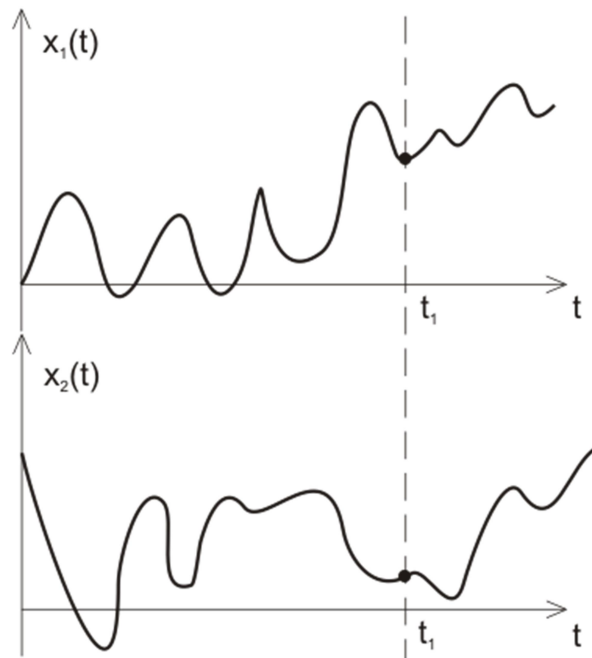


Житомирський державний університет
імені Івана Франка

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Погоруй А. О., Чемерис О. А.

навчальний посібник



Житомир 2020

*Рекомендовано Вченою радою Житомирського державного університету
імені Івана Франка, протокол № 8 від 26 червня 2020 року*

РЕЦЕНЗЕНТИ: **Журавльов В. П.** – доктор фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Житомирського агроєкологічного університету;

Прилипко О. І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та вищої математики Державного університету «Житомирська політехніка»

Погоруй А. О. Вступ до теорії випадкових процесів :
навчальний посібник / А. О. Погоруй, О. А. Чемерис – Житомир :
Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. – 70 с.

Навчальний посібник містить короткий виклад сучасного курсу теорії випадкових процесів для студентів математичних спеціальностей університетів. Особлива увага спрямована на пояснення основних ідей та понять: теорії марковських та напівмарковських процесів, процесів Пуассона, Вінера, процесів з незалежними приростами, гауссівських процесів, мартингалів.

Посібник також може бути корисним для викладачів фізико-математичних факультетів закладів вищої освіти.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ЛЕКЦІЯ 1. <i>Історичний екскурс та базові поняття курсу</i>	5
ЛЕКЦІЯ 2. <i>Випадкові блукання</i>	13
ЛЕКЦІЯ 3. <i>Марковські ланцюги з дискретним часом</i>	19
ЛЕКЦІЯ 4. <i>Однорідні марковські ланцюги</i>	23
ЛЕКЦІЯ 5. <i>Ергодична теорема для ланцюгів Маркова</i>	26
ЛЕКЦІЯ 6. <i>Процеси розгалуження</i>	32
ЛЕКЦІЯ 7. <i>Марковські процеси з не більш ніж зліченим фазовим простором</i>	39
ЛЕКЦІЯ 8. <i>Напівмарковські процеси</i>	44
ЛЕКЦІЯ 9. <i>Стрибокподібні марковські процеси. рівняння марковського відновлення</i>	48
ЛЕКЦІЯ 10. <i>Пуассонівський процес та його основні властивості</i>	52
ЛЕКЦІЯ 11. <i>Процес вінера та його базові властивості</i>	56
ЛЕКЦІЯ 12. <i>Вступ до теорії мартингалів</i>	63
<i>Список використаної літератури</i>	69

ВСТУП

Навчальний посібник «Вступ до теорії випадкових процесів» написано відповідно до навчальної програми дисципліни самостійного вибору університету циклу професійної підготовки «Випадкові процеси» для студентів другого рівня вищої освіти спеціальності 111 Математика.

Теорія випадкових процесів вивчає стохастичні системи, які еволюціонують випадково з часом. Такі системи можуть моделювати реальні явища і процеси у техніці, біології, соціології тощо.

Мета нашого посібника – ознайомити студентів з базовими поняттями теорії, які є основою для поглибленого вивчення випадкових процесів та їх застосування до моделювання реальних стохастичних систем і вирішення складних практичних проблем.

У курсі викладаються фундаментальні відомості теорії випадкових процесів: теорія марковських та напівмарковських процесів, процесів Пуассона та Вінера, процесів з незалежними приростами, гауссівських процесів тощо. Навчальний посібник містить як теоретичні викладки так і практичні завдання для самостійного розв’язування.

Матеріал посібника дозовано та структуровано, його зручно переглядати як під час читання лекції, так і використовувати у позанавчальній діяльності.

Теорія випадкових процесів активно розвивається і є об’єктом інтенсивних досліджень сучасної математики. Тому вивчення цієї дисципліни є важливим компонентом підготовки фахівців математичного напрямку.

Навчальний посібник рекомендований усім, хто виявляє інтерес до вивчення та застосування теорії випадкових процесів.

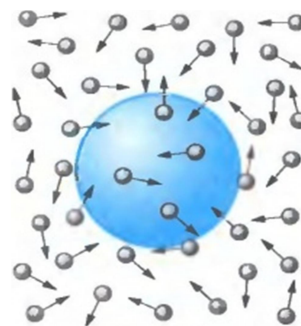
ЛЕКЦІЯ 1. ІСТОРИЧНИЙ ЕКСКУРС ТА БАЗОВІ ПОНЯТТЯ КУРСУ

1.1. Історія виникнення теорії випадкових процесів. Перші поняття та приклади

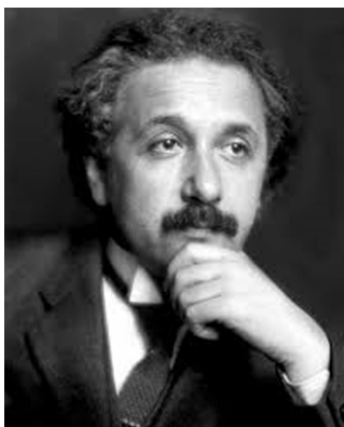
Теорія ймовірностей – це математичний аналіз закономірностей випадкових явищ. На відміну від теорії ймовірностей, теорія випадкових процесів досліджує стохастичні моделі в динаміці, тобто, з урахуванням фактору часу.

Одним із перших об'єктів дослідження теорії випадкових процесів, був відкритий у 1827 році шотландським ботаніком Робертом Броуном ефект броунівського руху.

Броунівський рух – це хаотичний рух частинок спор плауна у воді, який відбувається внаслідок зіткнення цих частинок з молекулами води і Броун вперше спостерігав його за допомогою мікроскопа. З тих пір подібний рух стали називати броунівським рухом, а математичну модель цього руху – броунівським процесом.



Роберт Броун
(21 грудня 1773 –
10 червня 1858)



Альберт Ейнштейн
(14 березня 1879 –
18 квітня 1955)



Маріан Смолуховський
(28 травня 1872 –
5 вересня 1917)

Перші теоретичні обґрунтування броунівському руху дали Альберт Ейнштейн і Маріан Смолуховський на основі молекулярно-кінетичної теорії (див. рис. 1). Нагадаємо основні положення: усі речовини дискретні; вони складаються з молекул і атомів, які перебувають у безперервному хаотичному русі; між молекулами всіх речовин діють сили притягання й відштовхування.

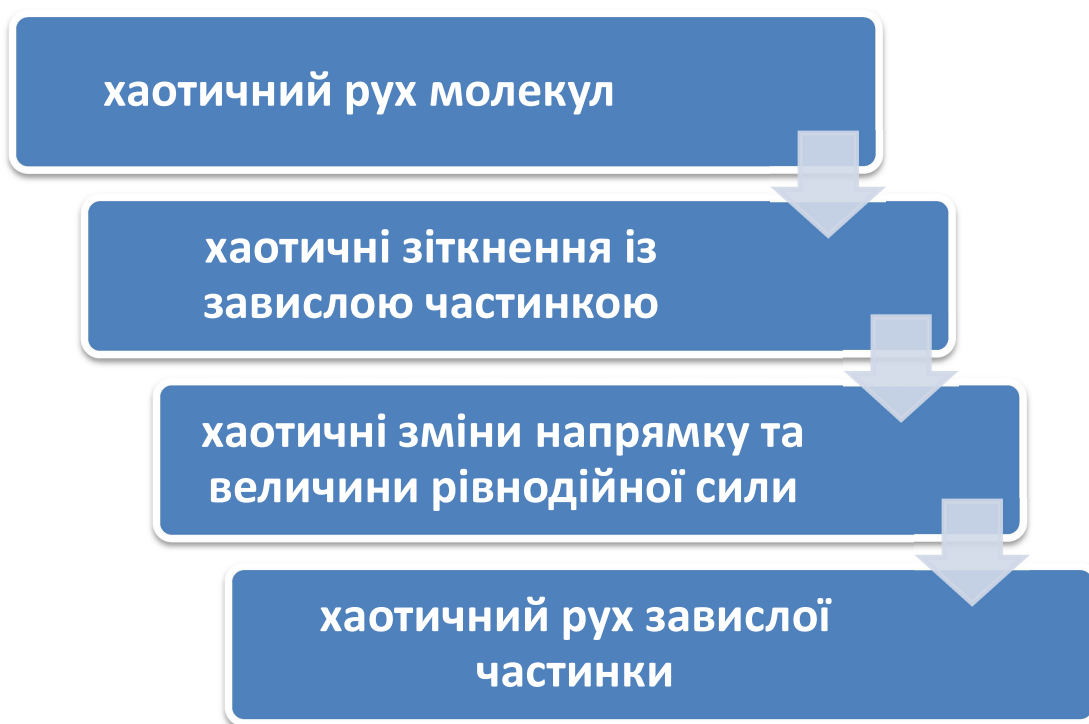


Рис .1. Схема броунівського руху

Одним із перших, хто запропонував математичну модель броунівського руху, був французький математик та економіст Луї Башельє. У своїй дисертації «Теорія спекуляцій» (1900) він використав модель броунівського руху для розрахунку цін опціонів (так званих фінансових документів з правом продажу чи придбання активів у майбутньому).

