А.В. Прус
В.О. Швець

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

А. В. Прус,
В. О. Швець

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано до друку Вченою радою
Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова

Рекомендовано до друку Вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка

Київ - Житомир – 2016
ПП «Рута»

ББК 74.262.21
УДК 373.5:51(08)
П85

Рекомендовано до друку Вченою радою
Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова
(протокол №8 від 22 грудня 2015)

Рекомендовано до друку Вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол №4 від 27 листопада 2015)

Рецензенти:

В. В. Михайленко – завідувач кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор фізико-математичних наук, професор.

Г. О. Райковська – завідувач кафедри загально-інженерних дисциплін Житомирського державного технологічного університету, доктор педагогічних наук, професор.

О. В. Школьний – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики НПУ імені М. П. Драгоманова.

І. Л. Назіна – вчитель вищої категорії Житомирської міської гімназії №3, вчитель-методист.

Прус А.В., Швець В.О.
П85 Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во «Рута», 2016. 468 с.
ISBN 978-617581-269-3

Навчально-методичний посібник.
Для вчителів математики, студентів фізико-математичних факультетів – майбутніх педагогів, учнів загальноосвітніх шкіл, які бажають покращити свої знання та вміння з математики.

ISBN 978-617581-269-3

ЗМІСТ

- Звідки починати, ваша величносте? - запитав він.
- З початку, - глибокодумно відповів Король, - і читай до кінця. А тоді - закінчуй.

Л. Керрол. Аліса в країні чудес

ВСТУП

> \- Чого варта книжка без малюнків та розмов? - зітхнула Аліса.
> *Л. Керрол. Аліса в країні чудес*

Цей посібник для тих, хто цікавиться елементарною математикою та хоче навчитись або вдосконалити свої вміння розв'язувати завдання з параметрами.

Інтерес до завдань із параметрами зростає з кожним роком. За свідченнями науковців та методистів, до середини 60-х років минулого століття такі задачі зустрічались у шкільній практиці та пропонувались до вирішення на вступних іспитах епізодично. Згодом завдання із параметрами почали з'являтись на іспитах, а, отже, і розв'язуватись у школі досить регулярно. Сьогодні значна кількість завдань із параметрами є і в діючих шкільних підручниках, і в різноманітних навчально-методичних посібниках для школи. Задачі з параметрами завжди є серед завдань державної підсумкової атестації, ЗНО тощо. Зростаюча популярність таких задач є невипадковою. Теоретичні наукові дослідження у різних сферах нашого життя часто приводять за допомогою математичного моделювання до дуже складних рівнянь, нерівностей та їх систем, які містять параметри. Можна сказати, що задачі з параметрами, які пропонують для розв'язування учням та студентам, є спрощеним прототипом важливих науково-дослідницьких задач, які, можливо, їм потрібно буде розв'язувати у своїй професійній діяльності. Завдання, у яких є параметри, традиційно вважаються одними із найскладніших для розв'язування в курсі елементарної математики як у загальноосвітній школі, так і у вищому навчальному закладі. Вміння розв'язувати такі вправи цілком справедливо вважаються показником рівня математичної компетентності учнів, студентів, оскільки демонструють ступінь засвоєння як теорії з елементарної математики, так і практичного її застосовування у нестандартних ситуаціях. Однак уміння розв'язувати такі задачі не є програмовою вимогою. Можливо, тому вчителі рідко приділяють таким завданням, а, отже, і вмінню їх розв'язувати велику увагу.

