Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка
Кафедра фізики

Застосування матричного апарату при розв'язуванні задач з фізики

Дипломна робота

Студентки 52 групи

Фізико-математичного факультету

Севастьянова Олена Василівна

(спец.: «Фізики і математика»)

Науковий керівник:

Кандидат фізико-математичних наук,

Доцент кафедри фізики

Грищук Віктор Валентинович

Житомир – 2017

Анотація

Дипломний проект містить 47 сторінок, 2 розділи, висновки, список використаної літератури

При утворенні зведених матриць Дірака, визначенні моменту інерції при конкретному розподілі мас, знаходженні власних значень функцій і власних ортонормованих векторів використовувалася теорія з матричного апарату.

Зміст

Вступ

При розв’язуванні задач з теоретичної фізики ми часто маємо справу із таблицями чисел, які називаються матрицями. За допомогою матриць зручно розв’язувати системи лінійних рівнянь, знаходити власні значення функцій і відповідні власні вектори, а також безпосередньо виконувати різноманітні операції з векторами.

Актуальність теми нашого дослідження зумовлена:

- ✓ Низьким рівнем і формальністю знань з матричного аналізу;
- ✓ Невмінням застосовувати знання з матричного аналізу при розв’язуванні задач з теоретичної фізики.

Актуальність проблеми та її недостатня розробленість зумовили вибір теми дослідження: ***«Застосування матричного апарату під час розв’язку задач з фізики».***

Мета роботи – показати застосування матричного апарату при розв’язуванні задач в теоретичній фізиці, а саме при утворенні зведених матриць Дірака; визначенні моменту інерції при конкретному розподілі мас; знаходженні власних значень функцій і власних ортонормованих векторів.

Об’єкт дослідження – задачі з теоретичної фізики, де застосовується матричний аналіз.

Предмет дослідження – зведені матриці Дірака; матриця моменту імпульсу; власні значення функцій і власні ортонормовані вектори.

Відповідно до предмета та мети визначено ***основні завдання даної роботи:***

- підібрати матеріал з матричного аналізу, який можна використовувати у теоретичній фізиці;
- показати варіанти розв’язування задач з теоретичної фізики.

Робота складається з вступу, двох розділів (теоретична і практична частина), висновку і списку використаних джерел. Перший розділ містить теоретичний матеріал з матричного апарату, який необхідний при розв’язуванні задач з теоретичної фізики; другий розділ містить приклади розв’язування задач з теоретичної фізики за допомогою матричного аналізу.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

1.1 Матриці та їх властивості

Матрицю можна означити як квадратну або прямокутну таблицю чисел або функцій, які підкоряються означеним умовам. Ми розглянемо числами (або функціями), які складають квадратну або прямокутну таблицю. Для зручності числам (функціям) присвоєні два індекси, перший вказує номер рядка, а другий номер стовпчика, яким належить дане число.

Наприклад a_{13} – матричний елемент першого рядка і третього стовпчика.

Тому матрицю А з 3 рядків і n стовпчиків записують у вигляді:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Кожен матричний елемент a_{ij} не являється комбінацією інших елементів. Матрицю не можна ототожнювати з визначником, який дорівнює простому числу, матриця – це таблиця впорядкованих чисел. Тому втрачає всякий сенс операція додавання (множення) всіх матричних елементів a_{ij} з яким-небуть числом.

Властивості матриць:

1) **Рівність матриць.**

Матриці А і В рівні тоді і тільки тоді, коли $a_{ij}=b_{ij}$ при довільних і та j (при цьому припускають, що А та В мають однакове число рядків і однакове число стовпчиків).

2) **Додавання матриць.**

А + В = С в тому і тільки в тому випадку, якщо $a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$ при довільних і та j (додавання матриць відбувається за звичайними законами алгебри або арифметики, якщо в якості елементів виступають прості числа). Це означає, що А + В = В + А, тому додавання володіє властивістю комутативності, крім того виконується і асоціативний закон: (А + В) + С = А + (В + С).

3) **Множення на скаляр**

Під множенням матриці A на скаляр має властивість α розуміють операцію $\alpha \cdot A=(\alpha \cdot A)$, елементами матриці $\alpha \cdot A$ служать $\alpha \cdot a_{ij}$, тобто кожен елемент матриці A множиться на скалярний множник.

Множення матриці на скаляр також має властивість комутативності:

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha \qquad (2)$$

4) Множення матриць

Матриця C є добутком матриць A і B:

$$A \cdot B = C \qquad (3)$$

В тому і тільки в тому випадку, коли $c_{ij}=\sum_k a_{ij} \cdot b_{ij}$

Елемент матриці C з індексом ij утворений як скалярний добуток i-го рядка матриці A з j-тим стовпчиком матриці B (при цьому вимагається, щоб число стовпчиків матриці A співпадало з числом рядків матриці B). німий індекс k пробігає усі значення 1, 2, 3, …, n.

Тобто для n = 3:

$$c_{ij}=a_{i1} \cdot b_{1j}+a_{i2} \cdot b_{2j}+a_{i3} \cdot b_{3j} \qquad (4)$$

Німий індекс k можна замінити на будь-який інший, який ще не використовувався, рівняння (3) від цього не зміниться. Рівняння (4) фіксує спосіб множення заданих матриць, цей спосіб називають матричним множенням.

Наприклад, розглянемо дві матриці:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 \cdot 1+1 \cdot 0 & 0 \cdot 0+1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1+0 \cdot 0 & 1 \cdot 0+0 \cdot (-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

З рівняння (3) маємо:

$$\sigma_2 \cdot \sigma_1=-\sigma_1 \cdot \sigma_2 \qquad (8)$$

Отже, операція множення матриць не комутативна (за винятком спеціальних випадків).

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Справедливі відповідно асоціативний і дистрибутивний закони:

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \qquad (9)$$

1.2 Визначники. Властивості визначників

Визначник записують у вигляді квадратної таблиці чисел або функцій, яка складається з n рядків і n стовпчиків.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \cdots \end{vmatrix} \qquad (10)$$

Величина n називається порядком визначника.

Виражений через свої елементи визначник має вигляд:

$$D=\sum\nolimits_{i,j,k} \delta_{ijk}\cdots a_i\cdot b_j\cdot c_k \qquad (11)$$

- ✓ δ_{ijk} – дорівнює «+1» для парного числа перестановок індексів (1, 2, 3, …, n);
- ✓ δ_{ijk} – дорівнює «-1» для непарного числа перестановок;
- ✓ δ_{ijk} – дорівнює «0» у випадку повторення двох індексів.

Для визначника третього порядку:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

Рівняння (10) має вигляд:

$$D=+a_1\cdot b_2\cdot c_3-a_1\cdot b_3\cdot c_2+a_2\cdot b_3\cdot c_1-a_2\cdot b_1\cdot c_3+a_3\cdot b_1\cdot c_2-a_3\cdot b_2\cdot c_1 \qquad (13)$$

Отже, визначник третього порядку являє собою лінійну комбінацію із трьох множників. Кожен добуток містить один елемент з кожного рядка і з кожного стовпчика. Даний добуток додатній, якщо число перестановок, яким досягнуто порядок індексів в цьому добутку парне та від’ємний, якщо число перестановок непарне (відносно перестановки стовпчиків a, b, c або чисел 1, 2, 3).

1.3 Представлення визначника за допомогою мінорів

Рівняння (13) можна переписати так (розклад Лапласа):

$$D = a_1 \cdot (b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2) - a_2 \cdot (b_1 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_1) + a_3 \cdot (b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1) =$$

$$= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

Визначник n-го порядку можна представити у вигляді лінійної комбінації добутків елементів довільного рядка (або довільного стовпчика) і визначник (n-1) – го порядку, який утворюється викреслюванням і-го рядка та j-го стовпчика, на перехресті яких стоїть елемент a_{ij} визначника.

Отриманий таким чином визначник (n-1) –го порядку називають мінором і позначають M_{ij}.

Мінор, який береться зі знаком $(-1)^{i+j}$ називають алгебраїчним доповненням до елемента, який знаходиться на перехресті a_{ij}, і позначають C_{ij}.

Рівняння (13) перепишеться так:

$$D = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} \cdot a_i \cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot C_{ij} \quad (15)$$

Розподіл у даному випадку, проведено по першому стовпчику, j = 1, а сумування відбувається по і. Дане представлення називають розподілом Лапласа. Ним зручно користуватися, коли потрібно оцінити визначник високого порядку, в яких більше число елементів дорівнює нулю.