Великий вклад у вивчення математичної моделі броунівського руху вніс американський математик Норберт Вінер, на честь якого названо **вінеровий процес** – найбільш відомий випадковий процес, що моделює броунівський рух.



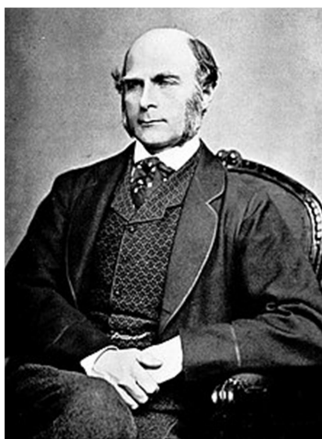
Луї Башельє
(11 березня 1870 –
28 квітень 1946)



Норберт Вінер
(26 листопада 1894—
19 березня 1964)

Ця теоретична модель броунівського руху є прикладом дифузійних процесів у фізиці та часто зустрічається у чистій, прикладній і фінансовій математиці, економіці, зокрема, для моделювання прибутків від акцій та інших похідних цінних паперів, а також відсоткових ставок за опціонами.

Іншим важливим об'єктом вивчення теорії випадкових процесів є процес розгалуження *Гальтона- Уотсона*, названий на честь англійських дослідників Френсіса Гальтона та Хьюїта Уотсона, які в 70-х роках XVIII ст. аналізували питання зникнення аристократичних прізвищ Великобританії. За традицією, прізвище передається від батька до сина і тому може зникати у випадках відсутності законних дітей або коли у сім'ї народились лише доньки. Вченими було запропоновано метод обчислення ймовірності зникнення прізвища, як виродження процесу розгалуження. До речі, Ф. Гальтон був троюрідним братом Чарльза Дарвіна і коли Гальтон помер, його учень Карл Пірсон опублікував генеалогічне дослідження про свого учителя. Виявилось, що серед предків Гальтона були імператор Карл Великий, декілька англійських королів, зокрема Вільгельм Завойовник, та київський князь Ярослав Мудрий.



Френсіс Гальтон

(16 лютого 1822 –
17 січня 1911)



Хьюїт Уотсон

(9 травня 1804 –
27 липня 1881)



А. А. Марков

(14 червня 1856 –
20 липня 1922)

Важливе місце у теорії випадкових процесів займають **марковські процеси**, зокрема, їх частинний випадок **ланцюги Маркова** – послідовність випадкових величин, які задовольняють так звану марковську властивість: «майбутнє не залежить від минулого при відомому теперішньому». Першовідкривачем цього класу стохастичних процесів з дискретною та неперервною часовою компонентою був російський математик Андрій Андрійович Марков-старший. Марковські ланцюги відразу після відкриття не знайшли практичного застосування, і вченому довелося застосовувати свої результати для пояснення розподілу голосних і приголосних букв у поемі О. С. Пушкіна «Євгеній Онегін» (за приголосною часто йде голосна, а за голосною — приголосна, і в першому наближенні можна вважати, що ймовірність появи голосної на $(k + 1)$ -му місці залежить лише від того, голосною чи приголосною є буква на k -му місці).

Принцип ланцюга Маркова можна пояснити також на прикладі ланцюжка слів: зокрема, у математичному тексті після слова «порожня» набагато ймовірніше зустріти слово «множина», ніж «скриня».

Ланцюги Маркова використовують для прогнозування в різних сферах діяльності: економічній, соціальній, політичній тощо. Також, у смартфонах часто використовується система T9 (Text on 9 keys), яка допомагає пришвидшити набір тексту (система намагається вгадати, що за слово Ви хочете набрати).

Однією з основних моделей функціонування страхових компаній вважається динамічна схема страхування, вперше була запропонована на початку 20-го ст. у докторській дисертаційній роботі шведського математика Ф. Лундберга. Значний вклад у теорію ризику страхових компаній вніс інший шведський математик Г. Крамер. Результати Крамера і Лундберга поклали початок вивченню механізму правильної побудови моделі страхової політики компанії, зокрема, дали можливість визначати обґрунтовану величину страхових виплат та страхових внесків. Цю модель згодом почали називати класичною моделлю ризику Крамера-Лундберга і її викладення базуються на властивостях **пуассонівського процесу** – процесу з неперервним часом, який описує появу рідкісних випадкових подій.

На графіку рисунка 2 показано розподіл процесу Пуассона при $t = 1$ для різних значень λ .

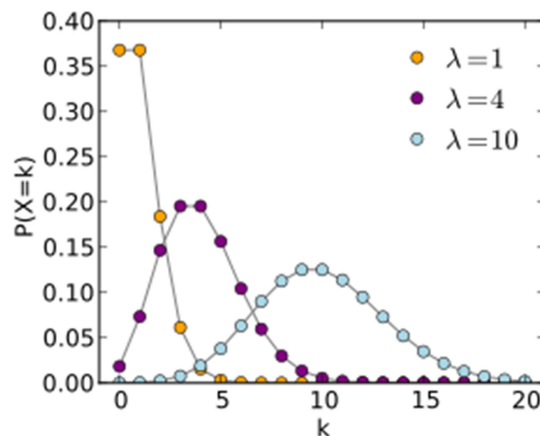


Рис. 2. Розподіл процесу Пуассона: $P(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, при $t = 1$; $k = 0, 1, 2, \dots, 20$; $\lambda = 1, 4, 10$.

На практиці при вивченні операцій часто доводиться мати справу з системами, призначеними для багаторазового використання при розв'язанні однотипних задач. Процеси, які при цьому виникають отримали назву **процесів чи систем масового обслуговування (СМО)**. Прикладами таких систем є ремонтні майстерні, телефонні системи, обчислювальні комплекси, магазини тощо. Теорія масового обслуговування (інша назва – теорія черг) вивчає статистичні закономірності в масових операціях, що складаються з великого числа однорідних елементарних операцій: а саме, складання однотипних деталей на конвеєрі, видача інструментів, ремонт верстатів, робота телефонної станції, обслуговування покупців у магазині, в білетних касах, клієнтів у перукарнях, технічне обслуговування машин та обладнання тощо. Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, які пов'язують задані умови роботи СМО з показниками ефективності цих систем, що описують їх здатність справлятися з потоком заявок.

Засновником наукового напрямку з вивчення ефективності роботи телекомунікаційних систем і СМО є данський математик Агнер Ерланг.



Агнер Ерланг
(1 січня 1878 –
3 лютого 1929)

$$E_{i,V}(A) = \frac{\frac{(A)^i}{i!}}{\sum_{i=0}^V \frac{(A)^i}{i!}}$$

Формула Ерланга для
стаціонарного режиму
СМО.

Ерланг одержав формулу для розрахунку частки викликів, які отримують обслуговування на сільській телефонній станції та кому доведеться чекати, поки роблять зовнішні виклики.

У 1909 році він опублікував свою першу роботу: «Теорія ймовірностей і телефонні розмови» (The Theory of Probabilities and Telephone Conversations). Ця робота була визнана у всьому світі і його формула була прийнята для використання в найбільшій поштової службі світу – Головному поштамті Великобританії.

Двадцять років він пропрацював у Копенгагенської телефонної компанії. У сорокових роках на його честь була названа одиниця вимірювання трафіку в телекомунікаційних системах – Ерланг, а його формули до сих пір використовуються при розрахунках пропускну здатності сучасних телекомунікаційних мереж.

Також, сьогодні *Ерланг* – це мова функціонального програмування з динамічною типізацією, призначена для розробки програм для різного роду систем. Мова включає в себе засоби породження паралельних процесів та їх взаємодії за допомогою відсилання асинхронних повідомлень.

Підсумовуючи можемо зазначити, що теорія випадкових функцій продовжує активно розвиватися, оскільки в багатьох практичних задачах системного аналізу й теорії керування потрібно враховувати випадкові фактори саме в динаміці, тобто зважати на їхню мінливість у процесі випробування.

1.2. Основні означення та базові поняття теорії випадкових процесів

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір.

Означення 1.1. Нехай $T \neq \emptyset$ – деяка множина. Якщо $\forall t \in T, \xi(t)$ – випадкова величина, тобто $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega: \xi(t, \omega) < x\} \in \mathcal{F}$, то $\xi(t)$ називається *випадковою функцією*.

На $\xi(t)$ можна дивитись як на функцію двох змінних: $t \in T$ та $\omega \in \Omega$, $\xi: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, тобто, $\xi(t) = \xi(t, \omega)$.

Означення 1.2. Якщо $T \subset \mathbb{R}$, то випадкова функція називається **випадковим процесом**.

Означення 1.3. Траєкторією (реалізацією) випадкового процесу $\xi(t, \omega)$ при фіксованому $\omega_0 \in \Omega$ називається функція $\xi(t, \omega_0) = \xi_t(\omega_0)$, $t \in T$.