Чому потрібно вміти працювати над завданнями з параметрами? Важливо те, що це можливість повторити основні розділи елементарної математики, систематизувати та поглибити свої математичні знання, узагальнити вміння розв'язувати рівняння, нерівності, їх системи. Також, це реальна основа покращити вміння міркувати логічно та доказово, відшліфувати логічні прийоми мислення (аналіз, синтез, порівняння, конкретизація, узагальнення та ін.), що потрібно для професійного зростання. Наступне стосується здебільшого вчителів та майбутніх вчителів математики. Це чудовий засіб для складання контрольних завдань, наприклад, таких поширених зараз - тестових. Причому варіантів можна скласти будь-яку кількість (та відразу мати відповіді). Наприклад, розв'язуючи лише одне тригонометричне рівняння з параметром, можна отримати будь-яку кількість однотипних рівнянь (без параметра) із відповідями до кожного з них. Думаємо, що завдання з параметрами потрібно вміти розв'язувати, а вчителям потрібно володіти методикою їх розв'язування.

Процес розв'язування завдань із параметрами, на наше глибоке переконання, розвивальний для будь-якої особистості та потенційно творчий. Але, безумовно, ця діяльність базується на цілком визначених, простих та стабільних основах. Тому навчитись розв'язувати такі вправи, принаймні найпростіші, зможе кожен, хто має таке бажання, знає елементарну математику хоча б на рівні стандарту і працюватиме над ними по півгодини щодня. Сподіваємось, що Ваші здобутки у ході роботи над даним посібником, під час розв'язування, обов'язково будуть приносити задоволення від виконаного. Звичайно, Вам потрібно буде докласти певних зусиль, та головне - мати мотив зрозуміти ідею розв'язування вправ з параметрами. А далі все залежить лише від Вас. Бажаємо успіхів та наполегливості в обраному напрямку!

Автори виражають щиру вдячність завідувачу кафедри алгебри та геометрії ЖДУ імені Івана Франка, доктору фізико-математичних наук, професору В.В.Михайленко, завідувачу кафедри загальноінженерних дисциплін Житомирського державного технологічного університету, доктору педагогічних наук, професору Г.О. Райковській, доценту кафедри вищої математики НПУ ім. М.П.Драгоманова, кандидату фізико-математичних наук, доценту О.В.Школьному, вчителю вищої категорії Житомирської міської гімназії №3, вчителю-методисту І.Л. Назіній. вчителю вищої категорії Житомирської міської гімназії №3 С.С. Удовкіній за цінні поради у процесі роботи над книгою, які сприяли її поліпшенню. Зазначимо, що ідею обирати епіграфи до нашого посібника із творів англійського письменника, математика та філософа Льюїса Керрола ми запозичили в авторів книги «Методы решения задач с параметрами» В. Л. Натяганова та Л. М. Лужиної.

Будемо вдячні за відгуки, поради щодо покращення посібника, конструктивну критику. Їх просимо надсилати за такими адресами: 01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9, НПУ імені М. П. Драгоманова, кафедра математики і методики викладання математики або 10008, м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40, ЖДУ імені Івана Франка, кафедра методики навчання математики, фізики та інформатики.

Отже, будемо знайомитись із параметрами та набувати навички і вміння з ними правильно поводитись.

P.S. Книга написана, вона перед нами. Але із кожною краплею знання про розв'язування завдань із параметрами, кожним розв'язаним прикладом, ми розуміли, як ще багато хотілось би нам сказати. І, що найголовніше, як багато ми ще не знаємо... Дякуємо. що Ви звернули увагу на цю книгу, що Ви з нами.

З повагою, автори.

ЗНАЙОМСТВО З ПАРАМЕТРАМИ

- Я вас не розумію, - мовила Аліса. - Це все так заплутано.

- Просто ти ще не звикла..., - лагідно пояснила Королева. - Спочатку у всіх трохи наморочиться в голові...

Л. Керрол. Аліса в Задзеркаллі

Термін «параметр» - це термін грецького походження, у перекладі означає «відміряти». Поняття параметра є у різних науках, наприклад, фізиці, хімії, програмуванні, економіці та ін. Під поняттям параметра розуміють величину, якою характеризують певну властивість, стан, розмір або форму об'єкта, робочого тіла, явища, системи та ін. До необхідності розв'язувати завдання з параметрами (в межах побудованої математичної моделі) приводить велика кількість прикладних задач, зокрема, економічних, технічних, медичних тощо.