1.4 Антисиметрія

Визначник міняє знак на протилежний, якщо поміняти місцями довільні два рядки або довільні два стовпчики – ця властивість анти симетричності слідує із парно-непарного характеру множника δ в рівнянні (11); зрозуміліше це видно з рівнянь (12), (13). Ним часто користуються у квантовій фізиці при записі хвильової функції системи багатьох частинок, яка у відповідності з принципом Паулі повинна бути антисиметрична при перестановці довільних двох однакових частинок зі спіном $\frac{1}{2}$ (електрони, протони, нейтрони і т.д.)

Твердження:

1) Визначник з двома рівними рядками (стовпчиками) дорівнює нулю;
2) Якщо кожен елемент у рядку (стовпчику) дорівнює нулю, то визначник також дорівнює нулю;
3) Якщо всі елементи рядка (стовпчика) помножити на деяку сталу, то весь визначник помножиться на ту ж саму сталу;
4) Значення визначника не зміниться, якщо до елементів одного із його рядків (стовпчиків) додати відповідні елементи другого рядка (стовпчика), помножені на деяку сталу.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + k \cdot b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + k \cdot b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + k \cdot b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

Використаємо розподіл Лапласа

$$\begin{vmatrix} a_1 + k \cdot b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + k \cdot b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + k \cdot b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

За властивостями антисиметрії другий визначник в правій частині дорівнює нулю.

1.5 Розв'язок системи однорідних рівнянь

Одне з головних застосувань визначників пов'язане із знаходженням умов нетривіального розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь.

Нехай маємо систему трьох однорідних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z = 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z = 0 \\ a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Потрібно встановити, чи має дана система довільний відмінний від тривіального $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ розв'язок.

Утворимо визначник з коефіцієнтів системи (18), помножимо на x і скористаємось твердженням 4:

$$x \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \cdot x & b_1 & c_1 \\ a_2 \cdot x & b_2 & c_2 \\ a_3 \cdot x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z & b_1 & c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z & b_2 & c_2 \\ a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (19)$$

В останньому визначнику кожен елемент першого стовпчика за (18) дорівнює нулю.

$$x \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (20)$$

Отже, можна зробити висновок, що для існування нетривіального розв'язку системи рівнянь (17) визначник, який складається з коефіцієнтів цієї системи повинен дорівнювати нулю і навпаки, можна показати, якщо визначник, який складається з коефіцієнтів деякої системи, дорівнює нулю, то ця система повинна мати нетривіальний розв'язок.

1.6 Деякі спеціальні матриці

Матриця складається з одного стовпчика і з n рядків, вона називається вектор-стовпчиком $\{x\}$ з компонентами x_i, i = 1, 2, 3, …, n.

Якщо матриця складається з одного рядка, який має n елементів, вона називається вектор-рядком $[x]$ з компонентами x_i, i = 1, 2, 3, …, n.

Якщо A являє собою квадратну $n \times n$ матрицю і при цьому задані n – компонентний вектор-стовпчик $\{x\}$ і n – компонентний вектор-рядок $[x]$, то $A\{x\}$ і $[x]A$ означені рівнянням (3), в цей час як $A\{x\}$ і $[x]A$ не мають сенсу.

Одинична матриця в якості матричних елементів має символ Кронекера δ_{ij}. Її властивості такі, що $I \cdot A = A \cdot I = A$ для довільних A.

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{vmatrix} \qquad (21)$$

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то така матриця називається ***нульовою*** або ***нуль-матрицею*** і позначається символом O. Для всіх A маємо OA = AO = O, оскільки

$$O = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{vmatrix} \qquad (22)$$

У результаті множення двох не нульових матриць можна отримати нульову матрицю.

Наприклад, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad (23)$$

То AB = 0.

1.7 Діагональні матриці

Маємо один важливий спеціальний випадок, коли в квадратній матриці всі недіагональні елементи дорівнюють нулю.

Наприклад, для матриці 3×3:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix} \qquad (24)$$

Діагональні матриці комутують, тобто $A \cdot B = B \cdot A$, якщо A і B діагональні.

1.8 Ортогональні матриці

Загальний трьохвимірний простір можна описати, використовуючи добре відомі Декартові координати *x, y, z*. Розглянемо другу систему декартових координат x', y', z', початок якої збігається з початком першої системи, а вісі орієнтовані інакше.

Напрямні косинуси

Одиничний вектор, напрямлений по осі $x'(i')$, можна розкласти на компоненти цього вектора вздовж осі *x, y, z*.

$$i'=i\cdot\cos(x',x)+j\cdot\cos(x',y)+k\cdot\cos(x',z) \qquad (25)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}\cos(x',x)&=a_{11}\\ \cos(x',y)&=a_{12} \qquad (26)\\ \cos(x',z)&=a_{13}\end{aligned}$$

І відповідно:

$$\begin{matrix} \cos(y',x)=a_{21} \quad (a_{21}\neq a_{12}) \\ \cos(y',y)=a_{22} \end{matrix} \text{ і т.д.} \qquad (27)$$

Тепер рівняння (25) і аналогічні вирази для *j, k* переписуються у вигляді:

$$\begin{cases} i'=i\cdot a_{11}+j\cdot a_{12}+k\cdot a_{13} \\ j'=i\cdot a_{21}+j\cdot a_{22}+k\cdot a_{23} \\ k'=i\cdot a_{31}+j\cdot a_{32}+k\cdot a_{33} \end{cases} \qquad (28)$$

З іншої сторони, можна виразити вектори через їх компоненти у перевернутій системі координат:

$$\begin{cases} i = i' \cdot a_{11} + j' \cdot a_{12} + k' \cdot a_{13} \\ j = i' \cdot a_{21} + j' \cdot a_{22} + k' \cdot a_{23} \\ k = i' \cdot a_{31} + j' \cdot a_{32} + k' \cdot a_{33} \end{cases} \qquad (29)$$

Переставивши індекс 1 у відповідність векторам *i* та i', та індекс 2 – векторам *j* та j', а індекс 3 - векторам *k* та k' (рис. 1), помічаємо, що в кожному випадку перший a_i індекс, відноситься до одиничних векторів перевернутої системи i', j', k', а другий – до векторів першої системи.

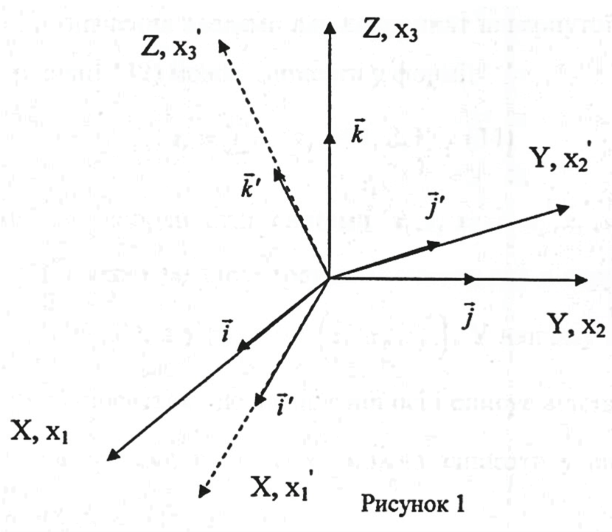

Рисунок 1

Вектори

Якщо розглядати вектор, компоненти якого являються функціями положення в просторі, то

$$V(x, y, z)=i\cdot V_x+j\cdot V_y+k\cdot V_z=V'(x', y', z')=i'\cdot V'_x+j'\cdot V'_y+k'\cdot V'_z \quad (30)$$

Оскільки точку в просторі можна задати як за допомогою координат *x, y, z* так і за допомогою координат x', y', z'. Підставивши замість *I, j, k* їх вирази з (29) можна розбити рівняння (30) на три окремих рівнянь:

$$\begin{cases} V'_{x'}=a_{11}\cdot V_x+a_{12}\cdot V_y+a_{13}\cdot V_z \\ V'_{y'}=a_{21}\cdot V_x+a_{22}\cdot V_y+a_{23}\cdot V_z \\ V'_{z'}=a_{31}\cdot V_x+a_{32}\cdot V_y+a_{33}\cdot V_z \end{cases} \quad (31)$$

Ці співвідношення виконуються і для координат точки (*x, y, z)* і (x', y', z'):

$$\begin{cases} x'=a_{11}\cdot x+a_{12}\cdot y+a_{13}\cdot z \\ y'=a_{21}\cdot x+a_{22}\cdot y+a_{23}\cdot z \\ z'=a_{31}\cdot x+a_{32}\cdot y+a_{33}\cdot z \end{cases} \quad (32)$$

Зручно позначити координати цієї точки наступним чином:

$$x\to x_1, y\to x_2, z\to x_3 \quad (33)$$

Аналогічні позначення введемо для координат повернутої системи. Тоді систему трьох рівнянь (32) можна записати у формі:

$$x'_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\cdot x_j, i=1,2,3 \quad (34)$$

Розглянемо дві координатні системи x_1, x_2, x_3 і x'_1, x'_2, x'_3 з спільним центром відліку і деякою заданою третьою точкою, яка в нерухомій системі має координати (x_1, x_2, x_3), а в рухомій (x'_1, x'_2, x'_3). У нашому випадку одна і таж буква *x* відноситься і до квадратної осі і описує відстань вздовж цієї осі. Оскільки дана система лінійна, x'_i можна записати у вигляді лінійної комбінації змінних x_i:

$$x'_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\cdot x_j \quad (35)$$

Тут коефіцієнти a_{ij} можна ототожнити з напрямними косинусами.