Означення 1.4. Якщо $T = [a, b], (a, b), \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ і т. д., то кажуть, що $\xi(t)$, $t \in T$ – процес з неперервним часом.

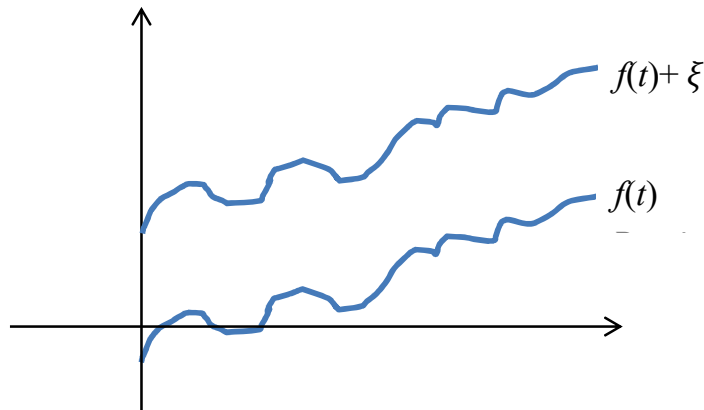
Означення 1.5. Якщо $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}_0$, то кажуть, що ξ – процес з дискретним часом (або **випадкова послідовність**);

Означення 1.6. Якщо $T \in \mathbb{R}^d, d > 1$, то $\xi(t)$ називають **випадковим полем**.

1.2. Приклади найпростіших випадкових процесів

1. Нехай $f(t)$, $t \in T$ – не випадкова функція (наприклад, $\sin t$, e^t , тощо), а $\xi(\omega)$ – випадкова величина. Тоді

а) $\xi(t) = f(t) + \xi$ – випадковий процес. Траєкторії цього процесу мають вигляд



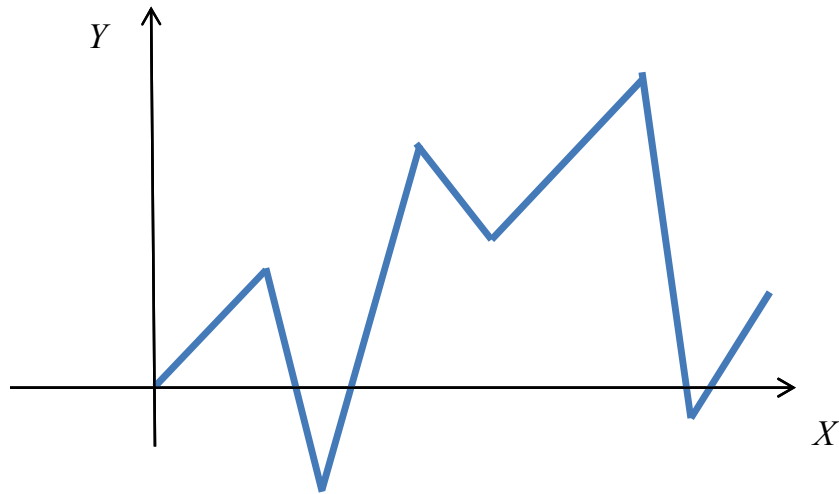
б) $\xi(t) = f(\xi t)$ – також випадковий процес.

Задача 1.1. Наведіть власні приклади випадкових процесів та, при змозі, зобразіть їх траєкторії.

ЛЕКЦІЯ 2. ВИПАДКОВІ БЛУКАННЯ

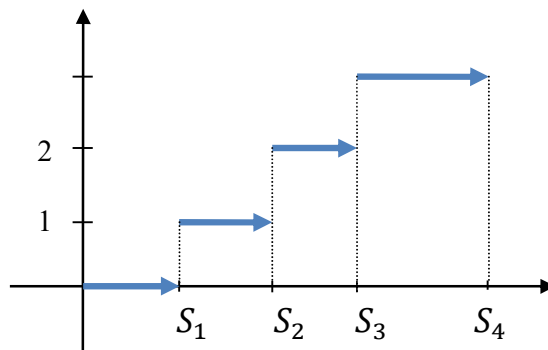
Розглянемо багатовимірні випадкові блукання: Нехай $\{\xi_m, m \in \mathbb{N}\}$ – незалежні випадкові вектори із $\mathbb{R}^d$. Покладемо $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді $S_n, n \in \mathbb{N}$ називають **випадковим блуканням** в $\mathbb{R}^d$.

Приклад траєкторії для $d = 2$:



Нехай $\{\theta_n, n \in \mathbb{N}\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (н. о. р. в. в.), $\theta_k \geq 0$, для всіх $k \geq 1$. Покладемо $S_0 = 0$, $S_n = \theta_1 + \dots + \theta_n$, $n \geq 1$ і $\forall t \geq 0$.

Нехай $\xi(0) = 0$, $\xi(t) = \sup\{n: S_n \leq t\}$, $t > 0$. Процес $\xi(t)$ називається **процесом відновлення**. Його траєкторія має вигляд



У якості фізичної моделі процесу відновлення можна розглядати безперебійну роботу приладу, який у моменти відновлення S_n відновлюється (ремонтується), наприклад, здійснюється заміна лампочки.

Розглянемо економічну модель процесу відновлення на прикладі **моделі страхування Крамера-Лундберга**.

Нехай $\{\theta_n, n \in \mathbb{N}\}$ та $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$ – дві послідовності н. о. р. в. в., причому $\theta_n, \eta_n \geq 0$. Позначимо через $\xi(t)$ – процес відновлення побудований по послідовності $\{\theta_n\}$. Для $a > 0, y_0 > 0$ покладемо

$$y(t) = y_0 + at - \sum_{k=1}^{\xi(t)} \eta_k.$$

$y(t)$ називається моделлю страхування Крамера-Лундберга для $t \geq 0$.

Тут:

a – швидкість надходження страхових внесків;

θ_n – випадковий час між $n - 1$ та n виплатами страхових компаній;

η_n – розмір n -тої виплати;

$\xi(t)$ – число виплат до моменту часу t ;

$\sum_{k=1}^{\xi(t)} \eta_k$ – загальний розмір виплат до моменту часу t ;

y_0 – початковий капітал;

$y(t)$ – поточний капітал в момент часу t .

Просте випадкове блукання на прямій.

Нехай $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – набір н. о. р. в. в., де $P(\xi_n = 1) = p, P(\xi_n = -1) = q = 1 - p$, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $S_0 = m \in \mathbb{Z}, S_n = m + \xi_1 + \dots + \xi_n$, для $n \geq 1$. Тоді процес $\{S_n, n \geq 1\}$ називається **простим випадковим блуканням** на прямій. Як правило, покладають $S_0 = 0$. Якщо $p = q = 1/2$, то випадкове блукання називають **симетричним**.

Випадкові блукання мають застосування для моделювання деяких практичних задач, наприклад, задача про балотування [1]. Уже найпростіші

задачі, які виникали у результаті дослідження блукань потребували певних зусиль для розв'язання.

Нехай $\{S_n, n \geq 1\}$ – симетричне випадкове блукання на прямій, причому $S_0 = 0$. Тоді має місце

$$P(S_n = y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - y \text{ не парне,} \\ 2^{-n} C_n^{\frac{n-y}{2}}, & \text{якщо } n - y \text{ парне.} \end{cases}$$

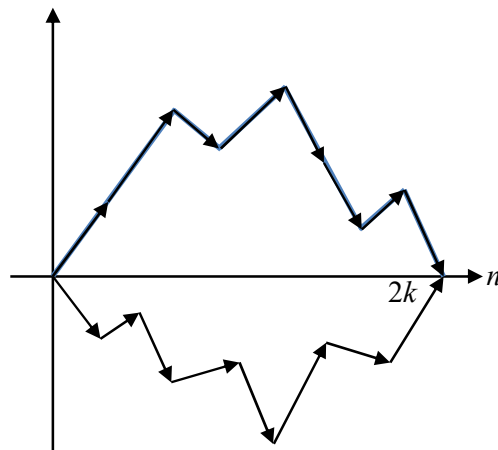
Дійсно, нехай із n кроків p кроків зроблено вправо і q – вліво. Тоді для того, щоб $S_n = y$ має виконуватись співвідношення $p + q = n$ та $p - q = y$. Звідки $p = \frac{n+y}{2}$ за умови, якщо $n - y$ парне. Якщо ж ні, то подія $\{S_n = y\}$ неможлива. При цілому $p = \frac{n+y}{2}$ кожна траєкторія з n кроками має ймовірність 2^{-n} , а число таких траєкторій C_n^p .

Розглянемо задачу знаходження числа траєкторій, які протягом заданого інтервалу часу не змінюють знак траєкторії.

Твердження 2.1. Для симетричного випадкового блукання $\{S_n, n \geq 1\}$, $S_0 = 0$ має місце рівність

$$\begin{aligned} P(\{S_n, n \geq 1\} - \text{не повертається в нуль до моменту часу } 2k \text{ включно}) \\ = P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0) = P(S_{2k} = 0) \\ = C_{2k}^k 2^{-2k}. \end{aligned}$$

Доведення. Остання рівність очевидна, оскільки кожна траєкторія, яка попадає в нуль у момент часу $2k$, має ймовірність 2^{-2k} , а кількість таких траєкторій C_{2k}^k .