Параметр як математична величина входить до формул і виразів, до рівнянь та нерівностей, до систем рівнянь, нерівностей, до формулювань умови та вимоги у задачах. Як правило, значення цієї величини є постійним у межах задачі, яка розглядається. Параметр дає можливість виділити певний елемент з множини елементів того ж роду. Наприклад, у формулі $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$, якою можна задати квадратичну функцію, величини a,b,c є параметрами, певні значення яких виділяють одну квадратичну функцію з множини всіх квадратичних функцій, які задані цією формулою. Можна також сказати, що параметр – це величина, яка у певному завданні (рівнянні, нерівності, системі, текстовій задачі) не виражена конкретним числом.

Зупинимось на понятті параметра у рівняннях, нерівностях або їх системах. Зауважимо, що у даному посібнику текстові алгебраїчні, геометричні задачі з параметрами розглядатись не будуть.

Параметр у рівняннях або нерівностях може приймати різні значення. Тому з математичної точки зору, параметр - це змінна величина. Цю змінну величину в ході розв'язування часто фіксують для того, щоб мати змогу здійснювати розв'язування відносно іншої змінної.

Можна сформулювати таке означення завдання з параметром. **Рівняння (нерівність, система рівнянь, система нерівностей тощо) з параметром – це таке рівняння (або нерівність, система рівнянь, нерівностей), до запису якого крім змінної та числових коефіцієнтів входять буквені коефіцієнти, які є величинами, значення яких не вказані конкретно, але вони вважаються відомими та заданими на деякій числовій множині.** Наприклад, є рівняння $2x-a=0$ із змінною x та параметром a. Величина a може приймати будь яке числове значення. Зокрема, це можуть бути такі значення: $\frac{1}{2}$; -100; 55,02; $\sqrt{2}$; $\lg 5$ та ін. Залежно від того, яке конкретне число буде представляти параметр a, рівняння за виглядом буде набувати такого вигляду: $2x - \frac{1}{2} = 0$, $2x + 100 = 0$. $2x - 55{,}02 = 0$, $2x - \sqrt{2} = 0$, $2x - \lg 5 = 0$. Нехай є нерівність $by^2 - 2y + 6b - 10 < 0$. Зазвичай у завданні зазначено, яка величина є змінною, а яка є параметром. Якщо y - змінна, b - параметр, то дана нерівність є або квадратною (при $b \neq 0$) відносно змінної y, або лінійною (при $b = 0$) відносно змінної y. Залежно від значень, які приймає параметр, можна отримати такі нерівності: $y^2 - 2y - 4 < 0$ (при $b = 1$), $-5y^2 - 2y - 40 < 0$ (при $b = -5$) та ін. Якщо b- змінна, y- параметр, то дана нерівність є лінійною відносно змінної b. Залежно від значень, які приймає параметр, можна отримати такі нерівності: $6b - 10 < 0$ (при $y = 0$), $15b - 16 < 0$ (при $y = 3$).

До означення рівнянь та нерівностей із параметром можна також підійти з функціональної точки зору.

Рівняння $f(x,a) = g(x,a)$ з двома змінними a, x, де $f(x,a)$ і $g(x,a)$ – аналітично задані функції, будемо називати рівнянням зі змінною x та параметром a, якщо у рівнянні задача ставиться так: 1) або для кожного значення a із деякої множини розв'язати рівняння відносно x; 2) або знайти значення a, для яких виконується певна вимога, що сформульована для розв'язків рівняння відносно x. Тобто ***надання одній із змінних статусу параметра пов'язане зі зміною вимоги у рівнянні.***