Якщо в двох системах координат задані два набори величин (V_1, V_2, V_3) і (V'_1, V'_2, V'_3), пов’язані між собою законом, аналогічним закону (35).

$$V'_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\cdot V_j \quad (36)$$

То величини (V_1, V_2, V_3) являють собою компоненти вектора.

З рівняння (34) можна дістати цікаву інформацію про коефіцієнти a_{ij}, які характеризують орієнтацію координатної системи (x'_1, x'_2, x'_3) відносно системи (x_1, x_2, x_3). Відстань від початку відліку до заданої точки однакова в обох системах. Розглянемо для зручності квадрат відстані.

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i x_i'^2 = \sum_i \left(\sum_i a_{ij} \cdot x_j\right) \cdot \left(\sum_k a_{ik} \cdot x_k\right) = \sum_{j,k} x_j \cdot x_k \cdot \sum_i a_{ij} \cdot a_{ik} \qquad (37)$$

Останнє справедливе для всіх точок в тому випадку, якщо

$$\sum_i a_{ij} \cdot a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3 \qquad (38)$$

Перевірити цю умову можливо, підставивши у рівняння (37) значення *x* = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0) і т. д. Цю процедуру ми маємо прави робити так, як рівняння (37) повинне виконуватися для всіх *x* з даного набору a_{ij}. Таким чином, умова (38) потребує, щоб довжина залишалася сталою (інваріантною) при повороті системи координат, ця умова називається умовою ортогональності. Елементи a_{ij} утворюють матрицю А. Слід зауважити, що в (34) немає ніякого перемноження матриць. Скоріше його можна пояснити як скалярне множення двох стовпчиків матриці А. У матричній формі рівняння (34) має вигляд:

$$\{x'\} = A \cdot \{x\} \qquad (39)$$

Умови ортогональності, двовимірний випадок

Щоб краще уявити собі суть елемента a_{ij} і зрозуміти умову ортогональності, потрібно дослідити поворот двовимірної системи.

Геометрична постановка (рис.1)

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cdot \cos\varphi + x_2 \cdot \sin\varphi \\ x'_2 &= -x_1 \cdot \sin\varphi + x_2 \cdot \cos\varphi \end{aligned} \qquad (40)$$

Відповідно, з врахуванням (39)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (41)$$

З цього рисунка видно, що

$$a_{11}=\cos\left(x_1^{'}, x_1\right), \quad a_{12}=\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}\text{-}\varphi\right)=\cos\left(x_1^{'}, x_2\right), \ldots.. \qquad (42)$$

Порівняння (41) і (42) показує, що матричні елементи співпадають із напрямними косинусами. Умова ортогональності у даному випадку зводиться до рівнянь.

$$\begin{matrix} \sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1 \\ \sin\varphi\cdot\cos\varphi=0 \end{matrix} \qquad (43)$$

1.9 Обернена матриця A^{-1}

Обернену матрицю означають формулою

$$\{x\}=A^{-1}\cdot\left\{x^{'}\right\} \qquad (44)$$

Матриця A^{-1} описує поворот назад, який описується матрицею A, і повертає координатну систему у її початкове положення. Комбінація символів рівнянь (39) і (44) дає:

$$\{x\}=A^{-1}\cdot A\cdot\{x\} \qquad (45)$$

Оскільки $\{x\}$ довільний, то

$$A^{-1}\cdot A=1 \qquad (46)$$

Аналогічно

$$A\cdot A^{-1}=1 \qquad (47)$$

1.10 Транспонована матриця $\bar{A}$

Елементи введеної оберненої матриці $\bar{A}$ можна означити з допомогою умови ортогональності (38). Це протирічить даному означенню добутку матриць, але дане протиріччя можна позбутися, якщо ввести нову матрицю A, таку що:

$$\overline{a_{ıȷ}}=a_{ij} \qquad (48)$$

Матриця, яка складається з елементів a_{ij} називається транспонованою ($\bar{A}$). Як видно, вона відрізняється від A заміною рядків на стовпчики. Тепер умову ортогональності (38) можна переписати у новій формі:

$$\bar{A} \cdot A = I \qquad (49)$$

Дану умову можна взяти у якості означення ортогональності матриць. Помноживши (49) на A^{-1}справа, отримаємо з допомогою (47):

$$\bar{A} = A^{-} \qquad (50)$$

Обернена матриця рівна транспонованій матриці тільки для ортогональних матриць. Помножимо (49) на A зліва:

$$\bar{A} \cdot A = I \qquad (51)$$

Або

$$\sum_{i} a_{ij} \cdot a_{ki} = \delta_{jk} \qquad (52)$$

Тому ці границі називаються ортогональними.

Нехай у загальній формі

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

Де матричні елементи a_{ij} представляють собою косинуси кутів між $x_i^{'}$ та x_j.

Відповідно a_{11}, a_{12}, a_{13} – напрямні косинуси, які характеризують положення осі $x_1^{'}$ відносно осей x_1, x_2, x_3 і визначають одиницю довжини вздовж осі $x_i^{'}$, тобто одиничний вектор

$$i^{'} = i \cdot a_{11} + j \cdot a_{12} + k \cdot a_{13}$$

Умова ортогональності (52) просто встановлює, що одиничні вектори $i^{'}, j^{'}, k^{'}$ взаємно перпендикулярні або ортогональні. Задана ортогональна матриця A переводить одну ортогональну систему координат в іншу ортогональну систему.

Інверсія не ортогональної матриці (якщо тільки утворена матриця існує) визначена рівнянням (46) або еквівалентним їй рівнянням (47). Необхідні і достатні умови існування оберненої матриці заключаються в тому, щоб вихідна матриця мала розміри n×n і щоб її визначник був відмінний від нуля.

Необхідно відмітити, що до цих пір підхід до матриць був подвійним: вони розглядалися з допомогою компонентного представлення і як дещо єдине ціле. Кожен із цих підходів має свої переваги.

Розглянемо $(S \cdot T)^{-1}$, де ST – матриця, яка має обернену матрицю.

Тоді зрозуміло, що

$$(S \cdot T)(S \cdot T)^{-1} = I \qquad (53)$$

Помножимо зліва це рівняння послідовно спочатку на S^{-1}, а потім на T^{-1}, звідси

$$(S \cdot T)^{-1} = T^{-1} \cdot S^{-1} \qquad (54)$$

Таким чином, інверсія добутку матриць рівна добутку обернених матриць. Цей результат легко узагальнити на довільну кількість множників.

З другої сторони, оцінку $(\overline{\overline{S} \cdot \overline{T}})$ краще проводити, використовуючи компоненти представлення. Відповідно означенню транспонування,

$$U_{ij} = \sum_j S_{ij} \cdot t_{jk} = \sum \overline{t_{jk}} \cdot \overline{S_{jı}} \qquad (55)$$

Але

$$U_{ik} = \overline{U_{kı}} \qquad (56)$$

Тому попереднє рівняння можна записати у вигляді

$$(\overline{\overline{S} \cdot \overline{T}}) = \overline{T} \cdot \overline{S} \qquad (57)$$

Відповідно, у результаті транспонування добутку двох матриць, перемножених в оберненому порядку. Замітимо, що ні в одному з двох приведених прикладів не потрібно було, щоб S або T були ортогональними.

Властивості симетрії

Для визначення властивостей симетрії користуються транспонованою матрицею. Якщо

$$A = \overline{A}, \text{ тобто } a_{ij} = a_{ji} \qquad (58)$$

То матриця називається симетричною. Якщо ж

$$A=-\overline{A}, \text{ тобто } a_{ij}=-a_{ji} \qquad (59)$$

То вона називається антисиметричною, і її діагональні елементи рівні нулю. Легко побачити, що довільну матрицю можна записати у вигляді суми симетричної і антисиметричної матриці. Розглянемо твердження:

$$A=\frac{1}{2}\cdot[A+\overline{A}]+\frac{1}{2}\cdot[A-\overline{A}] \qquad (60)$$

Тут матриця $[A+\overline{A}]$ симетрична, а $[A-\overline{A}]$ - антисиметрична.

