УДК 004:[512.625.4+517.912+517.16.

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ КОМП'ЮТЕРА

Жалдак Андрій Володимирович,
аспірант Житомирського університету імені Івана Франка.

Анотація. У статті розглядаються питання, що стосуються дослідження функцій, рівнянь і нерівностей з параметрами на основі комп'ютеризованих обчислювальних експериментів у процесі навчання математики в старшій школі.

Ключові слова: функції, рівняння і нерівності з параметрами, комп'ютеризований обчислювальний експеримент, педагогічний програмний засіб Gran1.

Дослідження функцій, рівнянь і нерівностей з параметрами за допомогою комп'ютера дає можливість учням досить легко і швидко виконувати обчислювальні експерименти і на їх основі за чисельними і графічними методами знаходити принаймні наближені розв'язки досить складних задач, точні аналітичні розв'язки яких часто знайти неможливо. Така дослідницька діяльність значно посилює навчально-пізнавальні можливості учнів, їхній інтелектуальний потенціал, аналітичне і синтетичне мислення, робить навчально-пізнавальну діяльність досить привабливою й ефективною в плані інтелектуального розвитку учнів. Наразі слід підкреслити, що основним завданням і метою навчання учнів є розширення, поглиблення і зміцнення їхніх знань, формування загальнокультурних і предметних компетентностей, наукового світобачення, виховання в них людяності і гуманності, розвиток мислительної діяльності, уміння аналізувати різноманітні явища і процеси, вникати в їх сутність, з'ясовувати відповідні причинно-наслідкові зв'язки, робити відповідні причинно-наслідкові зв'язки, робити відповідні узагальнення і висновки, коректно їх формулювати і обґрунтовувати.

У зв'язку з цим слід підкреслити, що використання комп'ютера має бути педагогічно виваженим, основне його призначення — звільнити учнів від виконання рутинних операцій і дати їм можливість значно більше заглиблюватися в сутність досліджуваних явищ, осмислювати спостережені факти і пояснювати їх, за рахунок чого їхні знання ставатимуть значно ґрунтовнішими, міцнішими, фундаментальнішими, набуватимуть практичної значущості й узагальненості.

Є досить багато цікавих і захоплюючих задач, розв'язування яких приваблює увагу учнів і приносить неабияку користь у набутті ними різноманітних знань, зокрема і з математики.

До таких задач відносяться і задачі на дослідження функцій, рівнянь та нерівностей з параметрами. Особливо цікавим є аналіз таких задач за допомогою комп'ютеризованих обчислювальних експериментів.

Розглянемо деякі приклади таких задач.

Приклад 1. На площині задано k точок M_i, $i\in\overline{1,k}$, їхніми координатами (x_i,y_i), $i\in\overline{1,k}$, відповідно. Потрібно визначити на цій площині таку пряму, сума віддалей до якої від заданих точок буде найменшою порівняно з іншими прямими. Як відомо, рівняння прямої, що проходить через точку (x_0,y_0) і перпендикулярна до вектора (a,b), має вигляд $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, а віддаль до такої прямої від точки (x_i,y_i) визначається за формулою

$$d_i=\left|\frac{a(x_i-x_0)+b(y_i-y_0)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|. \quad (1)$$

Якщо рівняння прямої подано у вигляді $y=px+q$, тоді згідно з (1) віддаль від точки (x_i,y_i) до такої прямої буде визначатися за формулою

$$d_i=\left|\frac{px_i-y_i+q}{\sqrt{p^2+1}}\right|. \quad (2)$$

Отже, ля визначення шуканої прямої необхідно знайти пару чисел (p,q) таку, для якої функція $G(p,q)$ від двох аргументів p і q :

$$G(p,q)=\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{px_i-y_i+q}{\sqrt{p^2+1}}\right| \quad (3)$$

набуватиме найменшого значення. Очевидно, функція $G(p,q)$ може набувати лише невід'ємних значень. Для конкретних обчислень розглянемо такий приклад. Нехай задано чотири точки (1, 1), (2, −1), (3, 1), (4, −1). Для так заданих точок вираз (3) набуде вигляду

$$G(p,q)=\left|\frac{1p-1+q}{\sqrt{p^2+1}}\right|+\left|\frac{2p+1+q}{\sqrt{p^2+1}}\right|+\left|\frac{3p-1+q}{\sqrt{p^2+1}}\right|+\left|\frac{4p+1+q}{\sqrt{p^2+1}}\right|=$$
$$=\frac{|p-1+q|+|2p+1+q|+|3p-1+q|+|4p+1+q|}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Для відшукання точки (p,q), у якій функція $G(p,q)$ набуває найменшого значення, скористаємося програмою Gran1 [4].

Перепозначимо змінні p і q через x і y відповідно і введемо до розгляду неявно задану залежність між змінними x і y у вигляді $0=G(x,y)-P1$, де $P1$ — змінний параметр.