Доведемо рівність

$$P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} \neq 0) = P(S_{2k} = 0).$$

Введемо такі позначення

$$T_{2k} = \{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} \neq 0\},$$

$$T_{2k}^+ = \{S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} > 0\},$$

$$T_{2k}^- = \{S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{2k-1} < 0, S_{2k} < 0\}.$$

Легко бачити, що

$$P(T_{2k}) = P(T_{2k}^+) + P(T_{2k}^-).$$

Далі, враховуючи перший стрибок вправо

$$\begin{aligned} P(T_{2k}^+) &= \sum_{l=1}^n P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 2l) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n P(S_2 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 2l/S_1 = 1). \end{aligned}$$

Множина $\{S_2 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 2l/S_1 = 1\}$ є сукупністю траєкторій із точки $(1,1)$ у точку $(2k, 2l)$, яка не заходить в нуль. Кількість таких траєкторій дорівнює кількості усіх траєкторій із точки $(1,1)$ у точку $(2k, 2l)$ мінус кількість траєкторій із точки $(1, -1)$ у точку $(2k, 2l)$, тобто

$$N(\{S_2 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 2l/S_1 = 1\}) = C_{2k-1}^{k+l-1} - C_{2k-1}^{k+l}.$$

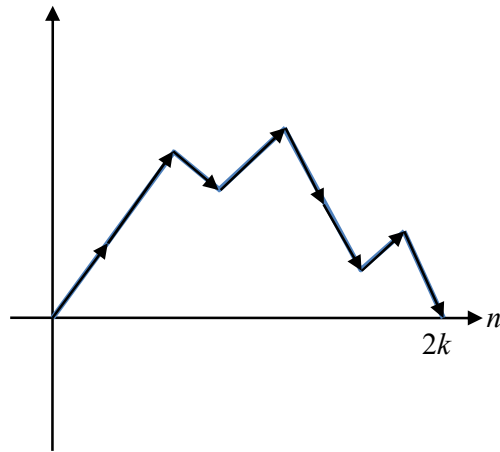
$$\text{Отже, } N(\{S_2 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} > 0/S_1 = 1\}) = \sum_{l=1}^k C_{2k-1}^{k+l-1} - C_{2k-1}^{k+l} =$$

$$C_{2k-1}^k. \text{ Звідки } P(T_{2k}^+) = C_{2k-1}^k \frac{1}{2^{2k}}.$$

Нарешті

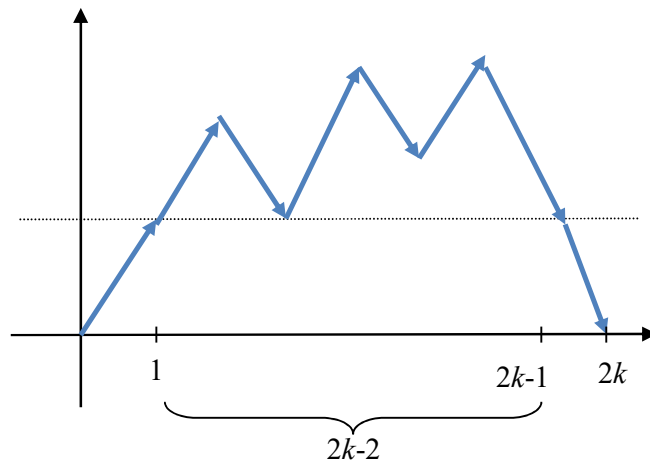
$$P(T_{2k}) = 2C_{2k-1}^k \frac{1}{2^{2k}} = 2 \frac{(2k-1)!}{k! (k-1)!} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{(2k)!}{k! k!} \frac{1}{2^{2k}} = C_{2k}^k \frac{1}{2^{2k}} = P(S_{2k} = 0).$$

Назвемо блукання $\{S_n, n \geq 1\}$ додатнім, якщо $\forall m = 1, \dots, 2k-1, S_m > 0$ і $S_{2k} = 0$. Позначимо число додатних блукань через P_k .



Введемо невід'ємні блукання: якщо $\forall t = 1, \dots, 2k - 1, S_t \geq 0$ для всіх $1 \leq t \leq 2k - 1, S_{2k} = 0$. Їх число позначимо через C_k .

З рисунку неважко переконатись, що $P_k = C_{k-1}$.

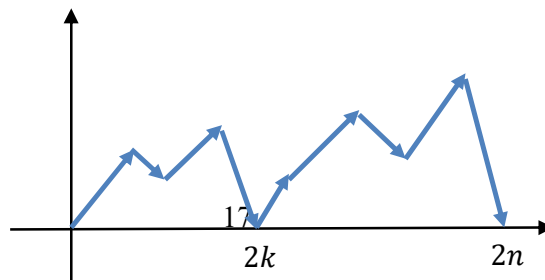


Твердження 2.2. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1-k} C_k, \quad (2.1)$$

де $C_0 = 1$.

Доведення.



Нехай $2k$ – момент часу першого потрапляння в нуль траєкторії, тоді:

$$C_n = P_n + \sum_{k=1}^{n-1} P_k C_{n-k} = C_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1} C_{n-k} = C_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} C_k C_{n-1-k}$$

Зауваження 2.1. Формулою (2.1) обчислюються числа Каталана – послідовність чисел, названа на честь бельгійського математика Каталана, яка зустрічається в багатьох задачах комбінаторики і має кілька інтерпретацій, зокрема:

- C_n – це кількість розбиттів опуклого $(n+2)$ -кутника на трикутники діагоналями, що не перетинаються. Обчисліть таким способом C_2 та C_3 .
- C_n – це число правильних розстановок дужок кількості $2n$.

Наприклад, для $n = 3$ існує 5 таких можливостей:

$((()))$, $()(())$, $()()()$, $((()))$, $((()))$.

- C_n – це кількість способів з'єднання $2n$ точок на колі n хордами, які не перетинаються.

Нехай $\{S_n, n \geq 1\}$ – симетричне випадкове блукання на прямій, причому $S_0 = x \in \mathbb{Z}$. Розглянемо подію $R_x = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{S_0 = x, S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0\}$. Легко бачити, що R_x означає подію « S_n хоча б коли-небудь із x попаде в нуль».

Твердження 2.3. $P(R_x) = 1$ для будь-якого $x \in \mathbb{Z}$.

Доведення. За формулою повної ймовірності для всіх $x \in \mathbb{Z}$ має місце

$$P(R_x) = \frac{1}{2}P(R_{x-1}) + \frac{1}{2}P(R_{x+1}). \quad (2.2)$$

Розглянемо графік функції $f(x) = P(R_x)$. Із формули (2.2) випливає, що будь-які сусідні три значення $f(x-1)$, $f(x)$ та $f(x+1)$ лежать на прямій для всіх $x \in \mathbb{N}$. Звідки випливає, що всі $f(x)$, $x \in \mathbb{N}$, лежать на прямій.

Оскільки $f(0) = P(R_0) = 1$, то $f(x) = 1$ для усіх $x \in \mathbb{N}$, тому що в іншому разі пряма, на якій лежать $f(x)$, коли-небудь перетнула б вісь абсцис і

ймовірність $P(R_x)$ набула б від'ємних значень, що неможливо, тобто, для усіх $x \in \mathbb{N}$, $P(R_x) = 1$. В силу симетрії $P(R_x) = 1$ для всіх $x \in \mathbb{Z}$.

ЛЕКЦІЯ 3. МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

Нехай X – не більш ніж зчисленна множина.

Означення 3.1. *Послідовність випадкових величин $\{\xi_n, n \geq 0\}$ є марковським ланцюгом якщо $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i, j, x_1, \dots, x_{n-1} \in X$, виконується:*

$$P(\xi_{n+1} = j / \xi_n = i, \xi_{n-1} = x_{n-1}, \dots, \xi_1 = x_1) = P(\xi_{n+1} = j / \xi_n = i), \quad (3.1)$$

за умови $P(\xi_n = i, \xi_{n-1} = x_{n-1}, \dots, \xi_1 = x_1) > 0$.

Означення марковського ланцюга має таку інтерпретацію: Якщо подія $\{\xi_{n+1} = j\}$ виражає майбутнє, $\{\xi_n = i\}$ – теперішнє, а $\{\xi_{n-1} = x_{n-1}, \dots, \xi_1 = x_1\}$ – минуле, то рівність (3.1) стверджує, що майбутнє не залежить від минулого, якщо відомо теперішнє.

Приклади.

1. Найпростішим прикладом марковського ланцюга є послідовність незалежних випадкових величин – для них умовні ймовірності такі ж як і безумовні.
2. Просте випадкове блукання на прямій є марковським ланцюгом.

Дійсно, нехай $(S_n, n \geq 0)$ – просте випадкове блукання на прямій: $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, де ξ_k – н. о. р. в. в., тоді

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = j / S_n = i, S_{n-1} = x_{n-1}, \dots, S_1 = x_1) \\ &= P(S_n + \xi_{n+1} = j / S_n = i, \dots, S_1 = x_1) \\ &= P(i + \xi_{n+1} = j / S_n = i, \dots, S_1 = x_1) \\ &= P(\xi_{n+1} = j - i / S_n = i, \dots, S_1 = x_1) = P(\xi_{n+1} = j - i) \\ &= P(S_{n+1} = j / S_n = i) \end{aligned}$$

оскільки ξ_{n+1} не залежить від $S_n, S_{n-1}, \dots, S_1$.

Означення 3.2. Множина X значень марковського ланцюга ξ_n називається його фазовим простором. Елементи фазового простору X є станами марковського ланцюга.