Послідовні повороти, множення матриць. Повернемося знову до ортогональних матриць і розглянемо поворот системи, заданий матрицею А:

$$\{x'\}=A\cdot\{x\} \qquad (61)$$

І наступний поворот, заданий матрицею В, такий що

$$\{x\}=B\cdot\{x'\} \qquad (62)$$

У компонентній формі це запишеться так:

$$x_i''=\sum_j b_{ij}\cdot x_j'=\sum_j b_{ij}\cdot\sum_k a_{jk}\cdot x_k=\sum_k\left(\sum_j b_{ij}\cdot a_{jk}\right)\cdot x_k \qquad (63)$$

Сума по індексу j означає множення матриць, в результаті якого отримуємо нову матрицю С = А·В, таку що

$$x_i''=\sum_k c_{ik}\cdot x_k \qquad (64)$$

Ми знову бачимо, що множення матриць корисне, а це вже саме по собі виправдовує введення такої операції. Фактично множення двох матриць означає подвійний поворот, який переводить початкову систему координат у нову. Таким чином ми ставимо у відповідність поворот системи координат, який міняє компоненти фіксованого вектора (вектор залишається нерухомим при повороті системи). Однак рівняння (61) можна інтерпретувати і як поворот вектора у протилежному напрямку.

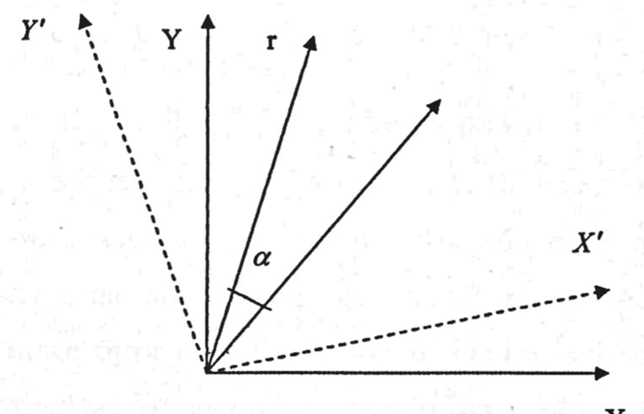

Рисунок 2

Припустимо, що A переводить вектор r у нове положення r_1.

$$r_1 = A \cdot r \qquad (65)$$

Далі з допомогою матриці проведемо поворот системи координат, при якому $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$:

$$B \cdot r_1 = B \cdot r \cdot A = B \cdot A \cdot (B^{-1} \cdot B) \cdot r = (B \cdot A \cdot B^{-1}) \cdot B \cdot r \qquad (66)$$

Де $B \cdot r_1$ є r_1 у новій системі координат, те ж саме справедливо і для $B \cdot r$. Відповідно в цій системі $(B \cdot r)$ в результаті дії матриці $B \cdot A \cdot B^{-1}$ повернутий у положення $(B \cdot r_1)$ (іншими словами, у новій системі, координати якої відповідають повороту, який заданий матрицею B) матриця A рівна:

$$A' = B \cdot A \cdot B^{-1} \qquad (67)$$

Перетворення подібності. Перетворення задане виразом (62), в якому B – довільна матриця, не обов'язково ортогональна, відоме як перетворення подібності. В компонентній формі воно запишеться як:

$$a'_{ij} = \sum_{k,i} b_{ik} \cdot a_{ki} \cdot b^{-1}_{ij} \qquad (68)$$

Якщо ж B – ортогональна матриця, то

$$b^{-1}_{ij} = \overline{b_{ıj}} = b_{ij} \qquad (69)$$

$$a'_{ij} = \sum_{ki} b_{ik} \cdot b_{ji} \cdot a_{ki} \qquad (70)$$

1.11 Зв'язок із тензорами

Рівняння (70) визначає тензор другого рангу. Відповідно, матриця, що перетворюється ортогональними перетвореннями подібності є по визначенню тензор. Тоді очевидно, що довільна ортогональна матриця А, яка викликає поворот вектора, може бути названа тензором. Однак, ми маємо справу з ортогональною матрицею, матричними елементами якої служать фіксовані напрямні косинуси, які визначають нову орієнтацію координатної системи, то така матриця не визначає тензорного перетворення.

Симетрія і антисиметрія зберігається при ортогональних перетвореннях подібності. Нехай задана симетрична матриця А, тобто $A = \overline{\mathrm{A}}$ і крім того,

$$\mathrm{A}' = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}^{-1} \quad (71)$$

Тоді в силу ортогональності В:

$$\overline{\mathrm{A}'} = \overline{\mathrm{BA}} \cdot \mathrm{B}^{-1} = \overline{\mathrm{B}^{-1}} \cdot \overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B}^{-1} \qquad (72)$$

Але $A = \overline{\mathrm{A}}$, тому

$$\overline{\mathrm{A}'} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}^{-1} = \mathrm{A}' \qquad (73)$$

Звідси, видно, що симетрія матриці зберігається при ортогональному перетворенню подібності.

1.12 Ермітові і унітарні матриці

Означення

До цих пір ми припускали, що матричні елементи суттєві. У більшості питань класичної фізики припущення про суттєвість матричних елементів повністю достатньо. Одначе у квантовій механіці внаслідок виду основних комутативних відношень (або форми рівнянь Шредінгера) не являються комплексні змінні. У зв'язку з цим узагальнимо матричний аналіз на випадок комплексних матричних елементів. Введемо наступні означення:

1. Комплексно-спряжена матриця А' отримується при компексному спряженні і→-і кожного матричного елемента;
2. Матриця A^{+} отримується при транспонуванні A^{*}

$$A^+ = \overline{A^*} = \overline{A^*} \quad (74)$$

3. Матриця A ермітовна (або спряжена), якщо

$$A = A^+ \quad (75)$$

В квантовій механіці (або в матричній механіці) матриці зазвичай ермітовні.

4. Матриця U унітарна, якщо

$$U^+ = U^{-1} \quad (76)$$

Поняття унітарності служить дальшим розвитком ортогональності матриць.

Якщо підвергнута перетворенню подібності матриця унітарна, то перетворення називається унітарним:

$$A' = U \cdot A \cdot U^+ \quad (77)$$

Покажемо, що добуток двох унітарних матриць унітарний. Нехай матриці U_1 таU_2унітарні. Тоді

$$I = (U_1 \cdot U_2) \cdot (U \cdot U)^{-1} = U_1 \cdot U_2 \cdot U_1^{-1} \cdot U_2^{-1} = U_1 \cdot U_2 \cdot U_1^+ \cdot U_2^+ \quad (78)$$

Оскільки операція приєднання співпадає з транспонуванням (за виключенням комплексного спряження); то

$$(U_1 \cdot U_2)^+ = U_2^+ \cdot U_1^+ \quad (79)$$

Підставивши (74) в (73), отримаємо:

$$I = (U_1 \cdot U_2) \cdot (U_1 \cdot U_2)^+ \quad (80)$$

Помножимо це співвідношення на $(U_1 \cdot U_2)^{-1}$ зліва

$$(U_1 \cdot U_2)^{-1} = (U_1 \cdot U_2)^+ \quad (81)$$

Отриманий результат і доказує наше твердження.

Матриці Паулі

В релятивістській теорії електрона широко використовуються комплексні 4×4 матриці. Розглянемо спочатку трьох 2 ×2 матриць Паулі.

$$\widetilde{\delta_1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\delta_2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\delta_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Матриці Паулі введені для описання частинок зі спіном $\frac{1}{2}$ (нерелятивіська теорія). Легко показати, що вони задавольняються відношенням:

$$\widetilde{\delta_i}\cdot\widetilde{\delta_j}+\widetilde{\delta_j}\cdot\widetilde{\delta_i}=2\cdot\widetilde{\delta_{ij}}\cdot I \text{ – антикомутація} \quad (83)$$

$$\widetilde{\delta_i}\cdot\widetilde{\delta_j}=i\cdot\widetilde{\delta_k} \text{ – циклічна перестановка індексів} \quad (84)$$

$$(\widetilde{\delta_i})^2=I \quad (85)$$

Матриці Дірака

В 1927 році Дірак доповнив три матриці Паулі одиничною матрицею і отримав набір чотирьох антикомутативних матриць, який являється повним в тому сенсі, що довільну постійну 2 ×2 матрицю M можна записати як

$$M=C_0\cdot I+C_1\cdot\widetilde{\delta_1}+C_2\cdot\widetilde{\delta_2}+C_3\cdot\widetilde{\delta_3} \quad (86)$$

Де C_0, C_1, C_2, C_3 постійні. Відомо, що система матриць Паулі була неповною, оскільки не було четвертої анти комутуючої матриці. Можна показати, що 3×3 матриці не можуть утворити повного набору чотирьох анти комутуючих матриць.

