонансные $(Q = 0)$ частоты.

На основании изложенного выше конечноэлементного подхода получены решения ряда задач термомеханики пьезоэлектрических тел. Эти решения опубликованы в работах [60, 71, 112 и др.]. Часть результатов указанных работ представлена ниже.

§ 3. Семейство вязкоупругих конических пьезоэлементов

Рассмотрим семейство конических пьезокерамических элементов, образованных вращением прямоугольника, одна из вершин которого находится на постоянном расстоянии от оси вращения (рис. 5.3).

Рис. 5.3.

Поворачивая прямоугольник вокруг этой вершины, получаем различные конусы с переменным углом конусности α. Колебания возбуждаются гармонической разностью потенциалов $\Delta\varphi e^{i\omega t}$, подводимой к электродированным коническим поверхностям. Элементы свободны от механической нагрузки. Поляризация пьезокерамики толщинная. По всей поверхности элементов осуществляется конвективный теплообмен с коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{\text{т}} = const$ и при температуре внешней среды $T^{\text{с}} = const$. Таким образом, относительно электромеханического поля и теплового поля виброразогрева имеет место осевая симметрия.

Электроупругие колебания рассматриваемых конических элементов исследовались в работах [17, 35].

Ниже представлены результаты, соответствующие наиболее простой постановке задачи термоэлектровязкоупругости, когда зависимость свойств материала от температуры не учитывается. Электромеханические характеристики, фигурирующие в формулах преобразования (5.14), соответствуют пьезокерамике ЦТС–19 [136]:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{C}_{11}^{E} = 11,2(1+0,0132i)\cdot C_0, && \tilde{C}_{12}^{E} = 6,42(1+0,0152i)\cdot C_0,\\
&\tilde{C}_{13}^{E} = 6,22(1+0,0182i)\cdot C_0, && \tilde{C}_{33}^{E} = 10,6(1+0,0162i)\cdot C_0,\\
&\tilde{C}_{55}^{E} = 2,49(1+0,0157i)\cdot C_0, && C_0 = 10^{10}\,\text{Па},\\
&\tilde{e}_{31} = -3,4(1-0,034i)\cdot e_0, && \tilde{e}_{33} = 15,1(1-0,0073i)\cdot e_0,\\
&\tilde{e}_{15} = 9,45(1-0,0093i)\cdot e_0, && e_0 = 1\text{К}/\text{ м}^2,\\
&\tilde{\mu}_{11}^{\varepsilon} = 0,726(1-0,031i)\cdot\mu_0, && \tilde{\mu}_{33}^{\varepsilon} = 0,827(1-0,0215i)\cdot\mu_0,
\end{aligned}
$$

$$\tilde{\mu}_0 = 10^{-8}\,\Phi/\text{м}.$$

Относительно коэффициентов теплопроводности предполагалось, что $\lambda_{zz} = \lambda_{rr} = \lambda$, $\lambda_{zr} = 0$.

Точка поворота прямоугольника находится от оси вращения на расстоянии $2,5$ мм. Прямоугольник вращения имеет размеры: $h = 5$ мм, $l = 30$ мм. Для теплофизических характеристик принимались следующие значения: $\lambda = 1,25\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}}$; $c_\text{т} = \frac{\lambda}{\rho\cdot a_\text{т}}$; $\rho = 7,74\cdot 10^3\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $a_\text{т} = 0,4\cdot 10^{-6}\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$. Считалось также, что $T^\text{с} = 20^\circ C$, $\alpha_\text{т} = 5\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{ град}}$. Электрическая нагрузка $\Delta\varphi = 12$ В.

Рис. 5.4.

Рис. 5.5.

На рис. 5.4 показан расчетный частотный спектр первых шести резонансных частот в зависимости от угла полураствора α. Соответствующие этим частотам значения КЭМС, вычисляемые по формулам (4.29), приведены на рис. 5.5.

В табл. 5.1 представлены значения первых четырех резонансных частот при $\alpha = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$, найденных с помощью используемого в данной работе конечноэлементного подхода (I), и экспериментально измеренных значений (II) [35].

Соответствие теоретических и экспериментальных данных можно считать вполне удовлетворительным. Подтверждается также факт [35], что при увеличении угла конусности номера пьезоэлектрически сильных мод уменьшаются.

Наибольшей пьезоэлектрической связанностью при $\alpha > 20^\circ$ характеризуется третья мода, которая для предельного значения $\alpha = 90^\circ$ соответствует радиальному резонансу диска с частотой $31,13$ кГц. Расчёт

Таблица 5.1. *Вычисленные и экспериментально измеренные резонансные частоты*

α, (град)	Метод определения	Номер моды			
		1	2	3	4
20	I	31,41	41,94	57,96	61,51
	II	31,20	41,65	56,54	60,77
30	I	23,85	36,02	53,32	55,98
	II	23,55	35,48	52,51	54,81
40	I	19,05	31,68	47,38	54,10
	II	18,82	31,11	46,37	52,66

диска с учетом принятия гипотез обобщенного плоского напряженного состояния для механических переменных [62] даёт значение частоты $31,2$ кГц.

Рис. 5.6.

Характер распределения стационарной температуры диссипативного разогрева вдоль оси на срединной поверхности конуса для пьезоактивной третьей резонансной частоты при углах полураствора $\alpha = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 80^\circ$ показан на рис. 5.6 кривыми 1, 2, 3, 4 соответственно. Видно, что распределение температуры диссипативного разогрева по длине конуса может быть весьма неравномерным. Имеющиеся отличия в поведении кривых на рис. 5.6 объясняются тем, что с изменением угла α изменяется и форма колебаний элемента. Изменяемость формы колебаний при увеличении α характерна также для любой другой кривой из рис. 5.4.

§ 4. Вязкоупругий пьезокерамический полый круговой цилиндр конечной длины

Следуя работе [89], рассмотрим полый круговой пьезокерамический цилиндр с осью вращения z. Внутреннюю $(r = r_1)$ и внешнюю $(r = r_2)$ поверхности цилиндра считаем полностью покрытыми электродами, к которым прикладывается электрическое напряжение $\Delta\varphi \cos\omega t$. Торцы цилиндра $z = \pm l$ не электродированы. Поляризация цилиндра толщинная. Поверхность свободна от механической нагрузки. По всей границе цилиндра предполагается конвективный теплообмен с окружающей средой температуры T^c и коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{_T}$.

Рис. 5.7.

С учетом условий симметрии задачи при вычислениях можно рассматривать четверть меридионального сечения цилиндра (рис. 5.7). Принимаются следующие значения параметров: $r_1 = 0,008$ м; $r_2 = 0,012$ м; $\alpha_{\text{т}} = 300 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$; $\rho = 7500 \text{кг} / \text{м}^3$. Как и в предыдущем параграфе, будем считать, что материал является изотропным относительно теплофизических свойств, при этом значения коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости возьмем такими же, как и в § 3. Для начальной температуры цилиндра примем $\overset{\circ}{T} = T^c = 20°\text{C}$.

Представленные в данном параграфе результаты расчетов взяты из работ [60, 89] и соответствуют цилиндру из пьезокерамики ЦТС$_{\text{Т}}$БС–2. Температурные зависимости электромеханических свойств этой пьезокерамики, приведенные в монографии [58] в виде графиков, аппроксимировались в работе [89] следующими выражениями для составляющих комплексных податливостей $\tilde{S}^{^E} = S^{^E}(1 - iS'')$, пьезоконстант $\tilde{d} = d\,(1 - id'')$ и диэлектрических проницаемостей $\tilde{\mu}^\sigma = \mu^\sigma\,(1 - i\mu'')$:

$$
\begin{aligned}
&S_{ij}^{^E} = S_{ij}^0\left[1 + \alpha_{ij}\,(T - T_1)\right] \quad (ij = 11, 12, 13, 55)\,;\\
&S_{33}^{^E} = S_{33}^0\left[1 + \alpha_{33}\,(T - T_1) + \alpha'_{33}\,(T - T_1)^2\right];\\
&S''_{ij} = \delta_{ij}^{^E}\left[1 + \beta_{ij}\,(T - T_1) + \beta'_{ij}\,(T - T_1)^2\right] \quad (ij = 11, 13, 33, 55)\,;\\
&S''_{12} = \delta_{12}^{^E}\left[1 + \beta_{12}\,(T - T_1) + \beta'_{12}\,(T - T_1)^2 + \beta''_{12}\,(T - T_1)^3\right];\\
&d_{kl} = d_{kl}^0\left[1 + \xi_{kl}\,(T - T_1) + \xi'_{kl}\,(T - T_1)^2\right];\\
&d''_{kl} = \delta_{kl}^{^P}\left[1 + \eta_{kl}\,(T - T_1) + \eta'_{kl}\,(T - T_1)^2\right] \quad (kl = 33,\ 31,\ 15)\,;\\
&\mu_{mn}^\sigma = \mu_{mn}^0\left[1 + \gamma_{mn}\,(T - T_1) + \gamma'_{mn}\,(T - T_1)^2\right];\\
&\mu''_{mn} = \delta_{mn}^\sigma\left[1 + \theta_{mn}\,(T - T_1) + \theta'_{mn}\,(T - T_1)^2\right] \quad (mn = 11,\ 33)\,.
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

Значения параметров в (5.38) следующие:

$S_{11}^0 = 12,5 \cdot S_0$; $S_{12}^0 = -4,62 \cdot S_0$; $S_{13}^0 = -5,42 \cdot S_0$; $S_{55}^0 = 39,7 \cdot S_0$; $S_{33}^0 = 14,8 \cdot S_0$; $S_0 = 10^{-12}\text{Па}^{-1}$; $d_{33}^0 = 330 \cdot d_0$; $d_{31}^0 = -160 \cdot d_0$; $d_{15}^0 = 450 \cdot d_0$; $d_0 = 10^{-12}\text{Кл}/\text{Н}$; $\mu_{11}^0 = 1850 \cdot \varepsilon_0$; $\mu_{33}^0 = 2100 \cdot \varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12}\Phi/\text{м}$; $\delta_{11}^E = 0,0016$; $\delta_{13}^E = -0,0015$; $\delta_{33}^E = 0,00125$; $\delta_{55}^E = 0,0014$; $\delta_{12}^E = 0,0014$; $\delta_{33}^P = 0,003$; $\delta_{31}^P = 0,004$; $\delta_{15}^P = 0,0035$; $\delta_{11}^\sigma = 0,005$; $\delta_{33}^\sigma = 0,0035$; $\alpha_{11} = 4,667 \cdot \alpha_0$; $\alpha_{12} = 10,46 \cdot \alpha_0$; $\alpha_{13} = -9,686 \cdot \alpha_0$; $\alpha_{55} = 10,83 \cdot \alpha_0$; $\alpha_{33} = 6,475 \cdot \alpha_0$; $\beta_{11} = 7,813 \cdot \alpha_0$; $\beta_{13} = 96,67 \cdot \alpha_0$; $\beta_{33} = 190,7 \cdot \alpha_0$; $\beta_{55} = 135,71 \cdot \alpha_0$; $\beta_{12} = 234,8 \cdot \alpha_0$; $\xi_{33} = 28,41 \cdot \alpha_0$; $\xi_{31} = 8,333 \cdot \alpha_0$; $\xi_{15} = 3,704 \cdot \alpha_0$; $\eta_{33} = 94,44 \cdot \alpha_0$; $\eta_{31} = 156,3 \cdot \alpha_0$; $\eta_{15} = 10,71 \cdot \alpha_0$; $\gamma_{11} = 11,26 \cdot \alpha_0$; $\gamma_{33} = 17,86 \cdot \alpha_0$; $\theta_{11} = 75 \cdot \alpha_0$; $\theta_{33} = 154,8 \cdot \alpha_0$; $\alpha_0 = 10^{-4}\text{град}^{-1}$; $\alpha'_{33} = -0,5161 \cdot \beta_0$; $\beta'_{11} = 3,906 \cdot \beta_0$; $\beta'_{13} = -3,333 \cdot \beta_0$; $\beta'_{33} = -10,67 \cdot \beta_0$; $\beta'_{55} = -7,143 \cdot \beta_0$; $\beta'_{12} = -41,96 \cdot \beta_0$; $\xi'_{33} = 0,4735 \cdot \beta_0$; $\xi'_{31} = 1,389 \cdot \beta_0$; $\xi'_{15} = 0,6173 \cdot \beta_0$; $\eta'_{33} = 8,333 \cdot \beta_0$; $\eta'_{31} = 12,15 \cdot \beta_0$; $\eta'_{15} = 3,77 \cdot \beta_0$; $\gamma'_{11} = 5,631 \cdot \beta_0$; $\gamma'_{33} = 5,622 \cdot \beta_0$; $\theta'_{11} = 12,5 \cdot \beta_0$; $\theta'_{33} = 5,952 \cdot \beta_0$; $\beta_0 = 10^{-5}\text{град}^{-2}$; $\beta''_{12} = 2,455 \cdot 10^{-6}\text{град}^{-3}$; $T_1 = 20^\circ\text{C}$.

Поскольку зависимость свойств пьезоматериала от температуры выражена в величинах $\tilde{S}_{ij}^E$, $\tilde{d}_{kl}$ и $\tilde{\mu}_{mn}^\sigma$, а основные соотношения § 1 и § 2 записаны в терминах величин $\tilde{C}_{ij}^E$, $\tilde{e}_{kl}$, $\tilde{\mu}_{mn}^\varepsilon$, должны использоваться формулы преобразования (3.124)

$$\begin{gathered}
\tilde{C}_{33}^E = \frac{\tilde{S}_{11}^E + \tilde{S}_{12}^E}{\tilde{P}}, \quad \tilde{C}_{13}^E = -\frac{\tilde{S}_{13}^E}{\tilde{P}}, \quad \tilde{C}_{12}^E = \frac{\tilde{S}_{13}^{E^2} - \tilde{S}_{12}^E \cdot \tilde{S}_{33}^E}{\tilde{P}(\tilde{S}_{11}^E - \tilde{S}_{12}^E)}, \\
\tilde{C}_{55}^E = \frac{1}{\tilde{S}_{55}^E}, \quad \tilde{C}_{11}^E = \frac{\tilde{S}_{11}^E \cdot \tilde{S}_{33}^E - \tilde{S}_{13}^{E^2}}{\tilde{P}(\tilde{S}_{11}^E - \tilde{S}_{12}^E)}, \quad \tilde{e}_{15} = \frac{\tilde{d}_{15}}{\tilde{S}_{55}^E}, \\
\tilde{e}_{33} = \frac{\tilde{d}_{33}(\tilde{S}_{11}^E + \tilde{S}_{12}^E) - 2\tilde{d}_{31}\tilde{S}_{13}^E}{\tilde{P}}, \quad \tilde{e}_{31} = \frac{\tilde{d}_{31} \cdot \tilde{S}_{33}^E - \tilde{d}_{33} \cdot \tilde{S}_{13}^E}{\tilde{P}}, \\
\tilde{\mu}_{33}^\varepsilon = \tilde{\mu}_{33}^\sigma - \frac{\tilde{d}_{33}^2 \cdot (\tilde{S}_{11}^E + \tilde{S}_{12}^E) + 2\tilde{d}_{31}^2 \cdot \tilde{S}_{33}^E - 4\tilde{d}_{33} \cdot \tilde{d}_{31} \cdot \tilde{S}_{13}^E}{\tilde{P}}, \\
\tilde{\mu}_{11}^\varepsilon = \tilde{\mu}_{11}^\sigma - \frac{\tilde{d}_{15}^2}{\tilde{S}_{55}^E}, \quad \tilde{P} = \tilde{S}_{33}^E(\tilde{S}_{11}^E + \tilde{S}_{12}^E) - 2\tilde{S}_{13}^{E^2}.
\end{gathered} \tag{5.39}$$

На рис. 5.8 представлены зависимости от длины цилиндра значений первых трех его резонансных частот и соответствующих этим частотам значений КЭМС. Здесь $r_0 = (r_1 + r_2)/2$. Для цилиндров соизмеримых

Рис. 5.8.

размеров ($1 < l/r_0 < 2$) колебания на первой и третьей резонансных частотах отождествляются соответственно с объемными противофазной и синфазной модами, описанными Друмгеллером и Калнинсом [185]. В первой моде при расширении цилиндра в радиальном направлении одновременно происходит уменьшение его длины. В синфазной моде расширение и удлинение происходят одновременно. Вторая, изгибная мода в [185] пропущена. Ей соответствует противофазное распределение с двумя узловыми окружностями по длине цилиндра радиальной компоненты смещения. Как видно из рис. 5.8, наибольшей пьезоэлектрической связанностью характеризуется объемная синфазная мода колебаний.

Рис. 5.9.

На рис. 5.9 показаны изменения с частотой КЭМС и КЗЭМК (коэффициента затухания электромеханических колебаний) в диапазоне, включающем три первых резонансных частоты для цилиндра длиной $l = 0,015$ м.

Рис. 5.10. Рис. 5.11.

На рис. 5.10 для $l = 0,015$ м и $\Delta\varphi = 100$ В показана частотная зависимость амплитуды тока смещения $I = |i\omega\,(Q_0' + iQ_0'')|$, где $Q_0' + iQ_0''$ – комплексная амплитуда заряда на электроде. Штриховая линия соответствует электроупругому решению задачи, а сплошная – решению с учетом вязкоупругих свойств материала с независящими от температуры свойствами.

Для оценки эффектов, порождаемых зависимостью электромеханических характеристик материала от температуры выбиралась окрестность третьего резонанса цилиндра при $l = 0,015$м. На рис. 5.11 показана частотная зависимость установившейся температуры виброразогрева в точках срединной поверхности цилиндра, лежащих в сечении $z = 0$ ($\Delta\varphi = 12$ В). Здесь и дальше сплошные линии отвечают общему случаю зависящих от температуры свойств материала, а штриховые – случаю, когда эта зависимость не учитывается (в соотношениях (5.38) полагается $T = T_1$). Видно, что учет температурной зависимости электромеханических характеристик пьезоматериала приводит не только к количественному, но и к качественному отличию результатов. Он позволяет выявить существенно нелинейный характер поведения температуры разогрева. При возрастании частоты происходит перескок из точки I на низкотемпературной ветви $\left(\omega_I = 4,2455 \cdot 10^5 \text{ рад/ с}\right)$ в точку II на высокотемпературной ветви. Под перескоком понимается ситуация, когда для $\omega < \omega_I$ реализуется низкотемпературное установившееся состояние, а для $\omega > \omega_I$ – высокотемпературное. При дальнейшем увеличении частоты реализуется участок II – III. При уменьшении частоты процесс идет по участку III – IV. Из точки IV происходит перескок в точку V на низкотемпературной ветви $\left(\omega_{IV} = 4,2345 \cdot 10^5 \text{рад/с}\right)$.

В диапазоне частот $\omega_{IV} < \omega < \omega_I$ нелинейная система (цилиндр) имеет два устойчивых состояния (участки V – I и IV – II). Реализация того или другого состояния зависит от начального состояния системы.

В окрестности резонанса даже для низкого уровня электрического возбуждения ($\Delta\varphi = 12$ В) температура диссипативного разогрева достигает значительной величины. Однако распределение ее по объему цилиндра весьма неравномерно. Так, например, в случае реализации высокотемпературного состояния для $\omega = 4,235 \cdot 10^5$рад/с максимальное приращение температуры в центральной части цилиндра $T - \overset{\circ}{T} = 89,5°\text{C}$, тогда как на торцах $T - \overset{\circ}{T} = 7,7°\text{C}$.

Изменения амплитуд электрических и механических величин с частотой для установившихся состояний аналогичны изменению температуры.

Рис. 5.12. Рис. 5.13.

На рисунке 5.12 показана, например, частотная зависимость установившейся амплитуды тока смещения.

При построении участков неоднозначности частотных характеристик использовался прием продолжения решения по частоте нагружения [60].

Некоторые результаты для установившегося состояния на частоте линейного резонанса $\left(\omega = 4,2506 \cdot 10^5 \text{рад/с}\right)$ представлены на рис. 5.13, 5.14 и 5.15.

Рис. 5.14.

На рис. 5.13 показаны распределения температуры и амплитуд электрического потенциала, радиальной составляющей индукции электрического поля, окружного (кривые 1) и осевого (кривые 2) напряжений по толщине цилиндра в сечении $z = 0$. Здесь $\xi = (r - r_1) / (r_2 - r_1)$. Ввиду малости толщины цилиндра температура изменяется по толщине незначительно. Изменение амплитуды электрического потенциала носит квадратичный характер с вершиной параболы, примерно, в средней точке сечения. Характер изменения по толщине радиальной составляющей индукции электрического поля и механических напряжений близок к линейному, причем изменение амплитуды осевого напряжения незначительно, намного меньше, чем изменение амплитуды окружного напряжения. Большие механические напряжения в центральной части цилиндра свидетельствуют о возможности его механического повреждения на частоте резонанса даже при незначительных уровнях электрического возбуждения ($\Delta\varphi = 12$ В).

Поведение указанных на рис. 5.13 величин в любом другом сечении $z = \text{const}$ качественно аналогичное.

Как видно из рис. 5.13, учет зависимости свойств материала от температуры приводит к снижению резонансных уровней виброразогрева и амплитуд электрических и механических величин.

О характере распределения плотности электрического заряда на электродированной поверхности можно судить из рис. 5.14, где показано изменение амплитуды $\left|\tilde{D}_r\right|$ радиальной составляющей вектора индукции электрического поля (равной в данном случае амплитуде нормальной составляющей) вдоль длины цилиндра на его внутренней поверхности ($r = r_1$). Здесь $\eta = z/l$. Видно, что плотность электрического заряда уменьшается по направлению к краям цилиндра по квадратичному закону. Характер изменения $\left|\tilde{D}_r\right|$ вдоль длины цилиндра на внешней ($r = r_2$) поверхности, как и на любой внутренней поверхности $r = const$ $(r_1 < r < r_2)$ аналогичен приведенному на рис. 5.14.

Штрих-пунктирной кривой для случая независящих от температуры свойств материала показано изменение амплитуды осевой составляющей $\left|\tilde{D}_z\right|$ вектора индукции электрического поля вдоль длины цилиндра в точках его срединной поверхности $r = (r_2 - r_1)/2$. Видно, что отклонение вектора индукции от радиального направления незначительно даже в точках максимальных значений $\left|\tilde{D}_z\right|$.

Рис. 5.15.

Распределение температуры и амплитуды электрического потенциала вдоль оси на срединной поверхности цилиндра, а также амплитуд окруженного (кривые 1) и осевого (кривые 2) напряжений соответственно на внутренней ($r = r_1$) и внешней ($r = r_2$) цилиндрических поверхностях показано на рис. 5.15. Вино, что распределение температуры диссипативного разогрева по длине цилиндра весьма неравномерно. Можно отметить сложный характер изменения амплитуды электрического потенциала.

Представленное на рис. 5.15 штрих-пунктирной линией распределение (для случая независящих от температуры свойств материала) амплитуды осевой составляющей $\left|\tilde{E}_z\right|$ вектора напряженности электрического поля вдоль срединной линии указывает на точки перегиба кривой для электрического потенциала, примерно, в сечениях $\eta = 0,25$ и $\eta = 0,875$. Максимальное значение амплитуды потенциала достигается в сечении $\eta = 0,5$ (точки, в которых $\left|\tilde{E}_z\right|$ принимает нулевые значения).

Изменения амплитуд механических напряжений $\left|\tilde{\sigma}_\varphi\right|$ и $\left|\tilde{\sigma}_z\right|$ по длине цилиндра носят квадратичный характер. Отметим, что в данном случае радиальное напряжение (максимальное значение $\left|\tilde{\sigma}_r\right|$ достигается в точках срединной поверхности ($r = (r_2 - r_1)/2$), лежащих в сечении $z = 0$) и касательное напряжение $\big($максимальное значение $|\tilde{\sigma}_{zr}|$ достигается в точках срединной поверхности, лежащих в сечении $z = {}^l\!/_2\big)$ не вносят существенного вклада в напряженное состояние цилиндра, поскольку они значительно ниже напряжений, приведенных на рис. 5.15.

Изменение температуры диссипативного разогрева во времени в точках срединной поверхности, лежащих в сечении $z = 0$, при $\omega = 4,25\times$ $\times 10^5$рад/с показано на рис. 5.16.

Рис. 5.16. Рис. 5.17.

На рис. 5.17 для этих же точек цилиндра (случай независящих от температуры свойств материала) представлена зависимость температуры диссипативного разогрева от амплитуды электрической нагрузки $\Delta\varphi$ на частоте $\omega = 4,23{\cdot}10^5$рад/с. Эта зависимость носит квадратичный характер, что согласуется с выражением для диссипативной функции (1.188).

Из представленных в данном параграфе результатов численных экспериментов следует, что учет зависимости свойств материала от температуры приводит к снижению уровня разогрева цилиндра и появлению неоднозначности амплитудно- и температурно-частотных характеристик в окрестности собственной частоты, что свидетельствует о существовании нескольких колебательных и температурных режимов рассматриваемой системы (цилиндр). Количественное отличие результатов существенно только в непосредственной близости от резонанса. В области же частот, далеких от резонансной, электрические, механические и тепловые поля цилиндра могут быть рассчитаны без учета зависимости свойств материала от температуры.

§ 5. Семейство вязкоупругих сферических пьезоэлементов

Рассмотрим в цилиндрической системе координат полый незамкнутый пьезокерамический шар, половина меридионального сечения которого показана на рис. 5.18. Внутренняя ($r = r_1$) и внешняя ($r = r_2$) поверхности шара полностью покрыты электродами, к которым прикладывается электрическое напряжение $\Delta\varphi\cos\omega t$. Поверхность отверстия

Рис. 5.18.

$\theta = \theta_0$ неэлектродирована. Поляризация радиальная. Поверхность шара свободна от механической нагрузки. На внутренней и внешней сферических поверхностях и на поверхности отверстия предполагается конвективный теплообмен (с коэффициентами теплоотдачи α_{T_1}, α_{T_2}, α_{T_3} соответственно) с окружающей средой температуры T^c. Начальная температура шара – $\overset{\circ}{T}$. Принималось, что: $r_1 = 0,02$ м, $r_2 = 0,025$ м, $\Delta\varphi = 12$ В, $\overset{\circ}{T} = T^c = 20°$C, $\alpha_{T_1} = \alpha_{T_3} = 250\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$, $\alpha_{T_2} = 25\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$. Теплофизические и электромеханические характеристики пьезоматериала такие же, как и в § 4. Поскольку решение задачи проводится в цилиндрической системе координат, должны использоваться формулы преобразования (5.14).

5.1 Представляет интерес исследование влияния величины отверстия на резонансные электромеханические колебания и диссипативный разогрев шара. Данная задача рассматривалась в предположении независящих от температуры свойств материала. Значения θ_0 выбирались

Таблица 5.2.

θ_0	$\tilde{\omega}_1$	№ ф.	$k_э$	$\psi\cdot 10^3$	$\tilde{\omega}_2$	№ ф.	$k_э$	$\psi\cdot 10^3$
5°	1,1089	1	0,095	19,22	1,5681	2	0,025	13,20
10°	1,1122	1	0,005	11,52	1,5686	2	0,008	8,22
15°	1,1191	1	0,001	9,66	1,5616	2	0,020	7,65
20°	1,1295	1	0,023	9,23	1,6067	2	0,025	7,42
25°	1,1434	1	0,023	9,05	1,6418	2	0,041	7,25
30°	1,1602	1	0,031	8,93	1,6842	2	0,060	7,10
θ_0	$\tilde{\omega}_3$	№ ф.	$k_э$	$\psi\cdot 10^3$	$\tilde{\omega}_4$	№ ф.	$k_э$	$\psi\cdot 10^3$
5°	2,1395	3	0,021	7,96	2,5971	4	0,617	11,47
10°	2,1438	3	0,024	6,52	2,5714	4	0,609	11,40
15°	2,1791	3	0,043	6,34	2,5040	4	0,572	11,20
20°	2,2329	3	0,128	6,35	2,3816	4	0,484	10,74
25°	2,2037	7	0,394	9,97	2,3362	3	0,154	6,76
30°	2,0705	7	0,354	10,32	2,4226	3	0,049	6,17
θ_0	$\tilde{\omega}_5$	№ ф.	$k_э$	$\psi\cdot 10^3$	$\tilde{\omega}_6$	№ ф.	$k_э$	$\psi\cdot 10^3$
5°	1,1089	5	0,095	19,22	1,5681	6	0,025	13,20
10°	1,1122	5	0,005	11,52	1,5686	6	0,008	8,22
15°	1,1191	6	0,001	9,66	1,5616	5	0,020	7,65
20°	1,1295	6	0,023	9,23	1,6067	5	0,025	7,42
25°	1,1434	6	0,023	9,05	1,6418	5	0,041	7,25
30°	1,1602	6	0,031	8,93	1,6842	5	0,060	7,10

в промежутке от 5° до 30°. Спектр резонансных частот для каждого из приведенных в табл. 5.2 значений θ_0 ограничивался первыми шестью резонансами. Значения резонансных частот представлены в таблице в безмерном виде $\tilde{\omega} = \omega\cdot 10^{-5}$с/рад. Для каждой резонансной частоты $\tilde{\omega}_N$ указаны соответствующие ей форма колебаний срединной поверхности шара, изображенная на рис. 5.19, КЭМС и КЗЭМК.

Рис. 5.19.

Для сравнения отметим, что для основной моды замкнутого шара ($\theta_0 = 0$) резонансная частота $\tilde{\omega} = 2,6033$, величины КЭМС и КЗЭМК соответственно равны $k_э = 0,62$, $\psi = 0,0115$, а температура $\bar{T} = \left(T - \overset{\circ}{T}\right)/\overset{\circ}{T}$ на внутренней поверхности равна 3,44 при $\alpha_{T_2} = 0$.

Отметим характерные особенности рассматриваемого спектра. Первая и вторая моды колебаний шара для всех θ_0 из рассматриваемого промежутка являются трудно возбудимыми ($k_э$ – мал). Эти моды – изгибные, с противофазным распределением радиального смещения u_r вдоль меридиана соответственно с двумя и тремя узловыми окружностями (формы 1 и 2 на рис. 5.19), положение которых меняется с изменением θ_0.

Изгибная третья мода для малых величин θ_0 (форма 3 с четырьмя узловыми окружностями для u_r) также характеризуется слабой связанностью механических и электрических полей. Однако для больших значений θ_0 колебания приобретают вид 7 с одной узловой окружностью для u_r и $k_э$ резко возрастает.

Четвертая мода для величин θ_0, не превышающих 20°, характеризуется сильной связанностью механических и электрических полей; $k_э$ достигает своих максимальных значений. Для колебаний характерно синфазное распределение радиального перемещения вдоль меридиана (форма 4), причем для малых θ_0 (до 10°) u_r практически постоянно вдоль меридиана и значительно преобладает над тангенциальной компонентой перемещения u_θ. Значения $k_э$ и $\tilde{\omega}_4$ близки к соответствующим значениям для замкнутого шара. С увеличением отверстия равномерность распределения u_r вдоль меридиана нарушается и при θ_0, бо́льших 20°, колебания приобретают изгибный характер (форма 3), $k_э$ при этом резко падает.

Наиболее пьезоактивной для больших значений θ_0 является изгибная пятая мода, которой соответствуют колебания вида 6 с одной узловой окружностью для u_r. При малых θ_0 (меньших 15°) колебания имеют вид 5 и являются трудно возбудимыми.

Шестая мода не является пьезоактивной для всех рассматриваемых значений θ_0. Для нее характерно обратное по сравнению с пятой модой соответствие форм колебаний 5 и 6 большим и малым значениям θ_0 (см. табл. 5.2).

Характерной особенностью рассматриваемого спектра является отсутствие пьезоактивных радиальных форм колебаний для больших значений θ_0. Наиболее пьезоактивной и легко возбудимой в этом случае является пятая мода, которой соответствуют колебания вида 6 с одной узловой окружностью для u_r.

Что касается коэффициентов затухания электромеханических колебаний, то, как видно из табл. 5.2, для представляющих наибольший интерес пьезоактивных форм колебаний они, примерно, равны для различных значений θ_0 и незначительно отличаются от ψ для основной моды замкнутого шара ($\theta_0 = 0$).

Рис. 5.20.

На рис. 5.20 для каждого значения θ_0 из табл. 5.2 представлено распределение безразмерной температуры $\bar{T}$ на внутренней поверхности ($r = r_1$) шара для резонансной частоты, соответствующей наиболее пьезоактивной форме колебаний (форма 4 или 6 в зависимости от величины θ_0). Значения $\bar{T}$ в каждой точке откладываются по нормали к этой поверхности. Видно, что различным пьезоактивным формам соответствуют качественно различные распределения температуры, при этом неравномерность нагрева шара вдоль меридиана всегда усиливается с увеличением θ_0.

Представленные выше результаты понадобятся нам в дальнейшем.

5.2. Для оценки эффектов, порождаемых зависимостью электромеханических свойств пьезоматериала от температуры, выберем окрестность четвертого резонанса $\tilde{\omega} = 2,5040$ шара с отверстием $\theta_0 = 15°$. В дальнейшем все результаты соответствуют коэффициентам теплоотдачи $\alpha_{T_1} = \alpha_{T_3} = 300 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$ и $\alpha_{T_2} = 30 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$.

Существенной особенностью термоэлектромеханического поведения шара с зависящими от температуры свойствами материала является наличие нескольких колебательных и температурных режимов при изменении частоты в определенных пределах.

Рис. 5.21. Рис. 5.22.

На рис. 5.21 показана зависимость от частоты $\tilde{\omega}$ установившейся температуры $\bar{T} = \left(T - \overset{\circ}{T}\right)/\overset{\circ}{T}$ в точках внутренней поверхности шара, лежащих на параллели $\theta = 20°$. Диссипативный разогрев шара в окрестностях этих точек достигает максимальной величины. На рис. 5.21 и дальше сплошные линии относятся к случаю зависящих от температуры свойств материала, штриховые – к независящим. Как видно из рисунка, учет зависимости свойств материала от температуры приводит не только к количественному, но и к качественному отличию результатов. Он позволяет выявить существенно нелинейный характер поведения температуры саморазогрева. При возрастании частоты происходит перескок из точки I на низкотемпературной ветви ($\tilde{\omega}_I = 2,5005$) в точку II на высокотемпературной. При дальнейшем увеличении частоты реализуется участок II – III. При уменьшении частоты процесс идет по участку III – IV. Из точки IV происходит перескок в точку V на низкотемпературной ветви ($\tilde{\omega}_{IV} = 2,4875$). Таким образом, в диапазоне частот $\tilde{\omega}_{IV} < \tilde{\omega} < \tilde{\omega}_I$ данная нелинейная система (шар) имеет два устойчивых состояния (участки V – I и II – IV). Реализация того или другого состояния зависит от начального состояния шара.

Изменения с частотой амплитуд электрических и механических величин для установившихся состояний аналогичны изменению температуры. На рис. 5.22. показана частотная зависимость установившейся амплитуды тока смещения $\bar{I} = 0,1 \cdot \left|\tilde{I}\right| A^{-1}$.

Некоторые результаты для установившегося состояния на частоте линейного резонанса ($\tilde{\omega} = 2,504$) представлены на рис. 5.23, 5.24.

Рис. 5.23.

На рис. 5.23 показано распределение установившихся амплитуд окружного $\bar{\sigma}_\varphi = |\tilde{\sigma}_\varphi| \cdot 10^{-8}\text{Па}^{-1}$ (кривые 1), тангенциального $\bar{\sigma}_\theta = |\tilde{\sigma}_\theta| \cdot 10^{-8}\text{Па}^{-1}$ (кривые 2) напряжений и нормальной составляющей индукции электрического поля $\bar{D}_n = \left|\tilde{D}_n\right| \cdot 10^2\text{м}^2/\text{К}$ вдоль меридиональных линий на внутренней поверхности шара и установившейся амплитуды электрического потенциала $\bar{v} = \left|\tilde{v}\right| \cdot 10^{-1}\text{В}^{-1}$ вдоль меридиональных линий на его срединной поверхности. Здесь $\eta = (\pi - \theta)/(\pi - \theta_0)$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$. Отметим, что амплитуды радиального $|\tilde{\sigma}_r|$ и касательного $|\tilde{\sigma}_{r\theta}|$ напряжений примерно на два порядка ниже амплитуд напряжений $|\tilde{\sigma}_\varphi|$ и $|\tilde{\sigma}_\theta|$ и поэтому существенного вклада в напряженное состояние шара не вносят. Как видно из рис. 5.23, напряженное состояние в окрестности отверстия определяется окружным напряжением. Здесь его амплитуда примерно на порядок больше соответствующего значения в полюсе шара, что свидетельствует о возможном механическом повреждении шара в окрестности отверстия даже при незначительных уровнях электрического напряжения на электродах ($\Delta\varphi = 12\,$В).

Из рис. 5.23 можно также судить о весьма сложном характере распределения вдоль меридиана амплитуды электрического потенциала. По мере продвижения к отверстию шара наблюдается ряд ярко выраженных экстремальных значений $\left|\tilde{v}\right|$. Максимальное значение амплитуды электрического потенциала достигается в полюсе шара.

О характере распределения на внутреннем электроде шара плотности электрического заряда можно судить по поведению $\left|\tilde{D}_n\right|$. Видно, что максимальное значение заряда достигается в окрестности отверстия. Аналогичную картину распределения электрического заряда имеем на внешнем электроде.

Рис. 5.24.