Скориставшись послугами програми Gran1, встановимо попередньо тип залежності між змінними «Неявна : $0=G(X, Y)$» (рис. 1) і введемо до вікна введення вираз

0=(Abs(x*1−1+y)+Abs(x*2+1+y)+Abs(x*3−1+y)+ +Abs(x*4+1+y))/Sqrt(x^2+1)−$P1$.

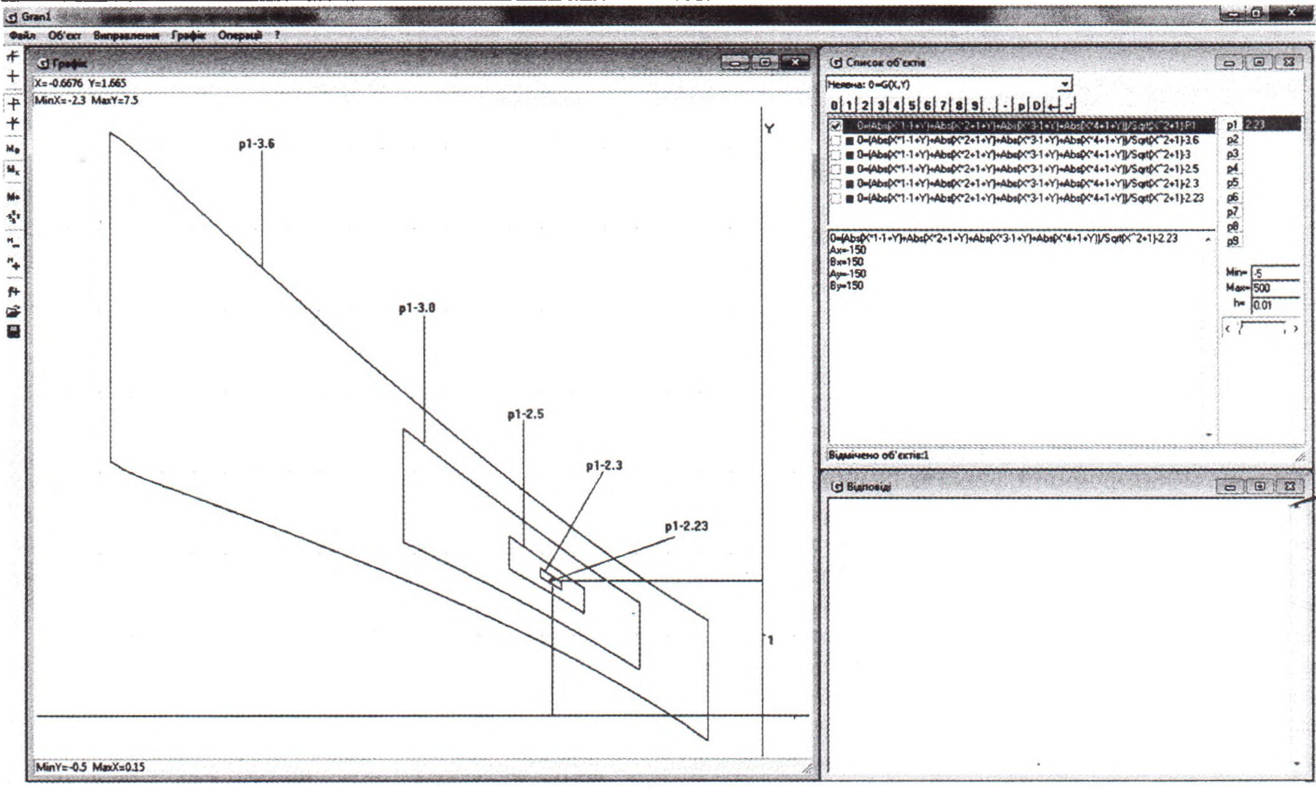

Рис. 1

Надавши змінним x та y довільних значень x_0, y_0, наприклад $X_0=0$, $Y_0=0$, обчислимо значення $G(X_0,Y_0)$ та покладемо $P1=G(X_0,Y_0)$ для того, щоб вираз $G(X_0,Y_0)-P1$ набував значення, рівного нулеві, тобто щоб мала місце рівність $G(X_0,Y_0)-P1=0$.

Очевидно, значення $P1=G(X,Y)$ не може бути від'ємним за будь-яких значень змінних X та Y.

Звернувшись далі до послуги **Графік/Побудувати**, одержимо лінію нульового рівняння функції $G(X,Y)-P1$, тобто множину точок, у кожній з яких вираз $G(X,Y)-P1$ набуває значення нуль за заданого значення параметра $P1$.