Звернемося знову до 4 ×4 матриць і створимо повний набір з матриць Паулі. Позначимо

$$\widetilde{\delta_i}=\begin{pmatrix} \widetilde{\delta_i} & 0 \\ 0 & \widetilde{\delta_i} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{p_1}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (87)$$

Кожен матричний елемент цих матриць представляє собою 2 ×2 матрицю. Наприклад

$$\widetilde{\delta_1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \widetilde{p_1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (88)$$

Спочатку Дірак вибрав набір наступних чотирьох матриць:

$$\widetilde{a_i}=\widetilde{\delta_i}\cdot\widetilde{p_i}, \quad \widetilde{a_4}\equiv\widetilde{p_3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, i=1, 2, 3 \quad (89)$$

Якщо добавити матрицю $\widetilde{p_2}$, задану у вигляді

$$\tilde{p}=\begin{pmatrix}0 & -iI\\ iI & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\\ i & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\end{pmatrix} \quad (90)$$

Тоді можна сказати, що ці 4×4 матриці задовольняють відношенням

$$\tilde{\delta}_i\cdot\tilde{\delta}_j+\tilde{\delta}_j\cdot\tilde{\delta}_i=2\cdot\widetilde{\delta_{ij}}\cdot I \text{ – антикомутація} \quad (91)$$

$$\tilde{p}_i\cdot\tilde{p}_j+\tilde{p}_j\cdot\tilde{p}_i=2\cdot\widetilde{p_{ij}}\cdot I$$

$$\tilde{\delta}_i\cdot\tilde{p}_j-\tilde{p}_j\cdot\tilde{\delta}_i=[\tilde{\delta}_i,\tilde{p}_j]=0 \text{ - комутація} \quad (92)$$

$$I\ \tilde{\delta}_i\cdot\tilde{\delta}_j=i\cdot\widetilde{\delta_k},\ \tilde{p}_i\cdot\tilde{p}_j=i\cdot\widetilde{p_k} \text{- циклічна перестановка індексів} \ (93)$$

В таблиці 1 (практичної частини) зведені матриці Дірака, у творені перемноженням розглянутих матриць. Позначимо 4×4 матриці Дірака $E_{ij}=\tilde{p}_i\cdot\tilde{\delta}_j$. Маємо на увазі, що $\widetilde{p_0}=\widetilde{\delta_0}=I$ (одинична матриця), можна сказати, що індекси i, j =0, 1, 2, 3.

Ці шістнадцять матриць володіють цікавими властивостями:

1. $E_{ij}^2=I$
2. $E_{ij}=E_{ij}^+$, тобто всі ці три матриці ермітовні, і відповідно, на основі властивості 1, унітарні;
3. Шістнадцять матриць E_{ij} майже утворюють математичну групу (в результаті множення двох довільних із цих матриць утворюється третя, яка належить тому ж набору матриць, з точністю до множника ± 1 або $\pm i$);
4. Всі матриці E_{ij}лінійно незалежні, тобто ні одну з них не можна представити у вигляді лінійної комбінації решти 15 матриць.
5. Шістнадцять матриць E_{ij} утворюють повну систему, тобто довільну 4×4 матрицю (зі сталими елементами) можна записати у вигляді лінійної комбінації шістнадцяти матриць.

$$A=\sum_{i,j=0}^{3} c_{ij}\cdot E_{ij} \quad (94)$$

Де коефіцієнти c_{ij} (натуральні або комплексні) сталі.

Набори антикомутуючих матриць

Із вказаних шістнадцяти ермітових матриць можна отримати шість наборів антикомутуючих матриць по п'ять матриць в кожному. Використовуючи позначення таблиці 1 запишемо ці набори:

1. $\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, \widetilde{a_3}, \widetilde{a_4}, \widetilde{a_5}$
2. $\widetilde{\gamma_1}, \widetilde{\gamma_2}, \widetilde{\gamma_3}, \widetilde{\gamma_4}, \widetilde{\gamma_5}$
3. $\widetilde{\delta_1}, \widetilde{\delta_2}, \widetilde{\delta_3}, \widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}$
4. $\widetilde{a_1}, \widetilde{\gamma_1}, \widetilde{\delta_1}, \widetilde{\delta_2}, \widetilde{\delta_3}$
5. $\widetilde{a_2}, \widetilde{\gamma_2}, \widetilde{\delta_2}, \widetilde{\delta_1}, \widetilde{\delta_3}$
6. $\widetilde{a_3}, \widetilde{\gamma_3}, \widetilde{\delta_3}, \widetilde{\delta_1}, \widetilde{\delta_2}$

На ряду з набором $\tilde{a}$ – матриць в релятивіській квантовій механіці широко використовуються $\tilde{\gamma}$ – матриці. Дальший розвиток матричний аналіз отримав у сучасній теорії елементарних частинок. На основі матриць Паулі і Дірака можна побудувати спіни, які використовуються в теорії електронів, протонів і інших частинок зі спіном $\frac{1}{2}$. Поворот системи координат описується груповою поворотів Д, яка складається зазвичай у матриць, елементи яких залежать від кутів, які визначають дані повороти. Дуже плідним виявилося застосування спеціальної унітарної групи SU(n) в теорії важких частинок – мезонів і бозонів.

Діагоналізація матриць

Матриця моменту інерції

У багатьох задачах фізики, потрібне застосування матричного аналізу для приведення матриць до діагональної форми, потрібно провести ортогональне перетворення подібності або унітарне перетворення, яке всі недіагональні матричні елементи робить нулями. Проілюструємо цей метод на відомому прикладі матриці моменту інерції J твердого тіла. За означенням моменту кількості руху,

$$L = J \cdot \omega \quad (96)$$

Де ω – кутова швидкість. Діагональні елементи J рівні

$$J_{xx}=\sum_{i} m_i \cdot \left(r_i^2 - x_i^2\right) \qquad (97)$$

Індекс і відноситься до m_i. Для недіагональних елементів маємо

$$J_{xy}=-\sum_{i} m_i \cdot x_i \cdot y_i = J_{yx} \qquad (98)$$

Перевірка показує, що матриця J симетрична. Крім того, оскільки J входить у рівняння (86), яке справедливе для довільних орієнтацій системи координат, її можна вважати тензором.

Задача заключається тепер у тому, як орієнтувати координатні осі в просторі, що J_{xy} і інші недіагональні елементи стали нульовими. Наслідком і ознакою такої орієнтації є паралельність векторів кутової швидкості і моменту кількості руху в тому випадку, якщо кутова швидкість напрямлена вздовж однієї з таких переорієнтованих осей.

Геометричне тлумачення – еліпсоїд

Помножимо матрицю J зліва і справа на одиничний вектор змінного напрямку $n = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$[n] \cdot J \cdot \{n\} = I \qquad (99)$$

Тут I – число величина якого залежить від вибору напрямку n.

Виконаємо множення:

$$I = J_{xx} \cdot \alpha^2 + J_{yy} \cdot \beta^2 + J_{zz} \cdot \gamma^2 + 2 \cdot J_{xy} \cdot \alpha \cdot \beta +$$
$$+2 \cdot J_{xz} \cdot \alpha \cdot \gamma + 2 \cdot J_{yx} \cdot \beta \cdot \gamma \qquad (100)$$

Введемо позначення, де

$$\rho = n \cdot \sqrt{I} \qquad (101)$$

Де ρ – змінюється за числовим значенням і напрямком. Тоді рівняння (101) прийме загальну форму еліпсоїда

$$1 = J_{xx} \cdot \rho_1^2 + J_{yy} \cdot \rho_2^2 + J_{zz} \cdot \rho_3^2 + 2 \cdot J_{xy} \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 +$$
$$+2 \cdot J_{xz} \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 + 2 \cdot J_{yx} \cdot \rho_1 \cdot \rho_3 \qquad (102)$$

У змінних $\rho_1, \ \rho_2, \ \rho_3$.

З аналітичної геометрії відомо, що координатні осі можна повернути таким чином, щоб вони співпадали з головними осями.