На відміну від рівняння $f(x,y) = g(x,y)$ з двома змінними x і y, рівняння $f(x,a) = g(x,a)$ з параметром a - це скорочений, символічний запис цілого сімейства (тобто, нескінченної множини) рівнянь з одним невідомим x. Окремі представники цього сімейства можна отримувати при підстановці у рівність $f(x,a) = g(x,a)$ конкретне значення параметра a: при $a = 0$ маємо рівняння $f(x,0) = g(x,0)$, при $a = 1$ - рівняння $f(x,1) = g(x,1)$, при $a = \pi$ - рівняння $f(x,\pi) = g(x,\pi)$, при $a = -\sqrt{2}$ - рівняння $f(x,-\sqrt{2}) = g(x,-\sqrt{2})$ і т.п. Так, окремі представники сімейства рівнянь $a \cdot x = 1$ (або одного рівняння з параметром a) – це рівняння $1 \cdot x = 1$ (тут $a = 1$), $0 \cdot x = 1$ (тут $a = 0$), $-\pi \cdot x = 1$ (тут $a = -\pi$) і т.п.

Нерівності виду $f(x,a) > g(x,a)$, $f(x,a) < g(x,a)$, $f(x,a) \geq g(x,a)$, $f(x,a) \leq g(x,a)$ з двома змінними a, x, де $f(x,a)$ і $g(x,a)$ – аналітично задані функції, будемо називати нерівностями зі змінною x та параметром a, якщо у нерівності задача ставиться так: 1) або для кожного значення a із деякої множини розв'язати нерівність відносно x; 2) або знайти значення a, для яких виконуються певна вимога, що сформульована для розв'язків нерівності відносно x.

Завдання з параметрами залежно від різник ознак можна поділити на окремі групи (систематизувати).

• Залежно від того, *під знаком якої функції знаходиться змінна* у рівнянні, нерівності або системі (за аналогією із рівняннями, нерівностями та системами без параметра) можна визначити, до якого розділу математики це завдання відноситься. Тобто користуючись відповідним означенням, визначити його вид. Наприклад, $\log_2(x^2+ax)=1$ - логарифмічне рівняння з параметром a, $\sin(mx-3)<m$ - найпростіша тригонометрична нерівність із параметром m, $\begin{cases}(k-2)x+2y=4+3k,\\ x+(k-3)y=8\end{cases}$ - система лінійних рівнянь із параметром k.

• Залежно від того, ***чи відома орієнтовна схема розв'язування завдання з параметром***, їх можна розділити на стандартні (типові) та нестандартні. Наведемо приклад. Віднесемо до типових рівнянь із параметром тригонометричне рівняння $(a-4)\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+(a+1)\cos^2 x=0$ з параметром a. Пояснимо чому: це однорідне рівняння 2-го степеня (за означенням) відносно $\sin x$ і $\cos x$, спосіб його розв'язування відомий. Зауважимо, що якщо параметр «заважає» визначити вид рівняння, то можна замість параметра на чернетці підставити конкретне значення, визначити вид рівняння без параметра та повернутись до відповідного рівняння вже з параметром.

• ***За вимогою задачі*** завдання з параметрами теж поділяють на види.

1. **Розв'язати** рівняння (нерівність, систему, задачу тощо) для кожного значення параметра. Це означає знайти для кожного значення параметра відповідні значення змінної.

2. **Знайти значення параметра**, при яких виконується певна умова чи умови. Це може бути вимога, яка сформульована так: «Знайти значення параметра (параметрів),

— при яких рівняння (нерівність, система, задача тощо) має задану кількість розв'язків;

— при яких множина розв'язків рівняння (нерівності, системи тощо) буде розташована певним чином на числовій осі (більша за деяке число, менша за деяке число, міститься між деякими числами та ін.);

— рівняння (нерівність) справджується для будь-якого дійсного значення змінної;

— рівняння (нерівність) справджується для будь-якого дійсного значення змінної, яке належить заданому проміжку;

— з одного рівняння (нерівності) випливає інше рівняння (нерівність);

— одне рівняння (одна нерівність) є наслідком іншого (іншої нерівності);

— рівняння (нерівності) рівносильні».

