УДК 539.3

Михайленко С. В.[1], к. ф.-м. н.

Побудова наближень стаціонарних розв'язків рівняння осцилятора з кубічною нелінійністю і моногармонічним збудженням

[1] Житомирський державний університет імені Івана Франка, 10008, м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40
e-mail: s.mikhaylenko@ukr.net

S. V. Mikhaylenko[1], Ph. D.

Constructing approximate stationary solutions to the oscillator equation with cubic nonlinearity and monoharmonic perturbation

[1] Ivan Franko State University of Zhytomyr, 10008, Zhytomyr, Velyka Berdychivska Str., 40
e-mail: s.mikhaylenko@ukr.net

Пропонується метод побудови наближень стаціонарних розв'язків рівняння, що описує поведінку осцилятора з лінійною дисипативною і кубічною консервативною характеристиками при моногармонічному навантаженні.
Ключові слова: нелінійний осцилятор, коефіцієнти Фур'є, моногармонічне навантаження, стаціонарні коливання, гармонічний баланс.

We propose an approximation method for stationary solutions of an equation that describes the behavior of oscillator with a linear dissipative characteristic and a cubic nonlinear conservative characteristic in a monoharmonic load. The method is based on the representation of complex Fourier coefficients as functions of components of the complex loading amplitude. A general form of these functions appears when their invariance condition regarding conversion shift over time is used. As a result, each complex Fourier coefficient is represented as the product of some complex value function of the square amplitude by the appropriate degree of the complex loading amplitude. This presentation of Fourier coefficients makes it possible to reduce an infinite system of equations of harmonic balance regarding the Fourier coefficients to the infinite system of equations regarding unknown functions of square of the loading amplitude. This system enables the construction of solutions in the form of series in even powers of the loading amplitude, which makes it possible to construct approaching stationary solutions of equation for oscillator in the form of analytical expressions. The managing factor here is the loading amplitude.
Key Words: nonlinear oscillator, Fourier coefficient, monoharmonic load, stationary vibrations, harmonic balance.

Статтю представив д. ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Рівняння нелінійного осцилятора і система рівнянь гармонічного балансу

Рівняння осцилятора з лінійною дисипативною і кубічною консервативною характеристиками при моногармонічному навантаженні (рівняння типу Дуфінга) має вигляд [1,2]:

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\tau^2}+\delta_0\frac{d\varepsilon}{d\tau}+\varepsilon-(f_1^{'}\cos\vartheta\tau-f_1^{''}\sin\vartheta\tau)= =-d_0\varepsilon^3,\tau>0, \tag{1}$$

де $\delta_0,\vartheta,f_1^{'},f_1^{''},d_0=const$, причому $\delta_0>0,\vartheta>0,d_0\neq 0$.

У механіці, наприклад, цим рівнянням описується в безрозмірних параметрах поведінка вязкопружного стержня, один кінець якого закріплений, а інший з'єднаний з масою, яка збуджується моногармонічною силою. Матеріал стержня описується моделлю типу Фойгта з кубічною пружністю і лінійною в'язкістю [2,3].

Періодичні розв'язки рівняння (1) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\varepsilon_n^{'}\cos n\vartheta\tau+\varepsilon_n^{''}\sin n\vartheta\tau]= =\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau}. \tag{2}$$

Тут

$$\tilde{\varepsilon}_n=\varepsilon_n^{'}+i\varepsilon_n^{''},i=\sqrt{-1},n\geq 1; \quad \tilde{\varepsilon}_{-n}=\overline{\tilde{\varepsilon}}_n;\tilde{\varepsilon}_0=\varepsilon_0. \tag{3}$$

Риска зверху означає комплексно-спряжену величину.

Якщо підставити (2) в (1), увівши позначення

$$\tilde{\theta}_n = 1 - (n\vartheta)^2 + i\delta_0 n\vartheta, \tilde{f}_1 = f_1' + if_1'', \qquad (4)$$

дістанемо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}_n \tilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau} - (\bar{\tilde{f}}_1 e^{-i\vartheta\tau} + \tilde{f}_1 e^{i\vartheta\tau}) = -\frac{d_0}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_k \tilde{\varepsilon}_l \tilde{\varepsilon}_m e^{i(k+l+m)\vartheta\tau}. \qquad (5)$$

