ЗАСТОСУВАННЯ КРИТЕРІЮ χ^2 ДО ПЕРЕВІРКИ ГІПОТЕЗИ ПРО ЧИСЛОВЕ ЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Показано, що перевірка гіпотези про числове значення ймовірності «успіху» в схемі Бернуллі з використанням критерію χ^2 рівносильна перевірці тієї самої гіпотези на основі двобічного критерію, що ґрунтується на нормальному наближенні відносної частоти «успіху».

Нехай у n випробуваннях Бернуллі «успіх» з'явився m разів. Треба перевірити гіпотезу $H_0: p = p_0$; де p_0 – ймовірність «успіху» в окремому випробуванні.

У стандартних навчальних курсах математичної статистики критерій цієї перевірки будується на порівнянні заданого числа p_0 з відносною частотою «успіху» $p^* = \frac{m}{n}$. Якщо n достатньо велике, а p_0 помітно відрізняється від 0 та 1, за статистику критерію беруть статистику:

$$Z = \frac{p^* - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \qquad (1)$$

(тут p^* – випадкова величина).

За справедливої гіпотези $H_0: p = p_0$ ця статистика має розподіл близький до нормального розподілу N(0;1).

Критична область для рівня значущості α вибирається залежно від вигляду альтернативної гіпотези. Зокрема, для альтернативної гіпотези $H_1: p \neq p_0$ критична область визначається нерівністю:

$$|z_в| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\ , \qquad (2)$$

де $z_в$ – вибіркове значення статистики (1), $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ – квантиль розподілу N(0;1) порядку $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Ту саму гіпотезу $H_0: p = p_0$ можна перевірити з використанням критерію χ^2. Для цього розглянемо випадкову величину $X = \{0, 1\}$ – індикатор «успіху» (X набуває значення 1 у разі «успіху» та значення 0 – у разі «невдачі»). Це дозволяє сформувати нашу гіпотезу у рівносильному вигляді:

H_0: випадкова величина X має розподіл

$$P\{X = 1\} = p_0,\ P\{X = 0\} = 1 - p_0 = q_0, \qquad (3)$$

і скористатись критерієм χ^2.

Нехай для перевірки гіпотези (3) проведено n випробувань Бернуллі, і «успіх» настав m разів.

Стосовно до випадкової величини X результати випробувань подамо у вигляді:

0	1

$\nu_1 = n - m$	$\nu_2 = m$

Область можливих значень X розбита на $l = 2$ множини: $\Delta_1 = \{0\}$, $\Delta_2 = \{1\}$. За справедливої гіпотези H_0.

$$p_1 = P(X \in \Delta_1) = 1 - p_0 = q_0, \; p_2 = P(X \in \Delta_2) = p_0.$$

Для вибіркового значення статистики критерію χ^2 дістаємо:

$$\chi_\text{в}^2 = \frac{(n-m-nq_0)^2}{nq_0} + \frac{(m-np_0)^2}{np_0} = \frac{(m-np_0)^2}{np_0q_0}. \tag{4}$$

Це значення порівнюється з квантилем

$\chi_{1-\alpha}^2(l-1) = \chi_{1-\alpha}^2(1)$ ($\chi_{1-\alpha}^2(1)$ – квантиль χ^2 – розподілу з одним ступенем вільності порядку $1-\alpha$).

У разі $\chi_\text{в}^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(1)$ гіпотеза H_0 відхиляється.

Тепер покажемо, що критерій перевірки гіпотези про числове значення ймовірності «успіху» з використанням співвідношення (4) рівносильний двобічному критерію (1), (2).