На рис. 5.24 кривыми 1 представлено распределение по толщине шара ξ ($\xi = (r - r_1)/(r_2 - r_1)$) установившейся амплитуды окружного напряжения ($|\tilde{\sigma}_\varphi| \cdot 10^{-8}$Па$^{-1}$) вблизи сечения $\theta = \theta_0$. Видно, что $|\tilde{\sigma}_\varphi|$ убывает при увеличении ξ по линейному закону. Линейный характер изменения амплитуды окружного напряжения по толщине шара имеет место и в любом другом сечении $\theta = \mathrm{const}$, только в окрестности полюса бо́льшие значения $|\tilde{\sigma}_\varphi|$ достигаются на внешней поверхности ($r = r_2$). Характер изменения по толщине амплитуды тангенциального напряжения $|\tilde{\sigma}_\theta|$ аналогичен изменению $|\tilde{\sigma}_\varphi|$. Отметим также, что окружное и тангенциальное напряжения изменяются в одной фазе, а именно $arctg\dfrac{\sigma''_\varphi}{\sigma'_\varphi} \approx arctg\dfrac{\sigma''_\theta}{\sigma'_\theta} \approx \dfrac{\pi}{2}$, где величины со штрихом и двумя штрихами соответствуют, как и раньше, действительным и мнимым частям комплексных амплитуд этих напряжений.

Отклонение распределения температуры по толщине шара от линейного закона сильнее всего проявляется в местах наибольшего разогрева. Кривыми 2 на рис. 5.24 представлено изменение установившейся температуры $\bar{T}$ в сечении $\theta = 20^\circ$.

Приведенные на рис. 5.23 и 5.24 результаты свидетельствуют, что учет зависимости свойств материала от температуры приводит к количественному уменьшению резонансных уровней разогрева и амплитуд электромеханических величин, однако качественная картина распределений этих величин не изменяется.

Не изменяется также и качественная картина результатов, представленных в п. 5.1.

5.3. В заключение данного параграфа рассмотрим задачу для шара с жестко защемленной поверхностью отверстия. Считаем, что геометрия шара ($\theta_0 = 15$), условия его нагружения и теплообмена остаются прежними. Поскольку качественная картина при учете температурных зависимостей свойств материала не меняется, рассмотрим для простоты решение данной задачи с независящими от температуры свойствами. Характерной особенностью поведения шара с жестко защемленной поверхностью отверстия является отсутствие резонансной синфазной радиальной формы колебаний (для шара со свободной поверхностью отверстия такая форма колебаний соответствует четвертой резонансной частоте (см. табл. 5.2 и рис. 5.19)).

В табл. 5.3 представлены значения первых шести резонансных частот $\tilde{\omega} = \omega \cdot 10^{-5}$с/рад и соответствующие им значения КЭМС.

Таблица 5.3.

№ п/п	$\tilde{\omega}$	$k_э$
1	0,4363	0,030
2	1,3090	0,015
3	1,9030	0,085
4	2,5102	0,481
5	2,7350	0,456
6	3,1443	0,011

Колебания в окрестностях этих частот носят изгибный характер. Как видно из этой таблицы, наибольшей связанностью механических и электрических полей характеризуются колебания шара в окрестностях четвертой и пятой резонансных частот. Соответствующие им формы колебаний срединной поверхности MN изображены на рис. 5.25 кривыми 1 и 2.

Рис. 5.25.

Некоторые результаты числового расчета установившегося электромеханического состояния и температуры разогрева шара с жестко защемленной поверхностью отверстия на частоте пятого резонанса представлены на рис. 5.26 – 5.29.

Рис. 5.26. Рис. 5.27.

Наличие особенностей в угловых точках сечения $\theta = \theta_0$ обусловливает резкий рост напряжений при подходе к этим точкам. На рис. 5.26 показано распределение мнимой составляющей $(\bar{\sigma}''_\varphi = \sigma''_\theta \cdot 10^{-8}\text{Па}^{-1})$ комплексной амплитуды тангенциального напряжения вдоль радиуса в некоторых сечениях $\theta = \text{const}$ (действительная составляющая этой амплитуды при данной точности нахождения резонансной частоты примерно на два порядка ниже мнимой составляющей). Видно, что заметное отклонение распределения напряжения по толщине от линейного закона проявляется только в непосредственной близости к сечению $\theta = \theta_0$.

Начиная с $\theta = 30^\circ$ (что для принятых размеров шара соответствует удалению от отверстия примерно на расстояние одной толщины) это распределение отличается от линейного закона незначительно.

На рис. 5.27 показаны кривые изменения по толщине мнимой части $\left(\bar{D}''_r = D''_r \cdot 10^3\text{м}^2/\text{K}\right)$ комплексной амплитуды радиальной составляющей вектора индукции электрического поля в некоторых сечениях $\theta = \text{const}$. Сказанное выше относительно закона изменения по толщине напряжений σ''_θ имеет место и для D''_r.

Поскольку краевой эффект, т.е. резкий рост тепловых источников в окрестностях особых точек проявляется вблизи граничных поверхностей, условия теплообмена оказывают решающее влияние на распределение температуры в шаре. Чем менее интенсивный теплообмен на поверхностях, тем большее влияние имеет краевой эффект.

Рис. 5.28.

Распределения установившейся температуры $\bar{T} = \left(T - \mathring{T}\right)/\mathring{T}$ по толщине шара в некоторых сечениях $\theta = \text{const}$ для принятых в данном параграфе условий теплообмена представлены на рис. 5.28.

Видно, что максимальное значение температуры в данном случае достигается в полюсе шара. Кривая изменения температуры $\bar{T}$ вдоль меридиальной линии шара на его внутренней поверхности приведена на рис. 5.29.

Рис. 5.29.

Здесь же представлено распределение вдоль срединной поверхности шара мнимой составляющей ($\bar{v}'' = 0,1 \cdot v''/\Delta\varphi,\ \ \Delta\varphi = 12$В) комплексной амплитуды электрического потенциала. Видно, что условие жесткого защемления поверхности отверстия приводит к значительному возрастанию электрического потенциала в полюсе шара и в окрестности отверстия.

Представленные в данном параграфе результаты взяты из работ [60, 104, 117].

§ 6. Пьезокерамический полый шар с цилиндрическим патрубком

Следуя работе [71], рассмотрим вязкоупругое пьезокерамическое тело вращения, половина меридионального сечения которого изображена на рис. 5.30.

Рис. 5.30.

Внутренняя AC и внешняя BD поверхности полностью покрыты электродами, к которым подводится разность потенциалов $\Delta\varphi\cos\omega t$. Торцевая поверхность CD не электродирована. Предварительная поляризация принята нормальной к срединной поверхности тела. На внутренней AC, внешней BD и торцевой CD поверхностях осуществляется конвективный теплообмен (с коэффициентами теплоотдачи α_{T_1}, α_{T_2}, α_{T_3} соответственно) с окружающей средой температуры T^c. Начальная температура тела – $\overset{\circ}{T}$. Поверхность свободна от механической нагрузки.

Ниже численные результаты представлены для пьезокерамики ЦТС$_{\text{Т}}$БС-2, температурные зависимости электромеханических свойств которой приведены в § 4. Кроме того, принималось, что $r_1 = 0,02$ м; $r_2 = 0,025$ м; $l = 0,01$ м; $r_0 = 0,005$ м; $h = 0,005$ м; $\Delta\varphi = 12$ В; $\alpha_{T_1} = \alpha_{T_3} = 300\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$; $\alpha_{T_2} = 30\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$; $T_0 = T^c = 20^\circ$ С; $\rho = 7520$ кг/м^3. Предполагалось также, что $\lambda_{zz} = \lambda_{rr} = \lambda = 1,25\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}}$;

$\lambda_{zr} = 0$, $c_{\text{т}} = \lambda / \rho \cdot a_{\text{т}}$, $\quad a_{\text{т}} = 0,4 \cdot 10^{-6}\text{м}^2/\text{с}$.

В результате численных экспериментов выявлено, что наибольшей связанностью электрического, механического и теплового полей в диапазоне частот, ограниченном первыми четырьмя резонансами, характеризуются колебания тела в окрестности четвертого резонанса.

Рис. 5.31. Рис. 5.32.

На рис. 5.31 для случая независимых от температуры свойств материала показана зависимость от частоты $\bar{\omega} = \omega \cdot 10^{-5}\text{с/рад}$ амплитуды тока $\bar{I} = 0,1 \cdot \left|\tilde{I}\right| A^{-1}$.

Численные значения первых четырех резонансных частот и соответствующие им формы колебаний срединной поверхности MN представлены на рис. 5.32. Здесь же для каждой резонансной частоты указано значение КЭМС. Колебания на первых трех резонансных частотах являются изгибными с противофазным распределением вдоль линии MN нормальной к этой линии компоненты смещения. КЭМС на этих частотах мал и поэтому колебания являются трудновозбудимыми.

Для оценки эффектов, порождаемых зависимостью электромеханических свойств материала от температуры, ограничимся окрестностью четвертого резонанса.

Рис. 5.33.

На рис. 5.33 показаны частотные зависимости максимальной установившейся температуры $\bar{T} = \left(T - \overset{\circ}{T}\right) / \overset{\circ}{T}$ на внутренней поверхности тела, установившейся амплитуды тока $\bar{I}$ и установившейся максимальной амплитуды окружного напряжения $\bar{\sigma}_{\varphi} = |\tilde{\sigma}_{\varphi}| \cdot 10^{-8}\text{Па}^{-1}$ в точке нижней границы AC, лежащей в центре дуги QR сопряжения сферической и цилиндрической частей тела. Здесь и далее сплошные линии соответствуют случаю зависящих от температуры свойств материала, а штриховые – не зависящих, причем сплошные линии построены в области однозначности решений. Видно, что учет зависимости свойств материала от температуры приводит к отклонению температурно- и амплитудно- частотных характеристик влево от резонанса линейной системы и уменьшению уровня разогрева и амплитуд электромеханических величин. Путем продолжения решения по частоте можно добиться затягивания верхних ветвей амплитудно- и температурно-частотных характеристик в сторону уменьшения частоты и появления частотной области с неоднозначными характеристиками. Этот эффект достаточно полно описан в предыдущих параграфах данной главы (см. рис. 5.11, 5.12, 5.21, 5.22).

О распределении температуры виброразогрева вдоль внутренней поверхности AC на частоте линейного резонанса $\tilde{\omega} = 2,4739$ можно судить из рис. 5.34. Здесь значения $\bar{T}$ в точке линии AC откладываются по нормали к этой линии. Значения температуры, заключенные в скобки, соответствуют случаю зависящих от температуры свойств материала. Видно, что максимальная температура виброразогрева имеет место в области сопряжения сферической и цилиндрической частей тела, причем учет температурных зависимостей свойств материала приводит к значительному снижению уровня разогрева, но не меняет качественной картины его распределения.

Рис. 5.34. Рис. 5.35.

На рис. 5.35 представлены кривые изменения по толщине тела $\xi = (r - r_1)/(r_2 - r_1)$ температуры $\bar{T}$ (в сечении QP) и амплитуды электрического потенциала $\bar{v} = 2|\tilde{v}|/\Delta\varphi$, $\Delta\varphi = 12$ В (в сечении AB) для $\tilde{\omega} = 2,4739$.

§ 7. Расчет колебаний и диссипативного разогрева пьезоэлемента с учетом физической нелинейности материала

Представленные в предыдущих параграфах результаты расчетов соответствуют физически линейному материалу с зависящими от температуры свойствами. В настоящем параграфе учитывается как температурная, так и амплитудная зависимость свойств пьезоматериала. Объектом исследования выступает вязкоупругий пьезокерамический поляризованный по радиусу полый круговой цилиндр малой длины (l=0,003 м) из § 4.

Следуя работе [60], будем считать, что комплексные податливости $\tilde{S}^E_{ij}$ $(ij = 11,\ 12,\ 13,\ 33,\ 55)$ зависят от температуры и усредненного за период колебаний второго инварианта тензора деформаций, а комплексные пьезоконстанты $\tilde{d}_{kl}$ $(kl = 33,\ 31,\ 15)$ и диэлектрические проницаемости $\tilde{\mu}^{\sigma}_{mn}$ $(mn = 11,\ 33)$ – только от температуры, причём эти зависимости будем брать в виде (5.38) при тех же значениях параметров. Выражения для податливостей примем в виде [60]

$$\tilde{S}^{E}_{ij} = S^{E}_{ij}(T)\left[1 + \alpha\,(2J)^{0,5}\right]\left(1 - \sqrt{-1}\,S''_{ij}(T)\right) \qquad (ij = 11,\ 12,\ 13,\ 33,\ 55). \tag{5.40}$$

Здесь $S^{E}_{ij}(T)$ и $S''_{ij}(T)$ определяются соотношениями (5.38), а

$$J = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi/\omega} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}dt \qquad \left(\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t\right). \tag{5.41}$$

Заметим, что

$$J = J_4 = J_1^{(\varepsilon)} + J_2^{(\varepsilon)} + J_4^{(\varepsilon)} + J_5^{(\varepsilon)} \tag{5.42}$$

где J_4 и $J_1^{(\varepsilon)},\ J_2^{(\varepsilon)},\ J_4^{(\varepsilon)},\ J_5^{(\varepsilon)}$ – инварианты соответственно из (3.19) и (3.98).

Для рассматриваемого случая осесимметричной деформации

$$J = \frac{1}{2}\left(\varepsilon'^{\,2}_{zz} + \varepsilon''^{\,2}_{zz} + \varepsilon'^{\,2}_{rr} + \varepsilon''^{\,2}_{rr} + \varepsilon'^{\,2}_{\varphi\varphi} + \varepsilon''^{\,2}_{\varphi\varphi} + \varepsilon'^{\,2}_{zr} + \varepsilon''^{\,2}_{zr}\right). \tag{5.43}$$

Использование деформационной зависимости податливостей в свете развитой в главе 3 теории нелинейных амплитудных уравнений предполагает однозначное соответствие между "силовыми" инвариантами $J_i^{(\sigma)}$ из (3.107) и, в нашем случае, "деформационными" инвариантами $J_j^{(\varepsilon)}$ из (3.98). Для этого достаточно, чтобы тангенсы углов всех потерь оставались малыми, а именно, их квадраты и произведения были пренебрежимо малыми по сравнению с единицей. Поскольку линейные потери малы (см.(5.38)), а модель (5.40) предсказывает одинаковую деформационную зависимость действительной и мнимой составляющих комплексных податливостей и, следовательно, не изменяет тангенсов углов потерь, отмеченное выше условие выполняется. Используя уравнения (3.125) с учетом (5.40), величину $1 + \alpha\,(2J)^{0,5}$ из (5.40) можно явно выразить через набор инвариантов $J_j^{(\sigma)}$ из (3.107).

В случае деформированного состояния, когда одна компонента деформации значительно преобладает над остальными и, следовательно, вклад последних в (5.43) пренебрежимо мал, аппроксимация (5.40) при $T = \mathrm{const}$ вырождается в соответствующее соотношение, полученное в результате одноосных экспериментов по определению зависимости комплексной податливости от деформации (напряжения) [58] (информация о многоосных экспериментах в литературе отсутствует). Именно этим обстоятельством продиктован выбор объекта исследования (кольцо) настоящего параграфа.

Механические, электрические и тепловые поля исследовались для установившегося теплового состояния, представляющего наибольший интерес, поскольку в данном состоянии температура диссипативного разогрева достигает максимальной величины. Нелинейная задача термоэлектровязкоупругости со стационарным уравнением теплопроводности решалась итерационным методом, аналогичным методу переменных параметров (МПП) упругости.

Элементарная итерация включает в себя решение линейной задачи стационарных колебаний неоднородных пьезоэлектрических тел и линейной задачи стационарной теплопроводности. Для решения первой задачи на n-й ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) итерации полагаем

$$\tilde{S}^{E}_{ij} = \tilde{S}^{E}_{ij}\left(\overset{n-1}{J},\ \overset{n-1}{T}\right), \quad \tilde{d}_{ke} = \tilde{d}_{ke}\left(\overset{n-1}{T}\right), \quad \tilde{\mu}^{\sigma}_{mn} = \tilde{\mu}^{(\sigma)}_{mn}\left(\overset{n-1}{T}\right), \tag{5.44}$$

где $\overset{n-1}{J}$ и $\overset{n-1}{T}$ – инвариант (5.43) и температура, вычисленные на $(n-1)$-й итерации, причём $\overset{0}{J} = 0$, а $\overset{0}{T}$ – начальная температура. По рассчитанному на n-й итерации электромеханическому состоянию находятся величина $\overset{n}{J}$ и диссипативная функция (1.188)

$$\bar{D}'_{\text{эм}} = \frac{\omega}{2}\left[\left(\overset{n}{\sigma}{}''_{ij}\,\overset{n}{\varepsilon}{}'_{ij} - \overset{n}{\sigma}{}'_{ij}\,\overset{n}{\varepsilon}{}''_{ij}\right) - \left(\overset{n}{D}{}''_{j}\,\overset{n}{\mathrm{E}}{}'_{j} - \overset{n}{D}{}'_{j}\,\overset{n}{\mathrm{E}}{}''_{j}\right)\right], \tag{5.45}$$

а затем решается стационарное уравнение теплопроводности с известным источником тепла и находится температура $\overset{n}{T}$.

Переход от величин $\tilde{S}^{E}_{ij}$, $\tilde{d}_{ke}$ и $\tilde{\mu}^{\sigma}_{mn}$ к величинам $\tilde{C}^{E}_{ij}$, $\tilde{e}_{ke}$ и $\tilde{\mu}^{\varepsilon}_{mn}$ на каждой итерации осуществляется по формулам (5.39).

Указанные выше линейные задачи решаются методом конечных элементов, изложенным в § 2.

С целью ускорения сходимости МПП и с учетом преимущественно осциллирующего характера этой сходимости для модификации данного метода применялся алгоритм типа Эйткена – Стеффенсена. Эффективность этого алгоритма при расчете стационарных колебаний и виброразогрева нелинейных вязкоупругих тел без пьезоэффекта продемонстрирована, например, в работе [149]. После решения на шаге $n \geq 3$ стационарной задачи термоэлектровязкоупругости с характеристиками (5.44) и нахождения величин $\overset{n}{J}$ и $\overset{n}{T}$ определяется итерационный параметр

$$\xi = \left(\overset{n}{p} - \overset{n-1}{p}\right) \Big/ \left(\overset{n-2}{p} - 2\overset{n-1}{p} + \overset{n}{p}\right), \quad p = \max_V T(\vec{x}) \tag{5.46}$$

и улучшенное n-е приближение

$$\begin{pmatrix} \overset{n}{J} \\ \overset{n}{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{n}{J} \\ \overset{n}{T} \end{pmatrix} (1 - \xi) + \begin{pmatrix} \overset{n-1}{J} \\ \overset{n-1}{T} \end{pmatrix} \xi. \tag{5.47}$$

Кроме максимальной по объёму пьезоэлемента температуры в качестве параметра p можно использовать другие характеристики, например, амплитуду тока ($p = |I|$). Близость к установившемуся состоянию определялась величиной

$$\delta T = \max_V \left| \overset{n}{T}(\vec{x}) - \overset{n-1}{T}(\vec{x}) \right|. \tag{5.48}$$

Алгоритм эффективен при осциллирующей сходимости, для которой $0 < \xi < 1$. Именно по этому признаку он и "включался" в схему МПП.

Расчёты проводились при напряжении $\Delta\varphi = 30$ В и значениях параметра нелинейности $\alpha = 2,4;\ 12;\ 24$.

Для расчёта амплитудно- и температурно-частотных характеристик использовался метод продолжения решения по параметру нагружения. Для выхода на частотную характеристику можно продолжить решение по параметру нагрузки $\Delta\varphi$, после чего использовать продолжение по частоте. Чтобы избежать возможной в резонансной области бифуркации решения, расчёты начинались с частот, лежащих вне резонансной области, которые определялись путём решения соответствующей линейной задачи.

Рис. 5.36.

Рис. 5.37.

На рис. 5.36 и 5.37 представлены частотные зависимости амплитуды тока смещения и максимальной по объёму температуры в окрестности первого резонанса. Штриховые кривые соответствуют линейной связанной задаче с независящими от температуры свойствами материала ($\alpha = 0,\ T = T^{\circ}$); кривые 1 и 2 – физически нелинейной задаче (при $\alpha = 2,4$ и $\alpha = 24$ соответственно) с независящими от температуры свойствами; кривая 3 – физически линейной задаче с зависящими от температуры свойствами; кривые 4 и 5 – физически нелинейной задаче ($\alpha = 2,4$ и $\alpha = 12$) с зависящими от температуры свойствами. Видно, что учёт физической нелинейности рассматриваемого типа приводит к отклонению амплитудно- и температурно-частотных характеристик влево от линейного резонанса. При малых параметрах нелинейности (кривые 1) это отклонение незначительно и уровень амплитуд электромеханических величин и температуры практически не изменяется. Только для достаточно больших параметров нелинейности (кривые 2) происходит затягивание верхних ветвей амплитудно- и температурно-частотных кривых в сторону низких частот и формируется частотная область с неоднозначными характеристиками (нелинейный гистерезис). Качественно это аналогично эффекту нелинейности за счёт зависимости свойств материала от температуры (кривые 3). Следует отметить, что рассматриваемая физическая нелинейность, как и температурная зависимость свойств материала, почти не искажает качественную картину распределения электромеханических величин и температуры по толщине и высоте цилиндра, влияя, однако, на амплитуды этих величин и уровень разогрева. Поскольку обе нелинейности имеют одинаковый ("мягкий") тип и вязкость материала увеличивается с ростом температуры, совместное действие этих нелинейностей (кривые 4 и 5) обуславливает существенное снижение резонансного уровня амплитуд электромеханических величин и температуры разогрева вплоть до вырождения областей неоднозначности частотных характеристик (кривая 5).

Более подробно эффекты физической нелинейности будут проанализированы в следующей главе на примере планарных колебаний тонких пьезокерамических пластин.

Глава 6.

Планарные колебания и диссипативный разогрев тонких пьезопластин

В данной главе связанная задача термоэлектровязкоупругости (ТЭВУ) рассматривается применительно к тонким поляризованным по толщине вязкоупругим пьезокерамическим пластинам, совершающим планарные колебания под действием моногармонического электромеханического возбуждения. Представлены алгоритмы решения нелинейных задач, основанные на существующих итерационных методах и методе конечных элементов. Приведены решения ряда задач, на примере которых даётся оценка эффектам, порождаемым физической нелинейностью материала и зависимостью его свойств от температуры. На примере модельной задачи показано, что отрицательные эффекты вследствие зависимости свойств пьезоматериала от температуры практически полностью "компенсируются" эффектами автоподстройки частоты.

Рассмотрим поляризованную по толщине тонкую пьезоэлектрическую пластину, ограниченную контуром L. Расположим начало декартовой системы координат (x_1, x_1, x_3) в срединной плоскости пластины таким образом, чтобы ось Ox_3 была перпендикулярной к срединной плоскости. К электродам, расположенным на плоских гранях пластины $x_3 = \pm h$, подводится гармоническая электрическая нагрузка. На свободной от электродов контурной поверхности и гранях осуществляется конвективный теплообмен с окружающими средами температуры $T^c_{\text{к}}$ и T^c. Коэффициенты теплоотдачи равны соответственно $\alpha_{\text{тк}}$ и $\alpha_{\text{т}}$. Начальная температура пластины $\overset{\circ}{T}$. Плоские грани свободны от механической нагрузки, а механические усилия на контурной поверхности предполагаются симметричными относительно срединной плоскости пластины.

Разрешающая система уравнений, описывающих планарные колебания и диссипативный разогрев тонких поляризованных по толщине пьезоэлектрических пластин при гармоническом электромеханическом возбуждении получена в [98, 99] на основе соотношений общей (трехмерной) теории ТЭВУ (1.185) – (1.191) путем принятия гипотез плоского напряженного состояния для механических переменных, предположения незначительного изменения температуры по толщине пластины и представления электрического потенциала в виде тригонометрического ряда по толщинной координате. При частичной металлизации плоских граней пластины вводилась дополнительная гипотеза равенства нулю нормальной к плоскости пластины составляющей вектора электрической индукции для областей пластины, не лежащих под электродами. В предположении постоянства электромеханических характеристик материала разрешающая система уравнений распадается на три независимые двухмерные задачи, когда вначале решается чисто механическая задача для вязкоупругого материала, по результатам ее решения определяются двухмерные комплексные коэффициенты в разложении электрического потенциала, а затем вычисляется диссипативная функция и определяется температура разогрева путём решения уравнения теплопроводности. Подробный анализ полученных с помощью МКЭ решений этих задач показал, что отклонение изменения комплексной амплитуды $\tilde{\varphi}$ электрического потенциала по толщине от линейного закона наблюдается только в очень узкой окрестности резонансной частоты. Однако, на величину диссипативного источника и, следовательно, на температуру разогрева пьезопластины, указанное отклонение практически не влияет. Поэтому при расчете температурных полей диссипативного разогрева и изучении его влияния на напряженно-деформированное состояние пьезопластины можно принять линейный закон изменения комплексной амплитуды электрического потенциала по толщине

$$\tilde{\varphi} = -x_3\tilde{E}_3, \quad \tilde{E}_3 = const. \tag{6.1}$$

Здесь и ниже будем считать, что электроды полностью покрывают грани $x_3 = \pm h$. Соотношения (6.1) наряду с гипотезами для комплексных амплитуд механических переменных

$$\begin{gathered} \tilde{\sigma}_{33} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{13} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{23} = 0; \\ \tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(x_1, x_2), \quad \tilde{u}_2 = \tilde{u}_2(x_1, x_2) \end{gathered} \tag{6.2}$$

существенно упрощают постановку физически нелинейных задач о планарных колебаниях вязкоупругих тонких пьезопластин.

§ 1. Постановка задачи

Примем за независимые переменные механические напряжения и напряженность электрического поля. Консервативной и диссипативной характеристиками в этом случае выступают функции накопления и диссипации (3.110).

Исходными для вывода уравнений планарных колебаний вязкоупругих тонких пластин с толщинной поляризацией являются в данной работе амплитудные определяющие уравнения вида (3.106), получаемые с использованием предложенного в § 3 гл. 3 подхода к учёту физической нелинейности, и соотношения (1.185) – (1.191) общей (трехмерной) теории. С учетом принятых предположений (6.1) и (6.2) амплитудные определяющие уравнения (3.106) для трансверсально-изотропного материала можно записать в виде

$$\begin{gathered}\tilde{\varepsilon}_{11} = \tilde{S}^{E}_{11}(;)\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{S}^{E}_{12}(;)\tilde{\sigma}_{22} + \tilde{d}^{E}_{31}(;)\tilde{E}_3,\\ \tilde{\varepsilon}_{22} = \tilde{S}^{E}_{12}(;)\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{S}^{E}_{11}(;)\tilde{\sigma}_{22} + \tilde{d}^{E}_{31}(;)\tilde{E}_3,\\ \tilde{\varepsilon}_{12} = [\tilde{S}^{E}_{11}(;) - \tilde{S}^{E}_{12}(;)]\tilde{\sigma}_{12};\end{gathered} \tag{6.3}$$

$$\tilde{D}_3 = \tilde{\mu}^{\sigma}_{33}(;)\tilde{E}_3 + \tilde{d}_{31}(;)[\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22}], \tag{6.4}$$

где (см. (3.111))

$$\begin{aligned}\tilde{S}^{E}_{11}(;) &= \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} S'_{11_L} - i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} S''_{11_L}, \quad & \tilde{S}^{E}_{12}(;) &= \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} S'_{12_L} - i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} S''_{12_L},\\ \tilde{d}_{31}(;) &= \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} d'_{31_L} - i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} d''_{31_L}, \quad & \tilde{\mu}^{\sigma}_{33}(;) &= \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} \mu^{\sigma'}_{33_L} - i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} \mu^{\sigma''}_{33_L},\end{aligned} \tag{6.5}$$

причем

$$\bar{U} = F(\bar{U}_L), \quad \bar{D} = \Phi(\bar{D}_L) \tag{6.6}$$

– некоторые функции величин $\bar{U}_L$ и $\bar{D}_L$. Последние, с учетом соотношений (6.1) и (6.2), принимают вид

$$\frac{1}{2}\bar{U}_L = S'_{11_L}\bar{I}_1 + (S'_{11_L} - S'_{12_L})\bar{I}_2 + d'_{31_L}\bar{I}_6 + \mu^{\sigma'}_{33_L}\bar{I}_{10}, \tag{6.7}$$

$$\frac{1}{2}\bar{D}_L = S''_{11_L}\bar{I}_1 + (S''_{11_L} - S''_{12_L})\bar{I}_2 + d''_{31_L}\bar{I}_6 + \mu^{\sigma''}_{33_L}\bar{I}_{10}, \tag{6.8}$$

где (см. (3.107))

$$\begin{gathered}\bar{I}_1=\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_{11}^{'}+\sigma_{22}^{'}\right)^2+\left(\sigma_{11}^{''}+\sigma_{22}^{''}\right)^2\right]=I_1^{(\sigma)},\\ \bar{I}_2=\sigma_{12}^{'2}+\sigma_{12}^{''2}-\left(\sigma_{11}^{'}\sigma_{22}^{'}+\sigma_{11}^{''}\sigma_{22}^{''}\right)=I_2^{(\sigma)},\\ \bar{I}_6=\left(\sigma_{11}^{'}+\sigma_{22}^{'}\right)E_3^{'}+\left(\sigma_{11}^{''}+\sigma_{22}^{''}\right)E_3^{''}=I_6^{(\sigma)},\\ \bar{I}_{10}=\frac{1}{2}\left(E_3^{'2}+E_3^{''2}\right)=I_{10}^{(\sigma)}.\end{gathered}\tag{6.9}$$

Вопрос о конкретизации зависимостей (6.6) и коэффициентов $S_{11_L}^{','',}$, $S_{12_L}^{','',}$, $d_{31_L}^{','',}$, $\mu_{33_L}^{\sigma','',}$ в (6.7) и (6.8) на основе серии одномерных экспериментов рассматривается в § 3, а пока считаем эти зависимости и коэффициенты известными.

Уравнения (6.3) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{11}=\tilde{C}_{11}^{*}\tilde{\varepsilon}_{11}+\tilde{C}_{12}^{*}\tilde{\varepsilon}_{22}-\tilde{e}_{31}^{*}\tilde{E}_3,\\ \tilde{\sigma}_{22}=\tilde{C}_{12}^{*}\tilde{\varepsilon}_{11}+\tilde{C}_{11}^{*}\tilde{\varepsilon}_{22}-\tilde{e}_{31}^{*}\tilde{E}_3,\quad \tilde{\sigma}_{12}=(\tilde{C}_{11}^{*}-\tilde{C}_{12}^{*})\tilde{\varepsilon}_{12},\end{gathered}\tag{6.10}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{C}_{11}^{*}=\frac{1}{\tilde{S}_{11}^{E}(;)[1-\tilde{\nu}^2]},\quad \tilde{C}_{12}^{*}=\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}_{11}^{E}(;)[1-\tilde{\nu}^2]},\\ \tilde{e}_{31}^{*}=\frac{\tilde{d}_{31}(;)}{\tilde{S}_{11}^{E}(;)(1-\tilde{\nu})},\quad \tilde{\nu}=-\tilde{S}_{12}^{E}(;)/\tilde{S}_{11}^{E}(;).\end{gathered}\tag{6.11}$$

Из трех уравнений механических колебаний (1.185) в рассматриваемом случае планарных колебаний используются только два

$$\tilde{\sigma}_{ij,i}+\rho\omega^2\tilde{u}_j=0\quad (i,j=1,2).\tag{6.12}$$

Уравнения (6.10), (6.12) совместно с кинематическими соотношениями

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j}+\tilde{u}_{j,i})\quad (i,j=1,2)\tag{6.13}$$

и граничными условиями

$$\tilde{\sigma}_{ij}n_i=\tilde{t}_j\ \text{ – на } L_\sigma,\qquad \tilde{u}_j=\tilde{\tilde{u}}_j\ \text{ – на } L_u\tag{6.14}$$

составляют замкнутую систему уравнений планарных колебаний вязкоупругой тонкой пьезоэлектрической пластины с толщинной поляризацией при заданной на электродах электрической нагрузке (заметим, что $\tilde{E}_3 = -\Delta\tilde{\varphi}/2h$, где $\Delta\tilde{\varphi}$ – электрическое напряжение на электродах). При необходимости масса и упругие свойства электродов могут быть учтены благодаря заменам [64]

$$\begin{gathered}\rho \to \rho[1 + 2h_э\rho_э/h\rho], \;\; \tilde{C}^*_{11} \to \tilde{C}^*_{11} + 2h_э\gamma^*_{11}/h, \\ \tilde{C}^*_{12} \to \tilde{C}^*_{12} + 2h_э\gamma^*_{12}/h,\end{gathered} \tag{6.15}$$

где $\gamma^*_{11} = \gamma_{11} - \overset{2}{\gamma}_{12}/\gamma_{11}$, $\gamma^*_{12} = \gamma_{12} - \overset{2}{\gamma}_{12}/\gamma_{11}$, а $\rho_э, \gamma_{11}, \gamma_{12}$ – плотность и упругие модули материала электродов, $2h_э$ – толщины электродов. Ниже электроды считаются бесконечно тонкими $(h_э = 0)$.

В дальнейшем комплексные коэффициенты $\tilde{S}^E_{11}(;)$, $\tilde{S}^E_{12}(;)$, $\tilde{d}_{31}(;)$, $\tilde{\mu}^\sigma_{33}(;)$, а, следовательно, и коэффициенты в уравнениях (6.10) считаем зависящими как от величин $\bar{U}_L, \bar{D}_L$, так и от температуры, под которой подразумевается средняя по толщине пластины температура диссипативного разогрева. Отметим влияние температуры как на величины параметров $S^{',''}_{11_L}, S^{',''}_{12_L}, d^{',''}_{31_L}, \mu^{\sigma',''}_{33_L}$, фигурирующих в выражениях для $\bar{U}_L$ и $\bar{D}_L$ (6.7) и (6.8), так и на вид функций (6.6). В этой связи было бы правильнее говорить о зависимости комплексных коэффициентов не от величин $\bar{U}_L, \bar{D}_L$ и температуры, а от инвариантов (6.9) и температуры. Однако, в дальнейшем мы будем употреблять именно термин "зависимость от величин $\bar{U}_L$ и $\bar{D}_L$", подчеркивая тем самым структуру зависимости комплексных коэффициентов от набора инвариантов.

Для нахождения средней по толщине пластины $2h$ температуры диссипативного разогрева T используется уравнение [62]

$$\rho c_т \dot{T} = div(\lambda_{11} gradT) - \frac{\alpha_т}{h}(T - T^c) + \bar{D}'_{эм} \tag{6.16}$$

с условием на контуре L пластины

$$T_{,i}n_i = -\frac{\alpha_{тк}}{\lambda_{11}}(T - T^c_к) \quad (i = 1, 2) \tag{6.17}$$

и начальным условием

$$T = \overset{0}{T} \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{6.18}$$

Здесь λ_{11} – коэффициент теплопроводности материала в плоскости пластины. Диссипативный источник $\bar{D}'_{эм}$ (1.188) с учетом соотношения для нормальной к плоскости пластины компоненты вектора электрической индукции

$$\tilde{D}_3 = \tilde{\mu}_{33}^* \tilde{E}_3 + \tilde{e}_{31}^* \left(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}\right), \quad \tilde{\mu}_{33}^* = \tilde{\mu}_{33}^{\sigma}(;) - \frac{2\tilde{d}_{31}(;)}{\tilde{S}_{11}^E(;)(1-\tilde{\nu})} \tag{6.19}$$

принимает вид

$$\begin{gathered} \bar{D}'_{\text{эм}} = \frac{\omega}{2} Im\tilde{\Pi}, \\ \tilde{\Pi} = \tilde{C}_{11}^* \left(\tilde{\varepsilon}_{11}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{22}\right) + \tilde{C}_{12}^* \left(\tilde{\varepsilon}_{11}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{22} + \tilde{\varepsilon}_{22}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{11}\right) + \\ +2\left(\tilde{C}_{11}^* - \tilde{C}_{12}^*\right)\tilde{\varepsilon}_{12}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{12} + \bar{\tilde{\mu}}_{33}^* \tilde{E}_3 \bar{\tilde{E}}_3 + \left(\bar{\tilde{e}}_{31}^* - \tilde{e}_{31}^*\right)\left(\bar{\tilde{\varepsilon}}_{11} + \bar{\tilde{\varepsilon}}_{22}\right)\tilde{E}_3. \end{gathered} \tag{6.20}$$

Представленная выше система уравнений (6.10) – (6.20), описывающая планарные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих пьезоэлектрических тонких пластин с толщинной поляризацией, существенно нелинейна из-за зависимости коэффициентов в определяющих уравнениях (6.10) от температуры, величин $\bar{U}_L$, $\bar{D}_L$ и связанности полей. Если эти коэффициенты зависят только от температуры ($\bar{U} = \bar{U}_L$, $\bar{D} = \bar{D}_L$), нелинейность порождается связанностью полей. Если коэффициенты постоянны, задача сводится к решению двух независимых линейных задач, когда вначале рассчитывается механическое состояние пластины и по нему находится диссипативная функция, а затем решается уравнение теплопроводности с известным источником тепла.

Замечание 1. После решения граничной задачи (6.10) – (6.14) может быть найдена деформация пластины по толщине

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \tilde{S}_{13}^E(;)(\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22}) + \tilde{d}_{33}(;)\tilde{E}_3, \tag{6.21}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{13}^E(;) &= \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} S'_{13_L} - i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} S''_{13_L}, \\ \tilde{d}_{33}(;) &= \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} d'_{33_L} - i\frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} d''_{33_L}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Для этого в общем случае, когда величины $\bar{U}_L$, и $\bar{D}_L$ не предполагаются равными энергетическим характеристикам линейной теории, необходимо располагать дополнительной экспериментальной информацией о величине коэффициентов $S'^{,''}_{13_L}$, $d'^{,''}_{33_L}$.

Конкретизируем на случай планарных колебаний вязкоупругих пьезоэлектрических пластин входящие в формулы для КЭМС (4.164) выражения энергии $U_{\text{т}}$, комплексной амплитуды заряда $\tilde{Q}_1$ и комплексной статической ёмкости $\tilde{C}_\varepsilon$. Для энергии $U_т$ имеем

$$U_т = h\int\limits_S Re\tilde{\Pi}ds, \tag{6.23}$$

где, как и раньше, $2h$ – толщина пластины, S – срединная плоскость пластины, а величина $\tilde{\Pi}$ определяется соотношением (6.20).