Помножимо ліву та праву частини (5) на $\frac{\vartheta}{2\pi} e^{-in\vartheta\tau}$ і проінтегруємо по τ від 0 до $\frac{2\pi}{\vartheta}$. Після необхідних викладок, пов'язаних з усередненням потрійної суми, дістанемо нескінчену систему нелінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $\tilde{\varepsilon}_n, n \ge 0$ з (2)

$$\tilde{\theta}_n \tilde{\varepsilon}_n - \tilde{f}_n = -\frac{d_o}{4} [\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{\varepsilon}_k \tilde{\varepsilon}_l \tilde{\varepsilon}_{n-k-l} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n+k} \bar{\tilde{\varepsilon}}_k \tilde{\varepsilon}_l \tilde{\varepsilon}_{n+k-l} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\tilde{\varepsilon}}_k \bar{\tilde{\varepsilon}}_l \tilde{\varepsilon}_{n+k+l}], \qquad (6)$$

$$n = 0,1,2,...,$$

де $\tilde{f}_n = 0$, якщо $n \ne 1$.

2. Побудова наближень для розв'язків перетвореної системи рівнянь гармонічного балансу

Скористаємось загальним представленням комплексних амплітуд $\tilde{\varepsilon}_n$

$$\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{E}_n(|f_1|^2)\tilde{f}_1^{\,n}, n = 0,1,2,..., \qquad (7)$$

обґрунтування якого наведено в [3] з використанням умови інваріантності коефіцієнтів Фур'є відносно перетворення зсуву в часі.

Тут $\tilde{E}_0$ - довільна дійсна, а $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2,...$ -довільні комплекснозначні функції дійсного аргументу $|f_1|^2 = f_1'^2 + f_1''^2$. Нижче величину $|f_1|$ називатимемо амплітудою навантаження.

Якщо підставити (7) у систему гармонічного балансу (6), то після скорочення на $\tilde{f}_1^{\,n}$ дістанемо нескінченну систему рівнянь відносно величин $\tilde{E}_n$

$$\tilde{\theta}_n \tilde{E}_n - \eta_n = -\frac{d_0}{4} [\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{E}_k \tilde{E}_l \tilde{E}_{n-k-l} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n+k} \bar{\tilde{E}}_k \tilde{E}_l \tilde{E}_{n+k-l} |f_1|^{2k} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\tilde{E}}_k \bar{\tilde{E}}_l \tilde{E}_{n+k+l} |f_1|^{2(k+l)}], n = 0,1,2,.... \qquad (8)$$

Тут $\eta_1 = 1$ і $\eta_n = 0$, якщо $n \ne 1$.

Якщо розв'язки системи (8) шукати у вигляді

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n^{(j)} |f_1|^{2j}, n = 0,1,2,..., \qquad (9)$$

то як і в статті [3], можна дістати загальні формули для обчислення коефіцієнтів $\tilde{E}_n^{(0)}$, $\tilde{\alpha}_n^{(j)}$. Проте формула для $\tilde{\alpha}_n^{(j)}$ виходить громіздкою.

Оскільки, зазвичай, доводиться обмежуватись скінченними сумами типу (9), застосуємо підхід, який дає ті самі результати.

Знехтуємо в правій частині (8) тими доданками, які містять, як множники, степені амплітуди навантаження. Розв'язок $\tilde{E}_n^{(0)}, n \ge 0$ системи, що отримується, назвемо нульовим наближенням розв'язку системи (8).

Отже, для нульового наближення

$$\tilde{\theta}_n \tilde{E}_n^{(0)} - \eta_n = -\frac{d_0}{4} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{E}_k^{(0)} \tilde{E}_l^{(0)} \tilde{E}_{n-k-l}^{(0)}, \qquad (10)$$

$$n = 0,1,2,....$$

Кубічне рівняння, яке дістаємо з (10) у разі $n = 0$, має один дійсний розв'язок

$$\tilde{E}_0^{(0)} = 0 \qquad (11)$$

при $d_0 > 0$ і три дійсних розв'язки

$$\tilde{E}_0^{(0)} = 0, \tilde{E}_0^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{|d_0|}}, \quad \tilde{E}_0^{(0)} = -\frac{2}{\sqrt{|d_0|}} \qquad (12)$$

при $d_0 < 0$.

Інші величини нульового наближення однозначно визначаються загальною формулою

$$\tilde{E}_n^{(0)} = \frac{1}{\tilde{\theta}_n + \frac{3}{4} d_0 (\tilde{E}_0^{(0)})^2} (\eta_n - \frac{d_0}{4} [\sum_{k=1}^{n-1} \tilde{E}_0^{(0)} \tilde{E}_k^{(0)} \tilde{E}_{n-k}^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{E}_k^{(0)} \tilde{E}_l^{(0)} \tilde{E}_{n-k-l}^{(0)}]), n \ge 1 \qquad (13)$$

(тут і нижче знак суми $\sum$ береться до уваги лише в тому разі, коли число над цим знаком не менше числа, що стоїть під ним).