Тоді

$$1=J_1\cdot\rho_1'^2+J_2\cdot\rho_2'^2+J_3\cdot\rho_3'^2 \qquad (103)$$

Де $\rho_1', \rho_2', \rho_3'$ утворюють новий набір координат.

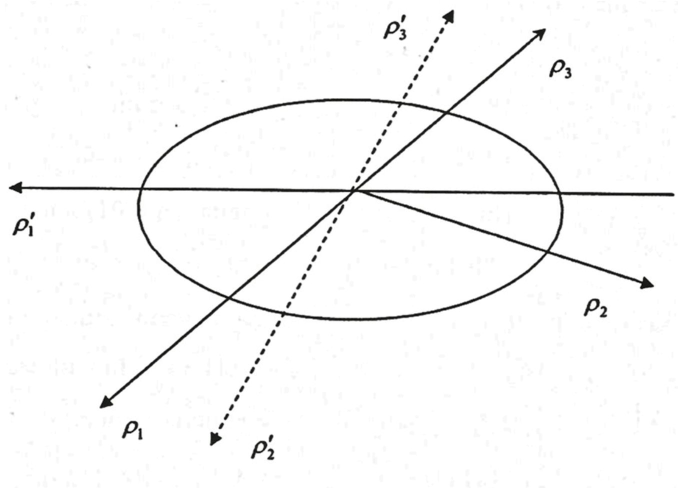

Рисунок 3

Ермітові матриці

Розглянемо важливу теорему про діагональні елементи і головні осі. В рівнянні

$$A\cdot r=\lambda\cdot r \qquad (104)$$

Число λ (скаляр) – власне значення, відповідний вектор r – власний вектор. Ми покажемо зараз, що якщо A – ермітова матриця, то її власні значення явні, а власні вектори ортогональні.

Нехай λ_i, λ_j – відповідні значення, r_i, r_j- відповідні власні вектори ермітової матриці A.

Тоді

$$A\cdot r_i=\lambda_i\cdot r_i \qquad (105)$$

$$A\cdot r_j=\lambda_j\cdot r_j \qquad (106)$$

Помножимо рівняння (106) на r_j^+:

$$r_j^+\cdot A\cdot r_i=\lambda_i\cdot r_i\cdot r_j^+ \quad (107)$$

r – вектор стовпчик

r^+- вектор рядок

Рівняння (101) помножимо на r_i^+:

$$r_i^+ \cdot A \cdot r_j = \lambda_j \cdot r_j \cdot r_i^+ \quad (108)$$

Застосуємо до цього рівняння операцію комплексного спряження:

$$r_j^+ \cdot A^+ \cdot r_i = \lambda_j^* \cdot r_j^+ \cdot r_i \quad (109)$$

Або в силу ермітовності A,

$$r_j^+ \cdot A^+ \cdot r_i = \lambda_j^* \cdot r_j \cdot r_i \quad (110)$$

Підставивши (109) в рівняння (107), отримаємо

$$(\lambda_i - \lambda_j^*) \cdot r_j^+ \cdot r_i = 0 \quad (111)$$

Це відношення носить загальний характер і виконується для всіх можливих комбінацій і та j. Покладемо спочатку I = j.

Тоді з останнього рівняння маємо

$$(\lambda_i - \lambda_j^*) \cdot |r_i|^2 = 0 \quad (112)$$

Оскільки, $|r_i|=0$ являє собою тривіальний розв'язок рівняння (107), ми маємо право записати, що

$$\lambda_i = \lambda_i^* \quad (113)$$

Тобто λ_i^* - натуральні числа при довільних і.

У випадку $i \neq j$ і $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$(\lambda_i - \lambda_j) \cdot r_j^+ \cdot r_i = 0 \quad (114)$$

$$r_j^+ \cdot r_i = 0 \quad (115)$$

А це означає, що власні вектори, які відповідають різним власним значенням, ортогональні; рівняння (115) служить узагальненням властивості ортогональності та комплексний простір.

Якщо $\lambda_i = \lambda_j$ (виняток), r_i – не може автоматично бути ортогональним r_j, але його можна зробити ортогональним. Звернемося знову до матриці моменту інерції. Якщо x_i співпадає з віссю обертання симетрії, то $\lambda_2 = \lambda_3$. Два власних вектора r_2, r_3 перпендикулярні до осі симетрії r_1, однак їх положення довільне у площині перпендикулярній r_1; таким чином довільна лінійна комбінація r_2, r_3 – також власний вектор.

Розглянемо $a_2 \cdot r_2 + a_3 \cdot r_3$, де a_2, a_3 – сталі.

Тоді

$$A \cdot (a_2 \cdot r_2 + a_3 \cdot r_3) = a_2 \cdot \lambda_2 \cdot r_2 + a_3 \cdot \lambda_3 \cdot r_3 = \lambda_2 (a_2 \cdot r_2 + a_3 \cdot r_3) \quad (116)$$

Що і потрібно було чекати, так як x_i – вісь обертання симетрії. Відповідно, якщо r_1, r_2 фіксовані r_3 можна просто вибрати перпендикулярним r_2 який лежить у площині, яка перпендикулярна r_1. Все, про що говорилося вище, представляє собою теорему існування. Для знаходження власних значень λ_i і власних векторів r_i звернемося до рівняння (104). Припускаючи, що r помножений на одиничну матрицю, перепишемо рівняння (104):

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot r = 0 \quad (117)$$

Тут I – одинична матриця. Ми отримали систему однорідних лінійних рівнянь. Вона має нетривіальний розв'язок тільки в тому випадку, якщо визначник з коефіцієнтами цієї системи дорівнює нулю.

$$|A - \lambda \cdot I| = 0 \quad (118)$$

Зупинимося на випадку, коли A представляє собою матрицю з дев'яти елементів. Тоді

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (119)$$

Це рівняння часто використовують в астрономії, тому його називають секулярним або віковим рівнянням. Вираз (119) зводиться до кубічного рівняння відносно λ, яке звичайно має три корені. Із (112) ми знаємо, що ці корені натуральні. Підставляючи конкретні значення коренів з рівняння (119), можна знайти відповідні власні вектори.

Діагоналізація

Для отримання матриці перетворення, яка приводить ермітову матрицю А до діагонального вигляду, можна скористатися рівняннями, які були введені при доведенні теореми єдності.

Нехай R матриця створена з трьох ортонормованих векторів стовпчиків r_1, r_2, r_3, і розташованих у потрібному порядку,

$$R=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \quad (120)$$

У якій кожен стовпчик $[x_i, y_i, z_i]$ являє собою власний вектор r_i. Оскільки $r_i^+ \cdot r_j = \delta_{ij}$ (120) матриця R унітарна (або просто ортогональна, якщо А і, відповідно, r_i натуральні). Тоді, перетворюючі R^+AR, маємо

$$R^+AR=\begin{pmatrix} [r_1^*] \\ [r_2^*] \\ [r_3^*] \end{pmatrix} \cdot \lambda \cdot (\{r_1\}\{r_2\}\{r_3\}) = \begin{pmatrix} [r_1^*] \\ [r_2^*] \\ [r_3^*] \end{pmatrix} \cdot (\{\lambda \cdot r_1\}\{\lambda \cdot r_2\}\{\lambda \cdot r_3\}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (121)$$

Звідси видно, що R^+AR – діагональна матриця з власними значеннями λ_i, порядок власних значень відповідає порядку вектор-стовпчиків r_i і R. Щоб дати геометричне тлумачення, візьмемо в якості прикладу натуральну (симетричну) матрицю А з натуральними власними значеннями і власними векторами. Матриця R відповідає B^{-1} з рівняння (62) або, що краще $\vec{R}$ відповідає B; $\vec{R}$ складається з власних векторів r_i, записаних у вигляді вектор-рядків:

$$\begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ [r_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (122)$$

Далі, рядок $[b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}]$, який визначає одиничний вектор r_i в початковій системі координат, задає три напрямні косинуси, які характеризують положення r_i відносно осей цієї системи. Оскільки В здійснює поворот системи координат, причому у новій системі матриця А діагональна, нова система визначається із допомогою трьох власних векторів $\mathrm{r_i} = (\mathrm{x}_1, y_1, z_1)$. Вони є одиничними векторами, напрямленими вздовж головних осей, тобто тих осей, відносно яких матриця A діагональна.

Для матриці 3×3 процес діагоналізації є дуже важким, тому краще застосувати обчислювальні машини інтеграційні методи.