Для комплексной амплитуды заряда на электроде с учетом (6.1) и (6.19) можно записать

$$\tilde{Q}_1 = \frac{\Delta\tilde{\varphi}}{2h}\int\limits_{S_э}\tilde{\mu}_{33}^* ds - \int\limits_{S_э}\tilde{e}_{31}^*\left(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}\right)ds. \tag{6.24}$$

В случае постоянных электромеханических характеристик

$$\tilde{Q}_1 = \frac{\Delta\tilde{\varphi}}{2h}\tilde{\mu}_{33}^* \cdot S_э - \tilde{e}_{31}^*\int\limits_{S_э}(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22})ds. \tag{6.25}$$

Напомним, что нами рассматривается пьезопластина с полностью металлизированными главными гранями, так что $S_э = S$. В этом случае задача электростатики (4.16), где все величины следует считать комплексными, допускает точное решение

$$\tilde{\varphi} = \frac{\Delta\tilde{\varphi}}{2h}x_3, \tag{6.26}$$

которому соответствует комплексный заряд электрода

$$\tilde{Q}_0 = -\int\limits_{S_э}\tilde{D}_3 ds = \int\limits_{S_э}\tilde{\mu}_{33}^\varepsilon\tilde{\varphi}_{,3}\, ds = \frac{\Delta\tilde{\varphi}}{2h}\int\limits_{S_э}\tilde{\mu}_{33}^\varepsilon ds. \tag{6.27}$$

Поэтому для комплексной статической ёмкости имеем

$$\tilde{C}_\varepsilon = \tilde{C}_\varepsilon' + \tilde{C}_\varepsilon'' = \frac{\tilde{Q}_0}{\Delta\tilde{\varphi}} = \frac{1}{2h}\int\limits_{S_э}\tilde{\mu}_{33}^\varepsilon ds. \tag{6.28}$$

Если $\tilde{\mu}_{33}^\varepsilon = const$, то

$$\tilde{C}_\varepsilon = \frac{S_э\tilde{\mu}_{33}^\varepsilon}{2h}. \tag{6.29}$$

Замечание 2. В (6.27) – (6.29) фигурирует комплексная диэлектрическая проницаемость на нулевых деформациях $\tilde{\mu}_{33}^{\varepsilon}$, связанная с комплексными электромеханическими коэффициентами $\tilde{S}_{11}^{E}(;)$, $\tilde{S}_{12}^{E}(;)$, $\tilde{S}_{13}^{E}(;)$, $\tilde{S}_{33}^{E}(;)$, $\tilde{d}_{31}(;)$, $\tilde{d}_{33}(;)$ и $\tilde{\mu}_{33}^{\sigma}(;)$ соотношением (3.124). Из приведенного набора коэффициентов все, кроме

$$\tilde{S}_{33}^{E}(;) = \frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} S'_{33_L} - \frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} S''_{33_L}, \tag{6.30}$$

использованы нами в постановке задачи и замечании 1. Для величин S'_{33_L} и S''_{33_L} остаётся в силе сказанное в замечании 1 о величинах S'_{13_L}, S''_{13_L}, d'_{33_L} и d''_{33_L}.

В заключение данного параграфа конкретизируем на случай планарных колебаний вязкоупругих пьезоэлектрических пластин выражение для КЗЭМК (4.183)

$$\psi_V = 2\pi \frac{\int\limits_S Im\tilde{\Pi}ds}{\int\limits_S Re\tilde{\Pi}ds}. \tag{6.31}$$

§ 2. Алгоритмы решения задачи

2.1 В общем случае физической нелинейности материала, проявляющейся в зависимости коэффициентов уравнений (6.10) от величин $\bar{U}_L$, $\bar{D}_L$, и термоэлектромеханического сопряжения (ТЭМС) (нелинейности за счёт зависимости свойств от температуры и связанности полей) линеаризация системы уравнений (6.10) – (6.20) основана на итерационном методе, аналогичном методу переменных параметров (МПП) упругости. Этот метод позволяет исследовать только установившееся состояние пьезоэлемента, что, однако, в ряде случаев представляет наибольший интерес, поскольку в данном состоянии температура диссипативного разогрева достигает максимальной величины. Элементарная итерация МПП включает в себя решение линейной задачи электромеханики (6.10) – (6.14) для вязкоупругого неоднородного материала и линейной стационарной задачи теплопроводности (6.16) и (6.17) (в (6.16) полагается $\dot{T} = 0$) с диссипативным источником, который вычисляется по результатам решения первой задачи.

Для линеаризации первой из указанных задач на n-й ($n = 1, 2, 3, ...$) итерации коэффициенты в уравнениях (6.10) определяются по значениям величин $\bar{U}_L$, $\bar{D}_L$ и температуры, найденным на $n-1$-й итерации

$$\tilde{p} = \left\{\tilde{C}^*_{11}, \tilde{C}^*_{12}, \tilde{e}^*_{31}, \tilde{\mu}^*_{33}\right\} = \tilde{p}\left(\overset{n-1}{\bar{U}_L}, \overset{n-1}{\bar{D}_L}, \overset{n-1}{T}\right), \qquad (6.32)$$

причем $\overset{0}{\bar{U}_L} = 0$ и $\overset{0}{\bar{D}_L} = 0$, а $\overset{0}{T}$ – начальная температура. По рассчитаным на n-й итерации деформациям и с использованием коэффициентов (6.32) вычисляется диссипативная функция (6.20). После этого решается стационарное уравнение теплопроводности (6.16) и определяется температура $\overset{n}{T}$. По механическим напряжениям на n-й итерации и температуре $\overset{n}{T}$ находятся величины $\overset{n}{\bar{U}_L}$ и $\overset{n}{\bar{D}_L}$. Следует отметить,что МПП не всегда устойчиво сходится и поэтому требует модификации. С этой целью, а также с целью ускорения сходимости МПП и с учетом преимущественно осциллирующего характера этой сходимости применяется алгоритм типа Эйткена-Стеффенсена (см. § 7 гл. 5). Суть этого алгоритма в рассматриваемом случае сводится к тому, что после решения на итерации $n \geq 3$ стационарной задачи (6.10) – (6.17) с коэффициентами (6.32) и нахождения величин $\overset{n}{T}, \overset{n}{\bar{U}_L}, \overset{n}{\bar{D}_L}$ определяется итерационный параметр ξ

$$\xi = \left(\overset{n}{p} - \overset{n-1}{p}\right) \Big/ \left(\overset{n-2}{p} - 2\overset{n-1}{p} + \overset{n}{p}\right) \qquad (6.33)$$

и улучшенное n-е приближение

$$\begin{bmatrix} \overset{n}{T} \\ \overset{n}{\bar{U}_L} \\ \overset{n}{\bar{D}_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{n}{T} \\ \overset{n}{\bar{U}_L} \\ \overset{n}{\bar{D}_L} \end{bmatrix} (1-\xi) + \begin{bmatrix} \overset{n-1}{T} \\ \overset{n-1}{\bar{U}_L} \\ \overset{n-1}{\bar{D}_L} \end{bmatrix} \xi. \qquad (6.34)$$

В качестве параметра p выбрана максимальная температура

$$p = \underset{S}{mas}\, T(x_1, x_2), \qquad (6.35)$$

хотя может быть использована и другая величина, например, амплитуда электрического заряда на электроде пластины

$$p = |\tilde{Q}_0|, \quad \tilde{Q}_0 = -\int\limits_S \tilde{D}_3 ds. \qquad (6.36)$$

Близость к установившемуся состоянию определяется величиной

$$\delta T = \max_S \left| \overset{n}{T}(x_1,\, x_2) - \overset{n-1}{T}(x_1,\, x_2) \right|. \tag{6.37}$$

Описанный алгоритм эффективен при осциллирующей сходимости, для которой $0 < \xi < 1$. Именно по этому признаку он и "включается" в схему МПП.

При учёте зависимости свойств материала только от температуры ($\bar{U} = \bar{U}_L,\ \bar{D} = \bar{D}_L$) наряду с МПП используется метод пошагового интегрирования (МПИ) во времени, описанный в § 1 гл. 5 и позволяющий, в отличие от МПП, исследовать поведение пьезоэлемента не только в установившемся тепловом состоянии, но и в процессе выхода температуры диссипативного разогрева на стационарный режим.

2.2 Решения линейных задач электромеханики (6.10) – (6.14) и теплопроводности (6.16) – (6.18) (стационарной в случае МПП) на каждом временном шаге (итерации) находятся с помощью МКЭ, для чего используются вариационные формулировки этих задач [62, 64]

$$\delta \tilde{Э} = 0, \quad \delta I = 0, \tag{6.38}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{Э} = \frac{1}{2}\int\limits_S \Big\{ \tilde{C}^*_{11}(\tilde{\varepsilon}^2_{11} + \tilde{\varepsilon}^2_{22}) + 2\tilde{C}^*_{12}\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\varepsilon}_{22} + 2(\tilde{C}^*_{11} - \tilde{C}^*_{12})\tilde{\varepsilon}^2_{12} - \\ -2\tilde{e}^*_{31}(\tilde{\varepsilon}^*_{11} + \tilde{\varepsilon}^*_{22})\tilde{E}_3 - \rho\omega^2(\tilde{u}^2_1 + \tilde{u}^2_2)\Big\} ds - \int\limits_L \{\tilde{t}_1\tilde{u}_1 + \tilde{t}_2\tilde{u}_2\} dl;\end{gathered} \tag{6.39}$$

$$\begin{gathered}I = \frac{1}{2}\int\limits_S \Big\{ \lambda_{11}\left(T^2_{,1} + T^2_{,2}\right) + 2\int\limits_0^T \rho c_{\text{т}} \dot{T} dT - \\ -2\left(\bar{D}'_{эм} + \frac{\alpha_{\text{т}}}{h} T^c\right) T + \frac{\alpha_{\text{т}}}{h} T^2 \Big\} ds + \frac{1}{2}\int\limits_L^T \alpha_{\text{тк}}\left(T - 2T^c_{\text{к}}\right) T dl.\end{gathered} \tag{6.40}$$

Для дискретизации срединной плоскости S используются, как и в § 2 гл. 5, изопараметрические четырехугольные восьмиузловые элементы. Условие стационарности функционала (6.39) приводит к комплексной системе линейных алгебраических уравнений для нахождения узловых значений перемещений

$$\left(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \mathbf{M}\right) \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{F}}. \tag{6.41}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{K}}$ – комплексная матрица жесткости, $\mathbf{M}$ – матрица масс, $\tilde{\mathbf{u}}$ – вектор комплексных амплитуд узловых перемещений, $\tilde{\mathbf{F}}$ – вектор возбуждающих сил. По виду матричное уравнение (6.41) совпадает с аналогичным уравнением для изотропной вязкоупругой пластины с механической нагрузкой на контуре. Однако вектор $\tilde{\mathbf{F}}$ в силу неоднородности пьезомодуля $\tilde{e}_{31}^*$ является полностью заполненным, т.е. не содержит нулевых элементов.

Задача теплопроводности, дискретизованная с помощью МКЭ, сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно узловых температур

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{H}\mathbf{T} = \mathbf{q}, \tag{6.42}$$

где $\mathbf{C}$ – матрица теплоемкости; $\mathbf{T}$ – вектор узловых температур; $\mathbf{H}$ и $\mathbf{q}$ – матрица теплопроводности и вектор тепловых поступлений, учитывающие теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. При решении системы (6.42) используется, как и в § 2 гл. 5, неявная разностная схема первого порядка. В случае МПП в (6.42) необходимо положить $\dot{\mathbf{T}} = 0$.

Поскольку потери существенно не влияют на резонансные частоты, нахождение последних проводится в рамках упругой постановки задачи путем решения уравнения

$$det\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right) = 0, \tag{6.43}$$

где $\mathbf{K}$ – действительная матрица жесткости.

Подробное описание основных соотношений МКЭ применительно к решению линейных задач (6.10) – (6.14) и (6.16) – (6.18) дано в работе [62, 98, 122]. Там же проведена оценка точности конечноэлементных вычислений путём их сравнения с экспериментальными и точными теоретическими результатами исследований планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин [25] и радиально-сдвиговых планарных колебаний пьезокерамических колец [215]. Задачи рассматривались в упругой постановке.

Таблица 6.1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Omega_{(12)}$	0,492	1,286	1,305	1,554	1,665	1,705	2,034	2,266	2,539	2,588
$\Omega_{(27)}$	0,492	1,286	1,303	1,553	1,661	1,703	2,021	2,244	2,508	2,579
$\Omega_{эксп}$	0,49		1,30	1,57	1,67	1,73	2,04		2,50	2,60
$\Omega_{теор}$	0,49	1,28	1,30	1,56	1,66	1,71	2,03		2,51	2,57

В таблице 6.1 теоретические $\Omega_{теор}$ и экспериментальные $\Omega_{эксп}$ значения первых десяти резонансных частот для прямоугольной пластины взяты из работы [25]. Значения частот $\Omega_{(12)}$, $\Omega_{(27)}$ получены согласно конечноэлементной модели (6.43) при покрытии четверти срединной плоскости пластины сеткой из 12 и 27 элементов соответственно [62].

В заключение данного пункта остановимся на простом примере, свидетельствующем как о точности конечноэлементных вычислений, так и о границах применимости гипотез плоского напряженного состояния (6.2).

Исследовались радиальные колебания свободного от механической нагрузки поляризованного по толщине пьезокерамического кольца с полностью покрытыми электродами плоскими гранями, к которым прикладывается электрическое напряжение $\Delta\varphi \cos \omega t$. С использованием гипотез плоского напряженного состояния задача допускает точное аналитическое решение [122]. Конечноэлементные расчёты проводились как в рамках плоского напряженного состояния, так и в рамках трехмерной постановки задачи (см. § 2 гл. 5).

Таблица 6.2.

$2h/r_2$	$\tilde\omega_1$	$k_{э1}$	$\tilde\omega_2$	$k_{э2}$	$\tilde\omega_3$	$k_{э3}$
1/5	0,3596	0,463	1,1843	0,459	2,2279	0,073
2/15	0,3594	0,464	1,1773	0,462	2,1713	0,076
3/15	0,3591	0,465	1,1651	0,467	2,0712	0,069
4/15	0,3587	0,467	1,1470	0,474	1,9186	0,084
5/15	0,3582	0,469	1,1221	0,480		

В таблице 6.2 представлены полученные в рамках трехмерной задачи значения первых трёх резонансных частот $\omega = \tilde\omega \cdot 10^5$ рад/с радиальных колебаний кольца и соответствующие им величины КЭМС $k_э$ в зависимости от отношения толщины кольца $2h$ к внешнему радиусу r_2. Расчёты проводились при $r_2 = 0,015$ м и внутреннем радиусе кольца $r_1 = 0,005$ м.

Значения резонансных частот и величины КЭМС, получаемые в рамках плоского напряженного состояния, приведены в таблице 6.3.

Таблица 6.3.

	$\tilde{\omega}_1$	$k_{э1}$	$\tilde{\omega}_2$	$k_{э2}$	$\tilde{\omega}_3$	$k_{э3}$
МКЭ	0,3597	0,463	1,1871	0,458	2,680 2,2528	0,072
точное решение	0,35961		1,18654		2,24491	

Данные таблицы 6.3 получены с использованием 24 конечных элементов разбивки четверти срединной плоскости кольца. Нижнее значение $\tilde{\omega}_3$ соответствует случаю 32 элементов. Необходимость в относительно большом количестве конечных элементов объясняется использованием разрешающих уравнений в декартовых координатах. В данном случае предпочтительнее использовать конечноэлементные соотношения в полярных координатах.

Приведенные в таблицах 6.2 и 6.3 результаты свидетельствуют, что значение основной радиальной частоты с увеличением толщины кольца изменяется незначительно. С увеличением гармоники влияние толщины кольца на резонансные частоты усиливается. Данные таблиц 6.2 и 6.3 соответствуют пьезокерамике ЦТС$_{\text{Т}}$БС–2.

§ 3. Конкретизация амплитудной и температурной зависимости характеристик пьезоматериала

В (6.7) (аналогично в (6.8)) содержатся четыре неизвестных коэффициента S'_{11_L}, S'_{12_L}, d'_{31_L}, $\mu^{\sigma'}_{33_L}$ (аналогично S''_{11_L}, S''_{12_L}, d''_{31_L}, $\mu^{\sigma''}_{33_L}$). Однако в силу произвольности функций (6.6) независимых среди этих коэффициентов всего три. Это дает возможность их экспериментального определения на основе серии одномерных экспериментов, исходя из требования единых кривых зависимостей (6.6) в этих экспериментах. Прежде всего для фиксированных частоты и температуры необходимо конкретизировать характер зависимостей (6.6). Соответствующий эксперимент можно провести на тонком и узком стержневом образце с поляризацией, направленной поперек продольной оси стержня, и с электродами на гранях, перпендикулярных направлению поляризации. Методика эксперимента предполагает кинематическое возбуждение продольных колебаний стержня при закороченных электродах, в связи с чем один из его концов крепится к вибратору. Для непосредственного определения истинного характера зависимостей (6.6) оптимальной колебательной системой следует считать такую, которая обеспечивает однородное напряженное состояние материала образца при его циклическом деформировании. Поэтому свободный конец стержня предполагается нагруженным массой M, которая существенно превосходит массу самого стержня. Пусть ось стержня направлена вдоль оси x_1, а электроды находятся на гранях $x_3 = \pm h$. Тогда в рассматриваемом случае

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{2}({\sigma'_{11}}^2 + {\sigma''_{11}}^2), \quad \bar{I}_2 = \bar{I}_6 = \bar{I}_{10} = 0. \tag{6.44}$$

Непосредственному экспериментальному измерению подлежат амплитуды перемещений основания вибратора и груза на свободном конце стержня, а также угол сдвига фаз между этими перемещениями. По сути, имеем дело с методикой проведения эксперимента, предложенной в монографии [131]. По измеренным величинам вычисляются амплитуды и фазы механического напряжения σ_{11} и деформации ε_{11}, а, следовательно, и нелинейные энергетические характеристики

$$\bar{U} = \sigma'_{11}\varepsilon'_{11} + \sigma''_{11}\varepsilon''_{11}, \quad \bar{D} = \sigma''_{11}\varepsilon'_{11} - \sigma'_{11}\varepsilon''_{11}. \tag{6.45}$$

Варьируя амплитуду вибратора при одной и той же частоте колебаний и выбирая коэффициенты S'_{11_L} и S''_{11_L} в (6.7) и (6.8) равными соответствующим коэффициентам линейной теории, можно получить искомые зависимости (6.6). Подробное описание техники проведения подобных экспериментов, в частности, техники регистрации колебаний, поддержания на относительно постоянном уровне температуры образца и т.п. можно найти в специальной литературе [131, 132, 135]. Здесь же укажем только, что геометрические размеры стержня и массу груза следует выбирать такими, чтобы не только обеспечить однородное напряженное состояние стержня, но и по-возможности приблизить собственную частоту колебаний стержня с грузом к той частоте, на которой необходимо конкретизировать зависимости (6.6). В противном случае может сказываться влияние высших гармоник [131].

Используя установленные экспериментально зависимости (6.6), можно найти остающиеся пока неизвестными коэффициенты $d_{31_L}^{',''}$ и $\mu_{33_L}^{\sigma',''}$ в (6.7) и (6.8). Для этого в описанном выше эксперименте достаточно изменить электрические условия на электродах, а именно, считать последние подсоединенными к генератору электрического напряжения с частотой, равной частоте вибратора. В этом случае

$$
\begin{gathered}
\bar{I}_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{11}'^{\,2} + \sigma_{11}''^{2}\right), \quad \bar{I}_6 = \sigma_{11}' E_3' + \sigma_{11}'' E_3'', \\
\bar{I}_{10} = \frac{1}{2}\left(E_3'^2 + E_3''^2\right), \quad \bar{I}_2 = 0.
\end{gathered} \tag{6.46}
$$

В серии из n измерений, соответствующих различным уровням нагружения на заданной частоте (при этом варьируется либо амплитуда вибратора, либо амплитуда генератора, либо обе амплитуды сразу), находятся n значений $\bar{U}_k$, $\bar{D}_k$, $(k = 1 \div n)$ нелинейных энергетических характеристик согласно формулам

$$
\begin{aligned}
\bar{U} &= \sigma_{11}'\varepsilon_{11}' + \sigma_{11}''\varepsilon_{11}'' + E_3'D_3' + E_3''D_3'', \\
\bar{D} &= \sigma_{11}''\varepsilon_{11}' - \sigma_{11}'\varepsilon_{11}'' + E_3''D_3' - E_3'D_3''.
\end{aligned} \tag{6.47}
$$

Одновременно находятся n наборов величин (6.46) $\bar{I}_{1_k}, \bar{I}_{6_k}, \bar{I}_{10_k}$ $(k = 1 \div n)$. При этом механические переменные, как и раньше, находятся по измеренным перемещениям (амплитудам и фазам) основания вибратора и груза, а величины D_3', D_3'' – по измеренной амплитуде и фазе тока в электрической цепи. Величины E_3', E_3'' – известны. С помощью экспериментальных кривых (6.6) каждой паре значений $\bar{U}_k$, $\bar{D}_k$ можно поставить в соответствие пару значений $\bar{U}_{L_k}, \bar{D}_{L_k}$ $(k = 1 \div n)$. Затем результаты измерений и вычислений можно обработать методом наименьших квадратов (МНК). Неизвестные коэффициенты d_{31_L}', $\mu_{33}^{\sigma'}$, d_{31_L}'', $\mu_{33_L}^{\sigma''}$ находятся из условия минимума следующих сумм

$$
\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{U}_{L_k} + S_{11_L}'\bar{I}_{1_k} + d_{31_L}'\bar{I}_{6_k} + \tilde{\mu}_{33}^{\sigma'}\bar{I}_{10_k}\right)^2, \\
\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{D}_{L_k} + S_{11_L}''\bar{I}_{1_k} + d_{31_L}''\bar{I}_{6_k} + \tilde{\mu}_{33}^{\sigma''}\bar{I}_{10_k}\right)^2.
\end{gathered} \tag{6.48}
$$

Напомним, что S'_{11_L}, S''_{11_L} выбраны равными коэффициентам линейной теории. В результате для определения коэффициентов d'_{31_L}, $\mu^{\sigma'}_{33_L}$ имеем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{I}^2_{6_k}\right) d'_{31_L} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{I}_{10_k}\bar{I}_{6_k}\right) \mu^{\sigma'}_{33_L} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\bar{U}_{L_k}\bar{I}_{6_k} + S'_{11_L}\bar{I}_{1_k}\bar{I}_{6_k}\right) \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{I}_{10_k}\bar{I}_{6_k}\right) d'_{31_L} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{I}^2_{10_k}\right) \mu^{\sigma'}_{33_L} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\bar{U}_{L_k}\bar{I}_{10_k} + S'_{11_L}\bar{I}_{1_k}\bar{I}_{10_k}\right). \end{cases} \tag{6.49}$$

Такой же вид имеет система для нахождения коэффициентов d''_{31_L}, $\mu^{\sigma''}_{33_L}$. В (6.49) в этом случае необходимо заменить d'_{31_L} на d''_{31_L}, $\mu^{\sigma'}_{33_L}$ на $\mu^{\sigma''}_{33_L}$, $\bar{U}_{L_k}$ на $\bar{D}_{L_k}$ и S'_{11_L} на S''_{11_L}. Важным является то, что пьезоэлектрические и диэлектрические параметры определяются на одной и той же (рабочей) частоте. Заметим, что если кривые (6.6) известны заранее, скажем, определены из каких-то других экспериментов, например, на стержне с продольной поляризацией (в этом случае в роли величин $S'^{,''}_{11_L}$ выступают величины $S'^{,''}_{33_L}$, которые не фигурируют в (6.7) и (6.8)), то S'_{11_L}, S''_{11_L} в (6.48) также являются неизвестными. МНК в этом случае приводит к системе трёх уравнений относительно величин S'_{11_L}, d'_{31_L}, $\mu^{\sigma'}_{33_L}$ (аналогично для величин S''_{11_L}, d''_{31_L}, $\mu^{\sigma''}_{33_L}$). Отметим также, что различные варианты построения кривых типа (6.6), а также последующая обработка и сравнение результатов, составят суть экспериментальной проверки используемой гипотезы о зависимости консервативной и диссипативной характеристик материала от линейных комбинаций инвариантов.

В (6.7), (6.8) остаются неопределенными коэффициенты S'_{12_L}, S''_{12_L}. В принципе, при построенных указанным выше способом зависимостях (6.6) эти коэффициенты можна находить из экспериментов на чистый сдвиг в плоскости, перпендикулярной направлению поляризации, например, используя крутильные колебания полого кругового тонкого пьезоцилиндра с поляризацией вдоль образующей, один конец которого жестко защемлен, а другой соединен с массивным диском. Поскольку указанный сдвиг не влияет на электрическое состояние образца, техника проведения такого эксперимента остаётся, в принципе, такой же, как и для непьезоактивных материалов [135], хотя, в силу специфики пьезоматериалов, например, пьезокерамики, определённые трудности при проведении экспериментов и изготовлении необходимых для этого пьезообразцов неизбежны. В рассматриваемом случае

$$\bar{I}_2 = {\sigma'_{12}}^2 + {\sigma''_{12}}^2, \quad \bar{I}_1 = \bar{I}_6 = \bar{I}_{10} = 0. \tag{6.50}$$

По амплитудам и фазам деформации и напряжения можно вычислить характеристики

$$\bar{U} = 2\left(\sigma'_{12}\varepsilon'_{12} + \sigma''_{12}\varepsilon''_{12}\right), \quad \bar{D} = 2\left(\sigma''_{12}\varepsilon'_{12} - \sigma'_{12}\varepsilon''_{12}\right) \tag{6.51}$$

для различных уровней возбуждения крутильных колебаний и, используя зависимости (6.6), найти соответствующие значения величин $\bar{U}_L$, $\bar{D}_L$. Искомые коэффициенты S'_{12_L}, S''_{12_L} определяются полученными на основе МНК соотношениями

$$\begin{aligned} S'_{11_L} - S'_{12_L} &= -\sum_{k=1}^{n} \bar{U}_{L_k}\bar{I}_{2_k} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \bar{I}_{2_k}^2, \\ S''_{11_L} - S''_{12_L} &= -\sum_{k=1}^{n} \bar{D}_{L_k}\bar{I}_{2_k} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \bar{I}_{2_k}^2, \end{aligned} \tag{6.52}$$

где, как и раньше, S'_{11_L}, S''_{11_L} – коэффициенты линейной теории.

Значительно проще найти коэффициенты S'_{12_L}, S''_{12_L}, используя данные описанного выше эксперимента по конкретизации зависимостей (6.6). Для этого при проведении указанного эксперимента необходимо дополнительно измерять амплитуду и фазу деформации образца вдоль оси x_2. Искомые коэффициенты S'_{12_L}, S''_{12_L} находятся из условия минимума суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\tilde{\varepsilon}_{22_k}}{\tilde{\varepsilon}_{11_k}} - \frac{\tilde{S}^E_{12}(;)}{\tilde{S}^E_{11}(;)} \right|^2 \tag{6.53}$$

с учетом обозначений (6.5). В результате приходим к соотношениям

$$\frac{S'_{12_L}}{S'_{11_L}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \left[\dfrac{1}{1+\xi_k^2} \cdot \dfrac{|\tilde{\varepsilon}_{22_k}|}{|\tilde{\varepsilon}_{11_k}|} \left(cos\Delta\varphi_k + \xi_k sin\Delta\varphi_k\right) \right]}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\xi_k^2}},$$

$$\frac{S''_{12_L}}{S''_{11_L}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{\xi_k^2}{1+\xi_k^2}\cdot\frac{|\tilde{\varepsilon}_{22_k}|}{|\tilde{\varepsilon}_{11_k}|}\left(cos\Delta\varphi_k - \frac{1}{\xi_k}sin\Delta\varphi_k\right)\right]}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\xi_k^2}{1+\xi_k^2}}, \tag{6.54}$$

где $|\tilde{\varepsilon}_{11_k}|$, $|\tilde{\varepsilon}_{22_k}|$ – амплитуды деформаций в k-ом измерении, а $\Delta\varphi_k = = \varphi_{11_k} - \varphi_{22_k}$ – угол сдвига фаз между ними; $\xi_k = \bar{D}_k/\bar{U}_k$, а $\bar{U}_k$ и $\bar{D}_k$ – значения нелинейных характеристик, вычисляемые согласно (6.45). При $|\xi_k| \ll 1$ соотношения (6.54) упрощаются.

Коэффициенты из (6.22) и (6.30) можно определить, если дополнительно провести аналогичные эксперименты на стержне с продольной поляризацией и с электродами на торцах стержня.

Таким образом, характер зависимостей (6.6) и фигурирующие в (6.7), (6.8), (6.22) и (6.30) коэффициенты могут быть найдены на основе серии одномерных экспериментов с использованием стержневых образцов с поперечной и продольной поляризацией. Для оценки влияния температуры на эти зависимости и коэффициенты указанную серию экспериментов необходимо провести при различных температурах образца.

Полный набор экспериментальных данных о физически нелинейном поведении вязкоупругих пьезоматериалов при гармоническом нагружении, который давал бы возможность определить указанным выше способом все коэффициенты в линейных комбинациях инвариантов (6.7) и (6.8), в литературе отсутствует. Поэтому в дальнейшем под величинами $\bar{U}_L$ и $\bar{D}_L$ из (6.7) и (6.8) будем подразумевать энергетические характеристики линейной теории, т.е. коэффициенты в выражениях для этих величин считать известными. Что касается функций (6.6), то для их конкретизации воспользуемся имеющимися экспериментальными данными о зависимости комплексной механической податливости в направлении, перпендикулярном оси поляризации, от амплитуды механического напряжения [58]. Непосредственное установление этой зависимости возможно в рамках описанного в начале параграфа эксперимента на стержневом образце с поперечной поляризацией и закороченными электродами. Из графиков, приведенных в [58], видно, что для различных составов пьезокерамики рост действительной части податливости S'_{11} примерно пропорционален увеличению амплитуды механического напряжения $|\tilde{\sigma}_{11}|$ (до $|\tilde{\sigma}_{11}| = 20-25$ МПа). Для некоторых пьезокерамик это относится и к изменению мнимой части податливости S''_{11}, т.е.

$$S'_{11} = S'_{11_L}(1 + \alpha|\tilde{\sigma}_{11}|), \quad S''_{11} = S''_{11_L}(1 + \beta|\tilde{\sigma}_{11}|), \ \ \alpha, \beta \geq 0, \tag{6.55}$$

в частности, для сегнетожесткого пьезоматериала ЦТС–23 $\alpha \approx \beta$ при $|\tilde{\sigma}_{11}| < 20$ МПа (в [58] данные по амплитудной зависимости приводятся для модуля Юнга $1/S'_{11}$ и добротности $Q = -S'_{11}/S''_{11}$). Зависимости (6.55) можно представить в терминах функций (6.6) или фигурирующих в (6.5) отношений

$$\frac{\bar{U}}{\bar{U}_L} = 1 + \xi\left(\bar{U}_L\right)^{0,5}, \quad \frac{\bar{D}}{\bar{D}_L} = 1 + \eta\left(\bar{D}_L\right)^{0,5}, \tag{6.56}$$

где

$$\xi = \alpha\left(S'_{11_L}\right)^{-0,5}, \quad \eta = \beta\left(S''_{11_L}\right)^{-0,5}. \tag{6.57}$$

Влияние температуры T на уровень нелинейности можно учесть, считая $\alpha = \alpha(T)$ и $\beta = \beta(T)$, если, конечно, предположить,что при этом не изменяется сам характер зависимостей (6.55). В силу отсутствия необходимой экспериментальной информации в дальнейшем считаем, что $\alpha(T) = \beta(T) = const$.

Используемые в данной главе температурные зависимости коэффициентов из (6.7) и (6.8) (коэффициентов линейной теории) взяты из работы [63], где они определялись путем обработки приведенных в [171] экспериментальных данных по температурной зависимости свойств пьезокерамики в интервале температур от $20°$C до $180°$C:

$$\begin{gathered}
S'_{11_L}(T) = S^{\circ}_{11}\left[1 + \alpha_{11}(T - T_1) + \alpha'_{11}(T - T_1)^2\right], \\
S'_{12_L}(T) = S^{\circ}_{12}\left[1 + \alpha_{12}(T - T_1) + \alpha'_{12}(T - T_1)^2\right], \\
S_{\text{M}_{11}}(T) = S''_{11_L}(T)/S'_{11_L}(T) = \delta^{E}_{11}[1 + \beta_{11}(T - T_1) + \beta'_{11}(T - T_1)^2], \\
S_{\text{M}_{12}}(T) = S''_{12_L}(T)/S'_{12_L}(T) = \delta^{E}_{12}[1 + \beta_{12}(T - T_1) + \beta'_{12}(T - T_1)^2], \\
d'_{31}(T) = d^{\circ}_{31}[1 + \xi_{31}(T - T_1) + \xi'_{31}(T - T_1)^2], \qquad (6.58) \\
d_{\text{M}_{31}}(T) = d''_{31_L}(T)/d'_{31_L}(T) = \delta^{P}_{31}[1 + \eta_{31}(T - T_1) + \eta'_{31}(T - T_1)^2], \\
\mu^{\sigma'}_{33_L}(T) = \mu^{\circ}_{33}[1 + \gamma_{33}(T - T_1) + \gamma'_{33}(T - T_1)^2],
\end{gathered}$$

$$\mu_{\text{M}_{33}}(T) = \mu_{33_L}^{\sigma''}(T)/\mu_{33_L}^{\sigma'}(T) = \delta_{33}^{T}[1 + \Theta_{33}(T - T_1) + \Theta_{33}^{'}(T - T_1)^2].$$

Здесь

$$S_{11}^{\circ} = 12,5 \cdot 10^{-12}\text{Па}^{-1}, \quad S_{12}^{\circ} = -4,62 \cdot 10^{-12}\text{Па}^{-1},$$
$$d_{31}^{\circ} = 160 \cdot 10^{-12}\text{Кл/Н}, \ \ \mu_{33}^{\circ} = 2100 \cdot \varepsilon_{\circ}, \ \ \varepsilon_{\circ} = 8,854 \cdot 10^{-12}\Phi/\text{м},$$
$$\delta_{11}^{E} = 0,0016, \ \ \delta_{12}^{E} = 0,0014, \ \ \delta_{31}^{P} = 0,004, \ \ \delta_{33}^{T} = 0,0035, \ \ T_1 = 20^{\circ}\text{C}.$$

В интервале температур T от 20°C до 160°C значения оставшихся параметров следующие:

$\alpha_{11} = 4,667\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\alpha_{12} = 10,46\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\alpha_{11}^{'} = \alpha_{12}^{'} = 0$, $\beta_{11} = 7,813\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\beta_{12} = 0,651\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\xi_{31} = 8,333\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\eta_{31} = 156,3\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\gamma_{33} = 17,86\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\Theta_{33} = 154,8 \cdot \alpha_{\circ}$, $\alpha_{\circ} = 10^{-4}\text{град}^{-1}$, $\beta_{11}^{'} = 3,906 \cdot \beta_{\circ}$, $\beta_{12}^{'} = -0,0177 \cdot \beta_{\circ}$, $\xi_{31}^{'} = 1,389 \cdot \beta_{\circ}$, $\eta_{31}^{'} = 12,15 \cdot \beta_{\circ}$, $\gamma_{33}^{'} = 5,622 \cdot \beta_{\circ}$, $\Theta_{33}^{'} = 5,952 \cdot \beta_{\circ}$, $\beta_{\circ} = 10^{-5}\text{град}^{-2}$;

в интервале температур от 160°C до 180°C:

$\alpha_{11} = 124,8\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\alpha_{11}^{'} = -8,584\cdot\ \beta_{\circ}$, $\alpha_{12} = 208,7\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\alpha_{12}^{'} = -14,16\cdot\ \beta_{\circ}$, $\beta_{11} = 937,5\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\beta_{11}^{'} = -62,50\cdot\ \beta_{\circ}$, $\beta_{12} = 434,7\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\beta_{12}^{'} = -26,33\cdot\ \beta_{\circ}$, $\gamma_{33} = -560,8\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\gamma_{33}^{'} = 46,95\cdot\ \beta_{\circ}$, $\Theta_{33} = -1150\cdot\ \alpha_{\circ}$, $\Theta_{33}^{'} = 99,70\cdot\ \beta_{\circ}$.

Температурные зависимости дополнительных комплексных коэффициентов линейной теории, фигурирующих в (6.22) и (6.30), такие же, как и в § 4 гл. 5.

В дальнейшем принимаются следующие значения теплофизических характеристик материала:

$$\lambda_{11} = 1,25 \ \text{Вт/м} \cdot \text{град}, \quad c_{\text{т}} = \frac{\lambda_{11}}{\rho a_{\text{т}}},$$
$$\rho = 7520 \ \text{кг/м}^3, \quad a_{\text{т}} = 0,4 \cdot 10^{-6}\text{м}^2/\text{с}.$$

§ 4. Примеры расчётов

На основе изложенного в предыдущих параграфах проведено исследование планарных колебаний и диссипативного разогрева свободной от механической нагрузки прямоугольной пьезокерамической пластины с полностью электродированными главными гранями, к которым подводится разность потенциалов $\Delta\varphi e^{i\omega t}$ (рис. 6.1). Результаты расчетов представлены ниже для пластины с размерами $2a = 6$ см, $2b = 2$ см,

Рис. 6.1.

