Бойко Анна,
магістрантка, спеціальність «Математика».
Науковий керівник – ***Михайленко В. В.,***
доктор фізико-математичних наук, професор

ТЕОРЕМА ПРО НУЛЬОВИЙ ОБ'ЄМ ЛІНІЙЧАТИХ ПОВЕРХОНЬ

Під *просторовою фігурою* будемо розуміти всяку обмежену множину точок простору.

Многогранною фігурою (многогранником) назвемо просторову фігуру, яка є замкненою областю (можливо й багатозв′язною) з межею, що міститься в скінченній кількості площин.

Будемо виходити з того, що всяка многогранна фігура має об'єм.

Позначимо довільну просторову фігуру через Ф. Будемо розглядати многогранники, які містять фігуру Ф, і які містяться в фігурі Ф (останні можуть і не існувати). Перші позначимо G, а їхні об'єми - $V(G)$. Другі позначимо g, а їхні об'єми $V(g)$. Многогранник G будемо називати описаним, а многогранник g – вписаним (якщо вписаних многогранників не існує, то за означенням візьмемо $V(g) = 0$).

Означення 1. Фігуру Ф назвемо *кубовною* (тобто такою, що має об'єм), якщо існує така послідовність $\{G_n\}$ описаних многогранників і така послідовність $\{g_n\}$ вписаних многогранників, об′єми $V(G_n)$ і $V(g_n)$ яких мають спільну границю:

$$\lim_{n\to\infty} V(G_n) = \lim_{n\to\infty} V(g_n)$$

Цю спільну границю й назвемо об'ємом фігури Ф.

Зокрема, фігура має нульовий об'єм, якщо її можна помістити у многогранну фігуру як завгодно малого об'єму.

Відмітимо ряд тверджень, які випливають з означення кубовності [1, с. 224].

Твердження 1. Для того, щоб тіло Ф було кубовним, необхідно і достатньо, щоб поверхня, яка його обмежує, мала нульовий об'єм.

Твердження 2. Якщо поверхню можна описати явним рівнянням одного з трьох типів

$$z = f(x,y),\ y = g(z,x),\ x = h(y,z),$$

де $f, g, h -$ неперервні функції двох аргументів у деяких обмежених областях, то така поверхня має нульовий об'єм.

Твердження 3. Якщо поверхня, що обмежує тіло Ф, складається зі скінченної кількості поверхонь нульового об’єму (наприклад із поверхонь твердження 2), то вона має нульовий об’єм.

У даній статті доводиться теорема про нульовий об’єм обмеженої лінійчатої поверхні.

Теорема. Всяка обмежена поверхня з рівнянням

$$\alpha\ x\ y+\beta\ x\ z+\gamma\ x\ \ =0,$$

де $\alpha\ x\ ,\beta\ x\ ,\gamma\ x\ \ \in \mathrm{C}_{\ a,b\ },\ \alpha^2\ x\ \ +\beta^2\ x\ \ =1$, має нульовий об’єм.

<u>Доведення:</u> Розглядувана поверхня є лінійчатою з твірними, паралельними площині yOz. Обмеженість означає, що ми розглядаємо частину цієї поверхні, що міститься в деякій кулі.

Якщо на відрізку $\ a,b\ $ принаймні одна з функцій $\alpha\ x$ чи $\beta\ x$ відмінні від нуля, доведення очевидне (див. твердження 2).

Розглянемо загальний випадок, коли на відрізку $\ a,b\ $ функції $\alpha\ x$ і $\beta\ x$ можуть набувати нульових значень яку завгодно кількість разів, не обов’язково скінченну.

Припустимо, що для всякого розбиття відрізка $\ a,b\ $, яким би малим не був його діаметр δ, існує такий відрізок $\ c,d\ $ цього розбиття, на якому і функція $\alpha\ x\ $, і функція $\beta\ x$ набувають нульових значень, тобто

$$\exists x_1 \in\ \ c,d\ ,\exists x_2 \in\ \ c,d\ ,x_1 \neq x_2 \colon \alpha\ x_1\ \ =0,\beta\ x_2\ \ =0.$$

Але тоді

$$\beta\ x_1\ \ =1,\ \alpha\ x_2\ \ =1.$$

Отже, для як завгодно малого $\delta>0$ маємо такі дві точки x_1 і x_2, що $\ x_1-x_2\ \ <\delta$, проте

$$\alpha\ x_2\ \ -\alpha\ x_1\ \ \ =1\ \text{ і }\ \beta\ x_2\ \ -\beta\ x_1\ \ \ =1.$$

Це суперечить рівномірній неперервності функцій $\alpha\ x$ і $\beta\ x$ (неперервні на $\ a,b\ $ функції є й рівномірно неперервними).

Одержане протиріччя доводить, що відрізок $\ a,b\ $ завжди можна розбити на скінченну кількість відрізків, на кожному з яких принаймні одна з функцій

$\alpha\ x$ чи $\beta\ x$ не дорівнює нулю.

На кожному з цих відрізків рівняння $\alpha\ x\ y+\beta\ x\ z+\gamma\ x\ \ =0$ допускає явний вигляд і відповідна частина поверхні має нульовий об’єм.

Отже, вся поверхня складається зі скінченної кількості поверхонь нульового об’єму і тому має нульовий об’єм.

Теорему доведено.

Література

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. / [Г. М. Фихтенгольц] ; пред. и прим. А. А. Флоринского. – [8-е изд.]. – Том 2. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.