Дійсно, величина (4) дорівнює квадрату вибіркового значення статистики (1):

$$\chi_\text{в}^2 = z_\text{в}^2.$$

Крім того, справедлива рівність квантилів

$$\chi_{1-\alpha}^2(1) = u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2. \tag{5}$$

У результаті дістаємо рівносильність нерівностей

$$\chi_\text{в}^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(1) \Leftrightarrow z_\text{в}^2 \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \Leftrightarrow |z_\text{в}| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad (u_{1-\frac{\alpha}{2}} > 0).$$

Отже, гіпотеза $H_0: p = p_0$ з використанням критерію χ^2 відхиляється тоді і лише тоді, коли вона відхиляється з використанням двобічного критерію (1), (2).

Залишилось довести рівність квантилів (5). Для цього розглянемо випадкову величину Z з розподілом $N(0;1)$ і скористаємось рівністю

$$P\left(Z^2 < u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2\right) = P\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < Z < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

Врахувавши, що за означенням « хі – квадрат » розподілу $Z^2 = \chi^2(1)$, дістаємо $P\left(\chi^2(1) < u_{1-\alpha}^2\right) = 1-\alpha$.

Звідки випливає рівність (5).

Слід пам'ятати, що на відміну від першого підходу методика χ^2 не дозволяє будувати двобічні критерії перевірки гіпотези $H_0: p = p_0$.

Крім того, згідно з доведеним, методика χ^2 передбачає ті самі умови нормального наближення відносної частоти «успіху». Якщо ці умови не виконуються, слід користуватись критеріями, що ґрунтуються на точному (біномному) розподілі відносної частоти.

Література

1. Михайленко В.В., Ластівка І.О. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.: НАУ, 2014. – 564 с.

Параметричні рівняння ліній другого порядку, тобто такі, за допомогою яких декартові координати точок лінії виражаються як функції від змінного параметра t, можна складати по-різному.

Справді, щоб скласти параметричні рівняння лінії, досить подати одну із змінних, наприклад *x*, як довільну функцію від параметра t, а саме: x = *φ(t)*, а потім, підставляючи *φ(t)* замість *x* у рівняння лінії, розв'язати його відносно *y*. Тоді дістанемо вираз для *y* як функції від t: $y = \psi(t)$. Сукупність рівнянь:

$$\mathrm{x} = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t)$$

можна розглядати як параметричні рівняння лінії.

Найважливіше значення мають параметричні рівняння ліній другого порядку, безпосередньо пов'язані з їх побудовою по точкам. Виведемо цірівняння для еліпса, гіперболи і параболи. Нехай задано еліпс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad .$$

Припустимо, що а $> b$. Опишемо два концентричні кола радіусів *a* і b з центрами в початку координат. Проведемо через початок координат довільний промінь. Нехай він перетинає більше коло в точці A, а менше − у точці B. Проведемо через A пряму, паралельну до осі OY, а через B − пряму, паралельну до осі OX. Точку їх перетину позначимо через P. Доведемо, що точка P лежить на еліпсі. Позначимо кут нахилу променя OA до осі OX через φ, а координати точки P − через x, y. Отже, з ΔOAA_1 (рис. 102) маємо: $x = a \cos\varphi$. З ΔOBB_1 $BB_1 = b \sin\varphi$. Але $BB_1 = PA_1 = y$. Отже, $y = b \sin\varphi$.

Підставляючи ці значення x, y у рівняння еліпса, переконаємося, що вони його задовольняють при всіх значеннях φ. Отже,

$$x = a \cos \varphi,$$
$$y = b \sin \varphi$$

є параметричними рівняннями еліпса.

Для здійснення побудови еліпса по точкам досить знати значення *a* і b для еліпса.

Нехай тепер задано гіперболу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Знову з початку координат, як із центра, опишемо два довільних кола радіусів a і b. Нехай для конкретності $\Delta a < b$.