$2h = 2$ мм и условиями теплообмена

$$T^c = T^c_{\text{к}} = \overset{0}{T} = 20^\circ C, \quad \alpha_{\text{т}} = \alpha_{\text{тк}} = 25 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град.}$$

При расчете АЧХ и ТЧХ использовался приём продолжения решения по параметру нагружения.

Все результаты получены в окрестности основного планарного (продольного) резонанса.

4.1. Физически нелинейный материал

На рис. 6.2, 6.3 представлены ТЧХ установившейся максимальной температуры (в центре пластины) и АЧХ тока смещения $|\tilde{I}| = \omega \left| \int\limits_{S_{\text{э}}} \tilde{D}_3 dS \right|$ для физически нелинейного материала с изотермическими ($T = \overset{0}{T}$) вязкоупругими свойствами при $\Delta\varphi = 6,3$ В и различных значениях параметра нелинейности $\alpha = \beta$ из (6.55). Здесь и ниже $\bar{\omega} = \omega \cdot 10^{-10}$с/рад.

Рис. 6.2. Рис. 6.3.

Для сравнения штриховой линией показана характеристика для линейного материала. Видно, что учёт физической нелинейности приводит к эффектам, типичным для вязкоупругих материалов с нелинейностью мягкого типа, а именно к отклонению АЧХ и ТЧХ влево от резонанса линейной системы и их трансформации в характеристики "мягкого типа" с наличием нижней и верхней ветвей, которым могут отвечать свои режимы колебаний и диссипативного разогрева. При малых параметрах нелинейности α (кривая 1) отклонение резонансных частот влево незначительно и уровень температуры и амплитуд электромеханических величин практически не изменяется. С увеличением α (кривая 2) происходит более сильный дрейф резонансной частоты и затягивание верхних ветвей АЧХ и ТЧХ в сторону уменьшения частоты с появлением частотной области с неоднозначными характеристиками. Дальнейшее увеличение параметра нелинейности приводит к существенному снижению резонансного уровня амплитуд и температуры (кривая 3) вплоть до вырождения областей неоднозначности частотных характеристик (кривая 4). АЧХ для механических величин аналогичны приведенным на рис. 6.3.

Рис. 6.4. Рис. 6.5.

С увеличением нагрузки эффекты физической нелинейности усиливаются. На рис. 6.4 и 6.5 приведены ТЧХ и АЧХ механического напряжения в средней точке пластины при постоянном α и различных значениях $\Delta\varphi$ (3; 6,3; 12 В). Штриховые кривые соответствуют случаю линейного материала.

Рис. 6.6.

На рис. 6.6 (кривой 1) представлена ТЧХ для физически нелинейного материала с зависящими от температуры свойствами при $\Delta\varphi = 6,3$ В и параметре нелинейности, характерном для сегнетожесткой пьезокерамики ЦТС–23. Кривая 2 характеризует случай физически линейного материала ($\alpha = 0$) с зависящими от температуры свойствами, а кривая 3 – физически нелинейного материала с изотермическими свойствами ($T = \overset{0}{T}$). Характер АЧХ аналогичен представленной ТЧХ. Видно, что эффекты физической нелинейности и нелинейности за счёт зависимости свойств материала от температуры в качественном отношении аналогичны. В количественном отношении в данном случае доминируют эффекты за счёт зависимости свойств от температуры.

Расчёты показали, что обе нелинейности, заметно влияя на амплитуды, почти не искажают форм распределения полевых величин.

4.2. Физически линейный материал с зависящими от температуры свойствами

Кривые типа 2 на рис. 6.6 (физически линейный материал с зависящими от температуры свойствами) рассчитывались как с помощью МПП, так и МПИ.

Рис. 6.7. Рис. 6.8.

На рис. 6.7 и 6.8 для установившегося режима диссипативного разогрева представлены ТЧХ максимальной температуры (в центре пластины) и АЧХ амплитуды продольного перемещения $|\tilde{u}_1| = \sqrt{u_1'^2 + u_1''^2}$ (в точке $x_2 = 0, \quad x_1 = \frac{a}{2}$). Кривые 1-3 рассчитаны при значениях амплитуды электрического напряжения $\Delta\varphi$ соответственно $6,3$, 9 и 12 В. Для сравнения штриховыми линиями $1'$, $2'$ и $3'$ показаны характеристики для линейного материала с независящими от температуры свойствами. Кривая 1 на рис. 6.7 совпадает с кривой 2 на рис. 6.6. Видно, что с увеличением амплитуды электрического напряжения $\Delta\varphi$ влияние зависимости свойств материала от температуры и термомеханического сопряжения (ТМС) на ТЧХ и АЧХ усиливается, что проявляется в увеличении сдвига резонанса в область низких частот и расширении окрестности частот с неоднозначными характеристиками.

Рис. 6.9. Рис. 6.10.

Рис. 6.11.

На рис. 6.9 – 6.11 показаны распределения вдоль длины пластины ($x_2 = 0$) установившихся составляющих u_1' и u_1'' продольного перемещения, составляющих σ_1' и σ_1'' напряжения и температуры T на частоте $\bar{\omega} = 1,690$ при $\Delta\varphi = 6,3$ В . Кривые 1, $1'$ и $1''$ соответствуют высокотемпературным веткам ТЧХ и АЧХ, а кривые 2, $2'$ и $2''$ – низкотемпературным. Штриховые линии 3, $3'$ и $3''$ соответствуют изотермическим свойствам $\left(T = \overset{0}{T}\right)$.

Рис. 6.12.

В отличие от метода переменных параметров (МПП), метод пошагового интегрирования во времени (МПИ) позволяет исследовать поведение пьезоэлемента как в установившемся тепловом состоянии, так и в процессе выхода температуры на стационарный режим. На рис. 6.12 показаны эволюции во времени максимальной температуры (кривая

1), действительной и мнимой составляющих продольного перемещения (кривые 2 и $2'$) в точке бо́льшей оси пластины, лежащей на удалении $1,5$ см от её конца ($\bar{u}_1^{',''} = u_1^{',''} \cdot 10^5$ м$^{-1}$) для частоты $\bar{\omega} = 1,691 > \bar{\omega}_{41}$. Описанные эволюции являются характерными для всего частотного интервала $\bar{\omega}_{41} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_\circ$ (на рис. 6.6), где $\bar{\omega}_\circ = 1,696$ – резонансная частота в случае линейного материала с независящими от температуры свойствами. Кривая 3 характеризует процесс выхода температуры на нижнюю ветку ТЧХ при $\bar{\omega} = 1,690 < \bar{\omega}_{41}$. Эволюцию температуры в области частот, где происходит скачок колебательного режима с верхней ветки на нижнюю, описывают кривые 4, 5.

Рис. 6.13.

Характер изменения во времени амплитуды тока смещения и КЭМС в интервале частот $\bar{\omega}_{41} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_\circ$ показан на рис. 6.13 соответственно кривыми 1 и 3 (данные на рис. 6.13 соответствуют $\bar{\omega} = 1,691 > \bar{\omega}_{41}$). Как показывает кривая 3, выход процесса на высокотемпературную ветвь сопровождается уменьшением КЭМС. Для амплитуды тока (кривая 1) имеется ярко выраженный максимум в определённый момент времени, соответствующий моменту смены фазы перемещений и резкого возрастания температуры разогрева на рис. 6.12.

Характерное поведение кривых на рис. 6.12 и 6.13 полностью объясняется зависимостью свойств материала от температуры, в частности, сдвигом частоты резонанса в область низших частот. На определенном этапе разогрева ($t \approx 8$ мин) свойства материала достигают таких значений, что колебательная система на рассматриваемой частоте входит во временный резонанс. При этом резкое увеличение температуры (рис. 6.12) приводит к соответствующему изменению свойств и сдвигу резонансной области влево; амплитуды величин падают и процесс устанавливается.

Рис. 6.14.

Временная эволюция процесса во многом определяется условиями теплообмена. На рис. 6.14 кривые 1 – 4 описывают изменение максимальной температуры во времени на частоте $\bar{\omega} = 1,691$ для параметров теплоотдачи $\alpha_{\text{т}}$, равных 5, 25, 35 и 50 Вт/м$^2\cdot$град соответственно. Видно, что с увеличением $\alpha_{\text{т}}$ описанный выше переход процесса на высокотемпературную ветвь перед достижением температурой стационарного состояния не наблюдается.

Для анализа стационарных режимов разогрева, когда свойства материала зависят от температуры, эффективнее использовать МПП. Однако, могут возникнуть трудности в его применении при расчетах участков высокотемпературных ветвей, лежащих в области неоднозначности ТЧХ и АЧХ. Это проявляется в необходимости выбора малого шага по частоте при продолжении решения по этому параметру. В противном случае произойдёт срыв решения на нижнюю ветку. Для расчёта указанных участков ТЧХ и АЧХ предпочтительнее использовать МПИ в сочетании с приемом продолжения решения по частоте.

§ 5. Резонансные колебания пьезокерамической пластины с автоподстройкой частоты

Одним из распространенных режимов работы пьезокерамических элементов является резонансный режим, при котором особенно сильно проявляются диссипативные свойства материала в виде диэлектрических, “пьезоэлектрических”, и, в особенности, механических потерь. В зависимости от формы колебаний, длительности и уровня нагружения, условий теплообмена, а также из-за слабой теплопроводности традиционных пьезокерамик, гистерезисные потери могут привести к значительному саморазогреву пьезоэлементов в результате превращения части электромеханической энергии колебаний в тепловую. С повышением температуры происходит сдвиг резонансной частоты от своего номинального значения и, вследствие этого, снижение амплитуд выходных функциональных характеристик пьезоэлемента. Для поддержания этих характеристик на относительно высоком и неизменном уровне в течении длительного времени нагружения без существенного изменения подводимой к пьезоэлементу мощности может быть использован резонансный режим колебаний с автоподстройкой частоты (АПЧ) возбуждения [151]. Закон изменения во времени резонансной частоты, отражающий режим автоподстройки, обусловлен изменением во времени температуры диссипативного разогрева и должен находиться в процессе решения задач.

Ниже представлены результаты решения модельной задачи о резонансных колебаниях с АПЧ прямоугольной пьезокерамической пласти-

ны и даётся оценка эффектам АПЧ. В общем случае задача решается шаговым методом. На n-м временном шаге по распределению температуры $\overset{n-1}{T}$, найденной на предыдущем $n-1$-м шаге, определяются свойства материала и решаются следующие линейные задачи:
1) нахождение резонансной частоты $\overset{n}{\omega}_r$ (уточнение резонансной частоты $\overset{n-1}{\omega}_r$, найденной на предыдущем шаге);
2) вычисление для найденного значения $\overset{n}{\omega}_r$ распределений механических и электрических полей;
3) уточнение по найденным распределениям полевых величин диссипативного источника и определение температуры $\overset{n}{T}$ путём решения задачи теплопроводности с начальной температурой $\overset{n-1}{T}$. В качестве начального принимается распределение температуры $\overset{0}{T}$.

Расчёты проводились для пластины из предыдущего параграфа при $\alpha_{\text{т}} = 5$ Вт/м$^2 \cdot$ град.

Рис. 6.15.

Кривые 1 на рис. 6.15 характеризуют изменение во времени первой резонансной частоты пластины для различных уровней возбуждения $\Delta\varphi$. Здесь, как и раньше, $\bar{\omega} = \omega \cdot 10^{-5}$с/рад. Соответствующие эволюции максимальной температуры (в центре пластины) описываются кривыми 2. Поведение температуры в остальных точках пластины качественно аналогично приведенному. Видно, что отклонение во времени резонансной частоты от своего номинального значения $\overset{0}{\omega}_r = 1,696 \cdot 10^5$ рад/с имеет для принятых условий теплообмена ($\alpha_{\text{т}} = 5$ Вт/ м$^2 \cdot$град соответствует свободной конвекции воздуха) практически линейный характер, определяемый уровнем возбуждения $\Delta\varphi$, от которого, в конечном счёте, зависит и уровень диссипативного разогрева в каждый конкретный момент времени. Закон изменения частоты возбуждения, отражающий режим автоподстройки, можно описать в данном случае соотношением $\omega_r = \beta(\Delta\varphi) \cdot t + \overset{0}{\omega}_r$ для достаточно широкого интервала времени. Аномальные изменения в поведении кривых 1, 2 при $\Delta\varphi = 12$ В и $t > 85$ сек связаны с достижением температурой в центральной части пластины точки фазового перехода и деполяризацией материала (см. главу 8). В результате возникновения и развития деполяризованной зоны рост температуры в центральной части пластины замедляется, а резонансная частота резко сдвигается в область высших частот. Временные эволюции температуры в центральной точке пластины при фиксированной номинальной резонансной частоте $\overset{0}{\omega}_r$ характеризуются кривыми $2'$. Видно, что влияние уровня возбуждения на поведение кривых $2'$ из-за выхода системы из резонансного режима не столь существенно, как на поведение кривых 2, соответствующих работе пьезоэлемента с автоподстройкой частоты.

Оценить эффект автоподстройки частоты позволяет сравнение кривых 1 и $1'$ на рис. 6.16. Кривые 1 соответствуют временной эволюции амплитуды тока $\left|\tilde{I}\right|$ для режима с автоподстройкой частоты. Кривые $1'$ отвечают тем же параметрам нагружения, но при фиксированной номинальной частоте $\overset{0}{\omega}_r$. Как видно из поведения кривых $1'$, амплитуда тока в силу температурной зависимости свойств материала резко уменьшается перед достижением своего установившегося уровня, который в несколько раз меньше первоначального резонансного уровня. При автоподстройке частоты (кривые 1) отклонение амплитуды тока во времени от номинального резонансного тока незначительно в широком временном интервале и увеличивается с ростом $\Delta\varphi$. Аномальное поведение кривой 1 при $\Delta\varphi = 12$ и $t > 85$ сек также связано с возникновением и развитием деполяризованной зоны в центральной части пластины.

Рис. 6.16.

Рис. 6.17.

О характере поведения КЭМС $k_э$ и коэффициента затухания колебаний ψ_V можно судить по кривым 1, 2 на рис. 6.17. Соответствующие изменения этих величин при фиксированной частоте $\overset{0}{\omega}_r$ описываются кривыми $1'$, $2'$. При этом кривые $2'$ для рассматриваемых уровней возбуждения $\Delta\varphi$ с точностью до построения совпадают. Видно, что величины КЭМС при автоподстройке частоты на относительно широком, зависящем от $\Delta\varphi$, временном интервале хотя и не значительно, но всё таки выше соответствующих величин при фиксированной номинальной частоте возбуждения $\overset{0}{\omega}_r$. На отмеченный выше фазовый переход в центральной части пластины КЭМС реагирует резким уменьшением. Наличие незначительных пиков на кривых 1 перед их убыванием определяется используемой температурной зависимостью свойств пьезоматериала. Величина ψ_V при автоподстройке частоты монотонно возрастает со скоростью, зависящей от $\Delta\varphi$. Практически неизменное, даже несколько убывающее поведение во времени коэффициента ψ_V при фиксированной частоте $\overset{0}{\omega}_r$ связано с выходом системы из резонансного режима.

На рис. 6.15, 6.16 и 6.17 штриховая линия соответствует уровню возбуждения $\Delta\varphi = 9$ В при увеличенном на порядок коэффициенте теплоотдачи ($\alpha_\text{т} = 50$ Вт/м$^2\cdot$град), что отвечает теплообмену при вынужденной конвекции воздуха. Видно, что усилением теплообмена можно уменьшить уход резонансной частоты от номинальной, поддержать амплитудные характеристики на номинальном уровне и т.п. При этом, однако, становится заметной нелинейность в поведении величин $\omega_r(t)$ и $T(t)$, поскольку усиление условий теплообмена начинает существенно сказываться только по истечении некоторого времени разогрева.

§ 6. Примеры конечноэлементных исследований планарных колебаний пьезопластин с усложненной формой контура и конфигурацией электродов

Конечноэлементный метод исследования планарных колебаний и диссипативного разогрева применим к пьезопластинам произвольной формы и различной конфигурации электродов. В данном параграфе это демонстрируется на примерах задач для прямоугольной пластины с частично электродированными главными гранями, прямоугольной пластины со срезанными углами и колец с различной конфигурацией электродов. Поскольку эффекты физической нелинейности и термоэлектромеханического сопряжения остаются качественно аналогичны описанным в предыдущих параграфах, приведем решения отмеченных задач в линейной постановке.

Относительно электродов в случае частичной металлизации главных граней пластины будем считать, что они имеют одинаковые размеры и расположены симметрично относительно срединной плоскости пластины. Это становится очевидным при рассмотрении первого из соотношений (6.19), указывающего на чётность составляющей $\tilde{D}_3$ вектора электрической индукции по толщинной координате. Кроме того, на неэлектродированных частях главных граней должно выполняться условие $\tilde{D}_3 = 0$. Поэтому на ряду с гипотезами (6.1) и (6.2) принимается дополнительная гипотеза [98]

$$\tilde{D}_3 = 0 \tag{6.59}$$

для тех областей пластины, которые не лежат под электродами. Тогда для этих областей из первого соотношения (6.19) получаем равенство

$$\frac{\Delta\tilde{\varphi}}{2h} = \frac{\tilde{e}^*_{31}}{\tilde{\mu}^*_{33}}(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}), \tag{6.60}$$

где $\Delta\tilde{\varphi}$ является, вообще говоря, функцией координат, т.е. $\Delta\tilde{\varphi} = \Delta\tilde{\varphi}(x_1, x_2)$. Подставив в (6.10) вместо $\tilde{E}_3$ выражение $-\Delta\tilde{\varphi}/2h$ из (6.60), получим определяющие уравнения для той части срединной плоскости пластины, которая не лежит под электродами. В подэлектродных областях в силу эквипотенциальности электродов $\Delta\tilde{\varphi} = const$.

При решении задачи (6.12) – (6.14) и (6.10) с учетом (6.60) необходимо наложить условие непрерывности перемещений и напряжений на линиях раздела $L_э = S_э \cap S_н$ частей срединной плоскости $S_э$, лежащих и $S_н$ не лежащих под электродами.

При решении задачи теплопроводности (6.16)–(6.18) в выражении для диссипативного источника (6.20) $\tilde{E}_3$ следует заменить на $-\Delta\tilde{\varphi}/2h$ из (6.60) для областей $S_н$, не лежащих под электродами.

В случае частичной металлизации главных граней пластины конечноэлементную разбивку срединной плоскости следует проводить так, чтобы линии, разделяющие эту плоскость на части, лежащие и не лежащие под электродами, полностью принадлежали границам конечных элементов разбивки. При таком требовании к разбивке условие непрерывности перемещений для задачи (6.12) – (6.14), (6.10) и (6.60) выполняется автоматически на уровне формирования глобальной матрицы системы. Условие непрерывности напряжений является для используемого вариационного принципа естественным.

Замечание 1. При нахождении комплексной статической ёмкости пьезопластины в случае частичного покрытия электродами главных граней соотношения электростатики (4.16) относительно комплексных величин следует дополнить условием

$$\tilde{D}_3 = -\tilde{\mu}^{\varepsilon}_{33}\tilde{\varphi}_{,3} = 0 \tag{6.61}$$

на неэлектродированных частях главных граней.

Пренебрегая краевыми эффектами вблизи границ электродов, примем в качестве приближенного решения системы (4.16) и (6.61) соотношение (6.26) при $\Delta\tilde{\varphi} \approx 0$ на $S_н$, так что и в этом случае для определения комплексной статической ёмкости будем использовать соотношение (6.28) или (6.29).

6.1 В таблице 6.4 для прямоугольной пластины с частично электродированными главными гранями (рис. 6.18) и размерами из § 4 представлены значения первой резонансной частоты ($\omega = \bar{\omega} \cdot 10^5$ рад/с) и соответствующие ей значения КЭМС в зависимости от величины электродного покрытия. Для наглядности на рис. 6.19 эти же результаты представлены графически кривыми 1 и 2 соответственно.

Таблица 6.4.

a'/a	1	5/6	2/3	1/2	1/3	1/6	0
$\bar{\omega}$	1,696	1,697	1,701	1,712	1,730	1,755	1,784
$k_э$	0,354	0,371	0,372	0,354	0,314	0,234	

Рис. 6.18. Рис. 6.19.

Видно, что путём правильного выбора величины электродов ($a'/a \approx 2/3$) можно достичь максимального значения КЭМС $k_э$, а следовательно, и наибольшей связанности электрического и механического полей.

6.2 Значения первых пяти резонансных частот и соответствующих им КЭМС для пластины с полностью электродированными гранями и срезанными углами (рис. 6.20) представлены в таблице 6.5 для параметров: $l_1 = 4$ см, $l_2 = 2$ см, $s_1 = 2$ см, $s_2 = 1$ см. Видно, что

Рис. 6.20.

наряду с первой пьезоактивными являются также четвертая и пятая резонансные частоты. Характер распределения стационарной температуры диссипативного разогрева вдоль оси x_1 ($x_2 = 0$) на пьезоактивных резонансных частотах показан на рис. 6.21 для параметров $\Delta\varphi = 5$ В, $\alpha_т = 25$ Вт/$\left(м^2 \cdot град\right)$ и толщины пластины $2h = 2$ мм. Видим, что даже незначительный уровень нагружения приводит к существенному саморазогреву пластины.

В работе [98] эта же задача рассматривалась в усложненной постановке без привлечения гипотезы (6.1), когда после решения механической задачи (6.12) – (6.14), (6.10) и определения поля деформаций

Таблица 6.5.

N	1	2	3	4	5
$\bar{\omega}$	1,421	3,702	5,040	5,316	5,882
$k_э$	0,368	0,096	0,105	0,310	0,358

Рис. 6.21. Рис. 6.22.

электрический потенциал находится путём разложения в тригонометрический ряд по толщинной координате. На рис. 6.22 для частоты $\bar{\omega}_5$ представлены взятые из [98] распределения действительной и мнимой частей комплексной амплитуды электрического потенциала вдоль линии $x_2 = 0$ (кривые 1 и 2) и линии $x_2 = s_1/2$ (кривые $\bar{1}$ и $\bar{2}$) при $x_3 = h/2$. Видно, что учёт потерь в материале приводит к существенно неравномерному распределению фазы колебаний электрического потенциала. Вместе с тем, на величине диссипативного источника, который в [98] имеет более сложный вид, чем (6.20), это практически не сказывается и кривые распределения температуры на рис. 6.21, полученные с привлечением гипотезы (6.1), полностью совпадают с соответствующими кривыми, приведенными в работе [98]. Не изменяются и значения КЭМС из табл. 6.5.

6.3 Зависимости первой радиальной частоты кольца (рис. 6.23) и соответствующего ей значения КЭМС от величины центрального концентрического электрода $\left(\xi = \dfrac{R_0 - r_0}{R - r}\right)$ показаны на рис. 6.24 кривыми 1 и 2 соответственно. Результаты рис. 6.24 свидетельствуют, что добиться увеличения КЭМС на первом обертоне радиальных колебаний кольца путём частичного, как показано на рис. 6.23, электродирования главных граней не удается.

Рис. 6.23. Рис. 6.24.

Возбудить несимметричные (радиально-сдвиговые) колебания свободного пьезоэлектрического кольца электрической нагрузкой позвоа) б)

Рис. 6.25.

ляют, например, тангенциальные разрезы электродов, как показано на рис. 6.25 а), б). Соответствующие этим случаям разрезных электродов значения первых резонансных частот представлены в табл. 6.6.

Таблица 6.6.

	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
а)	1,91	3,69	5,47	5,97
б)	1,92	3,64	5,50	5,95

Первому обертону радиальных колебаний кольца отвечает $\bar{\omega}_2$. Для кольца без разрезов электродов основная резонансная частота радиальных колебаний $\bar{\omega} = 3,59$. Размеры кольца такие же, как и в п. 2.2 § 2.

Приведённые в данном параграфе примеры задач не претендуют на полноту изложения, а представлены скорее с целью демонстрации простоты и эффективности конечноэлементных исследований.

Глава 7.

Колебания и диссипативный разогрев конструктивно-неоднородных электровязкоупругих тел

В данной главе исследуются осесимметричные колебания и диссипативный разогрев пьезопреобразователей энергии в виде конструктивно-неоднородных тел вращения, состоящих из активных пьезоэлектрических слоёв и пассивных металлических и диэлектрических слоёв. Диссипативные свойства металлических и полимерных материалов, обычно используемых в пьезоконструкциях, исследованы в работах [102, 132–135 и др.] Формулировка задачи термоэлектровязкоупругости для конструктивно-неоднородных пьезоэлектрических тел состоит из совокупности краевых задач для каждого слоя и условий механического, электрического и теплового контакта между ними. Все материалы предполагаются физически линейными. Для каждого пьезоэлектрического слоя разрешающая система уравнений относительно комплексных амплитуд электромеханических переменных и усредненной за цикл температуры описывается соотношениями (1.185) – (1.191), (1.200). В случае трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала амплитудные уравнения (1.200) конкретизируются соотношениями (3.97), в которых следует учесть зависимость коэффициентов только от частоты ω и от температуры T. Для пассивных (непьезоактивных) диэлектрических слоёв в определяющих уравнениях (1.200) следует положить равными нулю пьезоконстанты и учесть тип симметрии материала. Условия непрерывности на поверхностях идеального контакта двух пьезоэлектрических слоёв, пьезоэлектрического и пассивного диэлектрического слоёв имеют вид

$$
\begin{gathered}
\tilde{\sigma}_{ij}^{(m)} n_i = \tilde{\sigma}_{ij}^{(m+1)} n_i, \quad \tilde{u}_j^{(m)} = \tilde{u}_j^{(m+1)}, \\
\tilde{D}_j^{(m)} n_j = \tilde{D}_j^{(m+1)} n_j, \quad \tilde{\varphi}^{(m)} = \tilde{\varphi}^{(m+1)}, \\
\lambda_{ij}^{(m)} T,_j^{(m)} n_i = \lambda_{ij}^{(m+1)} T,_j^{(m+1)} n_i, \quad T^{(m)} = T^{(m+1)},
\end{gathered}
\tag{7.1}
$$

где m – номер слоя.

Относительно металлических слоёв считаем, что они являются идеальными проводниками. Это равносильно предположению об отсутствии электромагнитного поля внутри этих слоёв и их чисто механическому воздействию на пьезоэлементы. Краевая задача для металлического слоя сводится к решению следующих уравнений:

уравнений колебаний и теплопроводности

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \rho\omega^2\tilde{u}_i = 0, \tag{7.2}$$

$$\rho c_{\text{т}}\dot{T} = (\lambda_{ij}T,_j\,),_i + \bar{D}'_{\text{м}}, \tag{7.3}$$

где диссипативная функция $\bar{D}'_{\text{м}}$ равна

$$\bar{D}'_{\text{м}} = \frac{\omega}{2}(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}); \tag{7.4}$$

определяющих уравнений

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}(\omega, T)\tilde{\varepsilon}_{kl}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}\right), \tag{7.5}$$

конкретизируемых соотношениями § 5 гл. 2. Механические и тепловые граничные условия имеют вид (1.186), (1.190). К уравнению теплопроводности (7.3) необходимо добавить начальное условие для температуры (1.191). Механические и тепловые условия на поверхности идеального контакта S_m металлического и диэлектрического (пьезоактивного или непьезоактивного) слоев сохраняют вид (7.1). Электрические условия зависят от способа подвода (съема) электрической энергии к телу [27]. В одном случае на поверхности S_m известным является электрический потенциал (вся поверхность металлического слоя эквипотенциальна), в другом – электрический заряд $\tilde{Q}_m$

$$\tilde{Q}_m = -\int\limits_{S_m} \tilde{D}_i n_i dS, \tag{7.6}$$

в частности, величина $\tilde{Q}_m$ может быть равной нулю (незапитанный электрод).

Для решения задач о колебаниях составных тел, включающих активные пьезоэлектрические слои и пассивные (диэлектрические и (или) металлические) слои, можно использовать методику и программы, разработанные для пьезоэлектрических тел с неоднородностью непрерывного типа (см. гл. 5). Этот вопрос будет рассматриваться ниже на примере решения конкретных задач.

§ 1. Резонансные колебания осесимметричной электромеханической системы с автоподстройкой частоты

Исследование поведения ультразвуковых систем с учетом изменяющегося сопротивления нагрузки и возникающая в связи с этим задача о колебаниях систем с автоподстройкой частоты (АПЧ) возбуждения имеют важное теоретическое и практическое значение [151, 160]. По-видимому, одной из первых работ, посвященных указанной задаче, является работа [151], в которой на примере стержневой (одномерной) электромеханической системы приведен качественный анализ некоторых закономерностей термоэлектромеханического поведения акустических систем с АПЧ.

Для получения более точных количественных результатов, в особенности при высокочастотных колебаниях, а также в случае, когда поперечные размеры элементов системы соизмеримы с продольными, необходимы подходы, учитывающие пространственный характер распределения полевых величин.

В данном параграфе представлена двухмерная конечно элементная модель связанных термоэлектромеханических процессов в акустических системах для ультразвуковой сварки (УЗС) пластмасс с учетом переменного сопротивления нагрузки и АПЧ [79].

Постановка задачи. На рис. 7.1 показано меридиональное сечение колебательной системы, включающей стержневой пьезопреобразователь 1, ступенчатый концентратор 2, вязкоупругий элемент 3 и жесткую опору 4. Преобразователь состоит из двух параллельно включенных пьезокерамических пластин, общего электрода в виде тонкого металлического диска, излучающей и отражающей металлических накладок, одновременно выполняющих и роль электродов.

Рис. 7.1.

На поверхностях сопряжения элементов преобразователя, преобразователя и концентратора предполагается идеальный механический контакт, а на поверхностях сопряжения концентратора, вязкоупругого элемента (ВЭ) и опоры – гладкий контакт [152], при котором не исключается возможность относительного тангенциального проскальзывания указанных элементов. Условия идеального и гладкого контактов рассматриваются как предельные случаи реального контактного взаимодействия. В реальных устройствах условия идеального контакта в осевом направлении обеспечиваются статическим поджатием элементов системы. Тепловой контакт на всех поверхностях сопряжения предполагается идеальным.

Колебания возбуждаются генератором электрического напряжения $\tilde{\varphi}_\circ e^{i\omega t}$. По всей поверхности системы осуществляется конвективный теплообмен с окружающей средой температуры T^c и коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{\text{т}}$.

Полная постановка задачи включает уравнения колебаний и теплопроводности с диссипативным источником тепла $\bar{D}^{(n)}$

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij,j}^{(n)} + \rho^{(n)}\omega^2\tilde{u}_i^{(n)} = 0, \quad \rho^{(n)}c_{\text{т}}^{(n)}\dot{T}^{(n)} = (\lambda_{ij}^{(n)}T,_j^{(n)})_{,i} + \bar{D}^{(n)}, \\ n = m_1,\, m_2,\, m_3,\, p_1,\, p_2,\, m_4,\, e\end{gathered} \tag{7.7}$$

для отражающей $(n = m_1)$ и излучающей $(n = m_3)$ накладок преобразователя, диска $(n = m_2)$, левой $(n = p_1)$ и правой $(n = p_2)$ пьезопластин, концентратора $(n = m_4)$ и ВЭ $(n = e)$, причём

$$\bar{D}^{(n)} = \frac{\omega}{2} Im\left(\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^{(n)} + \tilde{E}_j^{(n)}\bar{\tilde{D}}_j^{(n)}\right), \;\; n = p_1,\, p_2 \tag{7.8}$$

– для пьезопластин и

$$\bar{D}^{(n)} = \frac{\omega}{2} Im\left(\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^{(n)}\right), \quad n = m_1,\, m_2,\, m_3,\, m_4,\, e \tag{7.9}$$

– для пассивных элементов системы (хотя под ВЭ понимается диэлектрик, считаем, что электрическое поле в занимаемой им области отсутствует);

уравнения электростатики для пьезопластин

$$\tilde{D}_{j,j}^{(n)} = 0, \quad \tilde{E}_i^{(n)} = -\varphi,_i^{(n)}, \quad n = p_1,\, p_2; \tag{7.10}$$

определяющие уравнения

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)} &= \tilde{C}_{ijkl}^{(n)}\tilde{\varepsilon}_{kl}^{(n)} - \tilde{e}_{kij}^{(n)}\tilde{E}_k^{(n)}, \\ \tilde{D}_j^{(n)} &= \tilde{e}_{jik}^{(n)}\tilde{\varepsilon}_{ik}^{(n)} + \tilde{\mu}_{ji}^{(n)}\tilde{E}_i^{(n)}, \;\; n = p_1,\, p_2;\end{aligned} \tag{7.11}$$

– для пьезопластин и

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)} = \tilde{C}_{ijkl}^{(n)}\tilde{\varepsilon}_{kl}^{(n)}, \quad n = m_1,\, m_2,\, m_3,\, m_4,\, e \tag{7.12}$$

– для остальных элементов системы;

соотношения Коши

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_{i,j}^{(n)} + \tilde{u}_{j,i}^{(n)}\right), \quad n = m_1,\, m_2,\, m_3,\; m_4,\, p_1,\, p_2, e; \tag{7.13}$$

граничные условия

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)} n_j^{(n)} = 0, \quad -\lambda_{ij}^{(n)} T,_j^{(n)} n_i^{(n)} = \alpha_{\text{т}}^{(n)} \left(T^{(n)} - T^c\right), \\ n = m_1,\, m_2,\, m_3,\; m_4,\, p_1,\, p_2, e \tag{7.14}$$

– на свободных поверхностях $S^{(n)}$ элементов системы и

$$\tilde{D}_i^{(n)} n_i^{(n)} = 0, \quad n = p_1,\, p_2 \tag{7.15}$$

– на неэлектродированных поверхностях $S^{(n)}$ пьезоэлементов;

начальное условие для температуры

$$T = \overset{0}{T}, \quad t = 0. \tag{7.16}$$

К (7.7) – (7.16) необходимо добавить условия механического и теплового контактов на поверхностях сопряжения элементов системы и условия электрического возбуждения. Конкретизируем эти условия для случая исследуемых ниже осесимметричных колебаний, используя цилиндрическую систему координат и вводя обозначения

$$q^{(\cdot)} = \left\{ \tilde{u}_z^{(\cdot)}, \tilde{u}_r^{(\cdot)}, \tilde{\sigma}_{zz}^{(\cdot)}, \tilde{\sigma}_{rz}^{(\cdot)}, T^{(\cdot)}, \lambda_{zz}^{(\cdot)} \partial T^{(\cdot)} / \partial z \right\} : \tag{7.17}$$

$$\begin{gathered} z = l_{m_1},\; 0 \le r \le d_p/2: \;\; q^{(m_1)} = q^{(p_1)},\; \tilde{\varphi}^{(p_1)} = 0; \\ z = l_{m_1} + l_{p_1},\; 0 \le r \le d_p/2: \;\; q^{(p_1)} = q^{(m_2)},\; \tilde{\varphi}^{(p_1)} = \tilde{\varphi}_\circ = const; \\ z = l_{m_1} + l_{p_1} + l_{m_2},\; 0 \le r \le d_p/2: \;\; q^{(m_2)} = q^{(p_2)},\; \tilde{\varphi}^{(p_2)} = \tilde{\varphi}_\circ; \\ z = l_{m_1} + l_{p_1} + l_{m_2} + l_{p_2},\; 0 \le r \le d_p/2: \;\; q^{(p_2)} = q^{(m_3)},\; \tilde{\varphi}^{(p_2)} = 0; \\ z = l_{m_1} + l_{p_1} + l_{m_2} + l_{p_2} + l_{m_3},\; 0 \le r \le d_p/2: \;\; q^{(m_3)} = q^{(m_4)} \end{gathered} \tag{7.18}$$

– на поверхностях идеальных механического и теплового контактов;

$$z = l_{m_1} + l_{p_1} + l_{m_2} + l_{p_2} + l_{m_3} + l_{m_4}, \\ 0 \le r \le d_e/2: \; q^{(m_4)} = q^{(e)} \tag{7.19}$$

или

$$\tilde{u}_z^{(m_4)} = \tilde{u}_z^{(e)}, \quad \tilde{\sigma}_{zz}^{(m_4)} = \tilde{\sigma}_{zz}^{(e)}, \quad \tilde{\sigma}_{rz}^{(m_4)} = \tilde{\sigma}_{rz}^{(e)} = 0, \\ T^{(m_4)} = T^{(e)}, \quad \lambda_{zz}^{(m_4)} T,_z^{(m_4)} = \lambda_{zz}^{(e)} T,_z^{(e)}; \tag{7.20}$$

$$z = l_{m_1} + l_{p_1} + l_{m_2} + l_{p_2} + l_{m_3} + l_{m_4} + l_e,\; 0 \le r \le d_e/2: \\ \tilde{u}_z^{(e)} = \tilde{u}_r^{(e)} = 0, \quad -\lambda_{zz}^{(e)} T,_z^{(e)} = \alpha_{\text{т}}^{(\circ)} \left(T^{(e)} - T^c\right) \tag{7.21}$$

или

$$\tilde{u}_z^{(e)} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz}^{(e)} = 0, \quad -\lambda_{zz}^{(e)} T,_z^{(e)} = \alpha_{\text{т}}^{(\circ)} \left(T^{(e)} - T^c\right) \tag{7.22}$$

– в случае гладкого контакта.

В дальнейшем предполагаем, что величины $\tilde{C}_{ijkl}^{(\cdot)}$, $\tilde{e}_{ijk}^{(\cdot)}$, $\tilde{\mu}_{ij}^{(\cdot)}$, $c_{\text{т}}^{(\cdot)}$, $\lambda_{ij}^{(\cdot)}$ являются функциями только температуры.

Закон изменения во времени резонансной частоты возбуждения $\omega_r(t)$, отражающий режим автоподстройки, обусловлен изменением во времени температуры диссипативного разогрева элементов и конкретизируется в процессе решения задачи.