РОЗДІЛ II. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ФІЗИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЧНОГО АПАРАТУ

2.1 Отримаємо зведені матриці Дірака, за допомогою математичних дій.

$$\mathrm{I}\cdot\mathrm{I}=\mathrm{I}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I}\cdot\overline{\delta_1}=\overline{\delta_1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I}\cdot\overline{\delta_2}=\overline{\delta_2}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I}\cdot\overline{\delta_3}=\overline{\delta_3}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I}\cdot\overline{\mathrm{p}_1}=\overline{\mathrm{p}_1}=\text{-}\overline{\gamma_5}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathrm{p}_1} \cdot \overline{\delta_1} = \overline{\mathrm{a}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0 \\ 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathrm{p}_1} \cdot \overline{\delta_2} = \overline{\mathrm{a}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+0\cdot i+1\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot(-i)+0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot i & 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot(-i)+0\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot i+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot(-i)+0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot i & 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot(-i)+1\cdot 0 \\ 1\cdot 0+0\cdot i+0\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot(-i)+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot i & 1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot(-i)+0\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot i+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot(-i)+1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot(-i)+0\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathrm{p}_1} \cdot \overline{\delta_3} = \overline{\mathrm{a}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot(-1)+1\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0+1\cdot0+0\cdot(-1) \\ 0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot(-1)+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0+0\cdot0+1\cdot(-1) \\ 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot(-1)+0\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot0+0\cdot(-1) \\ 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot(-1)+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot0+0\cdot0+0\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{p_2}\cdot I=\overline{p_2}=\overline{\alpha_5}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{p_2}\cdot\overline{\delta_1}=\overline{\gamma_1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0\cdot0+0\cdot1+(-i)\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+(-i)\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0+(-i)\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot0+0\cdot0+(-i)\cdot1+0\cdot0 \\ 0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0+(-i)\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0+(-i)\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0+0\cdot0+i\cdot1 & 0\cdot0+0\cdot0+0\cdot1+i\cdot0 \\ (-i)\cdot0+0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & (-i)\cdot1+0\cdot0+0\cdot0+0\cdot0 & (-i)\cdot0+0\cdot0+0\cdot0+0\cdot1 & (-i)\cdot0+0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0 \\ 0\cdot0+(-i)\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+(-i)\cdot0+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+(-i)\cdot0+0\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot0+(-i)\cdot0+0\cdot1+0\cdot0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{p_2}\cdot\overline{\delta_2}=\overline{\gamma_2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0\cdot 0+0\cdot(-i)+i\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot i+0\cdot 0+i\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+i\cdot 0+0\cdot(-i) & 0\cdot 0+0\cdot 0+i\cdot i+0\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot(-i)+0\cdot 0+i\cdot 0 & 0\cdot i+0\cdot 0+0\cdot 0+i\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+i\cdot(-i) & 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot i+i\cdot 0 \\ (-i)\cdot 0+0\cdot(-i)+0\cdot 0+0\cdot 0 & (-i)\cdot i+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & (-i)\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot(-i) & (-i)\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot i+0\cdot 0 \\ 0\cdot 0+(-i)\cdot(-i)+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot i+(-i)\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+(-i)\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot(-i) & 0\cdot 0+(-i)\cdot 0+0\cdot i+0\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{p_2}\cdot\overline{\delta_3}=\overline{\gamma_3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0\cdot 1+0\cdot 0+i\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot(-1)+i\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+i\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+i\cdot 0+0\cdot(-1) \\ 0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0+i\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot(-1)+0\cdot 0+i\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1+i\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+i\cdot(-1) \\ (-i)\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & (-i)\cdot 0+0\cdot(-1)+0\cdot 0+0\cdot 0 & (-1)\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0 & (-i)\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot(-1) \\ 0\cdot 1+(-i)\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+(-i)\cdot(-1)+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+(-i)\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 0+(-i)\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{p_3}\cdot I=\overline{p_3}=\overline{a_4}=\overline{\gamma_4}=\bar{\beta}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{p_3} \cdot \overline{\delta_1} = \overline{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{p_3} \cdot \overline{\delta_2} = \overline{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot i + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot (-i) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot i & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot (-i) + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot i + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot (-i) + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot i & 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot i + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot i + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot (-i) + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot i & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot (-i) + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot i + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot (-i) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot i & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot (-i) + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{p_3} \cdot \overline{\delta_3} = \overline{\sigma_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Узагальнивши проведені обрахунки, ми можемо скласти таблицю з шістнадцяти матриць Дірака.

Матриця	I	$\overline{\delta_1}$	$\overline{\delta_2}$	$\overline{\delta_3}$
I	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ I	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{\delta_1}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{\delta_2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\overline{\delta_3}$
$\overline{p_1}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{p_1}, -\overline{\gamma_5}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{a_1}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{a_2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{a_3}$
$\overline{p_2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{p_2}, \overline{a_{51}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{\gamma_1}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{\gamma_2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{\gamma_3}$
$\overline{p_3}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\overline{p_3}, \overline{a_4}, \overline{\gamma_4}, \bar{\beta}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{\sigma_1}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$ $\overline{\sigma_2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\overline{\sigma_3}$

2.2 Знайти власні значення функції і відповідні ортонормовані власні вектори оператора

А) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Секулярний розв'язок має вигляд:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

Або

$$-\lambda\cdot(\lambda^2-1)=0$$

Корені цього рівняння $\lambda=\pm1;0$. Для знаходження власного вектора, який відповідає $\lambda=-1$, підставимо це значення в рівняння.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

При $\lambda=-1$ це дає

$x + y = 0, z = 0$

з точністю до довільного множника і довільного знака (або фази) $r_1=(1;-1;0)$. Відмітимо, що (для натуральних r у звичайному просторі) власний вектор визначає лінію у просторі. Однак його знак довільний. Для спрощення ми вимагатимемо, щоб власні вектори були нормовані на одиницю $|r_1=1|$. При такому виборі

$$r_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$$

Для $\lambda=0$ рівняння (117) зводиться до

$x = 0, y = 0$

звідки другий власний вектор $r_2=(0;0;1)$. Нарешті, для $\lambda=1$ отримаємо

$-x + y = 0, z = 0$

Або

$$r_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$$

Легко переконатися у ортогональності r_1, r_2, r_3, відповідних трьом власним значенням.

Б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Секулярне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

Або

$$(1-\lambda)\cdot(\lambda^2-1)=0$$

$\lambda = -1; 0; 1$

Тобто, ми маємо виняток. Якщо $\lambda = -1$, то рівняння для власних значень дає

$$2\cdot x = 0, x + y = 0$$

Відповідний нормований вектор дорівнює

$$r_1=\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Для $\lambda = 1$ отримаємо

$$-y + x = 0$$

Ніякої додаткової інформації відносно змінної x не маємо. Ми отримали нескінченне число можливих значень. Припустимо, що один із можливих варіантів

$$r_2=\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Яке задовольняє рівнянню (133). Оскільки r_3 повинен бути перпендикулярний до r_1 і його можна вибрати перпендикулярним до r_2, положимо його рівним

$$r_3=r_1\times r_2=(1;0;0)$$

В) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Секулярне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1\text{-}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1\text{-}\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1\text{-}\lambda \end{vmatrix}=0$$

Або

$$(1\text{-}\lambda)^3\text{-}(1\text{-}\lambda)=0$$

$$(1\text{-}\lambda)\cdot((1\text{-}\lambda)^2\text{-}1)=0$$

$(1-\lambda)=0$ $\qquad\qquad$ $(1-\lambda)^2-1=0$

$\lambda_1=1$ $\qquad\qquad$ $\lambda_2=0$

$\lambda_3=2$

Знаходимо власні ортонормовані вектори. Для цього підставляємо отримані значення λ у рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1\text{-}\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1\text{-}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1\text{-}\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

Для λ = 0 маємо:

$$x + z = 0, y = 0$$

Звідси перший ортонормований вектор буде:

$$r_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Для λ = 1 маємо:

$x = 0, z = 0$

Другий ортонормований вектор матиме вигляд:

$$r_2=(0;1;0)$$

Для λ = 2 маємо:

$$r_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Г) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Складаємо секулярне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1\text{-}\lambda & 1 & 0 \\ 1 & \text{-}\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1\text{-}\lambda \end{vmatrix}=0$$

Знаходимо корені даного рівняння

$$-\lambda\cdot(1-\lambda)^2-2\cdot(1-\lambda)=0$$

$$(1-\lambda)\cdot(-\lambda\cdot(1-\lambda)-2)=0$$

$1-\lambda_1=0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda^2-\lambda-2=0$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 2$

Знаходимо власні ортонормовані вектори. Для цього знайдені корені рівняння підставляємо у формулу.

$$\begin{pmatrix} 1\text{-}\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1\text{-}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1\text{-}\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Для λ = 0 маємо:

$$x + y = 0, x + z = 0$$

$$r_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Для λ = -1 маємо:

$$2\cdot x + y = 0, y + 2 \cdot z = 0$$

$$r_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Для λ = 1 маємо:

$$y = 0, x + z = 0$$

$$r_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2.3 Тверде тіло задане трьома точковими масами $m_1=1$ в точці (1;1;-2); $m_2=2$ в точці (-1;1;0); $m_3=1$ в точці (1;1;2). Знайти матрицю моменту інерції та діагоналізувати її.

