Ковальчук Наталія
Науковий керівник - Врановський А. Ц.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРЕМ ПАСКАЛЯ І БРІАНШОНА У ПОБУДОВІ ТОЧОК КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ефективність вивчення математичних дисциплін залежить від багатьох різноманітних важливих чинників. Але на, думку багатьох вчених та викладачів, низьку якість можна пояснити ігноруванням принципів доступності, індивідуального та диференційованого підходів в навчанні, відсутністю активного наукового пошуку в пізнавальній діяльності.

Теореми Паскаля і Бріаншона, а також їх окремі випадки дають змогу легко знаходити скільки завгодно точок (прямих) кривої (пучка) другого порядку, якщо задано таку їх кількість, яка цю криву (пучок) повністю визначає. Метою даної роботи є пояснення застосування теореми Паскаля та теореми Бріаншона до розв’язання задач з проективної геометрії на прикладах деяких з них.

Розглянемо зміст теореми Паскаля. Візьмемо яку-небудь криву другого порядку і довільну шістку точок на ній. Занумеруємо їх в якій завгодно послідовності, наприклад у тій, в якій вони записані. Сполучивши в такій послідовності ці точки (останню точку сполучимо з першою), дістанемо шестикутник, вписаний у криву. Сторони цього шестикутника занумеруємо в тій самій послідовності, в якій занумеровані вершини.

Теорема: протилежні сторони шестикутника, вписаного в криву другого порядку, перетинаються на одній прямій – прямій Паскаля.

Обернена теорема: якщо протилежні сторони шестикутника перетинаються в точках, що належать одній прямій, то цей шестикутник вписаний у деяку криву другого порядку.

Твердження двоїсте теоремі Паскаля за малим принципом двоїстості, називається *теоремою Бріаншона.* Розглянемо суть цієї теореми.

Візьмемо яку-небудь шістку прямих, що належать одному пучку другого порядку. Занумеруємо ці прямі, в якій завгодно послідовності (позначимо їх арабськими цифрами). Дістанемо шестисторонник, вписаний у криву другого порядку. Знайдемо точки перетину сусідніх прямих (остання пряма перетинається з передостанньою і першою прямими). Ці точки занумеруємо римськими цифрами в тій самій послідовності, що й прямі. Назвемо їх вершинами шестисторонника.

Теорема: прямі, що сполучають протилежні вершини шестисторонника, вписаного в пучок другого порядку, перетинаються в одній точці – точці Бріаншона.

Теорема Бріаншона, як і *теорема Паскаля*, має *обернену:* якщо прямі, що сполучають протилежні вершини шестисторонника, перетинаються в одній точці, то цей шестисторонник завжди вписаний у деякий пучок другого порядку. Вони також поширюються і на той випадок, коли в криву (пучок) другого порядку вписано не шести-, а п'яти-, чотири- і трикутник (тристоронник).

Розглянемо деякі задачі з використанням зазначених теорем.

Задача 1. Побудувати криву другого порядку, якщо задано 4 точки її і дотичну в одній із них.

Побудова:

Нехай, як це зображено на рисунку 1, P, Q, R,S-дані точки і l – дотична до кривої в точці Q. Можна було б узяти точки P і Q за центри пучків і встановити проективну відповідність між ними за допомогою трьох пар променів PQ-l, PR- QR, PS – QS.