Дібравши межі $Min=$, $Max=$ та крок h зміни параметра $P1$ (див. рис. 1) і поступово зменшуючи значення параметра $P1$, будемо отримувати все нові й нові лінії нульового рівня функції $G(X,Y)-P1$. За необхідності зафіксувати графік залежності $G(X,Y)-P1=0$ за деякого значення параметра $P1$ досить звернутися до послуги програми Gran1 **Об'єкт/Новий об'єкт з зафіксованими параметрами**. На рис. 1 подано лінії нульових рівнів функції $G(X,Y)-P1$, коли параметр $P1$ набуває значень відповідно 3.6, 3.0, 2.5, 2.3, 2.23. За подальшого зменшення значення параметра $P1$ графік відповідної лінії нульового рівня функції $G(X,Y)-P1$ зникає, на екрані не будується жоден графік, якщо значення $P1$ менше, ніж 2.23. Це означає, що функція $G(X,Y)$ набуває найменшого значення, наближено рівного 2.23, у точках лінії нульового рівняння функції $G(X,Y)$ — 2.23. Як видно з рис. 1, остання лінія нульового рівня практично стягується в точку, координати якої наближено дорівнюють $X=-0.668$, $Y=1.665$.

Зауважимо, що лінія нульового рівня функції, наприклад $G(X,Y)-3.6$, охоплює множину точок, у яких виконується нерівність $G(X,Y)\leq 3.6$. Таким чином, використовуючи наведені міркування, можна знаходити множини розв'язків нерівностей виду $G(X,Y)\leq P1$.

На рис. 2 подано зображення точок $M1(1, 1)$, $M2(2, -1)$, $M3(3, 1)$, $M4\ (4, -1)$, та графік прямої $y=-0{,}668x+1.665$, сума віддалей до якої від заданих точок $M1$, $M2$, $M3$, $M4$ найменша порівняно з будь якими іншими прямими.

Таким чином дослідження такої досить складної задачі з використанням програми Gran1 стає доступним для учнів старших класів. Зрозуміло, що розв'язуючи подібні задачі, учні повинні володіти поняттям вектора, скалярного добутку векторів, норми вектора тощо, уміти побудувати математичну модель задачі і далі досліджувати її з використанням тих чи інших програмних засобів, зокрема Gran1.

Аналогічно можна відшукати наближений розв'язок задачі Штейнера, у якій на площині xOy необхідно знайти точку M, сума віддалей від якої до заданих k точок M_i, тобто,

$$\sum_{i=1}^{k}\rho(M,M_i) \text{ була б найменшою, де}$$

$$\rho(M,M_i)=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}, \ x \text{ і } y \text{ невідомі}$$

координати точки M, x_i і y_i — задані координати точки M_i, $i\in\overline{1,k}$ [4], а також дещо простішої задачі, у якій точку $M(x,0)$ необхідно знайти на осі Ox, тобто коли

$$\rho(M,M_i)=\sqrt{(x-x_i)^2+y_i^2}.$$

Приклад 2. Під час опрацювання результатів стохастичних експериментів досить часто доводиться визначати так званий надійний інтервал, який з наперед заданою ймовірністю, рівною, наприклад, 0.95, накриває невідомий параметр розподілу ймовірностей. Найчастіше в таких випадках доводиться визначати невідомі

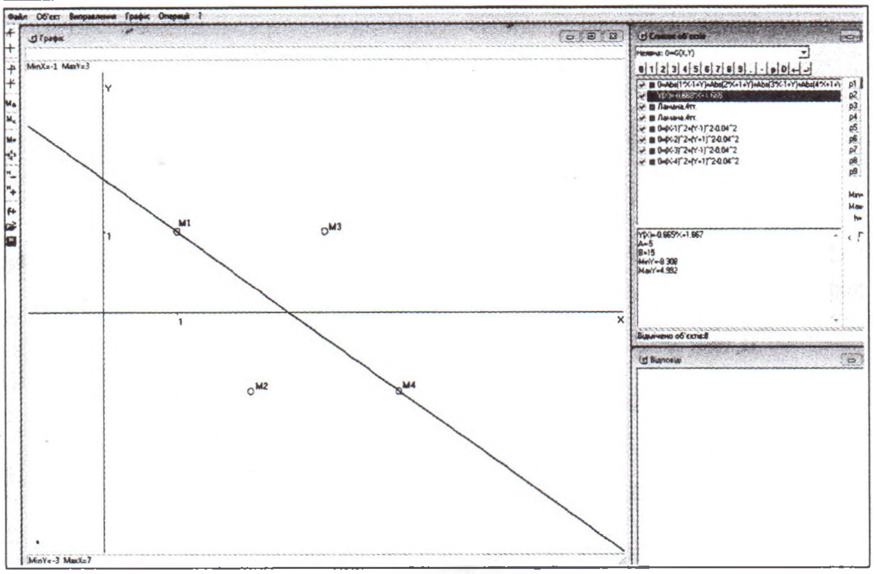

Рис. 2

межі проміжку $[-a, a]$, ймовірність попадання в який обчислюється за формулою [5]

$$P([-a,a]) = \int_{-a}^{a} f(x)dx,$$

де $f(x)$ — щільність центрованого і нормованого нормального розподілу ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

з параметрами $m=0$, $\sigma=1$, тобто

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Хоч первісної функції для розглядуваної функції $f(x)$ в скінченних виразах не існує (знайти невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ в скінченних виразах неможливо), разом з тим наближено межі інтегрування $-a$ та a такі, що