Означення 3.3. Ймовірності $p_{ij}(k, n) = P(\xi_n = j / \xi_k = i)$, $0 \leq k \leq n$, називаються перехідними ймовірностями марковського ланцюга $\{\xi_n\}$.

Означення 3.4. Розподіл випадкової величини ξ_0 називають початковим розподілом ланцюга Маркова $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Початковий розподіл будемо позначати через $\vec{p}(0) = \{p_j(0), j \in X\}$, де $p_j(0) = P(\xi_0 = j)$.

Мають місце такі властивості:

- 1) $0 \leq p_{ij}(k, n) \leq 1$;
- 2) $\sum_{j \in X} p_{ij}(k, n) = 1, \forall i \in X, \forall k, n \in \mathbb{Z}_+, k < n$;
- 3) $p_{ij}(n, n) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$
- 4) Рівність Чепмена-Колмогорова: $\forall k < l < n$,

$$p_{ij}(k, n) = \sum_{\alpha \in X} p_{i\alpha}(k, l) p_{\alpha j}(l, n);$$

Доведення.

- 1) Очевидно;
- 2) Маємо

$$\begin{aligned} \sum_{j \in X} p_{ij}(k, n) &= \sum_{j \in X} P(\xi_n = j / \xi_k = i) = \sum_{j \in X} \frac{P(\xi_n = j, \xi_k = i)}{P(\xi_k = i)} \\ &= \frac{P(\cup_{j \in X} \{\xi_n = j\}, \xi_k = i)}{P(\xi_k = i)} = \frac{P(\xi_k = i)}{P(\xi_k = i)} = 1; \end{aligned}$$

- 3) Очевидно;
- 4) Дійсно,

$$\begin{aligned}
p_{ij}(k, n) &= P(\xi_n = j / \xi_k = i) = P\left(\xi_n = j, \bigcup_{\alpha \in X} \{\xi_l = \alpha\} / \xi_k = i\right) = \\
&= \sum_{\alpha \in X} P(\xi_n = j, \xi_l = \alpha / \xi_k = i) = \\
&= \sum_{\alpha \in X} \frac{P(\xi_n = j, \xi_l = \alpha, \xi_k = i)}{P(\xi_l = \alpha, \xi_k = i)} \frac{P(\xi_l = \alpha, \xi_k = i)}{P(\xi_k = i)} = \\
&= \sum_{\alpha \in X} \frac{P(\xi_n = j / \xi_l = \alpha, \xi_k = i)}{P(\xi_l = \alpha, \xi_k = i)} P(\xi_l = \alpha / \xi_k = i) = \\
&= \sum_{\alpha \in X} P(\xi_n = j / \xi_l = \alpha) P(\xi_l = \alpha / \xi_k = i) = \sum_{\alpha \in X} p_{\alpha j}(l, n) p_{i\alpha}(k, l) \\
&= \sum_{\alpha \in X} p_{i\alpha}(k, l) p_{\alpha j}(l, n).
\end{aligned}$$

Матрицю $\|p_{ij}(k, n)\|_{i, j \in X} = P(k, n)$ називають матрицею перехідних ймовірностей ЛМ $\{\xi_n\}$. Неважко переконатись, що рівняння Чепмена-Колмогорова для неоднорідних ланцюгів Маркова у матричній формі має вигляд:

$$P(k, n) = P(k, l)P(l, n).$$

Позначимо $p_{ij}(n) = p_{ij}(n - 1, n) = P(\xi_n = j / \xi_{n-1} = i)$.

Теорема 3.1. Для всіх $m \in \mathbb{N}$ та $x_0, x_1, \dots, x_m \in X$ виконується співвідношення

$$P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_m = x_m) = P(\xi_0 = x_0) p_{x_0 x_1}(1) \dots p_{x_{m-1} x_m}(m). \quad (3.2)$$

Навпаки, якщо для послідовності $\{\xi_n, n \geq 0\}$ виконується (3.2), то вона є марковським ланцюгом з перехідними ймовірностями $p_{xy}(n)$.

Доведення. Доведемо (3.6) за допомогою індукції. При $m = 1$

$$P(\xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1) = P(\xi_0 = x_0) P(\xi_1 = x_1 / \xi_0 = x_0) = P(\xi_0 = x_0) p_{x_0 x_1}(1).$$

Нехай рівність (3.2) виконується при $m = k$. Покажемо, що вона справедлива й при $m = k + 1$. Якщо $P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k) > 0$, то, з урахуванням (3.1), маємо

$$\begin{aligned}
P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k, \xi_{k+1} = x_{k+1}) \\
&= P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k) \\
&= P(\xi_{k+1} = x_{k+1} / \xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k) \\
&= P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k) P(\xi_{k+1} = x_{k+1} / \xi_k = x_k) \\
&= P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k) p_{x_k x_{k+1}}(k+1).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Згідно припущення індукції $P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k)$ задовольняє (3.2), що, з урахуванням (3.3), завершає доведення теореми.

Нехай ξ_n задовольняє (3.2), тоді, якщо $P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k, \xi_k = x_k) > 0$, то

$$\begin{aligned}
P(\xi_{k+1} = x_{k+1} / \xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k, \xi_k = x_k) \\
= \frac{P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k, \xi_{k+1} = x_{k+1})}{P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_{k-1} = x_{k-1}, \xi_k = x_k)} = p_{x_k x_{k+1}}(k+1).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Просумовуючи по $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ рівність $P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_k = x_k, \xi_{k+1} = x_{k+1}) = P(\xi_0 = x_0, \dots, \xi_{k-1} = x_{k-1}, \xi_k = x_k) p_{x_k x_{k+1}}(k+1)$, маємо

$$p_{x_k x_{k+1}}(k+1) = \frac{P(\xi_k = x_k, \xi_{k+1} = x_{k+1})}{P(\xi_k = x_k)} = P(\xi_{k+1} = x_{k+1} / \xi_k = x_k). \tag{3.5}$$

Із (3.4), (3.5) випливає, що ξ_n – марковський ланцюг.

Твердження 3.1. *Якщо $(\xi_n, n \geq 0)$ – є марковським ланцюгом, то послідовність випадкових величин $(\zeta_n = \xi_{n+m}, n \geq 0)$ – марковський ланцюг.*

Доведення. Візьмемо замість t у рівнянні (3.2) $t+k$ і просумуємо це рівняння по усіх $x_0, \dots, x_{m-1}$, маємо

$$\begin{aligned}
P(\zeta_0 = x_m, \zeta_1 = x_{m+1}, \dots, \zeta_k = x_{m+k}) \\
&= P(\xi_m = x_m, \xi_{m+1} = x_{m+1}, \dots, \xi_{m+k} = x_{m+k}) \\
&= P(\zeta_0 = x_m) p_{x_m x_{m+1}}(m+1) \dots p_{x_{m+k-1} x_{m+k}}(m+k).
\end{aligned}$$

Отже, якщо покласти $P(\zeta_n = y / \zeta_{n-1} = x) = \tilde{p}_{xy}(n) = p_{xy}(n+m)$, то із теореми 3.1 випливає, що $(\zeta_n, n \geq 0)$ – марковський ланцюг.

ЛЕКЦІЯ 4. ОДНОРІДНІ МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ

Означення 4.1. Марковський ланцюг $(\xi_n, n \geq 0)$ з ймовірнісними переходами $p_{ij}(k, n)$ називають однорідним, якщо $\forall i, j \in X, \forall k, n \in \mathbb{Z}_+$
 $p_{ij}(k, n) = p_{ij}(0, n - k) = p_{ij}(n - k)$.

Тобто, $p_{ij}(k, n)$ залежить тільки від різниці $n - k$. Матриця перехідних ймовірностей однорідного (ЛМ) за n кроків позначається $P(n) = \|p_{ij}(n)\|_{i,j \in X}$.

При $n = 0$

$$P(0) = E = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Ймовірності $p_{ij}(1)$ позначаються p_{ij} , а матриця $P(1) = P = \|p_{ij}\|_{i,j \in X}$ називається матрицею перехідних ймовірностей ЛМ $\{\xi_n\}$.

4.1. Рівняння Чепмена-Колмогорова для однорідних ланцюгів

Нагадаємо, що рівняння Чепмена-Колмогорова для неоднорідних ланцюгів Маркова у матричній формі (4.2) виписується так:

$$P(k, n) = P(k, l) \cdot P(l, n).$$

Звідки, неважко переконатись, що для однорідних марковських ланцюгів рівняння Чепмена-Колмогорова має вигляд:

$$P(n + m) = P(n)P(m).$$

При $n = m = 1$ маємо $P(2) = P P = P^2$. Далі, при $n = 2, m = 1$

$P(3) = P(2)P = P^3$. За легко показати, що

$$P(n) = P^n.$$

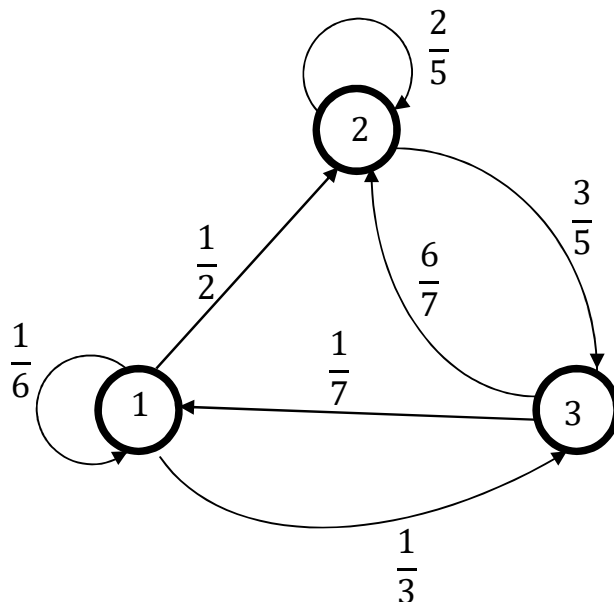
Якщо фазовий простір марковського ланцюга не великий, то такий ланцюг можна зобразити у вигляді графа.