Систему рівнянь

$$\tilde{\theta}_n \tilde{E}_n - \eta_n = -\frac{d_0}{4}[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\tilde{E}_k\tilde{E}_l\tilde{E}_{n-k-l} + 3\sum_{l=0}^{n+1}\overline{\tilde{E}}_1\tilde{E}_l\tilde{E}_{n+1-l}|f_1|^2], n = 0,1,2,...., \quad (14)$$

яку дістанемо, якщо знехтувати в правій частині (8) доданками, що містять як множники $|f_1|^4$ і вищі степені амплітуди навантаження, назвемо системою першого наближення.

Якщо розв'язок системи (14) шукати у вигляді

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + \tilde{\alpha}_n^{(1)}|f_1|^2, n = 0,1,2,..., \quad (15)$$

то після підстановки (15) у (14), урахування (10) і нехтування степенями $|f_1|^m, m \ge 4$ дістанемо

$$\tilde{\theta}_n \tilde{\alpha}_n^{(1)} = -\frac{3}{4}d_0[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\tilde{\alpha}_k^{(1)}\tilde{E}_l^{(0)}\tilde{E}_{n-k-l}^{(0)} + \sum_{l=0}^{n+1}\overline{\tilde{E}}_1^{(0)}\tilde{E}_l^{(0)}\tilde{E}_{n+1-l}^{(0)}], n = 0,1,2... \quad (16)$$

Із (16) випливає, що коефіцієнти $\tilde{\alpha}_n^{(1)}$ однозначно визначаються формулою

$$\tilde{\alpha}_n^{(1)} = -\frac{\frac{3}{4}d_0}{\tilde{\theta}_n + \frac{3}{4}d_0(\tilde{E}_0^{(0)})^2} * [\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k}\tilde{\alpha}_k^{(1)}\tilde{E}_l^{(0)}\tilde{E}_{n-k-l}^{(0)} + \sum_{l=0}^{n+1}\overline{\tilde{E}}_1^{(0)}\tilde{E}_l^{(0)}\tilde{E}_{n+1-l}^{(0)}], n = 0,1,2,.... \quad (17)$$

Назвемо (15) першим наближенням розв'язку системи (8).

Систему другого наближення дістанемо, якщо знехтуємо в правій частині (8) доданками, що містять як множники $|f_1|^6$ і вищі степені амплітуди навантаження.

Якщо розв'язок системи другого наближення шукати у вигляді

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + \tilde{\alpha}_n^{(1)}|f_1|^2 + \tilde{\alpha}_n^{(2)}|f_1|^4, n = 0,1,2,..., \quad (18)$$

то після підстановки (18) у цю систему, урахування (10), (16) і нехтування степенями $|f_1|^m, m \ge 6$ дістанемо загальну формулу, яка однозначно визначає коефіцієнти $\tilde{\alpha}_n^{(2)}$.

Назвемо (18) другим наближенням розв'язку системи (8).

Аналогічно, за попередніми наближеннями будується будь-яке наступне наближення розв'язку системи (8)

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{k}\tilde{\alpha}_n^{(j)}|f_1|^{2j}, n = 0,1,2,...; k \ge 1. \quad (19)$$

3. Побудова наближень стаціонарного розв'язку рівняння (1)

Якщо скористатись (19) у виразах для комплексних амплітуд (7), а потім у сумі (2), яку перепишемо у вигляді

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} + \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau},$$

де Re - дійсна частина, то немає сенсу утримувати в цій сумі доданки, абсолютні величини яких містять як множники $|f_1|^{2k+2}$ і вищі степені амплітуди навантаження.

У результаті з умови $2j + n \le 2k + 1$ дістанемо

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\tilde{E}_0^{(0)} + \sum_{j=1}^{k}\tilde{\alpha}_0^{(j)}|f_1|^{2j}) + \mathrm{Re}\{\sum_{n=1}^{2k+1}(\tilde{E}_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{[k-\frac{n-1}{2}]}\tilde{\alpha}_n^{(j)}|f_1|^{2j})\tilde{f}_1^n e^{in\vartheta\tau}\}, \quad (20)$$

де $[k - \frac{n-1}{2}]$ - ціла частина.

Назвемо (20) k-им наближенням періодичного (стаціонарного) розв'язку рівняння (1). Згідно з (11), (12) у разі $d_0 > 0$ таких розв'язків один, а в разі $d_0 < 0$ - три.