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

з достатньою точністю дорівнюватиме наперед заданому числу

$$P(-a,a),\ 0 \leq P([-a,a]) \leq 1,$$

$$P([-a,a]) \int_{-a}^{a} f(x)dx,$$

досить легко визначити за допомогою програми Gran1. Для цього досить (рис. 3) вказати тип залежності між змінними «Явна :$Y=Y(X)$», далі звернутись до послуги **Об'єкт/Створити** й у вікно **Введення виразу залежності**, що з'явиться, в рядку введення ввести вираз *1/Sqrt(2*Pi)*Exp(−x∧2/2)*. У разі необхідності побудувати графік заданої залежності між змінними X і Y слід звернутися до послуги **Графік/Побудувати.**

Для обчислення інтеграла

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

слід звернутися до послуги **Операції/Інтеграли/Інтеграл** і у додатковому вікні **Інтегрування**, що з'явиться (рис.3), вказати нижню (у рядку **A=**) та верхню (у рядку **B=**) межі інтегрування. Оскільки межі інтегрування такі, що

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

дорівнює наперед заданому числу, наприклад 0.95, невідомі, вкажемо нижню межу як $A=-P1$, а верхню як $B=P1$ (рис. 3).

Дібравши необхідним чином межі $Min=$, $Max=$ та крок h зміни параметра $P1$ і задавши спочатку довільне значення параметра $P1 \geq 0$ (нижню межу досить вказати рівною −5, а верхню межу рівною 5, оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-5}^{5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1),$$

зменшуючи чи збільшуючи в разі необхідності значення параметра $P1$ (зміщуючи повзунець відповідно вліво чи вправо, для чого досить встановити курсор мишки на стрілочку «<» чи «>» та натиснути ліву клавішу мишки), знайдемо, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-P2}^{P1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.95,$$

коли $P1=1.96$ (рис. 3). Таким способом за допомогою програми Gran1 знайдено наближений розв'язок рівняння

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-P2}^{P1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.95$$

відносно невідомої змінної $P1$.

Приклад 3. Нехай потрібно з'ясувати, за яких значень параметра a у рівнянні $a^x=\log_a x$ буде найбільша кількість розв'язків. Запропонувати якийсь аналітичний підхід до розв'язування даної задачі не вдається. Разом з тим, перепозначивши a через $P1$ та ввівши до розгляду явно задані залежності між змінними X і Y: $Y=P1\wedge X$, $Y=log(P1,X)$, $Y=X$, і задавши деяке початкове значення $P1$, наприклад $P1=2$, побудуємо графіки так заданих залежностей за допомогою програми Gran1. Експериментуючи за допомогою комп'ютера, будемо змі-

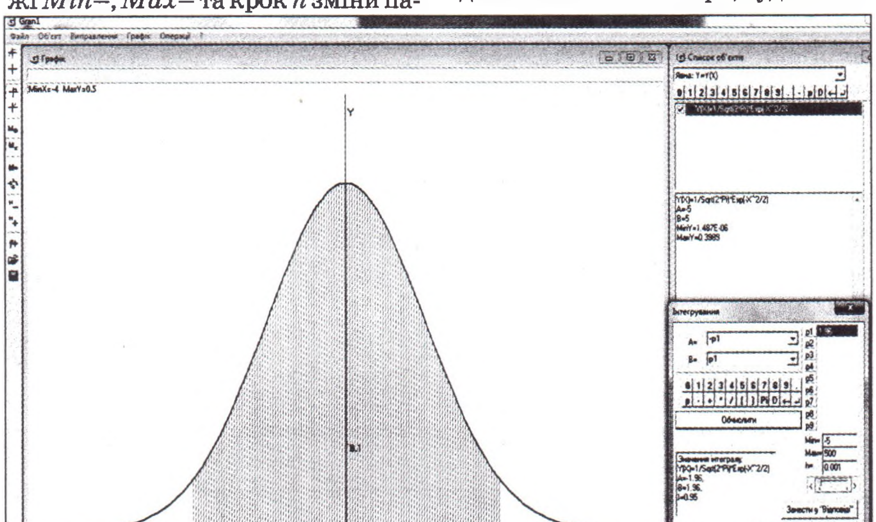

Рис. 3

нювати значення параметра $P1$, задавши відповідно межі $Min=$ і $Max=$ та крок $h=$ його зміни, і для кожного так одержаного значення параметра $P1$ будувати графіки вказаних функцій (за допомогою Gran1 із зміною параметра $P1$ графіки перебудовуються автоматично). У результаті одержимо, що коли

$$P1 > e^{\frac{1}{e}} \approx 1,4447,$$

де e=2,71828 — основа натуральних логарифмів

$$(e = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n),$$

тоді у рівнянні $P1=\log_{P1}x$ розв'язків немає (рис. 4). Коли

$$P1 = e^{\frac{1}{e}} \approx 1,4447,$$

тоді існує єдиний розв'язок рівняння $P1^x=\log_{P1}x$, а саме $x=e$ (рис. 5). Коли $P1$ знаходиться в межах від 1 до

$$e^{\frac{1}{e}} \approx 1,4447,$$

тобто виконується умова

$$1 < P1 < e^{\frac{1}{e}},$$

тоді у рівнянні $P1^x=\log_{P1}x$ буде два розв'язки (рис. 6). За умови

$$0,066 \approx \frac{1}{e^e} < P1 < 1$$

розв'язок буде один (рис. 7). Коли виконуватиметься умова

$$P1 < \frac{1}{e^e} \approx 0,066,$$

тоді розв'язків буде три (рис. 8).