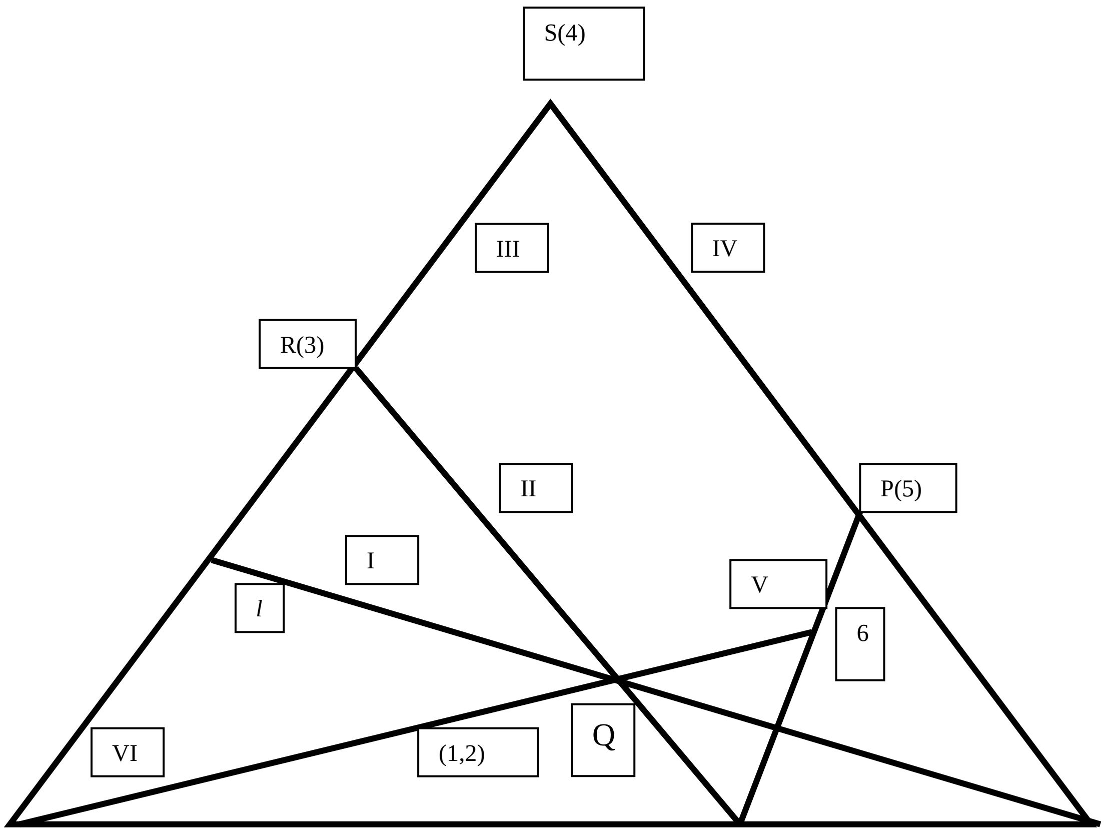


Рис. 1. Дані точки і дотична до кривої в точці Q

Проте краще скористатися окремим випадком теореми Паскаля для вписаного п’ятикутника.

Беремо точку Q за подвійну і привласнюємо їй два сусідні числа 1, 2. Іншим трьом вершинам також привласнюємо які-небудь три числа 3, 4, 5. дістаємо чотири сторони шестикутника I-IV, причому стороною I є дотична l.

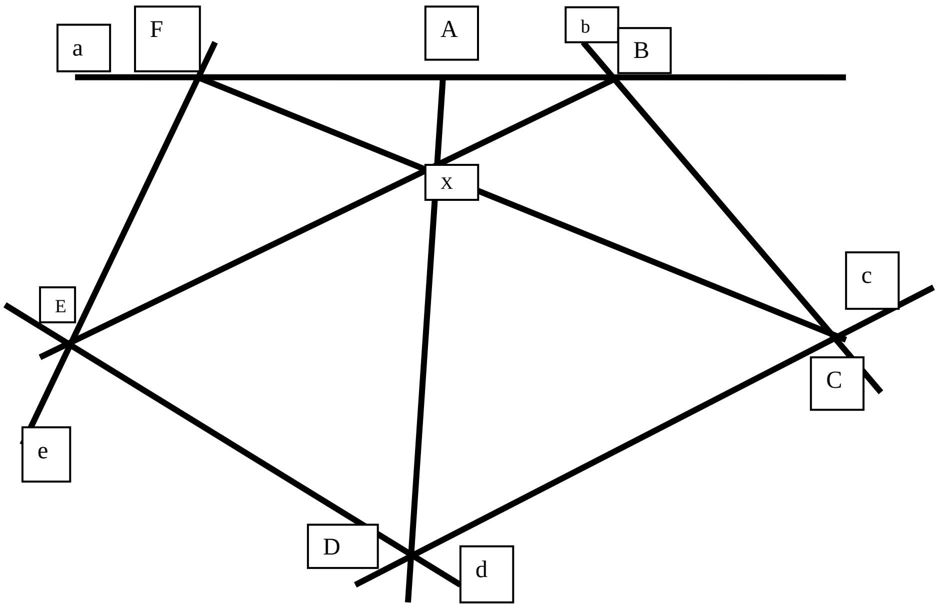
Через вершину 5 проводимо будь-яку сторонуV , знаходимо точки перетину протилежних сторін I-IV і II-V, будуємо паска леву пряму, точку її перетину зі стороною III сполучаємо з точкою Q – це буде пряма VI ; нарешті, знаходимо точку 6 перетину цієї прямої з прямою V.