Алгоритм решения задачи. Задача решается шаговым методом. На $n-$ном временном шаге по распределению температуры $\overset{n-1}{T}$, найденному на предыдущем шаге, определяются свойства материалов элементов системы и решаются следующие задачи:

- нахождение (уточнение) резонансной частоты ω_r;

- вычисление для найденного значения ω_r распределений механических и электрических полей;

- уточнение диссипативной функции и определение температуры $\overset{n}{T}$ путём решения задачи теплопроводности с начальной температурой $\overset{n-1}{T}$.

В качестве начального используется распределение температуры (7.16).

Поскольку все элементы системы, за исключением, возможно, ВЭ, являются высокодобротными, то нахождение текущей резонансной частоты можно проводить в рамках соответствующей упругоподобной задачи на собственные значения. При этом отбрасываются мнимые части в материальных характеристиках и в приведенных выше соотношениях все полевые величины считаются действительными. Нестационарная температурная задача, а также задача электромеханики для каждого шага по времени, решаются методом конечных элементов.

Непрерывность перемещений и температуры в случае идеальных механического и теплового контактов обеспечивается на уровне формирования глобальных матриц конечно-элементных систем. Условия непрерывности по напряжениям и тепловому потоку являются естественными для вариационного принципа Лагранжа и соответствующего вариационного принципа для задачи теплопроводности.

Трудности возникают с конечно-элементной реализацией условий гладкого контакта с проскальзыванием. Они моделируются путём введения тонких трансверсально-изотропных слоёв (рис. 7.2) с высокой осевой и низкой сдвиговой жесткостями. При таком подходе нет необходимости модифицировать вариационный принцип Лагранжа. Предполагается, что материал введенных слоёв имеет высокую теплопроводность и низкую теплоёмкость, так что условия идеального теплового контакта не искажаются.

Рис. 7.2.

С учетом сказанного вариационные формулировки линеаризованных задач электромеханики и теплопроводности имеют вид

$$\delta Э = 0, \quad \delta I = 0, \tag{7.23}$$

где

$$Э = \sum_n Э_n,\ I = \sum_n I_n,\ n = m_1, m_2, m_3, p_1, p_2, m_4, e, c_1, c_2, \tag{7.24}$$

$$\begin{gathered} Э_n = \frac{1}{2} \int\limits_{V^{(n)}} \big(\tilde{C}^{(n)}_{ijkl} \tilde{\varepsilon}^{(n)}_{ij} \tilde{\varepsilon}^{(n)}_{kl} - 2\tilde{e}^{(n)}_{ijk} \tilde{E}^{(n)}_i \tilde{\varepsilon}^{(n)}_{jk} - \tilde{\mu}^{(n)}_{ij} \tilde{E}^{(n)}_i \tilde{E}^{(n)}_j - \\ -\rho^{(n)} \omega^2 \tilde{u}^{(n)}_i \tilde{u}^{(n)}_i \big) dV - \int\limits_{S^{(n)}} \big(\tilde{t}^{(n)}_i \tilde{u}^{(n)}_i - \tilde{\sigma}^{(n)}_e \tilde{\varphi}^{(n)}\big) dS, \end{gathered} \tag{7.25}$$

$$\begin{gathered} I_n = \int\limits_{V^{(n)}} \Bigg(\lambda^{(n)}_{ij} T,^{(n)}_i T,^{(n)}_j + 2 \int\limits_{\overset{0}{T}}^{T^{(n)}} \rho^{(n)} c^{(n)}_{\text{т}} \dot{T}^{(n)} dT - \\ -2\bar{D}^{(n)} T^{(n)} \Bigg) dV + \int\limits_{S^{(n)}} \alpha^{(n)}_{\text{т}} (T^{(n)} - 2T^c) T^{(n)} dS. \end{gathered} \tag{7.26}$$

Здесь $V^{(n)}$ – области, занимаемые элементами системы, $\tilde{\sigma}^{(n)}_e$ – поверхностная плотность электрического заряда, $\tilde{t}^{(n)}_i$ – поверхностная механическая нагрузка (в нашем случае $\tilde{t}^{(n)}_i = 0$). Функционал (7.26), в отличие от (5.7), записан относительно температуры, а не её изображения по Лапласу. В (7.25) для всех областей, занимаемых пьезопассивными материалами ($n = m_1, m_2, m_3, m_4, e$), а также для введенных промежуточных слоёв ($n = c_1, c_2$) необходимо положить $\tilde{e}_{ijk}^{(n)} = 0$. Величины $\tilde{\mu}_{ij}^{(n)}$ в указанных областях считаем отличными от нуля, что обеспечивает одинаковое количество неизвестных в узлах конечноэлементной сетки. Задача электростатики для областей, занимаемых пьезопассивными материалами, не связана с задачей механики для этих областей ($\tilde{e}_{ijk} = 0$) и имеет тривиальное решение

$$\tilde{\varphi}^{(n)} = const, \quad \tilde{E}_i^{(n)} = 0, \quad \tilde{D}_i^{(n)} = 0. \tag{7.27}$$

В качестве граничного условия для этой задачи естественно выступает эквипотенциальность поверхности металлического элемента, а именно (см. 7.18)

$$\begin{gathered} \tilde{\varphi}^{(n)} = 0 \quad \text{на} \quad S^{(n)}, \quad n = m_1, m_3, m_4; \\ \tilde{\varphi}^{(n)} = \tilde{\varphi}_\circ \quad \text{на} \quad S^{(n)}, \quad n = m_2 \end{gathered} \tag{7.28}$$

и условие

$$\tilde{\sigma}_e^{(n)} = 0 \quad \text{на} \quad S^{(n)}, \quad n = e, c_1, c_2 \tag{7.29}$$

для областей, занятых пассивными неметаллическими материалами. На поверхностях сопряжения последних с металлическими элементами задаются соответствующие значения $\tilde{\varphi}^{(n)}$. В нашем случае

$$\tilde{\varphi}^{(c_1)} = 0, \quad \tilde{\varphi}^{(c_2)} = 0 \tag{7.30}$$

на поверхностях сопряжения промежуточных слоёв с концентратором и опорой. Заметим, что задача электростатики для металлических элементов носит чисто вспомогательный характер и лишена какого-либо физического содержания.

Для дискретизации меридионального сечения системы (рис. 7.2) применялись изопараметрические четырехугольные восьмиузловые элементы. Задача теплопроводности решалась с помощью неявной разностной схемы первого порядка. Амплитуда тока $\tilde{I}$ определялась как сумма токов смещения в пьезоэлементах

$$\begin{gathered} \tilde{I} = \tilde{I}^{(p_1)} + \tilde{I}^{(p_2)}, \\ \tilde{I}^{(n)} = \frac{i\omega}{\tilde{\varphi}_\circ} \int\limits_{V^{(n)}} \left(\tilde{\mu}_{ij}^{(n)} \tilde{E}_i^{(n)} \tilde{E}_j^{(n)} + \tilde{e}_{ijk}^{(n)} \tilde{E}_i^{(n)} \tilde{\varepsilon}_{jk}^{(n)} \right) dV. \end{gathered} \tag{7.31}$$

Для комплексного сопротивления $\tilde{R}$, активной и реактивной мощностей соответственно имеем

$$\tilde{R} = \tilde{\varphi}_\circ/\tilde{I}, \quad P_a = Re(\bar{\tilde{I}}\tilde{\varphi}_\circ)/2, \quad P_i = Im(\bar{\tilde{I}}\tilde{\varphi}_\circ)/2. \qquad (7.32)$$

Мощность энергии, рассеиваемой в элементе системы, определяется как

$$P^{(n)} = \int\limits_{V^{(n)}} \bar{D}^{(n)} dV, \qquad (7.33)$$

при этом

$$P_a = \sum_n P^{(n)}. \qquad (7.34)$$

Исходные данные. В качестве материала ВЭ принимался полиэтилен (ПЭНД), для которого температурные зависимости модулей сдвига $\tilde{G}^{(e)}(T)$ и объемного сжатия $\tilde{K}^{(e)}(T)$, плотности $\rho^{(e)}(T)$, а также коэффициентов объемной теплоёмкости $c_v^{(e)}(T)$ и теплопроводности $\lambda^{(e)}(T)$ взяты из работ [79, 142]. При этом модули $\tilde{C}_{zz}^{(e)}$ и $\tilde{C}_{zr}^{(e)}$ конкретизируются следующим образом

$$\tilde{C}_{zz}^{(e)} = \tilde{K} + 4\tilde{G}/3, \quad \tilde{C}_{zr}^{(e)} = \tilde{K} - 2\tilde{G}/3. \qquad (7.35)$$

Материал пьезопластин соответствует пьезокерамике ЦТС$_\text{т}$БС-2, температурные зависимости комплексных электромеханических характеристик которой, а также теплофизические параметры такие же, как и в § 4 гл. 5.

Свойства материалов накладок преобразователя, диска и концентратора принимались одинаковыми, независящими от температуры и соответствующими алюминиевому сплаву Д16Т [151]:

$$\rho^{(m)} = 0,2677 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda^{(m)} = 220 \text{ Вт/м} \cdot \text{град};$$
$$c_\text{т}^{(m)} = \lambda^{(m)}/\rho^{(m)} a_\text{т}^{(m)}; \qquad a_\text{т}^{(m)} = 0,93 \cdot 10^{-4} \text{м}^2/\text{с};$$
$$\tilde{E}^{(m)} = 0,724 \cdot 10^{11}(1 + i0,15 \cdot 10^{-4}) \text{ Н/м}^2; \quad \nu^{(m)} = 0,334.$$

При этом

$$\tilde{C}_{zz}^{(m)} = \frac{\tilde{E}^{(m)}(1-\nu^{(m)})}{(1+\nu^{(m)})(1-2\nu^{(m)})},$$
$$\tilde{C}_{zr}^{(m)} = \frac{\nu^{(m)}\tilde{E}^{(m)}}{(1+\nu^{(m)})(1-2\nu^{(m)})}, \quad m = m_1, ..., m_4. \qquad (7.36)$$

Геометрические параметры: $l_{p_1} = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м; $l_{p_2} = l_{p_1}$; $l_{m_2} = 0,2{\cdot}10^{-2}$ м; $l_e = 0,6{\cdot}10^{-2}$ м; $d_p = 0,4{\cdot}10^{-1}$ м; $d_{k_1} = d_p$; $d_{k_2} = d_{k_1}/2$; $d_e = d_{k_2}$; $l_{m_1} = 0,57961 \cdot 10^{-1}$м; $l_{m_3} = l_{m_1}$; $l_{m_4} = 0,12273$ м. Длины l_{m_1} и l_{m_4} получены из предварительных расчётов преобразователя и концентратора на частоту $f_r = 20$ кГц. Отметим, что расчёты в рамках стержневой теории [151] дают завышенные значения резонансных частот примерно на 5% и 6% соответственно для преобразователя и концентратора.

Принималось также, что $\overset{0}{T} = T^c = 20°$C; $\alpha_{\text{т}}^{(\circ)} = 200$ Вт/м$^2 \cdot$ град; $\alpha_{\text{т}}^{(n)} = 5$ Вт/м$^2 \cdot$ град $(n = m_1,\, m_2,\, m_3,\, m_4,\, p_1,\, p_2,\, e)$; $\tilde{\varphi}_\circ = \varphi'_\circ = 400$ В. Характеристики вспомогательных слоёв выбирались с учетом предварительных численных экспериментов.

Рис. 7.3. Рис. 7.4.

Результаты расчётов. На рис. 7.3 приведены кривые изменения во времени резонансной частоты $f_r = \omega_r/2\pi$ колебательной системы, средней по объёму ВЭ (сплошные линии) и максимальной (штриховые линии) температуры виброразогрева. Здесь и ниже кривые 1 соответствуют идеальному контакту на поверхностях сопряжения ВЭ с концентратором и опорой, а кривые 2 – условию гладкого контакта на этих поверхностях. Штрихпунктирные линии отвечают средней по объёму ВЭ температуре для системы без АПЧ при $f_r = 20$ кГц. На рис. 7.4 приведены кривые изменения активной электрической мощности P_a (штрихпунктирные линии), амплитуды перемещения $|\tilde{u}_z|$ в центре торца концентратора (сплошные линии) и полного электрического сопротивления R преобразователя (штриховые линии), $R = |\tilde{R}|$.

Основной эффект АПЧ проявляется при сравнении сплошных и штрихпунктирных кривых на рис. 7.3. Он состоит в том, что поддержание в режиме АПЧ соответствующей фазы между током и напряжением в преобразователе обеспечивает закачку мощности и эффективное функционирование высокодобротных резонансных систем, параметры которых изменяются во времени.

Представленные на рис. 7.3 и 7.4 данные позволяют выявить основные закономерности рассматриваемого термоэлектромеханического процесса. При нагружении на вязкоупругий элемент, во-первых, внутренние потери в системе возрастают и, во-вторых, возникает расстройка резонансных частот системы и преобразователя. Оба эти фактора обусловливают повышение электрического сопротивления преобразователя и относительно низкий уровень потребляемой мощности в начальной области процесса. Однако, вследствие виброразогрева сопротивление нагрузки, а, следовательно, и влияние указанных факторов, снижается, что влечет за собой увеличение потребляемой преобразователем мощности и амплитуды колебаний излучающего торца волновода.

Сопоставление кривых 1 и 2 показывает, что условия контакта на поверхностях ВЭ существенно влияют на расстройку частот системы и степень однородности температурного поля ВЭ, но слабо влияют на его среднюю температуру . Для электрических характеристик P_a и R отличия носят не только количественный, но и качественный характер. Обрыв кривых при $t \simeq 0,9$ с обусловлен сильным локальным разогревом ВЭ в окрестностях угловых точек, выходящим за рамки допустимого для данной расчетной схемы. Вследствие малости коэффициента трения на поверхностях контакта полимер-металл более близкими и практически реализуемыми являются кривые 2. Расчетное отклонение частоты в начальные моменты времени является завышенным, поскольку в рассматриваемой модели не учитывается отрыв волновода от ВЭ [142], который, как правило, имеет место в начальные моменты времени при тех уровнях статического поджатия, которые используются при УЗС.

Представленные на рис. 7.3 и 7.4 кривые хорошо согласуются с представленными в работе [160] экспериментальными данными вплоть до температуры перехода в вязкотекучее состояние материала ВЭ. Это свидетельствует об адекватности предложенной модели термомеханических процессов при УЗС на той её стадии, когда можно пренебречь большими искажениями конфигурации свариваемых тел и рассматривать задачи в геометрически линейной постановке.

§ 2. Колебания ультразвуковой электромеханической системы в режимах резонанса тока и резонанса напряжения

Используем приведенную в предыдущем параграфе конечноэлементную модель для сравнения двух возможных резонансных режимов работы ультразвуковой системы по сварке пластмасс – режимов резонанса тока (при возбуждении колебаний генератором напряжения (ГН)) и резонанса напряжения (при возбуждении колебаний генератором тока (ГТ)) [12]. Для этого рассмотрим осесимметричную резонансно-полуволновую электромеханическую систему, включающую пьезоэлектрический преобразователь и нагрузку. Преобразователь состоит из двух параллельно включенных пьезокерамических пластин (П1, П2), частотопонижающих тыльной (ТН) и рабочей (РН) накладок, одновременно выполняющих роль электродов и разделяющего пьезопластины токоподводящего диска (ТД) (рис. 7.5). Рабочая накладка выполнена в форме конического концентратора. В качестве нагрузки выступает вязкоупругий элемент (ВЭ), лежащий на жесткой опоре.

Рис. 7.5.

Колебания возбуждаются либо генератором напряжения $\tilde{\varphi}_\circ e^{i\omega t}$ либо генератором тока $\tilde{I}_\circ e^{i\omega t}$ с автоподстройкой частоты возбуждения. По всей поверхности системы осуществляется конвективный теплообмен с окружающей средой температуры T^c и коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{\text{Т}}$.

На поверхностях сопряжения металл – пьезокерамика предполагается идеальный механический контакт, а на поверхностях сопряжения концентратора, вязкоупругого элемента и опоры – гладкий контакт (см. § 1), при котором не исключается возможность относительного тангенциального проскальзывания указанных элементов. Тепловой контакт на всех поверхностях сопряжения предполагается идеальным.

Учитывается зависимость свойств пьезокерамики и материала вязкоупругого элемента от температуры, повышающейся в результате диссипативного разогрева элементов системы.

Как и в § 1, задача рассматривается в геометрически линейной постановке, дающей возможность проследить поведение системы вплоть до момента перехода материала вязкоупругого элемента в вязкотекучее состояние. Условия гладкого контакта с проскальзыванием, как и раньше, моделируются путём введения тонких трансверсально-изотропных слоёв с высокой осевой и низкой сдвиговой жесткостями, а также высокой теплопроводностью и низкой теплоемкостью.

В дальнейшем в качестве основного будем рассматривать случай возбуждения колебаний заданным напряжением $\tilde{\varphi}_\circ$ на электродах. В качестве граничных электрических условий для металлических областей принимается эквипотенциальность $\tilde{\varphi} = const$ их поверхности, что приводит к тождествам $\tilde{E}_i = 0$ и $\tilde{D}_i = 0$ внутри этих областей и позволяет при этом формально сохранить одинаковое число неизвестных в узлах конечноэлементной разбивки. Нахождение текущих резонансных и антирезонансных частот проводится в рамках соответствующей упругоподобной задачи на вынужденные колебания, возбуждаемые электрическим напряжением $\tilde{\varphi}_\circ$. При этом используется перемена знака электрического заряда электрода при переходе через резонансные и антирезонансные частоты. В случае возбуждения колебаний заданным током с амплитудой $\tilde{I}_\circ$ поступаем , в силу линейности задачи электромеханики (7.23) – (7.25) на каждом шаге во времени, следующим образом: вначале находим комплексное сопротивление $\tilde{R}$ на частоте возбуждения согласно первой из формул (7.32) при некотором значении $\tilde{\varphi}_\circ$; неизвестное значение напряжения на электродах $\tilde{\varphi}_{\circ_1}$ при заданном токе $\tilde{I}_\circ$ определяем как $\tilde{\varphi}_{\circ_1} = \tilde{R} \cdot \tilde{I}_\circ$; полевые электромеханические величины для $\tilde{I}_\circ$ (или $\tilde{\varphi}_{\circ_1}$) находим простым пересчетом величин, полученных для $\tilde{\varphi}_\circ$, путём домножения на коэффициент $\alpha = \tilde{\varphi}_{\circ_1}/\tilde{\varphi}_\circ$.

Исходные данные. Свойства материала ТН $\rho^{(\text{тн})} = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\tilde{E}^{(\text{тн})} = 2,09 \cdot 10^{11}(1 + i\,0,17 \cdot 10^{-3})$ Н/м^2; $\nu^{(\text{тн})} = 0,28$; $\lambda^{(\text{тн})} = 48$ Вт/м $\cdot$ град; $c_{\text{т}}^{(\text{тн})} = \lambda^{(\text{тн})}/\rho^{(\text{тн})} \cdot a_{\text{т}}^{(\text{тн})}$; $a_{\text{т}}^{(\text{тн})} = 0,13 \cdot 10^{-4}$ м^2/с соответствуют стали ст. 45.

В качестве материалов РН и ТД выступает сплав Д16Т, а материала ВЭ – полиэтилен (ПЭНД). Физико-механические характеристики этих материалов и их температурные зависимости для ПЭНД принимались такими же, как и в § 1.

Для комплексных электромеханических характеристик пьезоматериала, соответствующих начальной температуре $\overset{0}{T} = 20°$C, принимались следующие значения:

$$\begin{gathered}
\tilde{S}_{33}^E = 16,3(1 - i \cdot 0,012) \cdot S_\circ; \;\; \tilde{S}_{13}^E = -5,7(1 - i \cdot 0,0077) \cdot S_\circ; \\
\tilde{S}_{11}^E = 13,2(1 - i \cdot 0,0103) \cdot S_\circ; \;\; \tilde{S}_{12}^E = -4,1(1 - i \cdot 0,0113) \cdot S_\circ; \\
\tilde{S}_{44}^E = 41(1 - i \cdot 0,0157) \cdot S_\circ; \;\; d_{33} = 274(1 - i \cdot 0,0223) \cdot d_\circ; \\
d_{31} = -110(1 - i \cdot 0,023) \cdot d_\circ; \;\; d_{15} = 447(1 - i \cdot 0,025) \cdot d_\circ; \\
\tilde{\mu}_{33}^\sigma/\varepsilon_\circ = 1160(1 - i \cdot 0,0247); \quad \tilde{\mu}_{11}^\sigma/\varepsilon_\circ = 1343(1 - i \cdot 0,0317); \\
S_\circ = 10^{-12}\ \text{м}^2/\text{Н}; \;\; d_\circ = 10^{-12}\ \text{Кл/Н}; \;\; \varepsilon_\circ = 8,84194 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}.
\end{gathered}$$

Действительные части констант соответствуют пьезокерамике ЦТС–24. Коэффициенты потерь взяты из работы [136]. При этом все ограничения термодинамического характера, накладываемые на эти коэффициенты, выполняются. Зависимости величин $\tilde{S}^E$, $\tilde{d}$, $\tilde{\mu}^\sigma$ от температуры принимались такими же, как и в § 4 гл. 5. Значения для теплофизических характеристик пьезокерамики следующие:

$$\lambda_{11} = \lambda_{33} = 1,5 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}; \;\; a_{\text{т}} = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \;\; \rho = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Принималось также, что $T^{\text{c}} = \overset{0}{T} = 20^\circ\text{C}$; $\alpha_{\text{т}}^{(\cdot)} = 5 \text{ В/м}^2 \cdot \text{град}$; $\alpha_{\text{т}}^{(\circ)} = 200 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$; $\tilde{\varphi}_\circ = 220$ В; $\tilde{I}_\circ = 0,121$ А. Здесь $\alpha_{\text{т}}^{(\circ)}$ – коэффициент теплоотдачи на поверхности сопряжения ВЭ и опоры. Величины $\tilde{\varphi}_\circ$ и $\tilde{I}_\circ$ выбирались из условия совпадения потребляемых системой мощностей в начале процессов.

Результаты расчётов. На рис. 7.6 приведены отражающие режим АПЧ кривые изменения во времени резонансной f_r и антирезонансной f_a частот колебательной системы, средней по объёму ВЭ (штрихпунктирные линии) и максимальной (в точке M на рис. 7.5) (штриховые линии) температуры виброразогрева. Здесь и ниже кривые 1 соответствуют случаю возбуждения колебаний генератором напряжения (на частоте f_r), а кривые 2 – генератором тока (на частоте f_a). Кривые $1', 2'$ демонстрируют эволюцию амплитуды перемещения $|\tilde{u}_z|$ в центре торца концентратора.

Рис. 7.6.

Рис. 7.7.

На рис. 7.7 приведены кривые изменения электрического сопротивления $R = |\tilde{R}|$ преобразователя (штрихпунктирные линии), активной электрической мощности (штриховые линии) и мощности, рассеиваемой в объёме ВЭ (сплошные линии).

Основные закономерности рассматриваемых термоэлектромеханических процессов, описываемые кривыми 1, 2, заключаются в следующем: нагружение на ВЭ приводит к возрастанию внутренних потерь в системе и вызывает расстройку резонансных и антирезонансных частот преобразователя и системы (резонансная и антирезонансная частоты преобразователя без нагрузки и соответствующие им электрические сопротивления равны $f_r = 21,4543$ кГц, $f_a = 22,4548$ кГц, $R_{f_r} = 42,7$ Ом,

$R_{f_a} = 23,3 \cdot 10^4$ Ом). Оба эти фактора повышают электрическое сопротивление преобразователя на резонансной частоте системы и понижают – на антирезонансной частоте. Вследствие виброразогрева механическое сопротивление нагрузки снижается, в результате чего электрическое сопротивление преобразователя на резонансе системы уменьшается, а на антирезонансе – повышается, что влечет за собой увеличение потребляемой мощности и амплитуды излучающего торца концентратора.

Несмотря на качественное сходство в поведении, кривые 1,2 демонстрируют существенные количественные различия в протекании описываемых ими процессов. При возбуждении колебаний генератором тока температура перехода материала ВЭ в вязкотекучее состояние достигается значительно быстрее, что отражено более ранним обрывом кривых 2. Объяснение этому даёт анализ мощностей на рис. 7.7, показывающий, что основная часть мощности (85 – 83%), потребляемой от генератора тока, рассеивается на ВЭ, тогда как доля мощности, рассеиваемой на ВЭ в случае генератора напряжения, составляет всего 58 – 53%. Причиной этому служит различие в уровнях затухания колебаний в пьезоэлементах на резонансных и антирезонансных частотах системы. При всем сказанном, генератор тока должен быть более мощным, чем генератор напряжения, о чём свидетельствуют штриховые кривые 1,2.

Поскольку мощность, рассеиваемая на металлических элементах преобразователя, не превышает 1% от всей потребляемой от генераторов мощности, основным поглотителем энергии, не доходящей до нагрузки, является материал пьезопластин, в связи с чем не исключена возможность перегрева последних и, как следствие этого, частичная утрата ими своих функциональных возможностей, особенно на последующих стадиях процесса [151, 160].

§ 3. Виброразогрев и тепловые напряжения в пьезопреобразователе типа Ланжевена

Одним из основных элементов акустических систем для сварки термопластичных материалов, интенсификации технологических процессов, в медицине [19, 127, 169] и т. п. является электро – или магнитомеханический преобразователь энергии. В настоящее время наибольшее распространение получил пьезопреобразователь Ланжевенового типа, поскольку он обеспечивает эффективное преобразование электрической энергии в механическую и большие значения амплитуд колебаний. Типичная конфигурация преобразователя показана на рис. 7.8. Это со-

Рис. 7.8.

ставной резонатор, состоящий из отражающей (1) и излучающей (2) накладок, четного числа поляризованных по толщине пьезокерамических колец (3). Для обеспечения акустического контакта элементов и динамической прочности пьезокерамики система стягивается болтом (4). В результате в ней возникает предварительное сжатие. В целом преобразователь колеблется на первой продольной моде.

Резонансные режимы функционирования рассматриваемых систем сопровождаются высоким уровнем динамических напряжений и вибрационного разогрева, обусловленного как механическими так и диэлектрическими потерями в пьезоэлектрическом материале. Существуют, по крайней мере, два аспекта, определяющие температурные факторы как ограничивающие возможности функционирования системы. Во-первых, достижение температурой точки Кюри приводит к деполяризации пьезоактивных материалов, во-вторых, тепловые напряжения, обусловленные разогревом, могут привести к разрушению пьезоэлементов.

Достаточно полный обзор работ, посвященных экспериментально-теоретическому исследованию термоэлектромеханических характеристик преобразователя типа Ланжевена, дан в работе [176]. Их анализ показывает, что конечноэлементные подходы обеспечивают надежное моделирование процессов, необходимое для их проектирования.

Вместе с тем, задача о тепловых напряжениях, возникающих вследствие виброразогрева, и их зависимости от условий контакта стянутых болтом элементов преобразователя исследована недостаточно полно. В данном параграфе этот вопрос рассмотрен в контексте полного конечноэлементного анализа термоэлектромеханического поведения стержневого пьезопреобразователя на рис. 7.8. Основные результаты данного параграфа изложены в работе [78].

Предполагаем, что материалы составляющих преобразователь элементов являются физически линейными и имеют температурнонезависящие свойства. В этом случае задача решается следующим образом. Сначала интегрируются уравнения колебаний на частоте возбуждения, равной резонансной. Затем вычисляется диссипативная функция и решается краевая задача теплопроводности. По известному температурному полю вычисляются термоупругие деформации и напряжения. Состояние предварительного статического деформирования, обусловленное сжатием элементов преобразователя болтом, определяется независимо от остальных состояний. При указанных условиях параметры системы не изменяются во времени, вследствие чего отпадает необходимость рассмотрения режима автоподстройки частоты.

Постановка задачи о колебаниях и виброразогреве составных тел, включающих пьезоактивные и пьезопассивные элементы, и её конечноэлементное решение с использованием методик и программ, разработанных для пьезоэлектрических тел с неоднородностью непрерывного типа, рассматривались в предыдущих параграфах. Остановимся на задаче о тепловых напряжениях. Для решения этой задачи с помощью МКЭ используется вариационная формулировка

$$\delta Э_{\text{т}} = 0, \qquad Э_{\text{т}} = \sum Э^{(\cdot)},$$
$$Э^{(\cdot)} = \frac{1}{2} \int\limits_{V^{(\cdot)}} \Big(C^{(\cdot)}_{ijkl} \varepsilon^{(\cdot)}_{ij} \varepsilon^{(\cdot)}_{kl} - 2e^{(\cdot)}_{ijk} E^{(\cdot)}_i \varepsilon^{(\cdot)}_{jk} - \mu^{(\cdot)}_{ij} E^{(\cdot)}_i E^{(\cdot)}_j - $$
$$-2\beta^{(\cdot)}_{ij} \Theta^{(\cdot)} \varepsilon^{(\cdot)}_{ij} - 2q^{(\cdot)}_i \Theta^{(\cdot)}_i E^{(\cdot)}_i \Big) dV - \int\limits_S \left(t^{(\cdot)}_k u^{(\cdot)}_k - \sigma^{(\cdot)}_e \varphi^{(\cdot)} \right) dS, \tag{7.37}$$

предполагающая выполнение наряду с соотношениями Коши и градиентным уравнением для электрического потенциала следующих определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma^{(\cdot)}_{ij} &= C^{(\cdot)}_{ijkl} \varepsilon^{(\cdot)}_{kl} - e^{(\cdot)}_{kij} E^{(\cdot)}_k - \beta^{(\cdot)}_{ij} \Theta^{(\cdot)}, \\ D_i &= e^{(\cdot)}_{ijk} \varepsilon^{(\cdot)}_{jk} + \mu^{(\cdot)}_{ij} E^{(\cdot)}_j + q^{(\cdot)}_i \Theta^{(\cdot)}. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Здесь $\Theta^{(\cdot)} = T^{(\cdot)} - \overset{0}{T}$ – заданное приращение температуры, $V^{(\cdot)}$ – области, занимаемые элементами преобразователя. Величины $\beta^{(\cdot)}_{ij}$ для пьезоактивного (пьезокерамического) материала связаны с коэффициентами линейного теплового расширения $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, α_{33} соотношениями

$$\begin{aligned} \beta^{(\cdot)}_{11} = \beta^{(\cdot)}_{22} &= (\alpha_{11} \overset{E}{S}_{33} - \alpha_{33} \overset{E}{S}_{13}) / \bar{S}, \\ \beta^{(\cdot)}_{33} &= (\alpha_{33} (\overset{E}{S}_{11} + \overset{E}{S}_{12}) - 2\alpha_{11} \overset{E}{S}_{13}) / \bar{S}, \end{aligned} \tag{7.39}$$

$$\bar{S} = S_{33}^{E}(S_{11}^{E} + S_{12}^{E}) - 2S_{13}^{E^2}; \quad \beta_{ij}^{(\cdot)} = 0, \ i \neq j.$$

Для пьезокерамического материала $q_1 = q_2 = 0$ (поляризация вдоль оси x_3), а

$$q_3 = p_{33} - 2\alpha_{11}e_{31}^{(\cdot)} - 2\alpha_{33}e_{33}^{(\cdot)}, \tag{7.40}$$

где p_{33} – пироконстанта.

Для пьезопассивных материалов, как и раньше, полагаем $e_{ijk}^{(\cdot)} = 0$. Кроме того, для этих материалов (все изотропные) $q_i \equiv 0$, $\beta_{ij}^{(\cdot)} = \beta$ при $i = j$ и $\beta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, причём

$$\beta = \frac{E}{1 - 2\nu}\alpha, \tag{7.41}$$

где α – коэффициент линейного теплового расширения.

В отличие от (7.25), все величины в (7.37) являются действительными.

Кольцевые пьезоактивные элементы в преобразователе (рис. 7.8) располагаются между двумя накладками и стягиваются болтом. Следовательно, общее напряженное состояние преобразователя есть суперпозиция динамической (колебательной) и статической составляющих, причём последняя, в свою очередь, слагается из термоупругих и предварительных напряжений. Для вычисления последних используются вариационная формулировка (7.37) и определяющие уравнения (7.38) при $\beta_{ij} = 0$, $q_i = 0$. Как в задаче о тепловых напряжениях, так и в задаче о предварительном статическом деформировании в качестве граничного принимается условие эквипотенциальности поверхности металлических элементов преобразователя. Причем оба состояния рассчитываются при закороченных электродах. Натяжение болта во второй задаче моделируется путём его мысленного “разреза” в центральной части и приложения на краях разреза растягивающих усилий t_3.

При анализе кусочно-неоднородных конструкций, цельность которых обеспечивается статическим сжатием, учёт трения имеет важное значение при расчете напряженно-деформированного состояния. Описание этих эффектов в рамках контактной задачи является весьма сложным. В данном параграфе, как и в § 1, оценка влияния сил трения производится путём сопоставления решений, отвечающих двум предельным условиям взаимодействия – идеальному и гладкому механическим контактам. В первом случае на поверхности контакта предполагается равенство перемещений и усилий, а во втором – равенство нормальных перемещений при нулевой касательной составляющей вектора напряжений. Тепловой контакт предполагается идеальным. Конечноэлементная реализация гладкого контакта осуществляется путём введения между контактирующими телами тонкого слоя из фиктивного трансверсально-изотропного материала. При этом ось симметрии совмещается с нормалью к поверхности раздела и жесткость материала в этом направлении выбирается существенно бо́льшей, а в плоскости изотропии – существенно меньшей соответствующих характеристик контактирующих тел.

Свойства материалов. В представленном на рис. 7.8 преобразователе болт и тыльная (отражающая) накладка изготовлены из стали 45, рабочая (излучающая) накладка – из алюминиевого сплава D16T, пьезоактивными элементами служат кольца из керамики типа ЦТС-24. Характеристики указанных материалов приведены в двух предыдущих параграфах. Для коэффициентов линейного теплового расширения принимались следующие значения: Ст.45 – $\alpha = 0,116 \cdot 10^{-4}$ град$^{-1}$; D16T – $\alpha = 0,23 \cdot 10^{-4}$ град$^{-1}$; ЦТС - 24 – $\alpha_{11} = \alpha_{33} = 0,12 \cdot 10^{-4}$ град$^{-1}$. Расчёты проводились при $p_3 = 0$.

В качестве прокладочного материала между пьезопластинами и стягивающим болтом использовался фторопласт – 4 [15]: $\rho = 2,2{\cdot}10^3$ кг/м^3; $E^{'} = 0,66{\cdot}10^9$ Н/м^2; $\nu = 0,4$; $E^{''}/E^{'} = 0,1{\cdot}10^{-2}$; $\lambda = 0,23$ Вт/м·град; $a_{\text{т}} = 0,11 \cdot 10^{-6}$м^2/сек; $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$ град$^{-1}$; $\varepsilon^{'} = 2,1 \cdot \varepsilon_{\circ}$ – диэлектрическая проницаемость; $\varepsilon^{''}/\varepsilon^{'} = 0,2 \cdot 10^{-3}$.

Результаты расчётов. Рассмотрим сначала напряженное состояние, обусловленное стягиванием преобразователя болтом. Кривые распределения для компоненты σ_z в области, занимаемой пьезокерамикой ($34\,\text{мм} < z < 58\,\text{мм}$, $10\,\text{мм} < r < 25\,\text{мм}$), при усилии стягивания 1 тонна показаны на рис. 7.9. Здесь и ниже цифра 1 отвечает случаю идеаль-

Рис. 7.9.

ного механического контакта на поверхностях сопряжения пьезокерамики с накладками, 2 – гладкому на этих поверхностях и 3 – идеальному контакту на поверхности пьезокерамика – отражающая накладка и гладкому контакту на поверхности пьезокерамика – излучающая накладка. Три семейства кривых построены для трёх значений радиуса: $1,2,3 - r = 10,6$ мм; $1',2',3' - r = 16$ мм; $1'',2'',3'' - r = 24$ мм. Видно, что осевое напряжение нечувствительно к условиям контакта. Для него характерно весьма неоднородное распределение по радиусу, причём максимальные сжимающие напряжения σ_z имеют место вблизи внутреннего радиуса пьезокерамических колец, а минимальные – на их наружной поверхности. Если вблизи отражающей накладки ($z = 34$ мм) распределение σ_z по радиальной координате достаточно равномерное, то распределение вблизи излучающей накладки ($z = 58$ мм) имеет существенную неоднородность.

Рис. 7.10.

Вызываемые стягиванием преобразователя болтом компоненты напряжения σ_φ и σ_r в пьезокерамической области (рис. 7.10) значительно меньше по абсолютной величине, чем σ_z. При этом напряжения σ_r почти всюду являются сжимающими, а σ_φ могут быть растягивающими, в частности, вблизи наружной поверхности. Общий уровень напряжений σ_φ и σ_r определяется различием коэффициентов Пуассона керамики и накладок. Эффекты условий контакта локализованы вблизи угловых точек поверхностей раздела керамика–накладки. Так, в случае идеального контакта существует особенность (т.е. неограниченность) напряжений. При гладком контакте они ограничены. Если жесткость отражающей накладки незначительна, то в наружной части границы с керамикой может произойти отслоение. Это обстоятельство почти неизбежно приводит к разрушению от динамических напряжений прилегающего к накладке пьезокерамического кольца.

Максимальное статическое напряжение σ_z в болте достигается в точке Q на рис. 7.8.

Анализ колебаний и виброразогрева начнём с рассмотрения основных характеристик преобразователя, приведенных в таблице 7.1 и отвечающих возбуждению разностью потенциалов $\Delta\varphi = 9$ В.

Здесь f_r – частота механического резонанса; R_a и P_a – активные сопротивление и мощность на резонансе; u_{zr} и u_{zb} – осевые перемещения торцов накладок при $r = 15$ мм; k_y – коэффициент усиления, $k_y = u_{zr}/u_{zb}$; ΔT_m – максимальное по объёму приращение температуры в стационарном состоянии. Цифры 1–3 отвечают определённым выше условиям контакта, а в строке 4 приведены экспериментальные данные. Анализ результатов показывает, что условия контакта в силу

Таблица 7.1.