Слід зауважити, що для коректного аналізу отриманих за допомогою комп'ютера результатів та їх обґрунтування й узагальнення учні повинні бути досить ґрунтовно обізнані з шкільним курсом математики, зокрема алгебри і початків аналізу, що необхідно, наприклад, для обґрунтування єдиності розв'язку за умови $P1=e^{1/e}$, чи того, що розв'язком є саме $x=e$, тощо.

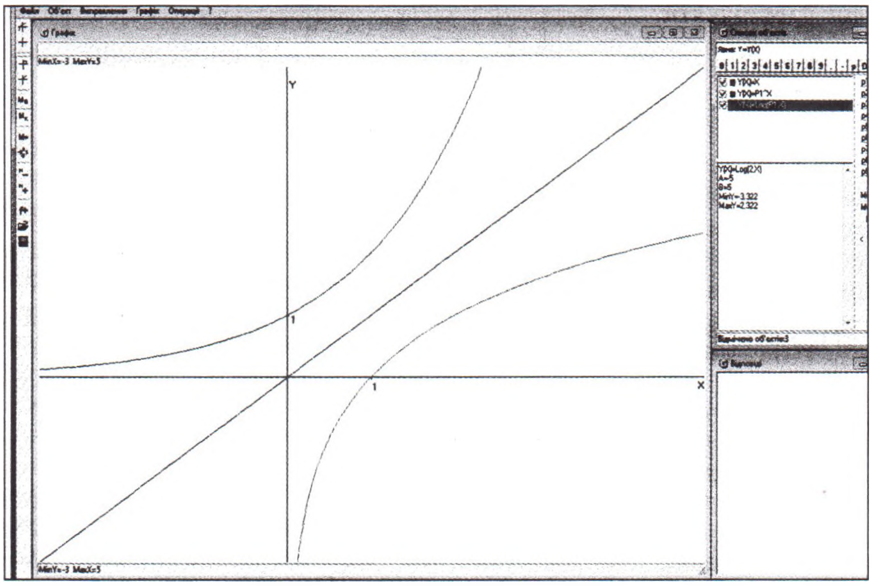

Рис. 4

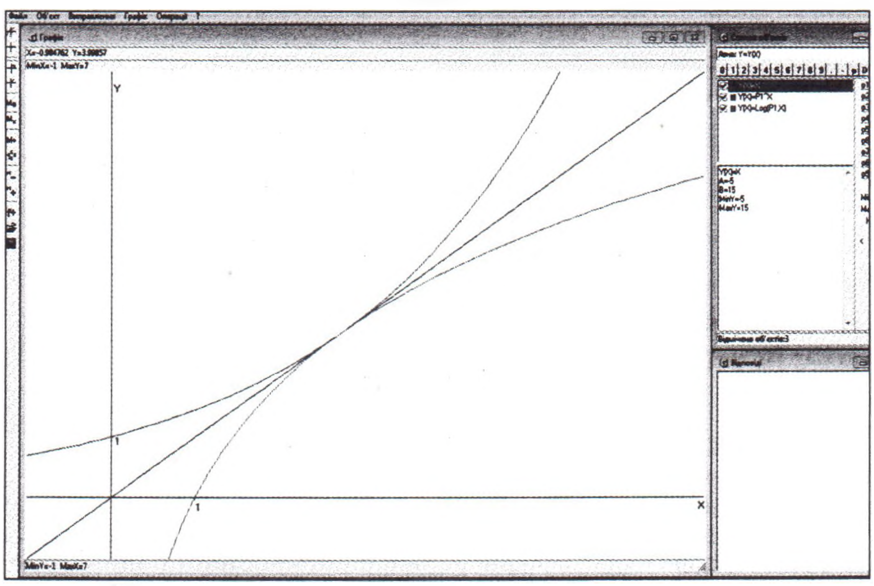

Рис. 5

Приклад 4. Нехай на деякому відрізку $[c,d]\supset[a,b]$ задано функцію $y=f(x)$. Потрібно визначити, за якої кількості k часткових інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ таких, що $a_i=a_{i-1}+h$,

$$\bigcup_{i=1}^{k}[a_{i-1}, a_i) = [a,b), \text{ різниця}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\max_{x\in[a_{i-1},a_i)} f(x)h - \sum_{i=1}^{k}\min_{x\in[a_{i-1},a_i)} f(x)h =$$

$$= h\sum_{i=1}^{k}(\max_{x\in[a_{i-1},a_i)} f(x) - \min_{x\in[a_{i-1},a_i)} f(x))$$

не перевищуватиме наперед заданого числа $\varepsilon>0$. Нехай

$y=f(x)$=cos(sin(cos(*sqrt*(exp(x))))), a=0, b=4, ε=0.1.