Розглянемо приклад графічного зображення марковського процесу.

Нехай $X = \{1, 2, 3\}$, а матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

Такий процес має таке графічне зображення:



Означення 4.2. Матриця $P = \|P_{ij}\|_{i,j \in X}$, для якої

- 1) $0 \leq P_{ij} \leq 1$;
- 2) $\sum_{j \in X} P_{ij} = 1, \forall i \in X$.

називається стохастичною матрицею.

Через $\vec{p}(0) = \{p_i(0), i \in X\}$, де $p_i = P(\xi_0 = i)$, позначимо початковий розподіл, а через $\vec{p}(n) = \{p_i(n), i \in X\}$, де $p_i(n) = P(\xi_n = i)$, – розподіл марковського ланцюга в момент n . Тоді легко бачити, що $p_j(1) = \sum_{i \in X} p_i \cdot P_{ij}$, тобто

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) P.$$

Аналогічно $\vec{p}(2) = \vec{p}(1)P = \vec{p}(0)P^2, \dots \vec{p}(n) = \vec{p}(0)P^n$.

4.2. Стаціонарний розподіл

Нехай $P = \|P_{ij}\|_{i,j \in X}$ – матриця перехідних ймовірностей.

Означення 4.3. *Стаціонарним розподілом матриці P називається такий розподіл $\vec{\pi} = \{\pi_i, i \in X\}$, що $\vec{\pi} P = \vec{\pi}$, тобто*

$$\sum_{i \in X} \pi_i p_{ij} = \pi_j.$$

Твердження 4.1. *Якщо для ланцюга Маркова з матрицею перехідних ймовірностей P у якості початкового розподілу взяти стаціонарний розподіл $\vec{\pi}$, то його розподіл $\vec{p}(n)$ не буде змінюватися з часом, тобто,*

$$\vec{p} = \vec{p}(0) = \vec{p}(1) = \dots = \vec{p}(n) = \dots.$$

Доведення.

$$\vec{p}(0) = \vec{\pi}$$

$$\vec{p}(1) = \vec{\pi} P = \vec{\pi}$$

$$\vec{p}(2) = \vec{\pi} P^2 = (\vec{\pi} P) P = \vec{\pi} P = \vec{\pi}$$

...

$$\vec{p}(n) = \vec{\pi} P^n = (\vec{\pi} P) \cdot P^{n-1} = \vec{\pi} P^{n-1} = (\vec{\pi} P) P^{n-2} = \vec{\pi} P^{n-2} = \dots = \vec{\pi}.$$

4.3. Граничний розподіл

Означення 4.4. *Розподіл $\vec{p} = (p_i, i \in X)$ на фазовому просторі X називають граничним для матриці перехідних ймовірностей P , якщо для довільного ЛМ $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ з матрицею перехідних ймовірностей P та з довільним початковим розподілом $\vec{p}(0)$ має місце: $\vec{p}(n) \rightarrow \vec{p}$ при $n \rightarrow \infty$, тобто, $p_i(n) \rightarrow p_i, n \rightarrow \infty, \forall i \in X$.*

Стаціонарний розподіл у більшості випадків знайти простіше, ніж граничний розподіл. Наприклад, при $X = \{1, 2\}$ з матрицею перехідних

ймовірностей $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} p_i(n)$, (тобто, знайти

$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$) є не простою задачею, а розв'язати рівняння $\vec{\pi} P = \vec{\pi}$, де $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$, зможе кожен студент.

ЛЕКЦІЯ 5. ЕРГОДИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

Теорема 5.1 Нехай $\{\xi_n, n \geq 0\}$ – ланцюг Маркова, X – не більше ніж злічений фазовий простір процесу $\{\xi_n\}$, а $P(n) = \|p_{ij}(n)\|_{i,j \in X}$ – матриця перехідних ймовірностей за n кроків. Нехай $\exists \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N} \geq 1$, $\exists l \in X$: $p_{il}(n) \geq \varepsilon$ для всіх $i \in X$. Тоді для $\forall i, j \in X$ існує: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j$ (не залежить від i), причому $(\pi_j, j \in X)$ є розподілом на X , тобто, $\sum_{j \in X} \pi_j = 1$.

Доведення. Введемо позначення $m_j(n) = \min_{i \in X} p_{ij}(n)$, $M_j(n) = \max_{i \in X} p_{ij}(n)$.

Покажемо, що для $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_j(n) \leq m_j(n+1)$, тобто, $m_j(n)$ монотонно зростаюча по n . Дійсно, використовуючи рівняння Чепмена-Колмогорова, маємо

$$\begin{aligned} m_j(n+1) &= \min_{i \in X} p_{ij}(n+1) \\ &= \min_{i \in X} \sum_{l \in X} p_{il} p_{lj}(n) \geq \min_{i \in X} \sum_{l \in X} p_{il} m_j(n) = m_j(n) \min_{i \in X} \sum_{l \in X} p_{il} \\ &= m_j(n). \end{aligned}$$

Аналогічно перевіряємо, що для $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_j(n) \geq M_j(n+1)$, тобто, $M_j(n)$ монотонно спадає по n :

$$\begin{aligned} M_j(n+1) &= \max_{i \in X} p_{ij}(n+1) \\ &= \max_{i \in X} \sum_{l \in X} p_{il} p_{lj}(n) \leq \max_{i \in X} \sum_{l \in X} p_{il} M_j(n) = M_j(n) \max_{i \in X} \sum_{l \in X} p_{il} \\ &= M_j(n). \end{aligned}$$

Далі, легко бачити, що

$$m_j(n) = \min_{i \in X} p_{ij}(n) \leq \max_{i \in X} p_{ij}(n) = M_j(n),$$

тобто, $m_j(n) \leq M_j(n)$, для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Оскільки $m_j(n)$ та $M_j(n)$ – монотонні, то існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} m_j(n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M_j(n)$.

Наша ціль показати, що границя $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_j(n) - m_j(n)) = 0$. Якщо ми це покажемо, то буде доведено, що $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n)$, оскільки $m_j(n) \leq p_{ij}(n) \leq M_j(n)$, крім цього, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_j(n)$.

Зафіксуємо деяке мале $\varepsilon > 0$. Позначимо через $q_{ij} = p_{ij}(r) - \varepsilon \delta_{jl}$, де δ_{jl} – символ Кронекера. Очевидно, що $q_{ij} \geq 0$ для $\forall i, j \in X$, і $\sum_{j \in X} q_{ij} = 1 - \varepsilon$. Звідки

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) - p_{kj}(n) &= \sum_{n \in X} (p_{in}(r) - p_{kn}(r)) p_{ni}(n-r) = \sum_{n \in X} (p_{in}(r) - \\ & p_{kh}(r)) (p_{hj}(n-r) - m_j(n-r)) = |\text{враховуючи } \sum_n p_{in}(r) = 1, \sum_h p_{kh}(r) = 1| \\ &= \sum_{h \in X} (p_{ih}(r) - \varepsilon \delta_{hl} - p_{kh}(r) + \varepsilon \delta_{hl}) (p_{hj}(n-r) - m_j(n-r)) = \sum_{h \in X} (q_{ih} - \\ & q_{kh}) (p_{hj}(n-r) - m_j(n-r)) \leq \sum_{h \in X} q_{ih} (p_{hj}(n-r) - m_j(n-r)) \leq \\ & \sum_{h \in X} q_{ih} (M_j(n-r) - m_j(n-r)) = \\ & (M_j(n-r) - m_j(n-r)) \sum_{h \in X} q_{ih} = (M_j(n-r) - m_j(n-r)) (1 - \varepsilon) = \\ & (1 - \varepsilon) (M_j(n-r) - m_j(n-r)). \end{aligned}$$

Отже, ми показали, що $p_{ij}(n) - p_{kj}(n) \leq (1 - \varepsilon) (M_j(n-r) - m_j(n-r))$.

Права частина цієї нерівності не залежить від i та від k . Тому, легко бачити, що

$$M_j(n) - m_j(n) \leq (1 - \varepsilon) (M_j(n-r) - m_j(n-r)).$$

Звідки

$$M_j(n_0 + Nr) - m_j(n_0 + Nr) \leq (1 - \varepsilon)^N (M_j(n_0) - m_j(n_0)).$$

Тобто,

$$M_j(n_0 + Nr) - m_j(n_0 + Nr) \rightarrow 0 \tag{5.1}$$

при $N \rightarrow \infty$.

Оскільки, $M_j(n) - m_j(n)$ монотонно спадає і невід'ємна, то із (5.1) випливає $M_j(n) - m_j(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тобто,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_j(n).$$

Із $m_j(n) \leq p_{ij}(n) \leq M_j(n)$ випливає, що існує $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j$ і π_j не залежить від i , оскільки $m_j(n)$ і $M_j(n)$ не залежить від i .