Условия конт.	f_r, кГц	R_a, Ом	P_a, Вт	u_{zb}, мкм	u_{zr}, мкм	k_y	ΔT_m, $^\circ C$
1	21,88	17,5	2,32	0,579	0,982	1,70	24,7
2	21,41	16,6	2,43	0,554	0,938	1,69	25,7
3	21,66	17,2	2,35	0,559	0,950	1,70	24,8
4	21,91	19,6	2,20	0,560	0,930	1,66	–

преимущественно продольного характера движений не влияют существенно на представленные характеристики.

Рис. 7.11. Рис. 7.12.

На рис. 7.11 (для условия контакта 1) и рис. 7.12 (для условия контакта 3) показаны изменения амплитуды u_z осевого перемещения и приращения температуры ΔT вдоль сечений преобразователя $r = 0$ (болт), $r = 10$, 15, 25 мм. Штрих-пунктирная линия на рис. 7.11 соответствует изменению температуры при условии контакта 2. Видно, что при одностороннем ослаблении связи (условие 3) наблюдается отклонение узловых точек в сечениях $r = const$ друг относительно друга в направлении оси вращения. Узел смещения в болте ($r = 0$) сдвинут на некоторое расстояние влево по отношению к узлам в пьезокерамической области. Дополнительные расчёты показали, что наличие заглушки в излучающей накладке уменьшает это расстояние (узлы в пьезокерамической области при этом не изменяются) и понижает резонансную частоту примерно на $0,5$ кГц, что объясняется увеличением "приведенных" плотности материала (в области максимальных перемещений) и колебательной длины. Низкий уровень механических напряжений на выходе преобразователя делает вклад увеличенной "приведенной" жесткости в значение резонансной частоты несущественным. Максимальный разогрев преобразователя имеет место в пьезокерамической части, поскольку данный материал обладает высоким уровнем внутренних потерь, низкой теплопроводностью и, кроме того, пьезоактивная часть преобразователя располагается в области пучности продольных напряжений (вторая справа пьезокерамическая пластина на рис. 7.8). Наибольшими значениями градиента температуры характеризуются крайние пьезопластины.

Рис. 7.13. Рис. 7.14.

На рис. 7.13, 7.14 показаны распределения компонент σ_z и σ_φ динамических (сплошные линии) и термоупругих (штриховые линии) напряжений вдоль сечений $r = const$ в пьезокерамической области преобразователя. Особенности в поведении термоупругих напряжений σ_r в этой области характеризуют кривые на рис. 7.15.

Рис. 7.15.

Распределения амплитуд σ_z и σ_φ динамических напряжений достаточно однородны, поскольку отвечают области пучности напряжений. Ослабление механического контакта (наличие проскальзывания) проявляется в увеличении вклада в напряженное состояние пьезокерамики окружного напряжения σ_φ (в сечениях, близких к внутренней границе пьезокерамической области $r = 10$ мм, σ_φ соизмеримо с σ_z).

В общем случае уровень тепловых напряжений определяется интенсивностью диссипации энергии, условиями охлаждения, различием коэффициентов теплового расширения (КТР) и теплопроводности элементов преобразователя, а также условиями контакта колец с накладками. Взаимодействие этих факторов обусловливает непростой характер их распределения. На рис. 7.13 видно, что при идеальном контакте (условие 1) в средних сечениях $r = const$ и сечениях вблизи внутреннего отверстия в керамике имеют место растягивающие тепловые напряжения σ_z, тогда как при наличии проскальзывания они сжимающие. Наиболее опасной зоной тепловых напряжений σ_φ и σ_r является пьезопластина, примыкающая к излучающей накладке, где эти напряжения являются растягивающими, причём в случае условия контакта 1 σ_φ достигает значения 15 мПа. Такой характер распределения объясняется тем, что, имея больший КТР, излучающая накладка, расширяясь радиально, “тянет” керамику. Поскольку КТР керамики несколько больше, чем отражающей накладки, то последняя сдерживает расширение керамики, формируя область сжатия. Возможность проскальзывания пьезопластины относительно излучающей накладки в $3 \div 4$ раза снижает уровень напряженности в этой пьезопластине. Вместе с тем, ослабление связи другой крайней пластины с отражающей накладкой (условие контакта 2) переводит тепловые напряжения σ_φ и σ_r в разряд положительных. Поэтому наиболее благоприятными по отношению к тепловым напряжениям σ_φ и σ_r условиями контакта пьезокерамики с накладками в рассмотренном примере являются условия 3.

Компоненты напряжений σ_z, σ_φ и σ_r, обусловленные статическим поджатием, имеют вблизи накладок знаки, противоположные знакам аналогичных компонент тепловых напряжений. Поэтому поджатием можно, в принципе, нейтрализовать не только динамические напряжения в фазе растяжения, но и тепловые, по крайней мере, в основной части керамического массива. Вместе с тем, компенсация растягивающих напряжений вблизи накладок трудно прогнозируема из-за сложности моделирования контактного взаимодействия на поверхностях раздела. Этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Тепловые напряжения σ_z вдоль болта положительные и поэтому усиливают статическое натяжение последнего.

Развитый подход позволяет путём численного моделирования рассчитать все электромеханические характеристики пьезоэлектрических преобразователей, оценить эффективность различных конструктивных приёмов снижения уровня температурного поля виброразогрева и температурных напряжений, определить усилия статического поджатия, необходимые для повышения их долговечности.

Глава 8.

Колебания и диссипативный разогрев пьезоэлектрических тел с учётом температурной деполяризации материала

Известно, что большие переменные электрические поля,механические напряжения, нагрев до точки Кюри приводят к деполяризации поляризованных керамик и, следовательно, к утрате ими своих пьезоэлектрических свойств [173]. Под температурной деполяризацией понимается деполяризация, вызванная преимущественно нагревом пьезоматериала при сравнительно слабых электрических и механических полях. Одной из причин, могущих привести к существенному повышению температуры, является диссипативный разогрев, если пьезоматериалу присущи заметные вязкоупругие свойства. Последние, как известно, характерны не только для пьезополимеров, но и для традиционных пьезокерамик, причём имеют тенденцию к росту с повышением температуры вплоть до значений точки Кюри [136].

Вопрос о диссипативном разогреве, как причине деполяризации пьезоматериала, может рассматриваться как при квазистатических [119, 120], так и динамических [63] колебаниях пьезоэлементов.

В первом случае при определённых условиях, связанных с уровнем и длительностью нагружения, условиями теплообмена, температурой среды, геометрией пьезоэлемента и др., не исключена возможность так называемого теплового взрыва [77], неизбежным следствием которого может стать деполяризация пьезоматериала. Этот вопрос рассматривается в первом параграфе главы на примере модельной задачи о толщинных квазистатических колебаниях пьезоэлектрического слоя, возбуждаемого электрическим напряжением. Получены и проанализированы соотношения для критических параметров, при которых тепловое равновесие системы “слой – внешняя среда” нарушается и диссипативный разогрев слоя приобретает характер теплового взрыва.

В параграфах 2 – 4 вопрос о температурной деполяризации пьезоматериала рассматривается на примере осесимметричных динамических колебаний и виброразогрева пьезоэлементов в форме тел вращения. Электромеханические колебания с учетом деполяризации исследуются как при установившихся тепловых состояниях, так и в процессе выхода температуры на стационарный режим. Значительное внимание уделено резонансным колебаниям пьезоэлементов, при которых вопросы диссипативного разогрева и деполяризации приобретают особую актуальность и эффективное возбуждение которых, как известно [151], возможно только при автоподстройке частоты возбуждения ввиду сильной зависимости свойств пьезоматериала от температуры.

В последнем параграфе главы рассматривается задача о влиянии деполяризации пьезоматериала на динамическое поведение пьезокерамической пластины, совершающей планарные колебания при гармоническом электрическом возбуждении.

Кроме отмеченных выше,исследованию колебаний пьезоэлектрических тел с учетом деполяризации посвящены также работы [50, 82, 83, 84].

§ 1. О температурной деполяризации пьезоэлектрического слоя в условиях квазистатических колебаний

Рассмотрим стационарную задачу о диссипативном разогреве пьезоэлектрического слоя $-h \leq z \leq h,\ -\infty < x, y < \infty$, поляризованного вдоль оси z и возбуждаемого электрическим напряжением $\Delta\varphi e^{i\omega t}$ на электродах $z = \pm h$. Частота колебаний ω считается достаточно малой, чтобы имело место квазистатическое напряженно-деформированное состояние (НДС). Слой находится в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой температуры T^c и коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{\text{т}}$. Установившаяся температура T удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dz}\left(\lambda\frac{dT}{dz}\right) + F(T) = 0, \tag{8.1}$$

где

$$F(T) = \frac{\omega}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2h}\beta(T)\right)^2 D(T)\Pi(T) \tag{8.2}$$

– зависящий от температуры диссипативный источник тепла, причём

$$D(T) = -\delta_{33}^{\mu} + k_t^2[\delta_{33}^c + \delta_{33}^{\mu} - 2\delta_{33}^e], \quad \Pi(T) = \frac{\mu_{33}}{1 - k_t^2}, \tag{8.3}$$

$$\beta(T) = \left[\Pi(T)\frac{1}{h}\int\limits_0^h \frac{dz}{\Pi(T)}\right]^{-1}; \tag{8.4}$$

λ – коэффициент теплопроводности пьезоматериала; k_t^2 – толщинный коэффициент электромеханической связи, определяемый равенствами

$$k_t^2 = \frac{k_{33}^2}{1 + k_{33}^2}, \qquad k_{33}^2 = \frac{e_{33}^2}{C_{33}\mu_{33}}. \tag{8.5}$$

Функции температуры $D(T)$, $\Pi(T)$ включают в себя температурные зависимости диэлектрической проницаемости $\tilde{\mu}_{33}^{\varepsilon} = \mu_{33}(1 + i\ \delta_{33}^{\mu})$, механической жесткости $\tilde{C}_{33}^{E} = C_{33}\,(1 + i\delta_{33}^{c})$ и пьезоконстанты $\tilde{e}_{33} = e_{33}\,(1 + i\delta_{33}^{e})$.

Граничные условия в силу симметрии задачи имеют вид

$$\frac{dT}{dz}\Big|_{z=0} = 0, \qquad \lambda\frac{dT}{dz} + \alpha_{\text{т}}(T - T^{\text{c}})\Big|_{z=h} = 0. \tag{8.6}$$

Диссипативный источник (8.2) записан в предположении, что квадратами и произведениями потерь δ_{33}^{μ}, δ_{33}^{c}, δ_{33}^{e} по сравнению с единицей можно пренебречь. Такое предположение о малости потерь лежит в основе экспериментальных методик их определения [58, 136, 171].

Джоулево тепло можно учесть, отнеся чисто оммическую проводимость к мнимой составляющей диэлектрической проницаемости. Для хороших диэлектриков (а именно таковыми должны быть сегнетокерамики, используемые в качестве пьезоэлектриков, поскольку в противном случае их трудно поляризовать [173]) это всегда можно сделать, оставаясь в рамках предположения о малости потерь [170].

Хотя механические и пьезоэлектрические характеристики материала могут сильно зависить от температуры [173], влияние их на диссипацию и накопление энергии в случае электрического нагружения на частотах, соответствующих квазистатическому НДС, незначительно, о чем свидетельствуют соотношения (8.3). Поэтому температурная зависимость величин $D(T)$ и $\Pi(T)$, которые в дальнейшем будем называть соответственно диссипативным и упругоподобным комплексами, по виду должна определяться температурной зависимостью диэлектрических характеристик δ_{33}^{μ} и μ_{33}. Для пьезоэлектрических материалов ситуация, когда заметный рост с температурой тангенса угла диэлектрических потерь $tg\varphi_{\mu} = -\delta_{33}^{\mu}$ сопровождается слабой зависимостью от температуры диэлектрической проницаемости μ_{33}, в отличие от непьезоактивных диэлектриков [154, 170], не является типичной. В большинстве случаев температурные зависимости указанных величин тесно взаимосвязаны и сколь-нибудь значительное изменение с температурой одной из них присуще и другой [173]. Кроме того, используемое в работах по тепловому пробою диэлектриков [154, 170] предположение $\mu_{33} = const$ совершенно неприемлимо для пьезоэлектриков при температурах, близких к точке Кюри. Не исключена ситуация, когда с ростом температуры $tg\varphi_\mu$ практически не изменяется вплоть до точки Кюри, а μ_{33} начинает быстро расти уже при температурах, лежащих значительно ниже точки Кюри [173].

В связи со сказанным, а также с учетом того, что нас прежде всего интересует возможность теплового взрыва при температурах ниже точки Кюри $T_{\text{Кюри}}$, принимаем следующие температурные зависимости величин (8.3)

$$D(T) = D_0\, e^{\xi(T-T_0)}, \quad \Pi(T) = \Pi_0\, e^{\xi_1(T-T_0)}, \tag{8.7}$$

выполнение которых предполагаем вплоть до точки Кюри. Здесь T_0 – температура отсчета, $\xi \geq 0$, $\xi_1 \geq 0$ - постоянные температурные коэффициенты. Соотношения (8.7) качественно согласуются с имеющимися в литературе многочисленными экспериментальными данными по температурной зависимости диэлектрических свойств пьезоматериалов вплоть до точки Кюри, по крайней мере, начиная с некоторой температуры $T_0 < T_{\text{Кюри}}$ [173]. Выше точки Кюри зависимости (8.7) теряют смысл. Если принятое ранее предположение о малости потерь накладывает определённые ограничения на величину коэффициента ξ, то для коэффициента ξ_1 никаких ограничений нет. Как и в работах [154, 170], считаем, что коэффициент теплопроводности слабо зависит от температуры и полагаем $\lambda = const$.

Найдём условия, при которых тепловое равновесие системы "слой – внешняя среда" нарушается или, что одно и тоже, условия, при которых задача (8.1) – (8.6) не имеет решений. После параметризации задачи подобно тому, как это делается в работе [170], максимальную температуру T_m при $z = 0$ можно представить как функцию напряжения $\Delta\varphi$, заданную параметрически

$$T_m = T^c + \frac{1}{\xi}\left\{\begin{array}{c} ch\Theta \\ cos\Theta \end{array}\right\}^{\frac{2}{1-\alpha}} exp\left(\frac{2}{1-\alpha}\Theta\left\{\begin{array}{c} th\Theta \\ tg\Theta \end{array}\right\}\frac{\lambda}{\alpha_{\text{т}} h}\right), \tag{8.8}$$

$$\Delta\varphi = 4\sqrt{\frac{\lambda}{\xi|1-\alpha|\omega\Pi_0 D_0}}\mathcal{X}_\alpha(\Theta) exp\left(-\frac{1+\alpha}{2}\xi(T^c - T_0)\right). \tag{8.9}$$

В (8.8) и (8.9) введены обозначения $\alpha = \dfrac{\xi_1}{\xi}$ и

$$\mathcal{X}_\alpha(\Theta) = \varphi_\alpha(\Theta) \left\{ \begin{array}{c} ch\Theta \\ cos\Theta \end{array} \right\}^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} exp\left(-\frac{1+\alpha}{|1-\alpha|}\,\Theta \left\{ \begin{array}{c} th\Theta \\ tg\Theta \end{array} \right\} \frac{\lambda}{\alpha_{\text{т}} h} \right), \quad (8.10)$$

$$\varphi_\alpha(\Theta) = \int\limits_0^\Theta \left\{ \begin{array}{c} ch\Theta \\ cos\Theta \end{array} \right\}^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} d\Theta. \quad (8.11)$$

Параметр Θ определяется соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{c} th\Theta \\ tg\Theta \end{array} \right\} \frac{1}{\sqrt{|1-\alpha|}} = \sqrt{\frac{\xi \Pi_{\text{o}}}{\lambda \omega D_0^\alpha D_m^{1-\alpha}}}\, q, \quad q = -\frac{\lambda}{|\sigma_0|} \frac{dT}{dz}\Big|_{z=h}, \quad (8.12)$$

где D_m – величина диссипативного комплекса, соответствующая температуре T_m, $\sigma_0 = \sqrt{2F(T)\Pi(T)/\omega D(T)}$ – амплитуда плотности электрического заряда на электроде. В (8.8) – (8.12) и ниже верхние величины в фигурных скобках соответствуют случаю $\alpha < 1$, нижние – случаю $\alpha > 1$; соотношения для случая $\alpha = 1$ могут быть получены относительно параметра q в результате предельного перехода при $\alpha \to 1$ с учетом (8.12)

Условие нарушения теплового равновесия $d\Delta\varphi/dT_m = 0$ сводится, в силу (8.9), к равенству $d\,\mathcal{X}_\alpha(\Theta)/d\Theta = 0$. Дифференцируя (8.10), можно представить искомое условие в виде

$$\frac{\alpha_{\text{т}} h}{\lambda} = \varphi_\alpha(\Theta) \left\{ \begin{array}{c} ch\Theta \\ cos\Theta \end{array} \right\}^{-1} \frac{\Theta + \left\{ \begin{array}{c} sh\Theta ch\Theta \\ sin\Theta cos\Theta \end{array} \right\}}{\frac{|1-\alpha|}{1+\alpha} \left\{ \begin{array}{c} ch\Theta \\ cos\Theta \end{array} \right\}^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \varphi_\alpha(\Theta) \left\{ \begin{array}{c} sh\Theta \\ sin\Theta \end{array} \right\}}. \quad (8.13)$$

После того, как решение уравнения (8.13) относительно Θ найдено, критическое напряжение $\Delta\varphi_{\text{кр}}$ определяется в соответствии с (8.9). Для критической температуры $T_{m\text{кр}}$ и соответствующих ей критических значений диссипативного $D_{m\text{кр}}$ и упругоподобного $\Pi_{m\text{кр}}$ комплексов справедливы соотношения

$$\begin{gathered} T_{m\text{кр}} = T^c + \frac{1}{\xi} \frac{2}{1+\alpha} \ln \frac{\varphi_\alpha(\Theta)}{\mathcal{X}_\alpha(\Theta)}; \\ \frac{D_{m\text{кр}}}{D(T_c)} = \left[\frac{\varphi_\alpha(\Theta)}{\mathcal{X}_\alpha(\Theta)} \right]^{\frac{2}{1+\alpha}}; \quad \frac{\Pi_{m\text{кр}}}{\Pi(T^c)} = \left[\frac{\varphi_\alpha(\Theta)}{\mathcal{X}_\alpha(\Theta)} \right]^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}. \end{gathered} \quad (8.14)$$

Анализ уравнения (8.13) показывает, что величина $\dfrac{\alpha_\text{т} h}{\lambda}$ является возрастающей функцией параметра Θ, причём последний имеет верхнюю границу $\hat{\Theta}_\alpha$, определяемую условием обращения в нуль знаменателя этого уравнения. С ростом α величина $\hat{\Theta}_\alpha$ уменьшается при $0 \le \alpha < 1$ от $\hat{\Theta}_0 = 1,2$ [170] до нуля и увеличивается при $1 < \alpha \le 3$ от нуля до $\hat{\Theta}_3 = 0,985$. Для всех $\alpha > 3 \quad \hat{\Theta}_\alpha = \pi/2$.

В предельном случае при $\dfrac{\alpha_\text{т} h}{\lambda} \to 0$ $(\Theta \to 0)$ критические параметры для любого α, включая $\alpha = 1$, имеют вид

$$\Delta\varphi_\text{кр} = \frac{4}{\sqrt{2e}} \sqrt{\frac{\alpha_\text{т} h}{\xi(1+\alpha)\omega \Pi_0 D_0}}\, e^{-\frac{1+\alpha}{2}\,\xi(T^c - T_\circ)}, \tag{8.15}$$

$$T_{m\text{кр}} = T^c + \frac{1}{\xi(1+\alpha)}; \quad \frac{D_{m\text{кр}}}{D(T_c)} = e^{\frac{1}{1+\alpha}}; \quad \frac{\Pi_{m\text{кр}}}{\Pi(T^c)} = e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \tag{8.16}$$

С увеличением $\dfrac{\alpha_\text{т} h}{\lambda}$ критические параметры растут и при $\dfrac{\alpha_\text{т} h}{\lambda} \to \infty$ $\left(\Theta \to \hat{\Theta}_\alpha\right)$ принимают предельные значения

$$\Delta\varphi_\text{кр} = 4\sqrt{\frac{|1-\alpha|\lambda}{\xi(1+\alpha)^2\omega\Pi_0 D_0}} \left\{ \begin{array}{c} sh\hat{\Theta}_\alpha \\ sin\hat{\Theta}_\alpha \end{array} \right\}^{-1} e^{-\frac{1+\alpha}{2}\,\xi(T^c - T_\circ)}, \tag{8.17}$$

$$T_{m\text{кр}} = T^c + \frac{2}{\xi(1-\alpha)} ln \left\{ \begin{array}{c} ch\hat{\Theta}_\alpha \\ cos\hat{\Theta}_\alpha \end{array} \right\}, \tag{8.18}$$

$$\frac{D_{m\text{кр}}}{D(T^c)} = \left\{ \begin{array}{c} ch\hat{\Theta}_\alpha \\ cos\hat{\Theta}_\alpha \end{array} \right\}^{\frac{2}{1-\alpha}}; \qquad \frac{\Pi_{m\text{кр}}}{\Pi(T^c)} = \left\{ \begin{array}{c} ch\hat{\Theta}_\alpha \\ cos\hat{\Theta}_\alpha \end{array} \right\}^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}. \tag{8.19}$$

Аналогичные соотношения для случая $\alpha = 1$ получаются из (8.17) – (8.19) в результате указанного выше предельного перехода при $\alpha \to 1$:

$$\begin{gathered} \Delta\varphi_\text{кр} = \frac{2}{\hat{\Theta}_1}\sqrt{\frac{\lambda}{\xi\omega\Pi_0 D_0}}\, e^{-\xi(T^c - T_\circ)}; \quad T_{m\text{кр}} = T^c + \frac{1}{\xi}\hat{\Theta}_1^2; \\ \frac{D_{m\text{кр}}}{D(T^c)} = e^{\hat{\Theta}_1^2}; \quad \frac{\Pi_{m\text{кр}}}{\Pi(T^c)} = e^{\hat{\Theta}_1^2}; \quad \hat{\Theta}_1 \approx 0,92. \end{gathered} \tag{8.20}$$

Представленные выше соотношения для критических параметров отличаются от соответствующих соотношений классической теории теплового пробоя диэлектриков (без пьезоэффекта) [154, 170] наличием величины $\alpha = \xi_1/\xi$, учитывающей температурную зависимость диэлектрической проницаемости, а также механических и пьезоэлектрических величин в выражении для активной проводимости $\omega\Pi_0 D_0$. Чтобы получить указанные соотношения теории теплового пробоя, необходимо положить везде $\alpha = 0$, а также $k_t^2 = 0$ в (8.3) и использовать только верхние величины в фигурных скобках. В связи со сказанным все выводы этой теории, касающиеся влияния на критические параметры толщины слоя, условий теплообмена, температуры среды, остаются в силе, если, конечно, только $T_{m\text{кр}} < T_{\text{Кюри}}$, поскольку в противном случае эти выводы лишены смысла. Количественные различия в величинах критических параметров будут проявляться не столько за счёт пьезоэффекта, сколько за счёт температурной зависимости диэлектрической проницаемости и её величины, которая, как правило, на 2–3 порядка больше, чем у обычных диэлектриков.

Если $T_{m\text{кр}} < T_{\text{Кюри}}$, то это означает, что при напряжениях $\Delta\varphi > \Delta\varphi_{\text{кр}}$ будет наблюдаться явление теплового взрыва: температура не стабилизируется и при достижении в течении некоторого времени значения $T_{m\text{кр}}$ начинает нарастать во времени лавинообразно вплоть до точки Кюри, вызывая тем самым деполяризацию материала. Случай $T_{m\text{кр}} \geq T_{\text{Кюри}}$ следует интерпретировать как возможность достижения температурой T_m значения $T_{\text{Кюри}}$ без выхода системы из теплового равновесия. Величина напряжения $\Delta\varphi_0$, при котором стационарная температура $T_{m\text{кр}} = T_{\text{Кюри}}$, находится из (8.9), если параметр Θ определять не из (8.13), а из (8.8), положив при этом $T_{m\text{кр}} = T_{\text{Кюри}}$. В первом случае диапазон напряжений, исключающих деполяризацию из-за перегрева слоя, следует ограничивать величиной $\Delta\varphi_{\text{кр}}$, а во втором – величиной $\Delta\varphi_0$.

Исследуем возможность реализации критических состояний с температурой $T_{m\text{кр}} < T_{\text{Кюри}}$ в зависимости от параметра $\dfrac{\alpha_{\text{т}} h}{\lambda}$. При малых $\dfrac{\alpha_{\text{т}} h}{\lambda}$ (малых толщинах и (или) малых коэффициентах теплоотдачи) изменение температуры, а, следовательно, и напряженности электрического поля (в (8.4) $\beta(T) \approx 1$) по z незначительно, что находит своё отражение в равноправной зависимости критических параметров от температурных коэффициентов ξ, ξ_1. Из (8.16) видно, что $D_{m\text{кр}} \cdot \Pi_{m\text{кр}} = D(T^c)\Pi(T^c)e$. Поэтому, если окажется, что произведение диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь (а именно они, как указано выше, определяют поведение величин $\Pi(T)$ и $D(T)$) в точке Кюри превышает произведение этих же характеристик, но соответствующих температуре среды T^c, более чем в e раз, то критическая температура $T_{m\text{кр}}$ будет лежать ниже температуры $T_{\text{Кюри}}$. Анализ экспериментальных данных [173] показывает, что это условие, как правило, выполняется, причём отмеченное превышение может быть куда большим, чем в e раз.

При больших $\dfrac{\alpha_{\text{т}}h}{\lambda}$ неравномерность электрического поля за счёт температурной зависимости диэлектрической проницаемости значительно усиливается. В частности, это приводит к тому, что предельные значения критической температуры $T_{m\text{кр}}$ из (8.18) конечны только в случае $\alpha \leq 3$, причём будут лежать ниже $T_{\text{Кюри}}$, если выполнено условие

$$D(T_{\text{Кюри}})\,\Pi(T_{\text{Кюри}}) > D(T^c)\Pi(T^c) \left\{ \begin{array}{c} ch\hat{\Theta}_\alpha \\ cos\hat{\Theta}_\alpha \end{array} \right\}^{\frac{2(1+\alpha)}{1-\alpha}}, \tag{8.21}$$

что следует из (8.19). При $\alpha = 1$ это условие, согласно (8.20), запишется в виде

$$D(T_{\text{Кюри}})\,\Pi(T_{\text{Кюри}}) > D(T^c)\Pi(T^c)e^{2\hat{\Theta}^2_1}, \quad \hat{\Theta}_1 \approx 0,92. \tag{8.22}$$

Исходя из того, что предельные значения критических величин при $\dfrac{\alpha_{\text{т}}h}{\lambda} \to \infty$ всегда больше их значений при конечных $\dfrac{\alpha_{\text{т}}h}{\lambda}$, и основываясь на экспериментальных данных [173], можно утверждать, что и при больших $\dfrac{\alpha_{\text{т}}h}{\lambda}$ температура $T_{m\text{кр}} < T_{\text{Кюри}}$, если только $\alpha \leq 3$. В случае, когда $\alpha > 3$, то $\hat{\Theta}_\alpha = \pi/2$ и из (8.18) следует, что $T_{m\text{кр}} = \infty$. Поэтому, начиная с некоторого $\dfrac{\alpha_{\text{т}}h}{\lambda}$, будет иметь место неравенство $T_{m\text{кр}} > T_{\text{Кюри}}$.

Т.о. экспериментальные данные [173] о температурной зависимости диэлектрической проницаемости μ_{33} и тангенса угла диэлектрических потерь $tg\varphi_\mu$ для пьезоэлектрических материалов и полученные в данном параграфе соотношения позволяют сформулировать следующее **утверждение**: в случае квазистатического НДС пьезоэлектрического слоя, возбуждаемого электрическим напряжением, и при экспоненциальном росте с температурой диэлектрических характеристик μ_{33} и $tg\varphi_\mu$ критическая температура $T_{m\text{кр}}$ вне зависимости от величины параметра $\frac{\alpha_\text{т} h}{\lambda}$ будет лежать ниже точки Кюри, если только коэффициент температурного роста диэлектрической проницаемости ξ_1 не превышает соответствующего коэффициента ξ для тангенса угла диэлектрических потерь более чем в три раза. В противном случае утверждение имеет силу только для достаточно малых величин $\frac{\alpha_\text{т} h}{\lambda}$. Сказанное объясняется тем, что с увеличением $\frac{\alpha_\text{т} h}{\lambda}$ увеличивается и неравномерность электрического поля из-за температурной зависимости диэлектрической проницаемости.

В заключение отметим, что хотя развитие процесса во времени в данном параграфе не рассматривается, из-за исчезновения пьезоэффекта и качественно обратимого изменения температурного хода диэлектрических свойств [173] в точке Кюри следует ожидать выхода температуры на стационарный режим и при $\Delta\varphi > \Delta\varphi_\text{кр}$ после того, как более или менее значительная часть слоя (или весь слой, в зависимости от величины напряжения $\Delta\varphi$) будет деполяризована. Единственным ограничением на величину $\Delta\varphi$ является в данном случае электрическая прочность материала. Сказанное относится к случаю, когда чисто оммическая проводимость в окрестности точки Кюри настолько мала, что не меняет качественного поведения диэлектрических потерь, что имеет место для некоторых материалов [173]. В противном случае из-за температурного роста проводимости (но не диэлектрических потерь!) выше точки Кюри могут возникнуть вопросы, связанные с тепловым пробоем [154, 170].

§ 2. Стационарные тепловые режимы колебаний полого пьезокерамического цилиндра с учётом деполяризации материала

2.1 О температурной зависимости свойств материала

В литературе известны многочисленные экспериментальные данные, подтверждающие сильную зависимость пьезоэлектрических, механических и диэлектрических свойств поляризованной керамики от температуры [11, 48, 136, 172, 173, 210–213]. Однако эти данные либо не содержат полного набора характеристик материала, либо ограничены температурами, лежащими значительно ниже точки Кюри. Влияние температуры на изменение некоторых параметров зарубежных пьезокерамических материалов описано в работах [11, 173, 210–213]. Обзор данных о температурной зависимости электромеханических характеристик отечественных составов пьезокерамики приведен в работах [58, 136]. Наиболее полной является информация о влиянии температуры на диэлектрические свойства пьезокерамик [172, 173].

В работах [210–213] исследования проведены с учетом влияния температуры на электромеханическое состояние упругих пьезоматериалов.

Информация о полном наборе экспериментальных данных о зависимости динамических электромеханических характеристик пьезоматериала от температуры, необходимом для расчёта колебаний и температурных полей диссипативного разогрева пьезоэлементов сложной формы, в настоящее время практически отсутствует. По крайней мере, нам известны данные о температурной зависимости полной матрицы комплексных электромеханических характеристик только для одного, малоизвестного в литературе, пьезокерамического материала ЦТС$_{\text{Т}}$БС-2, которые приведены в работах [58, 171] в виде графиков для действительных составляющих и тангенсов потерь комплексных податливостей $\tilde{S}_{ij}^{E} = S_{ij}^{E'}(1 - itg\varphi_{S_{ij}^{E}})$, пьезомодулей $\tilde{d}_{\alpha i} = d'_{\alpha i}(1 - itg\varphi_{d_{\alpha i}})$ и диэлектрических проницаемостей $\tilde{\mu}_{\alpha\beta}^{\sigma} = \mu_{\alpha\beta}^{\sigma'}(1 - itg\varphi_{\mu_{\alpha\beta}^{\sigma}})$ в интервале температур от 20° С до 180° С. Согласно этим экспериментальным данным при привышении температурой 160° С для пьезокерамики ЦТС$_{\text{Т}}$БС-2 начинается необратимый процесс деполяризации, отражающийся на резком уменьшении пьезомодулей в интервале температур 160° – 180° С. При использовании обсуждаемых экспериментальных данных в настоящей главе применяется кусочно-линейная аппроксимация температурных кривых из работы [58] с шагом 20° С. Необходимые для этого значения электромеханических величин были сняты с указанных кривых и приведены в таблицах 8.1 – 8.3. С целью моделирования процесса деполяризации в расчётах при превышении температурой в какой-либо точке тела величины 180° С пьезомодули в этой точке обнуляются и в последующих расчетах не учитываются. Забегая на перед, заметим, что в областях пьезоэлемента, где температура виброразогрева близка к значению точки Кюри (в нашем случае 180° С) или достигает этого значения, интенсивность тепловыделения резко снижается. Поэтому, если в некоторой точке температура и превышает значение 180° C, это превышение является незначительным. В связи с этим, а также ввиду отсутствия информации о поведении механических и диэлектрических характеристик материала при температурах, больших 180° C, в расчетах в этом случае используются в первом приближении те же значения указанных характеристик, что и при температуре 180° C.

Таблица 8.1. *Зависимость механических свойств пьезокерамики* ЦТС$_{\text{Т}}$БС-2 *от температуры*

	$S_{ij}^{E'} \times 10^{12}$, Па$^{-1}$					$tg\varphi_{S_{ij}^E} \times 10^2$				
T, °C\\ij	33	13	12	11	55	33	13	12	11	55
20	14,8	-5,42	-4,62	12,5	39,7	0,125	-0,15	0,14	0,16	0,14
40	14,9	-5,25	-4,8	12,6	40,0	0,18	-0,185	0,185	0,165	0,18
60	15,0	-5,2	-5,0	12,8	40,5	0,2	-0,2	0,2	0,175	0,2
80	15,1	-5,1	-5,0	12,9	41,0	0,22	-0,21	0,2	0,19	0,21
100	15,0	-5,0	-5,0	13,0	42,5	0,225	-0,23	0,205	0,205	0,22
120	14,9	-4,8	-5,1	13,1	44,0	0,23	-0,245	0,225	0,225	0,23
140	14,85	-4,6	-5,2	13,2	46,0	0,25	-0,24	0,250	0,265	0,24
160	14,2	-4,2	-5,5	13,0	47,5	0,32	-0,22	0,275	0,305	0,3
180	11,3	-2,6	-3,8	10,0	37,5	0,14	-0,175	0,175	0,1	0,1

Таблица 8.2. *Зависимость пьезоэлектрических свойств от температуры*

	$d'_{\alpha i} \times 10^{12}$, Кл/Н			$tg\varphi_{d_{\alpha i}} \times 10^2$		
$T, ^\circ C \backslash \alpha i$	33	31	15	33	31	15
20	330	−160	450	0,3	0,4	0,35
40	345	−164	455	0,4	0,6	0,39
60	366	−168	460	0,48	0,75	0,405
80	390	−176	470	0,56	0,95	0,42
100	415	−188	485	0,68	1,2	0,45
120	440	−198	495	0,82	1,5	0,51
140	465	−208	510	1,0	1,85	0,585
160	495	−218	525	1,34	2,5	0,78
180	100	−78	325	2,3	4,1	1,125

Поскольку зависимость свойств пьезоматериала от температуры выражена в величинах $\tilde{S}_{ij}^E$, $\tilde{d}_{\alpha i}$, $\tilde{\mu}_{\alpha\beta}^\sigma$, а основные соотношения главы 5 за-

Таблица 8.3. *Зависимость диэлектрических свойств от температуры*

	$\mu^{\sigma\prime}_{\alpha\beta}/\varepsilon_0 \times 10^{-2}$		$tg\,\varphi_{\mu^{\sigma}_{\alpha\beta}} \times 10^2$	
$T,^{\circ}C\backslash\alpha\beta$	33	11	33	11
20	21	18,5	0,35	0,5
40	22	19,5	0,55	0,65
60	25	21	0,65	0,8
80	27,5	23,5	0,75	0,95
100	31	27	0,9	1,25
120	37	30	1,1	1,5
140	42,5	36	1,3	1,85
160	56	47	1,75	2,4
180	83	59	2,9	3,75

писаны в терминах величин $\tilde{C}^{E}_{ij}, \tilde{e}_{\alpha i}, \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, должны использоваться формулы преобразования (5.39).

В дальнейшем предполагается, что материал является изотропным относительно теплофизических свойств, т.е. $\lambda_{zz} = \lambda_{rr} = \lambda,\ \lambda_{zr} = 0$. При этом $\lambda = 1,25\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}},\ c_{\text{т}} = \frac{\lambda}{\rho \cdot a_{\text{т}}},\ \rho = 7520\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},\ a_{\text{т}} = 0,4\times10^{-6}\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

2.2 Реализуемые стационарные тепловые режимы колебаний в условиях сильного виброразогрева

Рассмотрим некоторые особенности реализуемых стационарных тепловых режимов работы пьезоэлементов на примере колебаний полого пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра, максимальная температура виброразогрева которого может достигать значений вплоть до точки Кюри. Внутренняя ($r = r_1$) и внешняя ($r = r_2$) поверхности цилиндра полностью покрыты бесконечно-тонкими электродами, к которым прикладывается разность потенциалов $\Delta\varphi \cos\omega t,\ \omega = 2\pi f$. Торцы цилиндра $z = \pm l$ не электродированы. Цилиндр свободен от механической нагрузки. По всей поверхности осуществляется конвективный теплообмен с окружающей средой температуры T^c и коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{_T}$. В расчетах принималось: $r_1 = 8$ мм, $r_2 = 12$ мм, $l = 15$ мм, $T^c = 20^{\circ}$ С. При таких геометрических параметрах цилиндра, как отмечалось в главе 5, наиболее пьезоактивной является объемная синфазная мода колебаний, когда расширение и удлинение цилиндра происходит одновременно. Отметим некоторые особенности температурно- и амплитудно-частотных характеристик (ТЧХ и АЧХ) в окрестности резонансной частоты указанной выше синфазной моды в зависимости от условий теплообмена и уровня нагружения.

Рис. 8.1.