Звернувшись до послуг програми Gran1, уведемо явно задану залежність

(X)=Cos(Sin(Cos(Sqrt(Exp(X))))) між змінними X і Y, вказавши відрізок задання A=−5, B=15 (рис. 9), та побудуємо графік так заданої залежності.

Далі звернемось до послуги **Операції/Інтеграли/Суми Дарбу** й у додатковому вікні **Інтегрування**, що з'явиться, вкажемо межі інтегрування A=0, B=4, а в рядку **Інтервали** вкажемо параметр $P1$. Оскільки $P1$ — це кількість інтервалів $[a_{i-1},a_i)$, на які ділиться проміжок інтегрування, то крок h зміни параметра $P1$ має бути цілим числом. Покладемо h=1 і задамо деяке початкове значення параметра $P1$, поклавши, наприклад $P1$=7. У такому разі одержимо $MinI\approx3.1$, $MaxI\approx3.7$, $MaxI-MinI\approx3.7-3.1=0.6>0.1$. Збільшуючи поступово значення $P1$ (кількість відрізків $[a_{i-1},a_i)$ поділу відрізка $[a, b)$ на часткові відрізки $[a_{i-1},a_i)$), знайдемо, що $MaxI-MinI$ буде не перевищувати 0.1, коли $P1$ набуде значення не меншого, ніж 55 (рис. 9).

Приклад 5. На відрізку (−15;15) задано функцію

y=cos(sin(cos(*sqrt*(exp(x)))))−0.5.