Оскільки за умови теореми $m_l(r) \geq \varepsilon$, з монотонного зростання $m_l(n)$ випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_l(n) \geq m_l(r) \geq \varepsilon > 0.$$

Отже, $\pi_l > 0$. Далі, очевидно, що

$$\sum_{j \in X} p_{ij}(n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in X} p_{ij}(n) = 1 \Rightarrow \sum_{j \in X} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 1 \Rightarrow \sum_{j \in X} \pi_j = 1.$$

Отже, $(\pi_j, j \in X)$ – це розподіл, який називають ергодичним розподілом ланцюга Маркова $\{\xi_n, n \geq 0\}$.

Наслідок 5.1. В умовах ергодичної теореми розподіл $(\pi_j, j \in X)$ є граничним і він збігається зі стаціонарним. Стаціонарний розподіл єдиний у цьому випадку.

Доведення. Дійсно за рівністю Чепмена-Колмогорова $p_{ij}(n+1) = \sum_{\alpha \in X} p_{i\alpha}(n) p_{\alpha j}$, звідки, переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$, маємо

$$\pi_j = \sum_{\alpha \in X} \pi_\alpha p_{\alpha j}$$

Отже, $\vec{\pi} = (\pi_i, i \in X)$ – стаціонарний розподіл. Припустимо, що стаціонарний розподіл $\vec{\pi}$ не єдиний. Тоді існує інший стаціонарний розподіл, який позначимо через $\vec{\rho} = (\rho_i, i \in X)$. Візьмемо його у якості початкового розподілу ланцюга Маркова $\vec{\rho}(0)$. Тоді, оскільки у такому разі розподіл ланцюга Маркова не змінюється при зміні n , маємо $p_j(n) = \rho_j$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = \rho_j$, а з іншого боку $\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = \pi_j$ для $\forall j \in X$, отже, $\vec{\pi} = \vec{\rho}$.

Ми довели єдність стаціонарного розподілу, а тепер покажемо, що в умовах ергодичної теореми стаціонарний та граничний розподіли збігаються. Дійсно існує $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j$ і ми показали, що $\vec{\pi} = (\pi_i, i \in X)$ – стаціонарний розподіл.

Покажемо, що $\vec{\pi}$ – граничний розподіл в умовах ергодичної теореми. Дійсно, для довільного початкового розподілу $\vec{p}(0) = (p_i(0), i \in X)$, маємо

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0)P^n,$$

де $\vec{p}(n) = (p_i(n), i \in X)$ – розподіл ланцюга Маркова на n -му кроці. З урахуванням того, що

$$P^n \rightarrow \Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \\ - & - & - & - \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \end{pmatrix}.$$

де $m = |X|$.

Звідки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in X} p_i(0)p_{ij}(n) = \sum_{i \in X} p_i(0)\pi_j = \pi_j \sum_{i \in X} p_i(0) = \pi_j.$$

Означення 5.1. Ланцюг Маркова $\{\xi_n, n \geq 0\}$, з матрицею перехідних ймовірностей P , який задовольняє теорему 5.1, будемо називати ергодичним, а його стаціонарний розподіл $\vec{\pi}$ – ергодичним розподілом.

1.1. Потенціал марковського ланцюга

Нехай $\{\xi_n, n \geq 0\}$ – ергодичний ланцюг Маркова із скінченним фазовим простором $X = \{1, 2, \dots, t\}$ та матрицею перехідних ймовірностей $P = \|p_{ij}\|_{i,j \in X}$, задовольняє теорему 5.1 і має ергодичний розподіл $\vec{\pi} = (\pi_j, j \in X)$.

Означення 5.2. Матриця $\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \pi_2 \dots \pi_t \\ - & - & - & - \\ \pi_1 \pi_2 \dots \pi_t \end{pmatrix}$ розміром $t \times t$ називається

власним проектором матриці $I - P$, де I – одинична $t \times t$ матриця.

Нехай $\mathbb{I} = (1, \dots, 1)^T$ – вектор $1 \times t$. Тоді, неважко переконатись, що $\Pi = \mathbb{I}\vec{\pi}$, де $\mathbb{I}$ множиться на $\vec{\pi}$ як матриця $1 \times t$ на матрицю $t \times 1$. Такий добуток позначається $\mathbb{I} \otimes \vec{\pi}$ і називається тензорним (кронекерівським) добутком.

Лема 5.1. Проектор має такі властивості

1. $\Pi^2 = \Pi$;
2. $\Pi \mathbb{I} = \mathbb{I}$;
3. $\vec{\pi} \Pi = \vec{\pi}$;
4. $(I - P)\Pi = \Pi(I - P) = O$, де O – нуль-матриця $t \times t$.

Доведення леми є простим наслідком властивостей стаціонарного розподілу.

Лема 5.2. Нехай матриця M така, що $M^n \rightarrow O$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді матриця $I - M$ не вироджена і

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} M^n.$$

Доведення. Очевидно, що

$$(I - M)(I + M + M^2 + \dots + M^{n-1}) = I - M^n.$$

Оскільки $\det(I) = 1$, то, з урахуванням $M^n \rightarrow O$ при $n \rightarrow \infty$, за досить великих n визначник матриці $I - M^n$ відмінний від нуля. Звідки випливає, що

$$\det(I - M) \neq 0.$$

Тоді

$$(I + M + M^2 + \dots + M^{n-1}) = (I - M)^{-1}(I - M^n). \quad (5.2)$$

Переходячи до границі у (5.2) при $n \rightarrow \infty$, одержимо

$$(I - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n$$

Теорема 5.3. Матриця $I - P + \Pi$ є невиродженою, тобто, існує обернена матриця $(I - P + \Pi)^{-1}$.

Доведення. З урахуванням леми 5.1 та ергодичної теореми, маємо

$$(P - \Pi)^n = P^n - \Pi \rightarrow 0.$$

Звідки, за лемою 5.1, матриця $I - P + \Pi$ – не вироджена.

Означення 5.3. Матриця $R_0 = (I - P + \Pi)^{-1} - \Pi$ називається потенціалом ланцюга Маркова $\{\xi_n, n \geq 0\}$.

Зауваження 5.1. Матриця $R_0 = (I - P + \Pi)^{-1} - \Pi$ також називається узагальненою оберненою матрицею до матриці $I - P$.

Приклад 5.1. Розглянемо ланцюг Маркова $\xi_n, n \geq 0$, з матрицею перехідних ймовірностей

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Через A позначимо матрицю:

$$A = I - P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрицю A інколи називають інфінітезимальною для ξ_n .

Легко переконатись, що $\Pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а $\vec{\pi} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Далі обчислюємо тензорний добуток

$$\mathbb{I} \otimes \vec{\pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, власний проектор матриці A має вигляд:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Звідки

$$A + \Pi = \begin{pmatrix} \frac{23}{20} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{10} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю

$$(A + \Pi)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{22}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{23}{25} \end{pmatrix}.$$

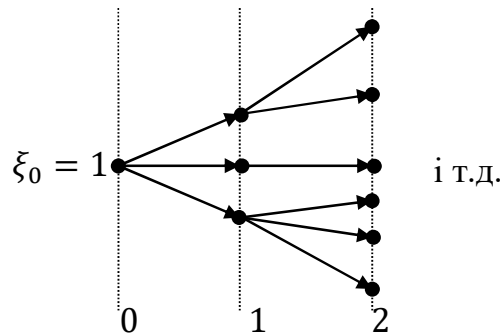
Звідки маємо потенціал ланцюга Маркова ξ_n у вигляді узагальненої оберненої матриці для A :

$$R_0 = (A + \Pi)^{-1} - \Pi = \begin{pmatrix} \frac{12}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{8}{25} & \frac{8}{25} \end{pmatrix}.$$

ЛЕКЦІЯ 6. ПРОЦЕСИ РОЗГАЛУЖЕННЯ

У природі часто зустрічаються системи, стан яких визначається кількістю частинок, які породжують інші частинки, наприклад, популяції тварин чи бактерій, або кількість елементарних частинок у ядерних реакціях. Такими процесами можна описувати, наприклад, епідемічні ситуації, еволюцію чисельності популяції, ядерні процеси тощо. Процеси, що моделюють такі системи називають процесами розгалуження. Розглянемо таку модель процесу

розгалуження: у початковий момент, який ми позначимо $n = 0$, маємо одну частинку. У момент $n = 1$ частинки за певним законом породжує подібні собі частинки, а сама зникає. Далі, у момент $n = 2$ кожна з породжених частинок у свою чергу породжує нові частинки за тим же законом, що і початкова частинка і при цьому самі зникають і так далі.



Вперше такого типу процеси розгалуження використовувались Гальтоном та Уотсоном для обчислення ймовірності зникнення прізвищ у Великобританії.

6.1. Математична модель процесу розгалуження з одним типом частинок.

Нехай $\xi(\omega)$ – випадкова величина, яка приймає значення у $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Нехай $\{\xi_k^{(n)}, k, n \in \mathbb{N}\}$ незалежні в сукупності однаково розподілені випадкові величини з тим же розподілом що й ξ .

Розглянемо випадкову послідовність: $\xi_0 = 1, \xi_n := \sum_{k=1}^{\xi_{n-1}} \xi_k^{(n)}$ для $n \geq 1$.

При $n = 1, \xi_1 = \xi_1^{(1)}$, при $n = 2, \xi_2 := \sum_{k=1}^{\xi_1 = \xi_1^{(1)}} \xi_k^{(2)}$ і так далі.

Означення 6.1. Процес $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – називають процесом розгалуження із законом розмноження ξ .