На рис. 8.1 представлена частотная зависимость установившейся максимальной температуры цилиндра. Верхняя часть рисунка соответствует коэффициенту теплоотдачи $\alpha_T = 50\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$ и электрическому напряжению $\Delta\varphi = 6,3$ В, а нижняя – $\alpha_T = 5\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$. Напряжению $\Delta\varphi = 6,3$ В соответствует кривая 1. Кривыми 2, 3 изображены фрагменты ТЧХ, рассчитанные соответственно при $\Delta\varphi = 9$ В и $\Delta\varphi = 12$ В. Штриховые линии относятся к случаю независящих от температуры

Рис. 8.2. Рис. 8.3.

свойств материала и построены при $\Delta\varphi = 6,3$ В. На рис. 8.2 и 8.3 для тех же условий теплообмена представлены АЧХ электрического тока и окружного напряжения (на внутренней поверхности цилиндра в сечении $z = 0$), рассчитанные при $\Delta\varphi = 6,3$ В. Точки на кривых соответствуют критическим частотам, начиная с которых происходит скачок параметров процесса с одной ветки на другую. Направление скачка указано стрелками. Опишем нелинейный характер поведения температуры виброразогрева и электромеханических величин в условиях более слабого теплообмена. При возрастании частоты на участке XI–I происходит перескок указанных характеристик процесса из точки I на низкотемпературной ветви в точку II на высокотемпературной ветви. Под перескоком понимается ситуация, когда при $f < f_I$ реализуется низкотемпературное установившееся состояние, а при $f > f_I$ – высокотемпературное. При дальнейшем увеличении частоты реализуются стационарные состояния, соответствующие участку II–III высокотемпературной ветви, после чего происходит перескок параметров процесса из точки III в точку IV низкотемпературной ветви и реализуется участок IV–V. Стационарные состояния, соответствующие этому участку, отличаются от низкотемпературных состояний участка XI–I знаком действительных составляющих комплексных характеристик полевых электромеханических величин. При уменьшении частоты на участке V–VI происходит перескок из точки VI в точку VII высокотемпературной ветви. Процесс выхода температуры на стационарный режим на частотах $f_{II} < f < f_{VI}$ сопровождается двухкратным переходом системы через временный резонанс, когда действительные составляющие комплексных характеристик дважды переходят через нуль, а мнимые – достигают максимальных значений. На рис. 8.4 показаны временные эволюции амплитуды

Рис. 8.4.

тока (кривая 1), максимальной и средней температур (кривые 2, $2^{'}$) на частоте $f = 68$ кГц. При этом с целью сокращения времени счета в качестве начальной использовалась установившаяся температура при $f = 68,1$ кГц $(f > f_{VI})$.

Путём уменьшения частоты можно добиться реализации стационарных тепловых режимов колебаний, соответствующих участку II–VIII высокотемпературной ветви и выхода на стационарный тепловой режим, соответствующий точке IX. При уменьшении частоты на участке IX–X происходит срыв колебаний на низкотемпературную ветку XI–I. В дальнейшем нас в первую очередь будут интересовать стационарные тепловые режимы колебаний, связанные с увеличением частоты на ветке IX–XII. Характерной особенностью этой ветки является медленное изменение температуры и электромеханических величин в достаточно широком диапазоне частот. Несмотря на это, именно с реализацией данной ветки связана возможность достижения температурой виброразогрева значения точки Кюри. В этом смысле указанную ветку условимся называть в дальнейшем критической, а соответствующие ей стационарные тепловые режимы – критическими.

С увеличением теплообмена (верхние части рисунков 8.1 – 8.3) не только количественная, но и качественная картина нелинейного поведения параметров процесса существенно изменяется. Прежде всего отметим нереализуемость ветки критических режимов. При уменьшении частоты на участке V–VI–VII–VIII колебания осуществляются только в низкотемпературных условиях.

О влиянии уровня нагружения на реализацию критических стационарных режимов виброразогрева можно судить по поведению кривых

1, 2, 3 на рис. 8.1. Видно, что увеличение электрического напряжения от $6,3$ В до 9 В и 12 В мало сказывается на росте температуры при увеличении частоты на участке IX–XII. При этом не следует забывать, что с увеличением электрического напряжения возникает опасность механического разрушения пьезоэлемента прежде, чем температура виброразогрева выйдет на стационарный режим. На рис. 8.5 показан фрагмент временной эволюции амплитуд окружного σ_φ (кривая 1) и осевого σ_z (кривая 2) напряжений соответственно на внутренней и внешней поверхностях цилиндра в сечении $z = 0$ при выходе температуры на критический стационарный режим, соответствующий точке B на рис. 8.1 (перескок из точки A в точку B). При установившейся температуре ука-

Рис. 8.5.

занные напряжения принимают значения $\sigma_\varphi \approx 13$ мПа, $\sigma_z \approx 12$ мПа. Видно, что эти значения более чем в два раза меньше тех пиковых значений напряжений, которые достигаются при прохождении системой через временный резонанс прежде, чем температура установится. Сказанное в равной степени относится ко всем переходам колебаний с одного температурного режима на другой, характеризуемый более высокой температурой.

Дадим оценку влияния температуры на коэффициент электромеханической связи (КЭМС) и коэффициент затухания электромеханических колебаний (КЗЭМК). Для КЭМС $k_э$ характерно слабое изменение с частотой в пределах одной и той же температурной ветки ТЧХ. С точностью до двух знаков каждую ветку можно охарактеризовать своим значением величины КЭМС (рис. 8.1). С переходом на более высокий температурный режим колебаний КЭМС уменьшается. На увеличение прикладываемого электрического напряжения величина $k_э$ практически не реагирует. Только с уменьшением частоты на участке IX–XII КЭМС начинает проявлять заметную тенденцию к уменьшению в рамках одной и той же температурной ветки.

Рис. 8.6.

В бо́льшей степени нелинейность, порождаемая температурной зависимостью свойств материала, проявляется в поведении КЗЭМК ψ_V, частотная характеристика которого для стационарных тепловых режимов представлена на рис. 8.6. Видно, что с выходом температуры на ветку критических стационарных режимов величина ψ_V увеличивается практически в два раза.

2.3. Стационарные тепловые режимы колебаний, характеризующиеся возникновением и развитием деполяризованной зоны

В силу сказанного выше возникновение и развитие деполяризации из-за виброразогрева пьезоэлемента возможно только после выхода температуры на ветку критических стационарных режимов IX–XII рис. 8.1. Продолжением этой ветки на область более высоких частот является кривая 2 на рис. 8.7 (соответствует кривой 2 на рис. 8.1). Здесь же представлены частотные характеристики установившейся средней температуры по объёму цилиндра (кривая $2^{'}$), КЭМС $k_э$ и КЗЭМК ψ_V. Примерно на частоте $69,3$ кГц максимальная температура достигает значения точки Кюри $T_{\text{Кюри}} = 180^\circ$ C и колебания на всех последующих частотах характеризуются наличием в цилиндре деполяризованной зоны. Переход на каждую последующую частоту связан с очередным расширением этой зоны. Размеры деполяризованной зоны половины меридионального сечения цилиндра, соответствующие установившимся тепловым режимам колебаний на некоторых частотах из рассматриваемого на рис. 8.7 диапазона показаны на рис. 8.8. С увеличением размеров зоны деполяризации происходит уменьшение КЭМС $k_э$ и КЗЭМК ψ_V (см. рис. 8.7). Следует отметить, что с началом деполяризации максимальная установившаяся температура виброразогрева (область максимального разогрева до деполяризации, с её началом и развитием остаётся прежней и находится в центральной части цилиндра вблизи его внутренней поверхности) не превышает значения точки Кюри. Средняя установившаяся температура цилиндра с увеличением частоты постепенно нарастает до этого значения, что связано с выравниванием температуры по объёму цилиндра.

Рис. 8.7. Рис. 8.8.

В процессе продолжения решения по параметру частоты временные эволюции электромеханических величин и температуры вплоть до частоты $71,15$ кГц включительно ведут себя примерно одинаково. В начальные моменты времени наблюдаются признаки резонансного поведения колебаний, вызванного увеличением частоты и приводящего к быстрому повышению температуры виброразогрева. Максимальная температура в течении некоторого времени может превышать точку Кюри. Увеличение температуры приводит к расширению деполяризованной зоны, что в свою очередь является причиной понижения амплитуд колебаний. Тепловыделение уменьшается и начинается довольно длительный во времени процесс перераспределения температуры по объёму цилиндра, сопровождающийся незначительным увеличением размеров деполяризованной зоны и понижением максимальной температуры до точки Кюри или ниже. Через некоторое время температура выходит на стационарный режим, соответствующий кривым 2 и $2'$ на рис. 8.7.

Рис. 8.9.

Иначе ведут себя временные эволюции величин на частотах выше $71,15$ кГц. На рис. 8.9 показаны кривые изменения во времени амплитуды тока (кривая 1) и КЭМС (кривая 2) на частоте $71,2$ кГц. В качестве начальной температуры используется установившаяся температура для частоты $71,15$ кГц. Если КЭМС, как и раньше, монотонно убывает, то в поведении амплитуды тока имеется существенное качественное отличие от соответствующих эволюций на частотах ниже $71,15$ кГц, проявляющееся в осциллирующем характере этой амплитуды (равно, как и амплитуд других электромеханических величин) в течении некоторого времени, прежде чем она повторно начинает монотонно убывать. Колебания пьезоэлемента на протяжении времени осциллирования амплитуды тока сопровождаются интенсивным расширением зоны деполяризации, что в конечном итоге приводит к срыву колебаний с ветки стационарных тепловых режимов, соответствующей рис. 8.7. Размеры деполяризованной зоны половины меридионального сечения цилиндра на момент времени $t = 26$ сек показаны в нижней части рис. 8.9. В ходе дальнейшего быстрого убывания амплитуды тока эти размеры не изменяются. Из-за резкого понижения амплитуд электромеханических переменных тепловыделение практически прекращается и поведение температуры полностью определяется условиями теплообмена. При принятом значении коэффициента теплоотдачи (соответствует свободной конвекции воздуха) спад температуры происходит довольно медленно. В течении, примерно, 120 мин. температура цилиндра понижается вплоть до температуры окружающей среды.

§ 3. Деполяризация пьезокерамических полых цилиндра и шара с отверстием в режиме резонансных колебаний с автоподстройкой частоты

Сильная зависимость электромеханических свойств пьезоматериала от температуры и его слабая теплопроводность, затрудняющая теплоотвод, приводят к тому, что эффективное возбуждение резонансных колебаний пьезоэлементов в течении длительного времени возможно только при автоподстройке частоты нагружения. В противном случае резонансная частота из-за виброразогрева "уходит" от своего номинального значения и для поддержания амплитуд выходных функциональных характеристик пьезоэлемента на неизменном уровне необходим дополнительный подвод мощности. Эти вопросы подробно изучены в работах [64, 79, 151] как по отношению к отдельно взятому пьезоэлементу, так и целым электромеханическим системам. Некоторые из них рассмотрены в предыдущих главах данной книги.

Ниже резонансные колебания пьезоэлемента с автоподстройкой частоты исследуются в условиях, при которых температура диссипативного разогрева достигает значений точки Кюри, в результате чего некоторая часть пьезоэлемента деполяризуется. Исследования проведены на примере колебаний пьезокерамических поляризованных по радиусу полых цилиндра и шара с отверстием, возбуждаемых генератором электрического напряжения.

3.1. Полый пьезокерамический цилиндр

Ниже представлены результаты расчётов для цилиндра тех же геометрических размеров и с тем же расположением электродов, что и в § 2. Кроме того, принималось, что $\alpha_T = 20\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$, $\overset{\circ}{T} = T^c = 20^\circ$ С. В качестве номинальной выбиралась резонансная частота описанной ранее синфазной моды колебаний цилиндра ($f_{r_\text{н}} = 67,733$ кГц).

На рис. 8.10 приведены кривые изменения во времени резонансной частоты (кривая 1) цилиндра, максимальной (кривая 2) и средней по объёму (кривая 2′) температуры виброразогрева. Штриховые линии характеризуют временные эволюции КЭМС (кривая 1) и КЗЭМК (кривая 2). Штриховая вертикальная линия отвечает моменту начала деполяризации (860 сек) и разделяет рисунок на две части. Левая часть соответствует колебаниям цилиндра без деполяризации, правая – колебаниям в условиях появления и расширения во времени деполяризованной зоны. До момента начала деполяризации и на протяжении 7 секунд после её проявления расчёты проводились при электрическом напряжении $\Delta\varphi = 6,3$ В. Размеры возникшей в течении этого времени деполяризованной зоны в центральной части цилиндра вблизи его внутренней поверхности оказались очень незначительными. Вместе с

Рис. 8.10.

тем из-за существенного разогрева цилиндра и усиливающейся в связи с этим роли теплообмена рост температуры (а, следовательно, и резонансной частоты) при потребляемой цилиндром активной мощности, соответствующей напряжению $6,3$ В, сильно замедляется. Поэтому для ускорения процессов деполяризации на $8, 11$ и 27 секундах после первого их проявления напряжение увеличивалось соответственно до 7; 8 и $8,3$ В, что привело к быстрому и существенному расширению деполяризованной зоны. Размеры этой зоны для половины меридионального сечения цилиндра показаны на рис. 8.14 § 4. Фрагмент этого рисунка с минимальными размерами деполяризованной зоны соответствует увеличению напряжения до 7 В, три последующих фрагмента – до 8 В, последний фрагмент – до $8,3$ В.

Рис. 8.11.

Описанный выше характер нагружения пьезоэлемента показан на рис. 8.11. Здесь же представлены кривые изменения во времени амплитуд окружного (кривая 1) и осевого (кривая 2) напряжений соответственно на внутренней и внешней поверхностях цилиндра в центральной его части; рассеиваемой в пьезоэлементе активной мощности P_a (мощности потерь); амплитуды тока I; амплитуд радиального (кривая 1) и осевого (кривая 2) смещений точек соответственно на внутренней поверхности в центральном сечении и на внешней поверхности в торце цилиндра.

Анализ кривых на рис. 8.10 показывает, что развитие деполяризационных процессов сопровождается быстрым уменьшением КЭМС и сдвигом резонансной частоты в область высших частот. Вызванное разогревом цилиндра существенное первоначальное повышение КЗЭМК с началом деполяризации сменяется быстрым уменьшением этой характеристики колебаний несмотря на то, что температура продолжает нарастать. Ход кривой 1 на рис. 8.10, отражающий реакцию резонансной частоты на монотонный рост температуры диссипативного разогрева цилиндра, объясняет некоторые особенности в поведении температурно-частотной характеристики на рис. 8.1, отмеченные в п. 2.2 § 2. Незначительное повышение резонансной частоты с температурой в начале виброразогрева (в начальные моменты времени на рис. 8.10) перед её последующим понижением приводит к сложному характеру нелинейности ТЧХ в нижней части рисунка 8.1. С повторным повышением резонансной частоты на рис. 8.10 вплоть до начала деполяризации связана реализация ветки критических стационарных режимов IX – XII на рис. 8.1.

На поведении величин из рис. 8.11 сказывается как характер нагружения пьезоэлемента, проявляющийся в скачкообразном росте этих величин, так и деполяризация материала, что видно, например, по росту механических напряжений в пределах одной и той же прикладываемой разности потенциалов $\Delta\varphi$, например, $\Delta\varphi = 8$ В. Такое поведение механических напряжений указывает на возможность ситуации, когда частичная деполяризация материала в процессе резонансных колебаний с автоподстройкой частоты будет предшествовать механическому разрушению пьезоэлемента, или даже выступать причиной этого разрушения.

3.2. Полый пьезокерамический шар с отверстием

В данном параграфе представлены некоторые результаты исследований осесимметричных резонансных электромеханических колебаний и диссипативного разогрева пьезокерамического полого незамкнутого шара, половина меридионального сечения которого изображена на рис. 8.15 из § 4. Внутренняя ($r = r_1$) и внешняя ($r = r_2$) поверхности шара полностью покрыты электродами, к которым прикладывается электрическое напряжение $\Delta\varphi\, cos\, \omega t$ с автоподстройкой частоты ω. Поверхность отверстия неэлектродирована. Предварительная поляризация принята чисто радиальной. Поверхность шара свободна от механической нагрузки. На внутренней и внешней сферических поверхностях и на поверхности отверстия осуществляется конвективный теплообмен (с коэффициентами теплоотдачи α_{T_1}, α_{T_2}, α_{T_3} соответственно) с окружающей средой температуры T^c.Начальная температура шара $\mathring{T}$. В расчетах принималось: $r_1 = 20$ мм, $r_2 = 25$ мм, $\alpha_{T_2} = \alpha_{T_3} = 25\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$, $\alpha_{T_1} = 5\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{град}}$, $T^c = \mathring{T} = 20°C$.

В главе 5 показано, что качественная картина распределения температуры диссипативного разогрева шара при колебаниях на пьезоактивных резонансных частотах существенно зависит от величины отверстия шара. Если при малых величинах отверстия максимум температуры разогрева наблюдается в окрестности отверстия шара, то с увеличением отверстия этот максимум сдвигается в полюс шара. В связи с этим ниже приведены результаты расчётов для двух величин отверстия шара, а именно, для величины $\Theta = 30°$ (рис. 8.15 из § 4), которой соответствует максимум температуры виброразогрева в полюсе шара и для $\Theta = 15°$ (рис. 8.17 из § 4) с максимумом температуры в окрестности отверстия. При $\Theta = 30°$ в качестве номинальной частоты возбуждения выбиралась пятая резонансная частота $f_{r_\text{н}} = 44,353$ кГц, а при $\Theta = 15°$ – четвертая резонансная частота $f_{r_\text{н}} = 39,898$ кГц. Колебания на этих резонансных частотах характеризуются максимальными значениями КЭМС.

На рис. 8.12 и 8.13 приведены кривые изменения во времени резонансной частоты (кривая 1) шара, максимальной (кривая 2) и средней (кривая $2'$) температуры разогрева, КЭМС (штриховая кривая 1) и КЗЭМК (штриховая кривая 2) соответственно при $\Theta = 30°$ и $\Theta = 15°$. Вертикальная штриховая прямая, как и в случае колебаний цилиндра,

Рис. 8.12.

разделяет рисунки на две части. Левая часть соответствует колебаниям шара без деполяризации, а правая – колебаниям в условиях деполяризации. Из тех же соображений, что и в случае цилиндра, ускорение процессов деполяризации достигалось незначительным увеличением прикладываемого электрического напряжения. Характер нагружения показан в верхних частях рисунков 8.12 и 8.13. Фрагменты последовательного развития во времени деполяризованной зоны шара изображены на рисунках 8.15 и 8.16 из § 4.

Сравнение кривых на рис. 8.10 и 8.12 показывает, что изменения во

Таблица 8.4. *Амплитуды максимальных механических напряжений в разные моменты времени*

t,мин	0	8,5	13	15,5	16	17	19,5	24	29,5
$\Delta\varphi$,В	6,3	6,3	7	7	8	8	8	8	8
σ,мПа	20,7	20,5	21,8	19,5	22,3	21,6	21,1	23,7	24,7

времени температуры, резонансной частоты и энергетических характеристик $k_э$ и ψ_V для цилиндра и шара с отверстием при $\Theta = 30°$ качественно аналогичны. Первоначальное незначительное увеличение во времени резонансной частоты с повышением температуры виброразогрева сменяется её понижением. Когда температура достигает некоторой величины, начинается повторное, довольно быстрое, увеличение резонансной частоты. С началом деполяризации рост резонансной частоты усиливается, КЭМС $k_э$ и КЗЭМК ψ_V начинают быстро уменьшаться. Рост максимальной температуры (в полюсе шара, вблизи его внутренней поверхности) с началом деполяризации сильно замедляется и слабо реагирует на увеличение прикладываемого напряжения. Продолжающийся рост средней температуры свидетельствует о выравнивании последней по объему шара.

Рис. 8.13.

Напряженное состояние шара при $\Theta = 30°$ в течении всего процесса колебаний определяется окружным и тангенциальным напряжениями, амплитуды которых достигают своих максимальных значений в полюсе шара на его внутренней поверхности. Величины указанных максимальных значений амплитуд напряжений (в полюсе шара амплитуды окружного и тангенциального напряжений с точностью до четырех знаков совпадают) для некоторых моментов времени из интервала на рисунке 8.12 приведены в таблице 8.4. Видно, что исследуемый процесс происходит без заметного механического перенапряжения шара.

Диапазоны отклонения резонансной частоты, КЗЭМК и КЭМС от своих номинальных значений на рис. 8.12 менее значительны, чем на рисунке 8.10. Это связано с тем, что цилиндр находится в более разогретом состоянии по сравнению с шаром, о чем свидетельствуют кривые 2 и $2'$ на указанных рисунках.

С уменьшением отверстия шара до величины $\Theta = 15^\circ$ зона повышенного диссипативного разогрева заметно локализуется в течении всего процесса колебаний в окрестности отверстия, что существенно (практически на порядок) ограничивает уход резонансной частоты f_r от своего номинального значения (рис. 8.13) по сравнению с предыдущим случаем (рис. 8.12). С началом деполяризации во временных эволюциях f_r на рисунках 8.12 и 8.13 наблюдается существенное качественное отличие, проявляющееся в экстремальном поведении кривой 1 на рисунке 8.13 по сравнению с монотонным ростом кривой 1 на рисунке 8.12. Указанная особенность поведения резонансной частоты на рисунке 8.13 предсказывает наличие в ТЧХ и АЧХ шара с величиной отверстия $\Theta = 15^\circ$ (в отличии от $\Theta = 30^\circ$) дополнительных по сравнению с рисунком 8.7 веток стационарных тепловых режимов колебаний.

Таблица 8.5. *Амплитуды максимальных механических напряжений в разные моменты времени*

t,мин	0	2,5	4,5	10	20	23	23,5	24	27
$\Delta\varphi$,В	6	6	6	6	6	6	7	7	8
σ,мПа	41,0	42,3	41,8	38,3	36,9	37,2	43,5	42,9	44,9

Резонансные колебания шара при $\Theta = 15^\circ$ характеризуются зоной высокой механической напряженности в окрестности отверстия, определяемой окружным напряжением. В таблице 8.5 приведены максимальные значения амплитуд этого напряжения в различные моменты времени процесса до и после деполяризации. Амплитуды окружного напряжения в полюсе шара, соответствующие временам таблицы 8.5, не превышают 9мПа. Данные таблицы свидетельствуют об опасности механического повреждения шара в окрестности отверстия прежде, чем в нём могут проявиться деполяризационные процессы.

Во всех рассмотренных выше задачах максимальные значения амплитуд электрической напряженности существенно ниже значений, характеризующих электрическую прочность пьезокерамики, равно как и тех значений, при которых наблюдается деполяризация не температурной природы [136, 173].

В заключение отметим следующее. Все расчёты в рассматриваемой главе проводились в предположении, что для механических и диэлектрических свойств материала при температурах, превышающих 180°C, можно в первом приближении использовать те же значения, что и при 180°C. Из-за аномального поведения указанных свойств в окрестности точки Кюри ($T_{\text{Кюри}} = 180°\text{C}$) и, прежде всего, аномального роста механической жесткости и добротности материала, такое предположение может привести только к завышению мощности диссипации и температуры диссипативного разогрева в деполяризованных зонах. Однако даже в этом случае расчёты свидетельствуют о незначительном на протяжении всего процесса колебаний отклонении температуры диссипативного разогрева в деполяризованных зонах от 180°C. На основе анализа полученных в главе численных результатов предлагается рассматривать точку Кюри как пороговую точку диссипативного разогрева пьезокерамики вследствие механических и диэлектрических потерь (вопросы, связанные с разогревом вследствие температурного роста чисто оммической проводимости нами не рассматривались). Это значительно упрощает решение задач о колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругих пьезокерамических тел с учетом тепловой деполяризации материала.

§ 4. Влияние частичной деполяризации на пьезоэлектрические свойства пьезоэлементов

Результаты предыдущего параграфа свидетельствуют, что в случае отсутствия принудительного охлаждения частичная деполяризация пьезоэлемента из-за диссипативного разогрева в режиме резонансных колебаний с автоподстройкой частоты может произойти при таких уровнях нагружения, когда механическое или электрическое повреждение пьезоэлемента исключается. Конечно, пьезоэлемент в этом случае можно повторно поляризовать, но на практике это не всегда осуществимо.

Если по окончании процесса колебаний, приведшего к деполяризации, пьезоэлемент охладить, то его пьезоэлектрические свойства ухудшаются из-за наличия деполяризованной зоны. Под последней, как и раньше, понимается область с полным исчезновением пьезоэффекта. В действительности, некоторое ухудшение пьезоактивности происходит также из-за неполностью обратимого восстановления электромеханических свойств пьезоматериала в процессе охлаждения на тех участках, температура которых ранее не превышала точки Кюри, но была близка к ней [173]. Поскольку полная количественная информация об этом эффекте нам не известна, электромеханические свойства материала в указанных участках после охлаждения принимались такими же, как и до разогрева пьезоэлементов. Тоже самое относится к механическим и диэлектрическим свойствам в деполяризованных зонах (в последнем случае ситуация является более сложной , поскольку с потерей пьезоактивности в деполяризованных зонах произойдёт, по-видимому, изменение характера анизотропии механических и диэлектрических свойств).

Известно, что наиболее полно пьезоэлектрические свойства пьезоэлементов характеризуются величиной коэффициента электромеханической связи (КЭМС) [11, 27].

Рис. 8.14.

Рис. 8.15.

На рисунках 8.14 – 8.16 показано изменение наиболее пьезоактивной резонансной частоты и соответствующего ей КЭМС для цилиндра и шара с отверстием в зависимости от формы и размеров деполяризованных зон. Последние реализуются при описанных ранее резонансных колебаниях пьезоэлементов с автоподстройкой частоты в зависимости от продолжительности этих колебаний с момента начала деполяризации. Данные рисунков 8.14 – 8.16 соответствуют температуре 20°C и характеризуют степень снижения пьезоактивности элементов с увеличением размеров деполяризованной зоны. Для цилиндра и шара с отверстием $\Theta = 30^\circ$ происходит заметное увеличение резонансной частоты (отметим, что под последней понимается резонансная частота при короткозамкнутых электродах). Что касается других, менее пьезоактивных, частот спектров этих элементов, то их изменение с ростом деполяризованной зоны не так значительно и усиливается при возрастании пьезоактивности этих частот. Не монотонный характер изменения резонансной частоты для шара при $\Theta = 15^\circ$ связан с перераспределением степени влияния на эту частоту жесткостных и кинематических факторов, обусловленным местоположением деполяризованной зоны и особенностями её формы (это, в частности, относится и к характеру поведения кривой 1 на рис. 8.13 после начала деполяризации).

Влияние деполяризованной зоны на формы колебаний пьезоэлементов проявляется по-разному и усиливается с ростом пьезоактивности ко-

Рис. 8.16.

лебаний на этих формах. Так, для цилиндра, например, первая и вторая формы колебаний, отождествляемые соответственно с объемной противофазной и изгибной модами (см. главу 5), при наличии деполяризованных зон из рис. 8.14 не изменяются (КЭМС на этих формах в случае отсутствия деполяризации соответственно равны $k_{э_1} = 0,014$, $k_{э_2} = 0,16$). Что касается пьезоактивной третьей формы колебаний, рассматриваемой в данной главе, то её синфазность с появлением деполяризованной зоны несколько искажается из-за появления в непосредственной близости торцов цилиндра узловых окружностей для радиальной компоненты перемещения. Смещение этих окружностей по направлению к центру цилиндра, связанное с увеличением размеров деполяризованной зоны (для рис. 8.14), очень незначительно.

§ 5. Стационарные тепловые режимы планарных колебаний пьезопластины с учетом деполяризации материала

Рассматривается тонкая, поляризованная по толщине пьезокерамическая пластина прямоугольной формы с размерами $a, b, 2h$ $(2h \ll min(a, b))$. Поверхность свободна от механической нагрузки. Главные грани полностью покрыты бесконечно тонкими электродами, к которым подводится разность потенциалов $\Delta\varphi e^{i\omega t}$. На контурной поверхности и гранях осуществляется конвективный теплообмен с окружающими средами (температуры T_k^c и T^c) с коэффициентами теплоотдачи $\alpha_{т_k}$ и $\alpha_т$ соответственно.

Температурные зависимости электромеханических характеристик материала, размеры пластины, значения теплофизических параметров принимаются такими же, как и в гл. 6, в частности,

$$\alpha_{т_k} = \alpha_т = 5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}, \quad T_k^c = T^c = 20^\circ \text{ C}.$$

На рис. 8.17 представлена ТЧХ установившейся максимальной температуры $T_м$ в окрестности основного планарного резонанса. Значение $T_м$ достигается в центре пластины. Кривые $1-3$ рассчитаны для $\Delta\varphi$, равном 6; 30 и 45 В соответственно. Сплошные участки линий характеризуют ветки однозначности ТЧХ, штриховые соответствуют высокотемпературным веткам в области неоднозначности ТЧХ и веткам, реализуемым с учётом частичной деполяризации материала.

Рис. 8.17.

Характер АЧХ аналогичен приведенной ТЧХ. При небольших амплитудах нагрузки $\Delta\varphi$ (кривая 1) температура разогрева не превышает критического значения $T_{\text{кр}} = 160°C$ (заметим, что в данной задаче пьезомодули обнуляются при превышении температурой 160°C) и ТЧХ и АЧХ качественно аналогичны описанным ранее в гл. 6. С увеличением $\Delta\varphi$ деполяризация может начаться в процессе реализации высокотемпературных состояний как в области неоднозначности (кривая 2), так и в области однозначности ТЧХ и АЧХ (кривая 3). Отметим некоторые особенности ТЧХ на примере кривой 3. При увеличении частоты ω ($\omega = \bar{\omega} \cdot 10^5$рад/с) колебательный процесс соответствует вначале нижней ветке I–II, характеризующейся быстрым выходом температуры диссипативного разогрева на стационарный режим. При $\bar{\omega}_{II} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_{IV}$ ($\bar{\omega}_{II} = 1,6575$, $\bar{\omega}_{IV} = 1,665$) реализуется колебательный режим, соответствующий участку III–IV ТЧХ. Характер эволюций во времени максимальной температуры и амплитуды тока

$$|\tilde{I}| = \omega \left| \int\limits_S \left[\tilde{\mu}_{33}^* \frac{\Delta\varphi}{2h} - \tilde{e}_{31}^* \left(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22} \right) \right] dS \right|$$

для диапазона $\bar{\omega}_{II} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_{IV}$ показан на рис. 8.18 кривыми 1 и 2 соответственно, а эволюций действительной $u_1^{'}$ и мнимой $u_1^{''}$ частей продольного перемещения (в точке бо́льшей оси пластины, лежащей на удалении $a/4$ от её конца) – кривыми 1 и 2 на рис. 8.19. Штрихо-

Рис. 8.18. Рис. 8.19.

вые кривые $1'$ и $2'$ характеризуют изменение во времени коэффициента электромеханической связи $k_э$ и коэффициента затухания электромеханических колебаний ψ_V. Данные на рис. 8.18 и 8.19 приведены для $\bar{\omega} = 1,664$. Видно, что на протяжении довольно длительного времени температура и амплитуды величин растут незначительно. В некоторый момент времени свойства материала в силу температурной зависимости достигают таких значений, что колебательная система входит во временный резонанс, сопровождающийся резким увеличением амплитуды тока (первый пик кривой 2 на рис. 8.18), увеличением амплитуды и сменой фаз перемещений (рис. 8.19). Качественно это соответствует эффектам, описанным в гл. 6 при слабых температурных полях, когда происходит переход колебательного процесса с низкотемпературного режима колебаний на высокотемпературный режим. Однако, после выхода из резонанса, установившееся состояние, в отличие от случаев, описанных ранее, не достигается, поскольку температура в местах максимального разогрева, увеличиваясь, достигает в некоторые моменты времени величины $T_{\text{кр}} = 160°\text{C}$, начиная с которой характер температурного хода кривых зависимостей электромеханических характеристик материала резко меняется [171] и, кроме того, при $T_{\text{кр}} > 160°\text{C}$ начинается деполяризация. Это приводит к качественно новому поведению временных эволюций всех величин, проявляющемуся в прохождении системы через второй временный резонанс перед выходом на стационарный, соответствующий участку III-IV ТЧХ, режим колебаний. На рис. 8.18 и 8.19 это видно по второму пику на кривых 2 и повторному изменению знака действительной части перемещения.

Как и в случае задачи для цилиндра, выход на ветку критических режимов сопровождается уменьшением КЭМС $k_э$ и увеличением КЗЭМК ψ_V. Колебательные процессы для стационарных режимов, соответствующих участку III–IV, можно рассчитать как путём непосредственного выхода на характеристику при каждом $\bar{\omega}_{II} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_{IV}$, так и выхода на характеристику для какого-либо одного значения $\bar{\omega} > \bar{\omega}_{II}$ с последующим продолжением решения по частоте, что позволяет значительно уменьшить затраты машинного времени.

Увеличивая частоту ($\bar{\omega} > \bar{\omega}_{IV}$) и используя приём продолжения решения по частоте, приходим к реализации колебательных режимов на участке IV–V. С увеличением частоты происходит расширение деполяризованной зоны в пластине. При $\bar{\omega} > \bar{\omega}_V = 1,725$ колебания срываются на ветку VI–VII, что сопровождается сменой фаз электромеханических величин.

При уменьшении частоты для недеполяризованного элемента колебательный процесс соответствует вначале участку VIII–IX ТЧХ. Временные эволюции величин для $\bar{\omega}_{IV} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_{VIII}$ качественно аналогичны описанным в гл. 6. При $\bar{\omega} < \bar{\omega}_{IV}$ происходит скачок процесса на

Рис. 8.20.

ветку III–IV, сопровождающийся появлением и расширением деполяризованной зоны в центре пластины. Кривыми $1, 2, 3$ на рис. 8.20 показано развитие во времени амплитуды тока, КЭМС и КЗЭМК при $\bar{\omega} = 1,664$ для случая, когда в качестве начальной температуры выбиралась установившаяся температура пластины для $\bar{\omega} = 1,666$. Превышение температурой в некоторый момент разогрева величины $T_{\text{кр}}$ и появление зоны деполяризации вызывает временный резонанс системы, когда ток резко возрастает (кривая 1). Аналогичная ситуация имела место в случае выхода процесса на стационарный режим из начальной температуры 20°C и соответствовала второму резонансу на рис. 8.18 и 8.19. Однако, началу процесса деполяризации в этом случае предшествовал сопровождающийся временным резонансом переход системы на высокотемпературный режим. В случае рис. 8.20 высокотемпературное состояние

Рис. 8.21. Рис. 8.22.

выбрано в качестве начального состояния системы. Соответствующие рис. 8.20 фрагменты развития во времени деполяризованной зоны в средней части пластины с момента её возникновения и до момента установления стационарного теплового состояния показаны на рис. 8.21, а временные эволюции температуры в точках бóльшей оси пластины, удаленных от её центра соответственно на 0, $a/8$, $5a/24$, $a/3$, $a/2$ – кривыми $1 - 5$ на рис. 8.22. Видно, что процесс деполяризации сопровождается существенным перераспределением температуры в пластине, чем и объясняется довольно длительный во времени выход колебательной системы на стационарный режим разогрева.

Если, уменьшая частоту ($\bar{\omega} < \bar{\omega}_{III} = \bar{\omega}_{II}$), использовать приём продолжения решения по частоте, можно прийти к реализации колебательного режима, соответствующего участку III-X ТЧХ. При $\bar{\omega} < \bar{\omega}_X$ происходит перескок процесса на ветку XI-XII. Поведение ТЧХ при напряжении $\Delta\varphi = 30$ В, которому соответствует кривая 2 на рис. 8.17, до момента возникновения деполяризационных процессов качественно аналогично описанному в гл. 6. Уменьшая частоту и используя приём продолжения решения по параметру частоты, приходим к реализации скачка процесса с одной ветки на другую в результате появления деполяризованной зоны в центральной части пластины. Как и раньше, этот скачок сопровождается временным резонансом, когда амплитуды величин достигают максимальных значений и происходит смена фаз этих величин. Временные эволюции этих величин качественно аналогичны представленным на рисунках 8.20 – 8.22.

Литература

1. Акопьян В.А. О нелинейности свойств пьезокерамических материалов // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения: (Докл. III Всесоюз. семинара). – Киев: Наук. думка, 1983. –С.197–201.

2. Акустические кристаллы. Справочник / Блистанов А.А. и др.; под ред. М.П. Шаскольской. – М: Наука, 1982. – 632 с.

3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропних оболочек. М.: Наука, 1974. – 446 с.

4. Андрущенко В.А., Бондаренко А.А., Улитко А.Ф. Зависимость механических и электрических потерь в пьезокерамике от уровня напряжённости электроупругого поля и их влияние на амплитуды ультразвуковых колебаний // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения: Материалы Международного симпозиума. – Киев: Наук. думка, 1986. –С. 198–202.

5. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Собственные колебания конечных пьезокерамических цилиндров // Акуст. журнал. – 1990. – 36, N 2. – С. 204–208.

6. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Численный анализ собственных колебаний пьезокерамических оболочек вращения // Акуст. журнал. – 1988, N 3. – С. 391–395.

7. Бараускас Р.А., Кульветис Г.П., Рагульскис К.М. Расчёт и проектирование вибродвигателей. – Л: Машиностроение, 1984. – 101 с.

8. Бараускас Р.А. Применение метода конечных элементов к расчёту биморфных асимметричных пьезокерамических входных звеньев вибродвигателей в пространственной системе координат // Вибротехника. – 1981. – 41, N 1. – С. 7–15.

9. Барканов Е., Рикардс Р., Хольсте К., Тегер О. Вынужденные колебания вязкоупругой балки, пластины и оболочки типа сандвич под ударной нагрузкой // Механика композитных материалов. – Т. 36, N 3. – С. 367–377.

10. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.