Для 1-го наближення

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\tilde{E}_0^{(0)} + \tilde{\alpha}_0^{(1)}|f_1|^2) + \mathrm{Re}\{(\tilde{E}_1^{(0)} + \tilde{\alpha}_1^{(1)}|f_1|^2)\tilde{f}_1 e^{i\vartheta\tau} + \tilde{E}_2^{(0)}\tilde{f}_1^2 e^{i2\vartheta\tau} + \tilde{E}_3^{(0)}\tilde{f}_1^3 e^{i3\vartheta\tau}\} \quad (21)$$

Якщо $\tilde{E}_0^{(0)} = 0$, то згідно з (13), (17)

$$\tilde{E}_1^{(0)} = \frac{1}{\tilde{\theta}_1}, \tilde{E}_2^{(0)} = 0, \tilde{E}_3^{(0)} = \frac{d_0}{4\tilde{\theta}_3\tilde{\theta}_1^3},$$

$$\tilde{\alpha}_0^{(1)} = 0, \tilde{\alpha}_1^{(1)} = -\frac{3d_0}{4\tilde{\theta}_1^2|\tilde{\theta}_1|^2}$$

і формула 1-го наближення набуває вигляду

$$\varepsilon = \mathrm{Re}\{(\frac{1}{\widetilde{\theta}_1} - \frac{3d_0|f_1|^2}{4\widetilde{\theta}_1^2|\widetilde{\theta}_1|^2})\widetilde{f}_1 e^{i\vartheta\tau} +$$
$$+\frac{d_0}{4\widetilde{\theta}_3\widetilde{\theta}_1^3}\widetilde{f}_1^3 e^{i3\vartheta\tau}\}.$$

З кожним наступним наближенням розв'язку рівняння (1) уточняються комплексні амплітуди гармонік попереднього наближення шляхом врахування вищих степенів амплітуди навантаження, і з'являється нова непарна гармоніка.

Відсутність парних гармонік у 1-му і всіх наступних наближеннях характерна лише для випадку $\widetilde{E}_0^{(0)} = 0$.

У разі ненульових значень $\widetilde{E}_0^{(0)}$ (див.(12)) всі наближення містять як непарні, так і парні гармоніки, зокрема, нульову гармоніку.

Для в'язкопружного стержня з масою, наприклад, ненульовим значенням $\widetilde{E}_0^{(0)}$ враховується випадок, коли коливання збуджуються за наявності в стержні залишкової деформації.

5. Висновки

Запропоновано метод знаходження наближень стаціонарних розв'язків рівняння, що описує поведінку осцилятора з лінійною дисипативною і кубічно-нелінійною консервативною характеристиками при моногармонічному навантаженні.

Метод ґрунтується на зображеннях комплексних коефіцієнтів Фур'є як функцій складових комплексної амплітуди навантаження. Загальний вигляд цих функцій з'ясовується з використанням умови їхньої інваріантності відносно перетворення зсуву у часі. У результаті кожен комплексний коефіцієнт Фур'є зображується як добуток деякої комплекснозначної функції квадрата амплітуди навантаження на відповідний степінь комплексної амплітуди навантаження. Таке представлення коефіцієнтів Фур'є дає можливість звести нескінченну систему рівнянь гармонічного балансу відносно коефіцієнтів Фур'є до нескінченної системи рівнянь відносно невідомих функцій квадрата амплітуди навантаження. Ця система допускає розв'язки у вигляді рядів за парними степенями амплітуди навантаження, що дає можливість будувати наближення стаціонарного розв'язку рівняння осцилятора у вигляді аналітичних виразів. Керуючим фактором при цьому є амплітуда навантаження.

Список використаних джерел

1. *Боголюбов Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. – Москва: Наука, 1974. – 504 с..
2. *Карнаухов В. Г.* Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / В.Г.Карнаухов, И.К.Сенченков, Б.П.Гуменюк – Киев: Наукова думка, 1985. – 288 с
3. *Михайленко С.В.* Стаціонарні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з моногармонічним збудженням /С.В. Михайленко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.:фізико-математичні науки. -2015.-№3.-С

References

1. BOGOLYUBOV N.N. & MITROPOLSKIJ Y.A.(1974) .*Asimptoticheskiye metodyi v teorii nelineynih kolebaniy* – Moskva: Nauka.
2. KARNAUKHOV V. G., SENCHENKOV I. K. & GUMENYUK B.P. (1985) *Termomekhanicheskoye povedeniye vyazkouprugih tel pry garmonicheskom nagrugenii.*. Kiev: Naukova Dumka.
3. MIKHAYLENKO S.V. (2015) Statsionarni rosvyazky rivnyannya neliniynogo ostsilyatora z monogarmonichnym zbudzhennyam. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* (3). pp

Надійшла до редколегії 20.11.2015