Єдиної схеми розв'язування для рівнянь (нерівностей, систем) із параметрами, як і для рівнянь (нерівностей, систем) без параметра, зрозуміло, не існує. Загалом, для вирішення завдань із параметрами використовуються аналітичний та графічний методи розв'язування. Детальніше про них будемо говорити у відповідних параграфах далі.

Якщо завдання з параметром є типовим, то у процесі його розв'язування доцільно здійснювати ту ж саму послідовність дій, як і під час вирішення завдання, де б замість параметра було цілком визначене число. Звичайно, параметр буде впливати на хід розв'язування, на кількість розглядуваних випадків тощо.

Запропонуємо загальні рекомендації щодо розв'язування типових завдань із параметром.

1. Визначити, до якого розділу алгебри відноситься рівняння (нерівність, система). Для цього потрібно відновити у пам'яті або знайти у відповідній літературі означення лінійного, квадратного, ірраціонального, показникового, логарифмічного, тригонометричного тощо рівняння (нерівності, системи). Джерелами такої інформації є діючі підручники, довідники.

2. Встановити вид рівняння (нерівності, системи). Для цього треба записати рівняння (нерівність, систему) у стандартному вигляді, порівняти знайдену форму з означенням цього виду рівняння. У ряді випадків для здійснення такого кроку необхідно провести відповідні тотожні перетворення.

3. Обрати, залежно від виду, спосіб розв'язування та здійснити орієнтовний план розв'язування.

Наприклад, розв'яжемо рівняння $\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$ з параметром a, використовуючи написані вище загальні рекомендації..

Задано типове логарифмічне рівняння зі змінною x та параметром a.

Розпочати розв'язування варто зі знаходження області визначення рівняння (область визначення змінної та область визначення параметра): $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Це рівняння не є найпростішим логарифмічним рівнянням. Відомо, що одна із основних евристичних ідей розв'язування логарифмічних рівнянь – це привести логарифми до однієї основи. Помічаємо, що логарифми мають різні основи: 2; a; 4. Перейдемо до основи 2 (параметр обирати в якості основи для всіх логарифмів недоцільно), використовуючи формулу переходу до іншої основи: $\log_k m = \dfrac{\log_n m}{\log_n k}$ (де $k > 0$, $k \neq 1$, $m > 0$, $n > 0$, $n \neq 1$): $\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 a} + \dfrac{1}{2}\log_2 x = 1$ (*). Три доданки у лівій частині рівняння (*) мають спільний множник, винесемо його за дужки: $\left(1 + \dfrac{1}{\log_2 a} + \dfrac{1}{2}\right)\log_2 x = 1$, тобто $\dfrac{3\log_2 a + 2}{2\log_2 a} \cdot \log_2 x = 1$ (**). Помічаємо, що отримане рівняння (**) можна привести до найпростішого логарифмічного рівняння $\log_A X = B$ (де $A > 0$, $A \neq 1$). «Заважає» це зробити числовий коефіцієнт $\dfrac{3\log_2 a + 2}{2\log_2 a}$.

Нехай $\dfrac{3\log_2 a + 2}{2\log_2 a} \neq 0$, звідки $\log_2 a \neq -\dfrac{2}{3}$, $a \neq 2^{-\frac{2}{3}}$. Тоді отримаємо найпростіше логарифмічне рівняння $\log_2 x = \dfrac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}$ (наголосимо, що у правій частині рівняння знаходиться числовий вираз, тобто в результаті – деяке число, незважаючи на форму запису у вигляді дробу). Розв'язком цього найпростішого рівняння є $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}}$. Очевидно, що знайдений корінь $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}} > 0$, тобто задовольняє область значень вихідного рівняння.