11. Берлинкур Д. Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – т.1, ч.А. – С. 204–326.

12. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высш. шк., 1973. – 752 с.

13. Боббер Р. Дж. Новые типы преобразователей // Подводная акустика и обработка сигналов / Под ред. Бьерне Л.; М.: Мир, 1985. – С. 220–235.

14. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

15. Богородицкий Н.П., Пасынков В.В., Тареев Б.М. Электротехнические материалы. – Л.: Энергоатомиздат., 1985. – 304 с.

16. Болкисев А.М. Вынужденные колебания вязкоупругого пьезокерамического полого цилиндра: Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. – Киев, 1986. – 18 с.

17. Болкисев А.М. Электроупругие колебания конических элементов // Прикл. механика. – 1990. – 26, N 8. – С. 53–59.

18. Бондаренко А.А., Карась Н.И., Куценко Г.В. Потери в пьезокерамике и методы их учёта при определении амплитуд колебаний элементов конструкций // Рассеяние энергии при колебаниях мех. систем: Материалы IV республ. научн. конф. "Проблемы нелинейных колебаний мех. систем". – Киев, 1980. – С. 337–344.

19. Волков С.С., Черняк Б.Я. Сварка пластмасс ультразвуком. – М.: Химия, 1986. – 256 с.

20. Глозман И.А. Пьезокерамика. – М.: Энергия, 1972. – 288 с.

21. Глюкман Л.И. Пьезоэлектрические кварцевые резонаторы. – М.: Радио и связь, 1981. – 232 с.

22. Годунов С.К. О численных решениях краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, вып. 3. – 171–174.

23. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

24. Григоренко Я.М., Василенко А.Г. Теория оболочек переменной жесткости. – К: Наукова думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т. 4).

25. Гринченко В.Т., Карлаш В.Л., Мелешко В.В., Улитко А.Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин // Прикл. механика. – 1976. – 12, N 5. – С. 71–78.

26. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О некоторых проблемах динамической электроупругости // IV Всесоюзный съезд по теор. и приклад. механике (Киев, 1976 г.). – Киев: Наук. думка, 1976. – 118 с.

27. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – Т. 5. – 279 с.

28. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г. Акустоэлектроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 279 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 6–ти т.; Т. 3).

29. Гуменюк Б.П. Диссипативный разогрев вязкоупругого пьезокерамического шара с зависящими от температуры свойствами при гармоническом возбуждении // Прикл. механика. – 1985. – 21, N 11. – С. 56–61.

30. Гуменюк Б.П., Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Термоэлектромеханическое поведение вязкоупругого пьезокерамического цилиндра с зависящими от температуры свойствами при гармоническом возбуждении // Механика неоднородных структур. Тез. докл. I Всесоюз. конф. (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 66–67.

31. Гуменюк Б.П. О шаговом методе в связанных динамических задачах термоэлектровязкоупругости при гармоническом деформировании // Прикл. механика. – 1985. – 21, N 7. – С. 99–104.

32. Де Гроот С.Р., Сатторп Л.Г. Электродинамика. – М.: Наука, 1982. – 560 с.

33. Дубенец В.Г., Хильчевский В.В. Колебания демпфируемых композитных конструкций. Т. 1. – К.: Вища школа, 1995. – 226 с.

34. Дэй У.А. Термодинамика простых сред с памятью. – М.: Мир, 1974. – 192 с.

35. Евсейчик Ю.Б., Карлаш В.Л., Рудницкий С.И. Колебания усеченных конических оболочек из пьезокерамики // Прикл. механика. – 1990. – 26, N 6. – С. 25–31.

36. Жарий О.Ю. К вопросу об оценке магнитных эффектов, сопровождающих распространение плоских волн в пьезокерамической среде // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – N 8. – С. 705–709.

37. Жарий О.Ю. Метод разложения по собственным функциям в задачах динамической электроупругости // Прикл. математика и механика. – 1990. – Т. 54, вип. 1. – С. 109–114.

38. Жарий О.Ю. Модовая теория электромеханического преобразования энергии в пьезоэлектрических телах // Прикл. математика и механика. – 1991. – Т. 55, вып. 2. – С. 330–337.

39. Зеленка И. Пьезоэлектрические резонаторы на объёмных и поверхностных акустических волнах: Материалы, технология, конструкция, применение. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

40. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

41. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

42. Зоммерфельд А.Электродинамика. – М.: Изд–во иностр. лит., 1968. – 501 с.

43. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд–во Моск. ун–та, 1978. – 287 с.

44. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд–во АН СССР, 1963. – 271 с.

45. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.

46. Карлаш В.Л. Диссипация энергии при колебаниях тонких пьезокерамических круглых пластин // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, N 5. – С. 77–82.

47. Карлаш В.Л. О влиянии электрического поля возбуждения на рассеяние энергии в пьезокерамических резонаторах // Рассеяние энергии при колебаниях мех. систем: Материалы IV Республ. научн. конф. “Проблемы нелинейных колебаний механических систем”. – Киев, 1980. – С. 344–348.

48. Карлаш В.Л. Експериментально–теоретичний аналіз електромеханічних резонансних коливань і ефективності перетворення енергії в п’єзокерамічних тонкостінних елементах конструкцій: Автореферат дис. ... д–ра техн. наук. – К., 2004. – 36 с.

49. Карнаухова Т.В., Козлов В.И., Рассказов О.А. Параметрические колебания трехслойных пьезоэлектрических оболочек вращения // Акустический вестник. – 2001. – Т.4., № 1. – С. 31–43.

50. Карнаухова Т.В. Тепловая деполяризация пьезоэлектрического слоя при гармоническом квазистатическом электрическом нагружении // Прикл. механика. – 1998. – 34, N 4. – С. 81–84.

51. Карнаухов В.Г., Гуменюк Б.П. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел. – Киев: Наук. думка, 1990.– 304 с.

52. Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., П’ятецька О.В. Вплив температури дисипативного розігріву на показники п’єзоелектричного сенсора при вимушених осесиметричних коливаннях круглої пластини // Вісник Київського університету. Секція фізико–математичні науки. – 2004. – N 1. – С. 107–113.

53. Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., П’ятецька О.В. Вплив температури дисипативного розігріву на активне демпфірування вимушених осесиметричних коливань круглої пластини за допомогою п’єзоелектричного актуатора // Вісник Київського університету. Секція фізико–математичні науки. – 2004. – N 3. – С. 107–113.

54. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф., Козлов В.И. Влияние диссипативного разогрева на колебания тонкостенных композитных конструкций // Динамика элементов конструкций. – К.: “А.С.К.”, 1999. – С. 144–173. – (Механика

композитов: В 12–ти т.; Т. 9).

55. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф., Козлов В.И. Термомеханическая теория колебаний вязкоупругих композитных тонкотенных элементов конструкций // Динамика элементов конструкций. – К.: “А.С.К.”, 1999. – С. 114–143. – (Механика композитов: В 12–ти т.; Т. 9).

56. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.

57. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Термоэлектромеханическое поведение вязкоупругих пьезокерамических тел при гармоническом возбуждении // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1980. – Вып.20. – С. 6–10.

58. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1988.– Т. 4. – 320 с.

59. Карнаухов В.Г., Козлов В.И. Конечноэлементный метод решения задач термоэлектровязкоупругости для тел вращения при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 1986. – 22, N 7. – С. 9–17.

60. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В. Метод конечных элементов в связанных задачах термоэлектровязкоупругости // Прикл. механика.– 1989. – 25, N 2. – С. 19–28.

61. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В., Михайленко С.В. Гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих пьезоэлементов при осесимметричном и плоском деформировании // Термовязкоупругопластические процессы деформирования в элементах конструкций: Тез. докл. науч. совещания (Канев, 27–29 мая 1992 г.). – Канев, 1992. – С. 33.

62. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В., Михайленко С.В. Планарные колебания и диссипативный разогрев пластин с пьезоэффектом // Прикл. механика. – 1994. – 30, N 2. – С. 69–76.

63. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В., Михайленко С.В. Планарные колебания пьезокерамической пластины с учётом деполяризации материала, вызванной температурой виброразогрева // Прикл. механика. – 1994. – 30, N 3. – С. 67–73.

64. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В., Михайленко С.В. Резонансные контурные колебания пьезокерамической пластины с автоподстройкой частоты // Прикл. механика. – 1995. – 31, N 4. – С. 48–54.

65. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В., Михайленко С.В. Теория и конечноэлементные методы исследования колебаний и диссипативного разогрева пьезоэлектрических элементов // Инженерно–физические проблемы новой техники: Тез. докл. II Всесоюзн. совещания–семинара (Москва, 17–19 февраля 1992 г.). – М., Изд–во МГТУ, 1992. – С. 48–49.

66. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Пятецкая Е.В. Активное демпфирование колебаний прямоугольной пластины при помощи распределенных сенсоров и

актуаторов // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – 37. – С. 136–140.

67. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Пятецкая Е.В. Активное демпфирование осесимметричных колебаний круглой пластины при помощи распределенных сенсоров и актуаторов // Зб. "Системні технології". Випуск: "Математичні проблеми технічної механіки". Дніпропетровськ. – 2003. – С. 145–151.

68. Карнаухов В.Г., Козлов А.В., Пятецкая Е.В. Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин при помощи распределенных пьезоэлектрических включений // Акустический вестник. – 2001. – Т. 4, N 1. – С. 31–43.

69. Карнаухов В.Г., Козлов В.І., П'ятецька О.В. Активне демпфірування осесиметричних резонансних коливань круглої пластини за допомогою п'єзоелектричних включень // Вісник Київського університету. Секція фізико-математичні науки. – 2003. – N 2. – С. 81–85.

70. Карнаухов В.Г., Козлов В.І., П'ятецька О.В. Вплив граничних умов на активне демпфірування коливань в'язкопружної прямокутної пластини за допомогою розподілених п'єзоелектричних включень // Вісник Київського університету. Секція фізико–математичні науки. – 2003. – N 1. – С. 75–85.

71. Карнаухов В.Г., Козлов В.І., Михайленко В.В. Термомеханічна поведінка в'язкопружної п'єзокерамічної порожнистої кулі, сполученої з циліндричним патрубком//ДАН УРСР Сер. А. – 1990. – N 5. – С.43–47.

72. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В., Михайленко С.В. Осесимметричные колебания и диссипативный разогрев конструктивно-неоднородных пьезоэлектрических преобразователей энергии // Инженерно-физические проблемы новой техники: Тез. докл. III Междунар. совещания (Москва, 17–19 мая 1994 г.). – Москва, Изд. МГТУ, 1994. – С. 106–107.

73. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В., Франовский А.Ц. К теории определяющих уравнений физически нелинейных вязкоупругих и электровязкоупругих тел при циклических процессах. / Тез. докл Укр. конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем", 20 – 24 мая 1996 г. / Киев, 1996. – С. 125

74. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В., Франовский А.Ц. Развитие теории определяющих уравнений физически нелинейных вязкоупругих тел при циклической деформации // Прикл. механика. – 1996. – 32, N 10. – С. 46–51.

75. Карнаухов В.Г. Моделирование колебаний и диссипативного разогрева неупругих тел // Прикл. механика. – 1993. – 29, N 10. – С. 70–76.

76. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости. – Киев: Наук. думка, 1982. – 260 с.

77. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Гуменюк Б.П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.

78. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Михайленко В.В., Дяченко С.М. Чис-

ленное моделирование виброразогрева и тепловых напряжений в стержневом пьезопреобразователе типа Ланжевена // Прикл. механика. – 1996. – 32, N 3. – С. 80–85.

79. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Михайленко В.В. Резонансные колебания осесимметричной электромеханической системы с автоподстройкой частоты // Прикл. механика. – 1995. – 31, N 6. – С. 57–63.

80. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К. Моделирование термомеханических процессов ультразвуковой сварки пластмасс // Технологические напряжения и деформации в материалах. – К.: "А.С.К.", 1997. – С. 81–115. – (Механика композитов: В 12–ти т.; Т. 5).

81. Кеди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение. – М: Изд. иностр. лит-ры, 1949. – 717 с.

82. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В., Венгренюк Ю.А. О влиянии тепловой деполяризации на термомеханическое поведение кольцевой пластины из вязкоупругого пьезоматериала при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 1998. – 34, N 6. – С. 85–91.

83. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В. Квазистатическая задача термовязкоупругости частично деполяризованого цилиндра при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 1999. – 35, N 3. – С. 42–48.

84 Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В. Осесимметричная задача электротермовязкоупругости частично деполяризованной пьезокерамической сферы при квазистатическом гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 2002. – 36, N 5. – С. 93–99.

85. Киричок И.Ф. Михайленко В.В., Давидчук С.П. Нелинейные колебания и виброразогрев вязкоупругого стержня с кубической характеристикой упругости // Прикл. механика. – 2002. – 38, N 9. – С. 110–115.

86. Киричок И.Ф. Продольные колебания и разогрев стержня из нелинейного вязкоупругого материала с пьезоэффектом // Прикл. механика. – 1987. – 23, N 11. – С. 83–88.

87. Киричок И.Ф. Термоэлектромеханическое поведение тонкостенных элементов из физически нелинейных вязкоупругих материалов с пьезоэффектом при гармоническом нагружении // Механика неоднородных структур: Тез. докл II Всесоюз. конф. (Львов, 2–4 сент. 1987 г.). – Львов, 1987. – т.2. С.138–139.

88. Ковалёв С.П., Кузьменко В.А., Писаренко Г.Г., Чушко В.М. О построении численного решения задач электроупругости // Пробл. прочности. – 1979. – N 8. – С. 90–92.

89. Козлов В.И., Михайленко В.В. Диссипативный разогрев вязкоупругого пьезокерамического полого цилиндра конечной длины при гармоническом электрическом возбуждении // Прикл. механика. – 1988. – 24, N 7. – С. 37–43.

90. Козлов В.И., Михайленко В.В. Осесимметричные колебания и дисси-

пативный разогрев вязкоупругих пьезоэлектрических тел вращения при гармоническом нагружении // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых частотах нагружения: Тез. докл Всесоюзн конф. (Киев, ИПП АН УССР, 1988). –С. 97 – 98.

91. Козлов В.И., Михайленко В.В. Термомеханическое поведение вязкоупругих пьезокерамических тел вращения при гармоническом возбуждении // Механика неоднородных структур: Тез. докл II Всесоюз. конф. (Львов, 2–4 сент. 1987 г.). – Львов, 1987. – т.1. С.134–135.

92. Коломиец Г.А., Улитко А.Ф. Связанные электроупругие колебания толстостенных пьезокерамических цилиндров // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – Вып. 9. – С. 5–13.

93. Короткина М.Р. Электромагнитоупругость. – М.: Из–во Моск. ун–та, 1988. – 304 с.

94. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 340 с.

95. Кульвец Г.П., Маркаускайте Г.К., Рагульскис К.М. К расчёту пьезокерамических конструкций методом конечных элементов // Вибротехника. – 1979. – 35, N 1. – С. 99–105.

96. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматгиз, 1959. – 532 с.

97. Ларионов Г.С. Исследование колебаний релаксирующих систем методом усреднения // Механика полимеров. – 1969. – N 5. – С. 806–813.

98. Лобанов Л.М., Михайленко В.В., Михайленко С.В. Планарные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих пьезокерамических пластин // Докл. АН УРСР. Сер. А. –1991. – N 7. – С. 53–57.

99. Лобанов Л.М., Михайленко В.В., Михайленко С.В. Планарные колебания и диссипативный разогрев пьезоэлектрических тонких пластин при гармоническом возбуждении // Механика неоднородных структур: Тез. докл. III Всесоюзн. конф. (Львов, 17–19 сент. 1991 г.). – Львов, 1991. – Ч.2. – С.193.

100. Лущиков А.В., Давидчук С.П. Нелинейные колебания вязкоупругого стержня с квадратичной характеристикой упругости // Прикл. механика. – 2001. – 38, N 8. – С. 125–129.

101. Малов В.В. Пьезорезонансные датчики. –М.: Энергоатомиздат, 1989. – 272 с.

102. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.

103. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – К.: Ин–т математики НАН Украины, 1997. – 344 с.

104. Михайленко В.В. Влияние отверстия на электромеханическое поведение и диссипативный разогрев вязкоупругого пьезокерамического полого шара // Труды XIII Науч. конф. молод. учёных Ин–та механики АН УССР.

Киев, 24–27 мая 1988. – ч.1. – Киев,1988. – С. 130–134.

105. Михайленко В.В. До питання про дисипацію та накопичення електромеханічної енергії при коливаннях в'язкопружних п'єзоелектричних тіл // Вісник Київського ун–ту, серія: фіз.–мат. науки. – 1997. – С. 128–132.

106. Михайленко В.В., Карнаухов В. Г., Лущиков О.В. Наближена теорія визначальних рівнянь при коливаннях непружних ізотропних тіл // Вісник ЖІТІ. № 3 (22). – Житомир, 2002. – С. 24–27.

107. Михайленко В.В. К теории амплитудных определяющих уравнений физически нелинейных неупругих пьезоэлектрических тел при моногармоническом нагружении // Прикл. механика. – 1997. – 33, N 8. – С. 46–48.

108. Михайленко В.В., Лущиков О.В., Давидчук С.П. Моделювання нелінійної поведінки непружних п'єзоелектричних тіл при гармонічному навантаженні // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – № 4 (31). Том 2. – Житомир, 2004. – С. 127–132.

109. Михайленко В.В., Лущиков А.В., Якименко С.Н. Определяющие уравнения для неупругих физически нелинейных пьезоэлектрических тел при гармоническом электромеханическом нагружении // Збірник наукових праць КДТУ. – Випуск 10. – Кіровоград. КДТУ, 2001. – С. 175–185.

110. Михайленко В.В., Михайленко С.В. К нахождению коэффициентов электромеханической связи в задачах электроупругих колебаний пьезоэлектрических тел // Докл. АН УРСР. Сер. А. –1991. – N 8. – С.88–92.

111. Михайленко В.В., Михайленко С.В. К определению динамических коэффициентов электромеханической связи в задачах электроупругих колебаний пьезоэлектрических тел. – Тр. XV Науч. конф. молод. учёных Ин–та механики АН УССР. Киев, 29 мая – 1 июня, 1990. Ч. 3 / Ин–т механики АН УССР. – Киев. 1990. – С. 483–488. Деп. в ВИНИТИ N 3802–В90

112. Михайленко В.В., Михайленко С.В. Электромеханические колебания и диссипативный разгрев пьезокерамических конических элементов // Тр. XVIII Науч. конф. молод. учёных Ин–та механики НАН Украины.

113. Михайленко В.В. Нахождение коэффициентов электромеханической связи при колебаниях вязкоупругих пьезоэлектрических тел // Докл. НАН Украины. Сер. А. –1997. – N 6. – С. 66–69

114. Михайленко В.В. Общая структура амплитудных определяющих уравнений неупругих пьезоэлектричских тел при циклических электромеханических процессах // Прикл. механика. – 1996. – 32, N 12. – С. 37–42.

115. Михайленко В.В. О потенциальности определяющих уравнений для неупругих пьезоэлектрических материалов при моногармонических воздействиях // Прикл. механика. – 1997. – 33, N 6. – С. 49–51.

116. Михайленко В.В., Самохина Н.Ф. К определению коэффициента затухания электромеханических колебаний в вязкоупругих материалах с пьезоэффектом. – Тр. XIV Науч. конф. молод. учёных Ин–та механики АН УССР.

Киев, 23–26 мая 1989. – ч.1. / Ин–т мех. АН УССР – Киев, 1989. – С. 133–137. – Деп. в ВИНИТИ 2.08.89. N 5164–В89.

117. Михайленко В.В. Термомеханическое поведение вязкоупругого пьезокерамического полого шара с отверстием при гармоническом электрическом нагружении. – Киев, 1988. – Деп. в ВИНИТИ 14.04.88, N 2857–В88.

118. Михайленко В.В. Термоэлектромеханическое поведение полого вязкоупругого пьезокерамического шара с отверстием при гармоническом электрическом возбуждении // Труды. XII Науч. конф. молод. учёных Ин–та механики АН УССР. Киев, 27–29 мая, 1987. – Ч.2. – Киев, 1987. – С. 376–380. –Деп. в ВИНИТИ 29.07.87, N 5389–В87.

119. Михайленко В.В., Франовский А.Ц. О температурной деполяризации пьезоэлектрического слоя в условиях квазистатики // Докл. АН Украины. Сер. А. – 1996. – N 7. – С. 51–55.

120. Михайленко В.В., Франовский А.Ц. О температурной деполяризации пьезоэлементов в режиме квазистатических колебаний // Тез. V Междунар. науч. конф. им. акад. М. Кравчука. (Киев, 16–18 мая 1996 г.). – Киев, 1996. – С. 90.

121. Михайленко В.В., Франовский А.Ц. Численное моделирование резонансных режимов колебаний ультразвуковой электромеханической системы с автоподстройкой частоты // Прикл. механика. – 1996. – 32, N 11. – С. 54–59.

122. Михайленко С.В. Планарные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих пьезоэлектрических пластин: Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. – Киев, 1992. – 17 с.

123. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991 – 560 с.

124. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость: Механика связ. полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1987. – Т.1. – 263 с.

125. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон ДЖ. Демпфирование колебаний. – М: Мир, 1988. – 448 с.

126 Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. – М.: Мир, 1986. – 159 с.

127. Новицкий Б.Г. Применение акустических колебаний в химико-технологических процессах. – М.: Химия. – 1983. – 192 с.

128. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 391 с.

129. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 560 с.

130. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.

131. Пелех Б.Л., Саляк Б.И. Экспериментальные методы исследования

динамических свойств композиционных структур. – К.: Наук. думка, 1990. – 136 с.

132. Писаренко Г.Г. Прочность пьезокерамики. –К.: Наук. думка, 1987. – 232 с.

133. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – К.: Наук. думка, 1970. – 377 с.

134. Писаренко Г.С. Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. – К.: Наук. думка, 1985. – 236 с.

135. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наук. думка, 1971. – 375 с.

136. Пьезокерамические преобразователи. Справочник / Под ред. С.И. Пугачёва. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.

137. Пьезоэлектрические резонаторы. Справочник / Под ред. П.Е. Кандыбы, П.Г. Позднякова. –М.: Радио и связь, 1992. – 389 с.

138. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.

139. Рассказов А.О., Козлов А.В. Численное исследование неосесимметричных колебаний оболочки вращения при неосесимметричном нагружении // Прикл. механика. – 1998. – 34, N 5. – С. 68–75.

140. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. –М.: Мир, 1979. – 392 с.

141. Седов Л.И. Механика сплошной среды. –М.: Наука, 1973. – Т.1. – 536 с.

142. Сенченков И.К. Виброразогрев нелинейно–вязкоупругого стержня, взаимодействующего с вязкоупругим элементом // Прикл. механика. – 1991. – 27, N 5. – С. 95–102.

143. Сенченков И.К., Жук Я.А. К описанию резонансных колебаний упруговязкопластических тел // Прикл. механика. – 1992. – 28, N 11. – С. 30–38.

144. Сенченков И.К., Жук Я.А. Термодинамический анализ модели Боднера-Партома термовязкопластического деформирования материалов // Прикл. механика. – 1997. – 33, N 2. – С. 41–48.

145. Сенченков И.К., Жук Я.А., Табиева Г.А., Червинко О.П. Обобщенная склерономная модель гармонического деформирования упруговязкопластических тел // Прикл. механика. – 1997. – 33, N 6. – С. 40–48.

146. Сенченков И.К., Жук Я.А., Табиева Г.А., Червинко О.П. Упрощенные модели термовязкопластического поведения тел при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 1997. – 33, N 9. – С. 24–33.

147. Сенченков И.К., Жук Я.А., Табиева Г.А., Червинко О.П. О моногармоническом приближении в задачах деформирования вязкопластических тел при гармоническом деформировании // Прикл. механика. – 1997. – 33, N 7. – С. 57–64.

148. Сенченков И.К., Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Червинко О.П. К вопросу о простом деформировании в задачах о колебаниях и разогреве нелинейных вязкоупругих тел. // Прикл. механика. – 1986. – 22, N 9. – С. 82–90.

149. Сенченков И.К., Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Червинко О.П. Расчет стационарных колебаний и диссипативного разогрева нелинейных вязкоупругих тел при периодическом нагружении // Прикл. механика. – 1986. – 21, N 6. – С. 49–55.

150. Сенченков И.К., Карнаухов В.Г., Червинко О.П. О коэффициенте поглощения энергии при циклическом деформировании вязкоупругих материалов и элементов конструкций из них // Прикл. механика – 1988. – 24, N 9. – С. 90–98.

151. Сенченков И.К. Резонансные колебания стержневой электромеханической системы с автоподстройкой частоты // Прикл. механика. – 1991. – 27, N 9. – С. 92–99.

152. Сенченков И.К., Тарасенко О.В., Черняк Б.Я., Козлов В.И., Френкель Б.Е. К вопросу об акустическом контакте в процессе ультразвуковой сварки пластмасс // Прикл. механика. – 1987. – 23, N 2. – С. 60–67.

153. Сенченков И.К., Червинко О.П., Козлов В.И. Энергетический анализ напряженно–деформированного состояния вязкоупругого диска с жёстко защемлёнными торцами при циклическом сжатии // Прикл. механика – 1994. – 30, N 10. – С. 60–66.

154. Сканави Г.Н. Физика диэлектриков, Т. II. – М.: Физматгиз, 1958. – 980 с.

155. Смагин А.Г., Ярославский М.И. Пьезоэлектричество кварца и кварцевые резонаторы. – М.: Энергия, 1970. – 488 с.

156. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд–во иностр. лит., 1954. – 604 с.

157. Спенсер Э. Теория инвариантов. – М.: Мир, 1974. – 160 с.

158. Сыркин Л.Н. Современные проблемы пьезотехники и задачи физического материаловедения // Применение пьезоактивных материалов в промышленности / Под ред. Исупова В.А., Сыркина Л.Н. – Л., 1985. – С. 3–10.

159. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.

160. Тарасенко О.В., Нестеренко Н.П., Потрохов А.В. Управление процессом ультразвуковой сварки пластмасс по мощности, потребляемой колебательной системой // Автомат. сварка. – 1985. – N 1. – С. 72–73.

161. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / В.Н. Потураев, В.И. Дырда, В.Г. Карнаухов и др. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.

162. Трефілов В.І., Глинчук М.Д., Янишенко Ю.І. Сегнетоелектричні матеріали та їх використання у техніці / Вісн. АН УРСР. – 1987. – N 2. –

С. 6–10.

163. Трусделл К. Первоначальний курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.

164. Улитко А.Ф. Бондаренко А.А. Исследование рассеяния энергии в пьезокерамике. В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 138–144.

165. Улитко А.Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1975. – 15, – С. 90–98.

166. Улитко А.Ф. К теории электромеханического преобразования энергии в неравномерно деформируемых пьезокерамических телах // Прикл. механика. – 1977. – 13, N 10. – С. 115–123.

167. Улитко А.Ф. Об определении коэффициентов электромеханической связи в задачах установившихся колебаний пьезокерамических тел // Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1978. – Вып. 7. – С. 77–81.

168. Улитко А.Ф. О некоторых особенностях постановки граничных задач электроупругости // Современные проблемы механики и авиации. – М.: Наука, 1982. – С. 290–300.

169. Ультразвук. Маленькая энциклопедия / Гл. ред. И.П. Голямина. – М.: Советская энциклопедия. – 1979. – 400 с.

170. Франц В. Пробой диэлектриков. М.: Из–во иностр. лит., 1961. – 207 с.

171. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.

172. Яковлев Г.А., Гончаров Л.П., Сенченков И.К. О температурной релаксации диэлектрических свойств поляризованной пьезокерамики // Прикл. механика. – 1980. – 16, N 1. – С. 124–127.

173. Яффе Б., Кук У., Яффе Г. Пьезоэлектрическая керамика. – М.: Мир, 1974. – 288 с.

174. Allik H., Hughes T.J.R. Finite element method for piezoelectric vibration // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1970. – v.2, N 2. – P. 151–157.

175. Allik H., Webman K.M., Hunt J.T. Vibrational response of sonar trancducers using piezoelectric finite elements / J. Acoust. Soc. Amer. – 1974. – v. 56, N 6. – P. 1782–1791.

176. Ando E., Kagawa Y. Finite–element simalation of transient Heat respouse in ultrasonic transducers // IEEE Trans. on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control. – 1992. – 39, N 3. – P. 432–440.

177. Bank H.T., Rosario R. and Smith R.C. Reduced – order model feedback control design: numerical implementation in a thin shell model // IEEE transactionon automatic control.– 2000. – 45, N 7. – P. 1312–1324.

178. Berger Hanald, Alfenbach Johanes. Berechnung verbesserfer Spannugswerfe for dreidimensionale finite elements // Tech. Mech. – 1984. – 5, N 27. – P. 28–35.

179. Berlincourt D. Piezoelectic ceramics. Characteristics and application // JASA. – 1980. – 70. – P. 1586–1595.

180. Bhimaraddi A., Carr A.J., Moss P.T. A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution // Comput. Struct. – 1989. – 31, N 3. – P. 299–308.

181. Boucher D., Lagiez M., Maerfeld C. Computation of the vibrational modes for piezoelectric array transducers using a mixed finite element–perturbation method // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1981. – 28, N 5. – P. 318–330.

182. Coleman B.D., Noll W. Foundation of linear viscoelasticity // Rev. Mod. Phys. – 1961. – 33, N 2. – P. 239–249.

183. Coleman B.D.Thermodynamics of materials with memory // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1964. – 17, N 1. – P. 1–46.

184. De Reggi A.S., Roth S.C., Kenney J.M., Edelman S. Piezoelectric polymer probe for ultrasonic application / J. Acoust. Soc. Amer. – 1981. – 69, N 3. P. 853–859.

185. Drumheller Donglas S., Kalnins Arturs. Dynamic Shell theory for element–perturbation method / J. Acoust. Soc. Amer. – 1970. – v. 47, N 5. – P. 1343–1353.

186. Dynamics and Control of Distributed Systems / Edited by H.S. Tsou and L.A. Bergman. – Cambridge University Press, 1998. – 374 p.

187. Gradowczyk M.H. On the accuracy of the Green–Rivlin representation for viscoelastik materials // Int. J. Solids and Strukt. – 1969. – 5, N 8. – P. 873–877.

188. Green A.E., Naghdi P.M. On thermodynamics and the nature of the second law // Proc. Roy. Soc. London A. – 1979. – 357, N 1630. P. 253–270.

189 Gabbert U., Tzou H.S. Smart structures and structronic systems. – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2001. – 384 p.

190. Herrmann L.R. On a general theory of viscoelasticity // J. Franklin Inst. – 1965. – 280, N 3. – P. 244–255.

191. Holland R. Convection relations for isotropic and ferroelectric ceramic elasticity formulations / J. Acoust. Soc. Amer. – 1967. – v. 42, – P. 1051–1052.

192. Holland R., Eer Nisse E. Design of resonant piezoelectric devies. – Cambridge: MIT Press, 1969. – 258 p.

193. Holland R. Measurement of piezoelectric phase angles in a ferroelectric ceramic // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonic. – 1970. – 17, N 2. – P. 123–124.

194. Holland R. Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonic. – 1967. – 14, N 1. – P. 18–20.

195. Hom C. L. Simulating electrostrictive deformable mirrors: II. Nonlinear dynamic analysis // Smart Mater. Struct. – 1999. – 8. – P. 700–708.

196. Huang–Sying Ying and Ming–Liang Liao. Partial hybrid stresselement for transient analysis of thick laminated composite plates // International Journal For

Numerical Methods In Engineering. – 1990. – 29, N 8. – P. 1787–1796.

197. Kagawa Y., Yamabuchi T. A finite element approach to electromechanical problems with an application to energytrapped and surfase – wave devices // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1976. – v.23, N 4. – P. 263–272.

198. Kagawa Y., Yamabuchi T. Finite element approach for a piezoelectric circular rod // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1974. – v.23, N 6. – P. 379–385.

199. Kagawa Y., Yamabuchi T. Finite element simulation of twodimentional electromechanical resonators // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1974. – v.21, N 10. – P. 275–283.

200. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I. Electromechanical vibrations and dissipative heating of viscoeleastic thin–walled elements with allowance for piezoelectric effect // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 2. – P. 182–212.

201. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F. Forced harmonic vibrations and dissipative heating–up of viscoelastic thin–walled elements (review) // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 2. – P. 174–196.

202. Karnaukhov V.G., Mikhailenko V.V. Nonlinear single–frequency vibrations and dissipative heating of inelastic piezoelectric bodies // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 5. – P. 521–547.

203. Karnaukhov V.G., Senchenkov I.K. Generalized models of the thermomechanical behavior of viscoelastic materials with allowance for the interaction of mechanical and thermal fields // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 1. – P. 40–63.

204. Karnaukhov V.G. Thermal failure of polymeric sturcturel elements under monoharmonic deformation. // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 6. – P. 3–30.

205. Kenshi K. Study on the vibrations of piezoelectric equilateral triangular plate by the finite element method // J. Acoust. Soc. Jap. – 1982. –38. – P. 542–549. – РЖФиз, 1983, 2Ж 630.

206. Lerch R. Electroacoustic trancducers using piezoelectric polyvinylidenefluoride films / J. Acoust. Soc. Amer. – 1979. – 66, N 4. – P. 952–954.

207. Lerch R. Electromechanical proporties of piezopolymer microphons/ J. Acoust. Soc. Amer. – 1981. – 69, N 6. – P. 1809–1814.

208. Mindlin R.D. Equation of high hequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates/ Int. J. Solids and Structures. 1974. – v. 10, N 6. – P. 625–637.

209. Mindlin R.D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates/ Int. J. Solids and Structures. 1972. – v. 8, N 7. – P. 895–906.

210. Moon W., Bush–Vishniac. Modelling of piezoelectric ceramic vibrations including thermal effects: Part I. Thermodynamic property consideration // JASA. – 1995. – 98. – P. 403–412.

211. Moon W., Bush–Vishniac. Modelling of piezoelectric ceramic vibrations including thermal effects: Part II. Derivation of partial differential equations //

JASA. – 1995. – 98. – P. 413–421.

212. Moon W., Bush–Vishniac. Modelling of piezoelectric ceramic vibrations including thermal effects: Part III. Bond graph model for one dimensional heat condition // JASA. – 1999. – 101, – P. 1398–1407.

213. Moon W., Bush–Vishniac. Modelling of piezoelectric ceramic vibrations including thermal effects: Part IV. Development and experimental evaluation of a bond graph model of the thickness vibrator // JASA. – 1997. – 10, – P. 140–129.

214. Nemat–Nasser S. On nonequilibrim thermodynamics of continua. – In.: Mechanics Today. New York, 1975, 2. – P. 94–158.

215. Nokano T. Hirata H. Tomikawa Y. Non–axisymmetric contour vibrations of clamped piezoelectric annular plates: Analysis for the development of an ultrasonie motor // J. Acoust. Sos. Jpn. (E) 1990. – 11, N 3. – P. 161–172.

216. Pao Y.H. Electromagnetic forces in deformable continua // Mechanics Today / Ed. by S. Nemat–Nasser. – New York ets.: Pergamon press, 1978. – Vol. 1. – P. 209–305.

217. Piquette J.C., Stephen E.P. A nonlinear material model of lead magnesium niobate (PMN) // J. Acoust. Soc. Amer. 1977. – 101, N 1. – P. 289–296.

218. Rao S.S., Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control ot structure: A survey // Appl. Mech. Review. – 1994. – 47, N 4. – P. 113–123.

219. Ricketts D.Electroacoustic sensitivity of composite piezoelectric polymer cylinders / J. Acoust. Soc. Amer. – 1980. – 68, N 4. – P. 1025–1029.

220. Senchenkov I.K., Karnaukhov V.G. Thermomechanical behavior of nonlinear viscoelastic materials under harmonic loading // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 11. – P. 1400–1432.

221. Senchenkov I.K., Zhuk Ya. A. and Karnaukhov V.G. Modelling the thermomechanical behavior of phisically nonlinear materials under monoharmoic loading. // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 9. – P. 3–34.

222. Sutherland H.J., Chen P.J. Determination of the mechanical proporties of PZT 65/35 using acoustic technigues // Asta mech. – 1978. – 30, N 3/4. – P. 293–298.

223. Tani J., Takagia T., Qiu J. Intelligent material systems: Application of functional materials // Appl. Mech. Review. – 1998. – 51, N 8. – P. 505–521.

224. Tauchert T.R. Thermomechanical coupliny in viscoelastic solids // IUTAM Symp. Thermoinelasticity. –1968. East Kilbride Ed. B.A. Boley. Sprinyer Verlag, Vien – N.Y., 1970. – P. 316–326.

225. Tauchert T.R. The temperature generated during torsional oscillations of polyethylens rods. – Int. J. Ing. Sci., – 1967, – 4, N 5. – P. 353–365.

226. Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibrations. – N.Y.: Plenum press. 1969. – 211 p.

227. Tiersten H.F., Mindlin R.D. Forced vibrations of piezoelectric crystal plates / Quart. Appl. Math.– 1962. v. 20. – P. 107–119.

228. Tiersten H.F., Tsai C.F. On the interaction of the electromagnetic field with heat conductiong degormable insulators // J. Math. Phys. – 1972. – 13, N 2. – P. 361–378.

229. Truesdell C., Toupin R. The classical fields theories // Handbuch der Physik / Ed. by S. Flugge. – Berlin ets., 1960. – Bd III/1. – P. 226–793.

230. Tzou H.S., Anderson G.L. (Eds.) Intelligent structural Systems. – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1992. – 453 p.

231. Tzou H.S. Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 400 p.

232. Yarlagadda S., Chan M.H.W., Lee H., Lesieutre G.A., Jensen D.W. Low temperature thermal conductivity, heat capacity and heat generation of PZT // Joumal of Intelligent Material Systems and Structures. – 1995. – 6. – P. 757–764.