Потрібно знайти січну, яка проходить через точку з абсцисою

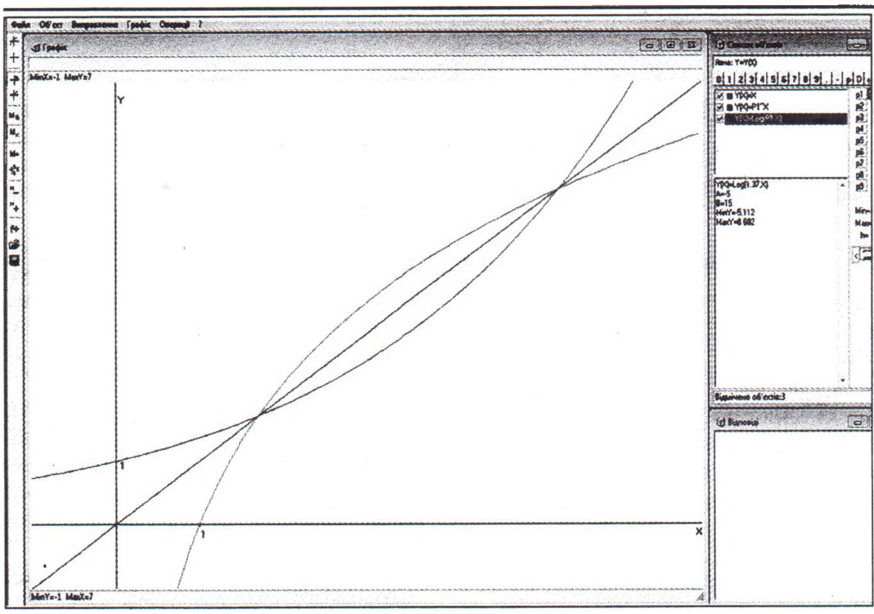

Рис. 6

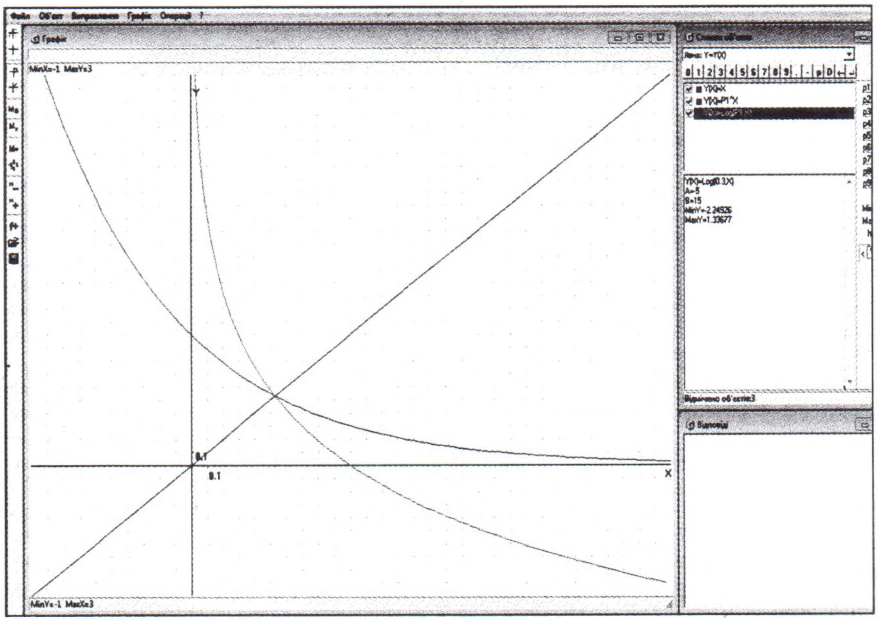

Рис. 7

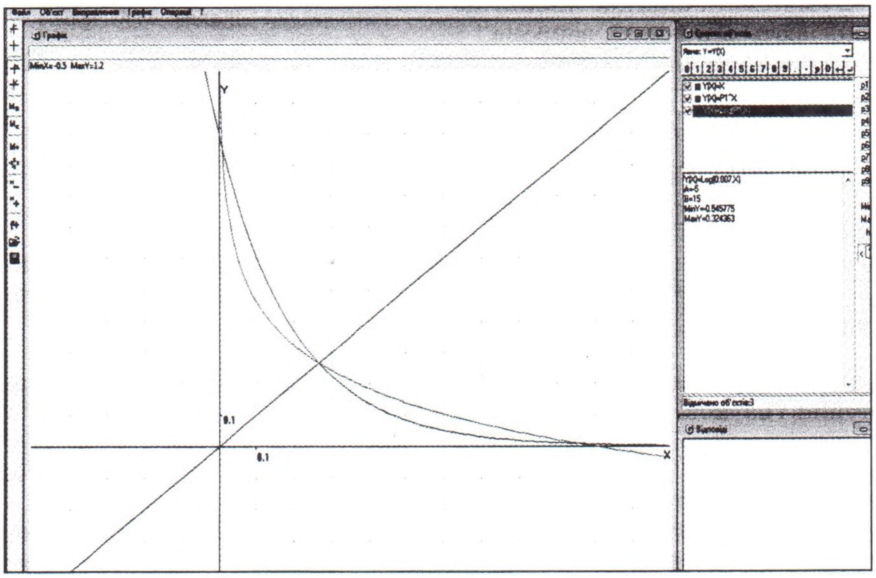

Рис. 3

$x=-3$ на графіку такої функції й утворює якомога більший кут з віссю Ox, а також точку на графіку функції між точками, у яких вказана січна перетинається з графіком функції, таку, дотична в якій паралельна до вказаної січної.

Для відшукання розв'язку задачі звернемося до послуг, передбачених в програмі Gran1. Вказавши тип залежності «Явна: $Y=Y(x)$» між змінними X і Y, у рядку **Введення виразу залежності** уведемо заданий вираз (рис. 10) і побудуємо графік заданої залежності, вказавши **Масштаб користувача** MinX=–4, MaxX=5, MinY=–0.1, MaxX=0.7 (рис. 10). Далі звернемося до послуги **Операції/Похідна** й у допоміжному вікні **Похідна**, що з'явиться, у рядку **X=** вкажемо $P1$, у рядку **ΔX=** вкажемо $P2$ (де $P1$, $P2$ — змінні параметри), задамо деякі початкові значення параметрів $P1$ і $P2$ і нижню **Min=** та верхню **Max=** межі та крок **h=** зміни параметрів, а також поставимо відмітку «$\vee$» проти напису «Будувати січну». На початку доцільно вказати $P1=-3$ ($X=P1$ — абсциса точки, через яку має проходити січна). Добираючи відповідне значення $P2$ ($\Delta X=P2$ — різниця абсцис точок, через які проходить січна), знайдемо, що найбільшого значення, рівного 0.0845, відношення $\Delta Y/\Delta X$ — кутовий коефіцієнт січної набуває, коли $\Delta X=P2$ набуває значення 3.74 (рис. 10)

Звернувшись до послуги «Залишити слід», зафіксуємо на графіку положення знайденої січної, і перейдемо до відшукання на графіку заданої функції точки, у якій дотична до графіка функції буде паралельна до знайденої раніше січної. Для цього знімемо мітку «$\vee$» проти напису «Будувати січну» і поставимо її проти напису «Будувати дотичну». Далі будемо змінювати параметр $P1$, добираючи його значення (абсцису точки дотику $X=P1$) таким, щоб кутовий коефіцієнт дотичної $y'(x)$ набув значення 0.0845 — значення кутового коефіцієнта побудованої раніше січної.