Нехай $\frac{3\log_2 a+2}{2\log_2 a}=0$, звідки $a=2^{-\frac{2}{3}}$. Тоді рівняння (**) буде мати вигляд $0\cdot\log_2 x=1$, $0\neq 1$, отже $x\in\varnothing$.

Запишемо відповідь. Якщо $a<0$, $a=1$, то задача не визначена; якщо $a=2^{-\frac{2}{3}}$, то $x\in\varnothing$; якщо $a>0$, $a\neq 1$, $a\neq 2^{-\frac{2}{3}}$, то $x=2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a+2}}$.

Окремо зауважимо таке.

1. Важливим етапом розв'язування завдань із параметром ***є встановлення області визначення***. Під ***областю визначення рівняння, нерівності чи системи з параметром будемо розуміти допустимі значення змінної і допустимі значення параметра.*** Як правило, цей етап зводиться до формулювання та розв'язування системи нерівностей. Ці нерівності визначають допустимі значення змінних та параметрів для виразів, які входять до умови. Наприклад, вираз під коренем парного степеня невід'ємний, вираз під логарифмом додатній; вираз в основі логарифма – додатній і не дорівнює одиниці, вираз під знаком арксинуса або арккосинуса лежить у межах $[-1;1]$ та ін. Оскільки розв'язування окремих нерівностей можуть залежати від параметрів, то узгодження окремих розв'язків для знаходження загального розв'язку системи потребує дослідження взаємного розташування на числовій осі границь областей кожної з нерівностей залежно від параметрів. Тільки після цього можна встановити область визначення змінної для кожного значення параметрів.

Наприклад, знайдемо область визначення рівняння $\log_{\sqrt{2-x}}(4x+k)=4$ з параметром k.

1. Вираз під квадратним коренем має бути невід'ємний ($2-x\geq 0$), але в основі логарифма повинен бути додатній ($\sqrt{2-x}>0$) та не повинен дорівнювати 1 ($\sqrt{2-x}\neq 1$), вираз під логарифмом – додатній ($4x+k>0$). Отже, запишемо систему нерівностей, яка описує ці умови: $\begin{cases} x<2, \\ x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty), \\ x>-\frac{k}{4} \end{cases}$ (*). Остання нерівність системи (*) залежить від параметра. Таким чином, щоб знайти розв'язки цієї нерівності, потрібно дослідити взаємне розташування чисел 2; 1, $-\frac{k}{4}$. Зрозуміло, що $1<2$, а число $-\frac{k}{4}$ залежно від значень параметра k, може бути як менше 1, так і більше 2, може розташовуватись між числами 1 та 2 або співпадати з одним із цих чисел.

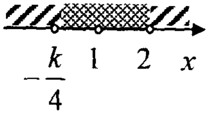

Рис. А

2. Тому маємо відповідні випадки.

2.1. Нехай $-\frac{k}{4}<1$, звідки $k>-4$. Тоді розташування чисел буде таким, як на рис. А. Отже, $x\in\left(-\frac{k}{4};1\right)\cup(1;2)$.

2.2. Нехай $-\frac{k}{4}=1$, звідки $k=-4$. Тоді система (*) буде мати вигляд $\begin{cases} x<2, \\ x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty), \\ x>1 \end{cases}$ звідки $x\in(1;2)$.2.3. Нехай $1<-\frac{k}{4}<2$, звідки $-8<k<-4$. Тоді розташування чисел буде таким, як на рис. Б. Отже, $x\in\left(-\frac{k}{4};2\right)$.

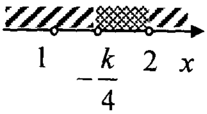

Рис. Б

2.4. Нехай $-\frac{k}{4}=2$, звідки $k=-8$. Тоді система (*) буде мати вигляд $\begin{cases} x<2, \\ x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty), \\ x>2 \end{cases}$ звідки $x\in\varnothing$.