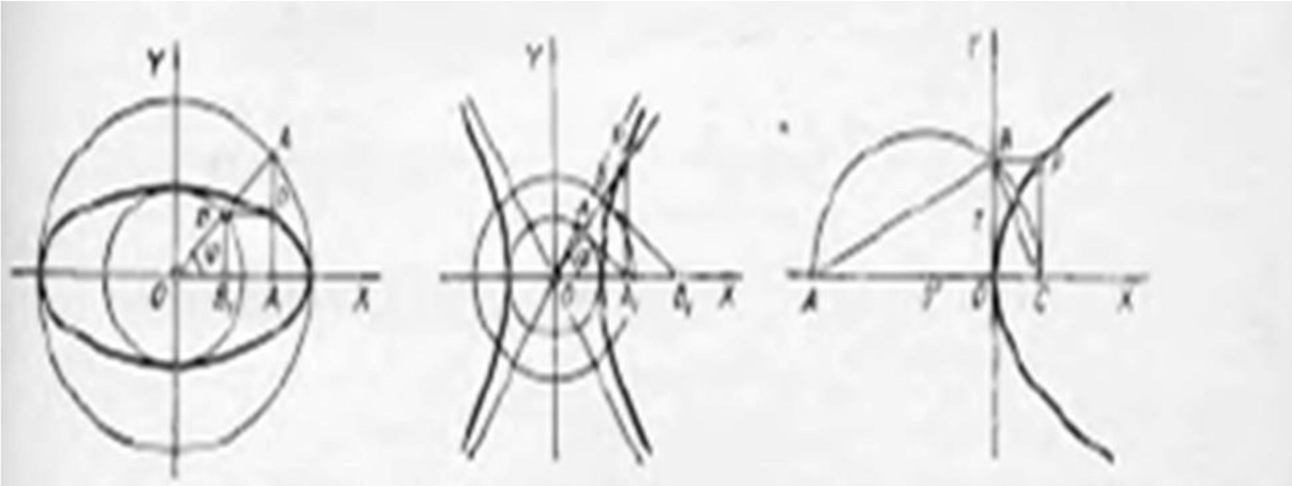

Рис. 102 Рис. 103 Рис. 104

Проведемо через початок координат довільний промінь і позначимо точки його перетину з колами А і В, а кут нахилу до осі ОХ − A_1. Через точки А і В проведемо дотичні до кіл і позначимо точки їх перетину з віссю ОХ як A_1 і B_1 (рис. 103). З точки A_1 проведемо перпендикуляр до осі ОХ $AA_1 = B_1B$ - $b\ tg\ \varphi$. Покажемо, що точка Р $(x,\ y)$ належить гіперболі.

Справді, з ΔOAA_1 маємо $x = OA_1 = \frac{a}{\cos\varphi}$, y=b tg φ за побудовою. Легко бачити, що ці значення $x,\ y$ задовольняють рівняння гіперболи при довільному φ. Отже, рівняння:

$$x = OA_1 = \frac{a}{\cos\varphi},$$

$$y = b\ \mathrm{tg}\ \varphi$$

є параметричними рівняннями гіперболи. Для побудови гіперболи по точках досить знати їх параметри a і b.

Нарешті, нехай задано параболу $y^2 = 2px$.

Візьмемо на осі ОХ точку А (− 2р, 0), а на осі ОY − довільну точку В (0, t). Через точки А і В проводимо коло з центром на осі ОХ. Позначимо через С другу точку перетину кола з віссю ОХ. В точці С встановимо перпендикуляр

СР = ОВ = t. Покажемо, що точка Р (х, у) належить параболі. З Δ АВС (рис. 104) маємо:

$t^2 = 2p \cdot$ OC, де OC = x; отже, $x = \frac{t^2}{2p}$ і y = t за побудовою. Легко побачити, що координати точки P (x, y) задовольняють рівняння параболи при довільному t. Отже,

$$x = \frac{t^2}{2p},$$
$$y = t$$

є параметричні рівняння параболи. Для побудови її по точкам досить знати параметр p.

Література

1. В.П. Білоусова. Аналітична геометрія / В.П. Білоусова, І.Г. Ільїн, О.П. Сергунова, В.М. Котлова. – К. : Вища шк., 1973. – 382 с.