Задача 2. Дано чотири дотичні до кривої другого порядку і точку дотику однієї з них. Побудувати дотичні до кривої.

Побудова:

Цю задачу розв'яжемо за допомогою теореми Бріаншона. Нехай a, b, c, d – задані прямі і A- точка дотику прямої a (рис. 2).

Знаходимо точки B= a^b, C=b^c, D=c^d. На прямій d беремо довільну точку E. Тоді за окремим випадком теореми Бріаншона (для п'ятисторонника)



дістаємо, що точка X=(AD)^(BE) є точка Бріаншона.

ис. 2. Задані прямі і точка дотику прямої

Знаходимо точку F =a^(CX) і пряму e (EF). Ця пряма і є дотичною до кривої.

Змінюючи положення точки E на d, дістанемо скільки завгодно дотичних до кривої.

Задача 3. Дано п'ять точок конічного перерізу і пряму, яка проходить через одну з них. Побудувати другу точку перетину заданої прямої з конічним перерізом.

Побудова:

Нехай дана пряма a проходить через точку A (рис. 3).

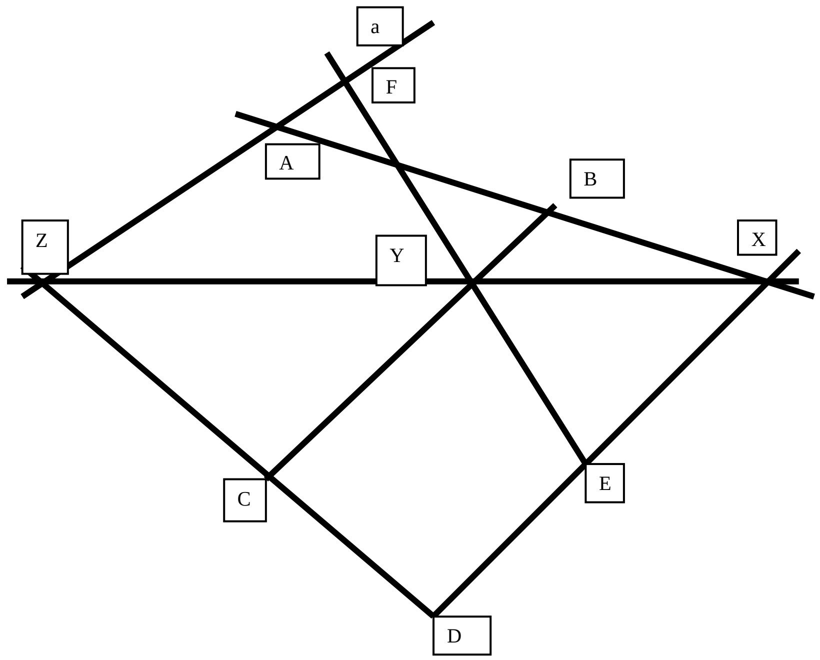


Рис. 3. Дані точки конічного перерізу і пряма, яка проходить через одну з них

Треба визначити точку перетину цієї прямої з конічним перерізом, заданим точками A, B, C, D, E. Якщо F – шукана точка, то ABCDEF – шестикутник Паскаля.

Дві пари його протилежних сторін (AD) і (DE), (CD) і a нам відомі. Отже, точки X= (AB)^(DE), Z=(CD)^a визначають пряму Паскаля (XZ).

На цій прямій повинна лежати і точка Y перетину сторін (CB) і (EF).

Знаходимо Y як перетин (CB) з (XZ) . Тоді F=(EY)^a.

Отже, наведені приклади задач переконують в тому, що за допомогою теореми Паскаля і Бріаншона легко можна розв'язати задачі на побудову дотичних до кривої другого порядку або точок дотику на променях пучка другого порядку.

Література

1. Кованцов Н. І. Проективна геометрія. – К. : Вища школа, 1985.
2. Сергунова О. П., Коблова В. М. Практикум з проективної геометрії / за ред. проф. М. І. Кованцова. – К., Вища школа, 1977.