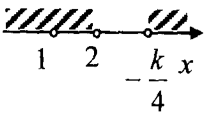

Рис. В

2.5. Нехай $-\frac{k}{4}>2$, звідки $k<-8$. Тоді розташування чисел буде таким, як на рис. В. Отже, $x\in\varnothing$.

Підсумуємо. Область визначення рівняння $\log_{\sqrt{2-x}}(4x+k)=4$ для $k\in(-\infty;-8]$ буде порожньою множиною; для $k\in(-8;-4]$ областю визначення буде $x\in\left(-\frac{k}{4};2\right)$; для $k\in(-4;+\infty)$ областю визначення буде $x\in\left(-\frac{k}{4};1\right)\cup(1;2)$.

Робота зі встановлення області визначення рівняння корисна, оскільки є випадки, коли при деяких значеннях параметрів область визначення не містить жодного значення, тобто початкове завдання не має розв'язків. Наприклад, у рівнянні, для якого ми знаходили область визначення (див. вище), це $k\in(-\infty;-8]$.

Також, реалізація умов області визначення часто дозволяє не виконувати непотрібні громіздкі обчислення, які приводять до сторонніх коренів. Звичайно, ця робота може бути складною, навіть складнішою, ніж безпосереднє розв'язування поставленого завдання. Тому, якщо є вимога розв'язати рівняння, то іноді буває зручно спочатку розв'язати рівняння, а потім перевірити, при яких значеннях параметра для кожного з коренів виконуються умови, сформульовані в області визначення. Однак для розв'язування значної кількості завдань із параметрами така перевірка є дуже складною, що робить її практично неможливою для виконання.

2. У процесі розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем із параметрами важливо здійснювати ***рівносильні перетворення***, однак це не завжди вдається. У ряді випадків необхідно здійснити нерівносильні перетворення, які найчастіше розширюють область допустимих значень. Це, зрозуміло, може привести до появи сторонніх коренів. Наприклад, це може відбутись у процесі розв'язування ірраціональних рівнянь, коли потрібно обидві частини рівняння піднести до квадрату. Рівносильність переходів у цих випадках можна забезпечити формулюванням додаткових умов рівносильності перетворень. Наприклад, для того, щоб аналітично розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x^2-1}=a-x$, можна піднести обидві його частини до квадрату. Для того, щоб забезпечити рівносильність переходу, це рівняння можна замінити на таку рівносильну систему: $\begin{cases} a-x\geq 0, \\ x^2-1=(a-x)^2 \end{cases}.$

3. ***Параметри*** у рівняннях та нерівностях із параметрами будемо переважно позначати початковими літерами (малими) латинського алфавіту: a, b, c тощо; ***змінні*** - останніми літерами (малими) латинського алфавіту: x, y, z тощо; коефіцієнти рівнянь, нерівностей - початковими літерами (великими) латинського алфавіту A, B, C тощо.

4. Для того, щоб не втратити окремі випадки під час запису відповіді, варто позначати вже знайдені розв'язки на прямій, яку будемо називати «пряма параметра». ***Пряма параметра*** *– це пряма, на якій позначені знайдені розв'язки залежно від значень параметра.*

Слід також додати, що в окремих видах вправ пряма параметра виступає в іншій якості - як проміжна, але досить важлива ланка розв'язування Наприклад, під час розв'язування систем нерівностей, сукупностей нерівностей.

5. ***Відповідь у завданнях із параметрами***, де ставиться вимога *«розв'язати для всіх значень параметра»*, як правило, складається із декількох пунктів. Можна кожен такий пункт писати складнопідрядним реченням на зразок: *«якщо ..., то ...»*. Зазначимо, що для тих значень параметра, які не входять до області визначення рівняння, записують, що «задача не визначена» або «задача не має змісту».

У завданнях із параметрами, де ставиться вимога «*знайти значення параметра*, при яких виконується певна умова чи умови, у відповідь записують ***тільки знайдені значення параметра***.