Добираючи, як і раніше, відповідне значення параметра $P1$, знайдемо, що значення 0.0845 кутовий коефіцієнт дотичної набуває тоді, коли $P1=-0.928$, тобто абсциса то-

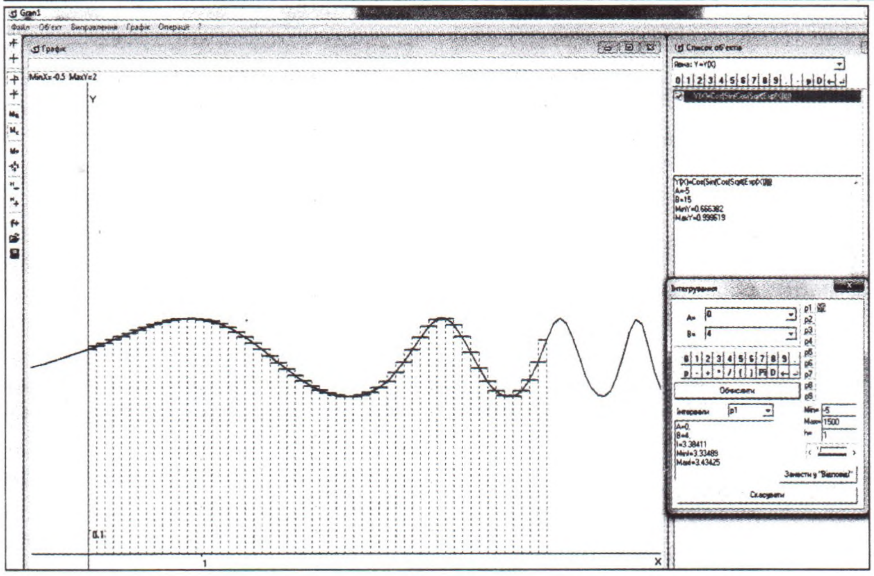

Рис. 9

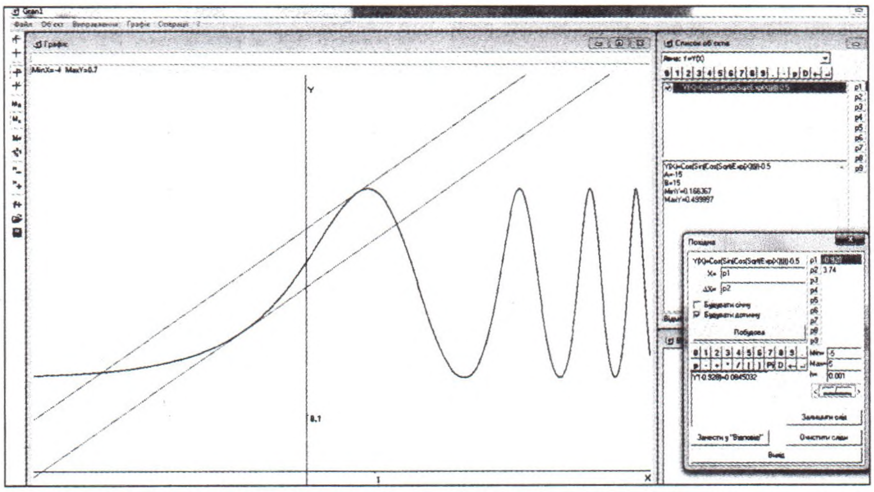

Рис. 10

чки дотику шуканої дотичної має бути рівною -0.928 (див. рис. 10).

Слід зауважити, що хоч комп'ютерні експерименти з використанням програмних засобів типу Gran1 є достатньо доступними для учнів, разом з тим для конкретного проведення таких експериментів і правильного пояснення сутності отримуваних результатів учні повинні мати досить ґрунтовні знання з математичних дисциплін, що вивчаються в школі, зокрема і з алгебри та початків аналізу.

* * *

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы, касающиеся исследования функций, уравнений и неравенств с параметрами на основе компьютеризированных вычислительных экспериментов в процессе обучения математике в старшей школе.

Ключевые слова: функции, уравнения и неравенства с параметрами, компьютеризированный вычиелительный эксперимент, педагогическое программное средство Gran1.

* * *

Annotation. The article deals with issues related research functions, equations and inequalities with parameters based on computerized numerical experiments in teaching mathematics at the secondary school.

Keywords: functions, equations and inequalities with parameters computerized computational experiment, teaching software tool Gran1.

Література

1. *Амелькин В. В., Рабцевич В. Л.* Задачи с параметрами: Справ, пособие по математике.— 3-е изд. доработ. — Мн. : ООО "Асар", 2004. — 464 с.
2. *Прокофьев А. А.* Задачи с параметрами: пособие по математике для учащихся старших классов — М.: МИЭТ, 2004. - 258 с.
3. *Ляшенко Б. М., Кривонос О. М., Вакалюк Т. А.* Методи обчислень. — Житомир. ЖДУ імені І. Франка. 2014. - 228 с.
4. *ЖалдакМ. І, Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф.* Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. — 3-тє вид. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015.-313 с.
5. *Жалдак М. І, Кузьміна Н. М., Михалін Г. О.* Теорія ймовірностей і математична статистика : дідручник для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів. Видання третє, перероблене і доповнене / М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін. — Київ . НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015 — 705 с.