Розв'язання

Загальний вигляд матриці інерції

$$J=\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

Загальний вигляд діагональних елементів

$$J_{xx}=\sum m_i \cdot \left(r_i^2 - x_i^2\right)$$

$$J_{yy}=\sum m_i \cdot \left(r_i^2 - y_i^2\right)$$

$$J_{zz}=\sum m_i \cdot \left(r_i^2 - z_i^2\right)$$

Загальний вигляд недіагональних елементів

$$J_{xy}=J_{yx}=-\sum m_i \cdot x_i \cdot y_i$$

$$J_{xz}=J_{zx}=-\sum m_i \cdot x_i \cdot z_i$$

$$J_{yz}=J_{zy}=-\sum m_i \cdot y_i \cdot z_i$$

Розв'язування конкретної даної задачі

$$r_1=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

$$r_2=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$r_3=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$$

$$J_{xx}=\sum m_i \cdot \left(r_i^2 - x_i^2\right)=m_1\cdot(r_1^2-x_1^2)+m_2\cdot(r_2^2-x_2^2)+m_3\cdot(r_3^2-x_3^2)=5+2+5=12$$

$$J_{yy}=\sum m_i \cdot \left(r_i^2 - y_i^2\right)=m_1\cdot(r_1^2-y_1^2)+m_2\cdot(r_2^2-y_2^2)+m_3\cdot(r_3^2-y_3^2)=5+2+5=12$$

$$J_{zz}=\sum m_i \cdot \left(r_i^2 - z_i^2\right)=m_1\cdot(r_1^2-z_1^2)+m_2\cdot(r_2^2-z_2^2)+m_3\cdot(r_3^2-z_3^2)=2+4+2=8$$

$$J_{xy}=J_{yx}=-\sum m_i \cdot x_i \cdot y_i=-(m_1\cdot x_1\cdot y_1+m_2\cdot x_2\cdot y_2+m_3\cdot x_3\cdot y_3)=-(1-2+1)=0$$

$$J_{xz}=J_{zx}=-\sum m_i\cdot x_i\cdot z_i=-(m_1\cdot x_1\cdot z_1+m_2\cdot x_2\cdot z_2+m_3\cdot x_3\cdot z_3)=-\big((-2)+0+2\big)=0$$

$$J_{yz}=J_{zy}=-\sum m_i\cdot y_i\cdot z_i=-(m_1\cdot y_1\cdot z_1+m_2\cdot y_2\cdot z_2+m_3\cdot y_3\cdot z_3)=-\big((-2)+0+2\big)=0$$

$$J=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

Відповідь:

$$J=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

2.4 У трьохвимірному просторі, в базисі власних векторів $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ оператор $\widehat{H}$ і оператори фізичних величин $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ мають вигляд

$$\widehat{H}=\hbar\omega\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\ \widehat{A}=a\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\ \widehat{B}=b\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Система має умову $|\Psi\rangle=\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{1}\rangle+\boldsymbol{\beta}|\mathbf{2}\rangle+\boldsymbol{\gamma}|\mathbf{3}\rangle$, де $|\Psi\rangle$ – нормований кет-вектор. Проаналізувати представлену цими даними ситуацію.

З умови нормування $|\Psi\rangle$ слідує, що $\langle\Psi|\Psi\rangle=|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2=1$. Власні значення енергії рівні $E_1=\hbar\omega$, $E_2=\hbar\omega$, $E_3=\hbar\omega$. Імовірно при розрахунках енергії ми отримаємо результати $\hbar\omega$ або $2\hbar\omega$ рівні $|\alpha|^2+|\beta|^2$ або $|\gamma|^2$. У результаті обрахунків система переходить в стаціонарні стани $(\alpha|1\rangle+\beta|2\rangle)(|\alpha|^2+|\beta|^2)^{-\frac{1}{2}}$ або $|3\rangle$**.** Власними векторами оператора $\widehat{A}$ служать вектори $\frac{(|1\rangle+|2\rangle)}{\sqrt{2}}$, $\frac{(|1\rangle-|2\rangle)}{\sqrt{2}}$, $|3\rangle$, а відповідні власні значення рівні *a, -a, 2a.* Імовірність отримання при обчисленні $\widehat{A}$ система переходить в стаціонарні стани $(|1\rangle+|2\rangle)2^{-\frac{1}{2}}$, $(|1\rangle-|2\rangle)2^{-\frac{1}{2}}$, $|3\rangle$. Величина $\widehat{A}$ може бути обрахована одночасно з $\widehat{B}$ є вектори $|1\rangle$**,** $(|1\rangle+|3\rangle)2^{-\frac{1}{2}}$, $(|1\rangle-|3\rangle)2^{-\frac{1}{2}}$, а власні відповідні значення рівні 2b, b, -b. Імовірність отримання при обрахунках фізичної величини $\widehat{B}$ у стані $|\Psi\rangle$ значень 2b, b, -b рівна $|\alpha|^2$, $\frac{|\beta+\gamma|^2}{2}$, $\frac{|\beta-\gamma|^2}{2}$. У результаті обчислень $\widehat{B}$, залежність від часу яких має вигляд

$$\mathrm{e}^{-i\omega t}, \frac{\left(\mathrm{e}^{-i\omega t}|1\rangle + \mathrm{e}^{-i\omega t}|2\rangle\right)}{\sqrt{2}}, \frac{\left(e^{-i\omega t}|1\rangle - e^{-i\omega t}|2\rangle\right)}{\sqrt{2}}$$

Одночасні обрахунки енергії і $\widehat{\mathrm{B}}$ не можливо, за винятком $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$.

Якщо кет-вектор $|\Psi\rangle$ представляє стан системи в момент часу t = 0, то в момент $t\neq0$ стан системи описується кет-вектором $\left|\Psi(t)=e^{-i\omega t}\alpha|1\rangle+e^{-i\omega t}\beta|2\rangle+e^{-i\omega t}\gamma|3\rangle\right\rangle$. Середнє значення різних величин $\widehat{\mathrm{A}}$ і $\widehat{\mathrm{B}}$ задаються формулами $\langle\widehat{\mathrm{A}}\rangle = (\alpha\beta + \beta\alpha + 2|\gamma|^2)a$, $\langle\widehat{\mathrm{B}}\rangle=\left(2|\alpha|^2+\beta\gamma e^{-i\omega t}+\gamma\beta e^{-i\omega t}\right)b$, з яких слідує $\frac{d\langle\widehat{A}\rangle}{dt}=0$, $\frac{d\langle\hat{B}\rangle}{dt} \neq 0$.

Висновки

У дипломній роботі наведено результати застосування матричного апарату при розв'язанні деяких задач теоретичної фізики:

1. Одержано таблицю матриць Дірака;
2. Отримано матрицю моменту інерції при конкретному розподілі мас;
3. Визначено власні значення і власні вектори конкретних операторів;

Перспективи подальшого поглибленого застосування матричного аналізу у фізиці пов'язані з комп'ютерними технологіями. Матеріали дипломної роботи можуть бути використані при вивченні та застосуванні матричного апарату.

Список використаних джерел

1. Большакова И.В. Высшая математика – Учебное изделие, 2003, с.5-10
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 2-е изд. – М.: Наука.1967, с. 576
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 4-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. мет., 1988, с. 13-32
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К., 2004, с. 84-90
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1984, с. 46-54
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – 14-е изд. – Сб.: Лань, 2005, с. 322
7. Ланкастер П. Теория матриц – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. мет., 1973, с.17-44
8. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. - М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. мет., 1972, с.232-240
9. Овчинников П.Ф. Яремчик Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. – К., 1987, с.34-41
10. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Рольф, 2000, с.94-120
11. Сборник задач по математике для вузов: в 3 ч./ В.А. Болгов, А.В. Ефимов, А.Ф. Каракулин и др. – М.:иНаука, 1986. – Линейная алгебра и основы математического анализа
12. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. мет., 1984, с.216