6.2. Твірна функція та її основні властивості

Означення 6.2. Нехай $a_0, a_1, a_2, \dots$ – деяка числова послідовність. Генератрисою цієї послідовності називається формальний ряд:

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Приклади генератрис. а) Нехай $a_n=1, n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, для $|t| < 1$.

б) Нехай $a_n=1/n!, n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n/n! = e^t$.

Якщо $a_n = p_n$, де p_n – розподіл ймовірностей, то генератрису будемо називати *твірною функцією*.

Нехай $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ – випадкова величина, тоді її твірна функція $\varphi_\xi(s)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(t) &= Et^\xi = 1 \cdot P(\xi = 0) + t \cdot P(\xi = 1) + t^2 \cdot P(\xi = 2) + \dots \\ &= p_0 + t p_1 + t^2 p_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \end{aligned}$$

Основні властивості твірної функції:

- а) $\varphi_\xi(1) = 1$, оскільки $\varphi_\xi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.
- б) $\varphi'_\xi(1) = E\xi$, якщо $E\xi$ існує.
- в) Нехай ξ, η – незалежні випадкові величини, тоді

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t).$$

Доведення властивості 3.

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = Et^{\xi+\eta} = E(t^\xi t^\eta) = Et^\xi Et^\eta = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$$

- д) Якщо ξ приймає значення в $\mathbb{N}_0$, то ряд $\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(\xi = k)$ – збігається рівномірно в область $\{|t| \leq 1\}$.
- е) $\varphi_\xi(t) \in C^\infty (|t| < 1)$.
- ф) $\varphi_\xi(0) = P(\xi = 0)$.

Задача 6.1. Довести властивості 4-6.

Задача 6.2. Знайти твірну розподілу Пуассона з параметром λ .

Нехай $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – процес розгалуження із законом розмноження ξ , а $\varphi_{\xi_n}(t) = Et^{\xi_n}$ – його твірна функція.

Твердження 6.1. Для всіх $n \geq 1$ має місце рівність

$$\varphi_{\xi_n}(t) = \varphi_{\xi_{n-1}}(\varphi_{\xi}(t)).$$

Доведення. Позначимо через $I\{\xi_{n-1} = m\}$ – індикатор події $\{\xi_{n-1} = m\}$, тобто,

$$I\{\xi_{n-1} = m\} = \begin{cases} 1, & \xi_{n-1} = m, \\ 0, & \xi_{n-1} \neq m. \end{cases}$$

Оскільки, як легко бачити, $\sum_{m=0}^{\infty} I\{\xi_{n-1} = m\} = 1$, маємо

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi_n}(t) &= Et^{\xi_n} = E\left(t^{\xi_n} \sum_{m=0}^{\infty} I\{\xi_{n-1} = m\}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} E\left(t^{\sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^{(n)}} I\{\xi_{n-1} = m\}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} E\left(t^{\sum_{k=1}^m \xi_k^{(n)}} I\{\xi_{n-1} = m\}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} Et^{\sum_{k=1}^m \xi_k^{(n)}} E I(\xi_{n-1} = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi_{\xi}(t))^m P(\xi_{n-1} = m) = E\left(\varphi_{\xi}(t)\right)^{\xi_{n-1}} = \varphi_{\xi_{n-1}}(\varphi_{\xi}(t)). \blacksquare \end{aligned}$$

Наслідок 6.1.

$$\varphi_{\xi_n}(t) = \varphi_{\xi_{n-1}}(\varphi_{\xi}(t)) = \varphi_{\xi_{n-2}}(\varphi_{\xi}(\varphi_{\xi}(t))) = \cdots = \underbrace{\varphi_{\xi}(\varphi_{\xi}(\cdots(\varphi_{\xi}(t))\cdots))}_{n \text{ ітерацій}}.$$

Наслідок 6.2. $\varphi_{\xi_n}(t) = \varphi_{\xi}(\varphi_{\xi}(\cdots(\varphi_{\xi}(t))\cdots)) = \varphi_{\xi}(\varphi_{\xi_{n-1}}(t)).$

6.3. Ймовірність виродження процесу розгалуження

Перейдемо до вивчення ймовірності виродження процесу розгалуження. Легко бачити, що мають місце такі рівності множин:

$$\{\text{Процес } \{\xi_n\} \text{ виродився}\} = \{\exists n \in \mathbb{N}: \xi_n = 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi_n = 0\}.$$

Позначимо через $q_n = P(\xi_n = 0)$, $n \in \mathbb{N}$, ймовірність виродження процесу на n -му кроці і через $q = P(\{\text{процес виродився}\})$ – ймовірність того, що процес виродився.

Твердження 6.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$.

Доведення. Легко бачити, що послідовність подій $\{\xi_n = 0\}$ є монотонною, тобто, $\{\xi_n = 0\} \subset \{\xi_{n+1} = 0\}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Із монотонності ймовірності випливає, що $q_n = P(\xi_n = 0) \leq P(\xi_{n+1} = 0) = q_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Оскільки $\{\xi_n = 0\} \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi_n = 0\}$ при $n \rightarrow \infty$, то, в силу неперервності ймовірнісної міри, маємо $P(\xi_n = 0) \rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi_n = 0\})$ при $n \rightarrow \infty$, тобто,

$$q_n \rightarrow q, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Твердження 6.3. Ймовірність виродження q є розв'язком рівняння

$$t = \varphi_{\xi}(t). \quad (6.1)$$

Доведення. Оскільки $q_n = P(\xi_n = 0) = \varphi_{\xi_n}(0)$, за твердженням 6.1, маємо

$$q_n = \varphi_{\xi_n}(0) = \varphi_{\xi}(\varphi_{\xi_{n-1}}(0)) = \varphi_{\xi}(q_{n-1}). \quad (6.2)$$

Переходячи в (6.2) до границі при $n \rightarrow \infty$, маємо, $q_n \rightarrow q$, та $\varphi_{\xi}(q_{n-1}) \rightarrow \varphi_{\xi}(q)$, тобто

$$q = \varphi_{\xi}(q).$$

Очевидно, що рівняння $q = \varphi_{\xi}(q)$ завжди має корінь $q = 1$. (Див. властивість 1 твірної функції). Легко бачити, що якщо $P(\xi = 0) = 1$, то процес вироджується з ймовірністю 1, а, якщо $P(\xi = 1) = 1$, то процес не вироджується з ймовірністю 1.

Теорема 6.1. (Про ймовірність виродження). Позначимо $\mu = E\xi$. Нехай $P(\xi = 0) \neq 1$, $P(\xi = 1) \neq 1$. Тоді мають місце твердження:

1) Якщо $\mu \leq 1$, то рівняння $t = \varphi_\xi(t)$ на відрізку $[0,1]$ має єдиний розв'язок $t = 1$, звідки випливає, що процес вироджується з імовірністю $q = 1$.

2) Якщо $\mu > 1$, то рівняння $t = \varphi_\xi(t)$ на відрізку $[0,1]$ має два розв'язки $t = 1$ та $t_0 \in [0,1)$, причому процес ξ_n вироджується з імовірністю $q = t_0$.

Доведення.

Покажемо, що q – найменший із невід'ємних коренів. Оскільки $\varphi'_\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P(\xi = k) \geq 0$, то $\varphi_\xi(t)$ монотонно неспадна. Нехай існує $p \in [0,1)$ – корінь рівняння $t = \varphi_\xi(t)$, тоді $p \geq q_0 = 0$. Оскільки із $p \geq q_{n-1}$, з урахуванням монотонності φ_ξ , випливає $p = \varphi_\xi(p) \geq \varphi_\xi(q_{n-1}) = q_n$, то за індукцією $p \geq q_n$ для усіх $n \geq 0$. Звідки $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q \leq p$.

Далі, оскільки $\varphi''_\xi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) t^{k-2} P(\xi = k) \geq 0$, то $\varphi'_\xi(t)$ – монотонно неспадна функція, а графік $\varphi_\xi(t)$ є опукла донизу крива. З урахуванням припущення $P(\xi = 1) \neq 1$, пряма $y = t$ може перетинати криву $\varphi_\xi(t)$ не більше ніж у двох точках одна з яких $(1,1)$. Тому рівняння (6.1) може мати не більше одного кореня на $[0,1)$. Якщо рівняння (6.1) має корінь $x_0 \in [0,1)$, то за теоремою Лагранжа існує $\theta \in (x_0, 1)$ така, що

$$1 - x_0 = \varphi_\xi(1) - \varphi_\xi(x_0) = \varphi'_\xi(\theta) (1 - x_0),$$

тобто

$$\frac{1 - \varphi_\xi(x_0)}{1 - x_0} = \varphi'_\xi(\theta) = 1 < \varphi'_\xi(1). \quad (6.3)$$

Отже, рівняння (6.1) має корінь $x \in [0,1)$, тоді і тільки тоді, коли $1 < \varphi'_\xi(1)$

За умови 1) теореми $\varphi'_\xi(1) = \mu \leq 1$, а значить (6.3) не виконується, тобто рівняння (6.1) має єдиний корінь $t = 1$ на $[0,1]$ і процес розгалуження вироджується з імовірністю $q = 1$.

Якщо ж виконується умова 2) теореми, то $\varphi'_\xi(1) = \mu > 1$, а значить (6.3) виконується і рівняння (6.1) має єдиний корінь $x_0 \in [0,1)$ $t = 1$, а процес розгалуження вироджується з імовірністю $q = x_0$.

Твердження 6.4. Процес розгалуження є марковським ланцюгом.

Доведення. Нехай $(\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ – процес розгалуження. Маємо

$$\begin{aligned}
 &P(\xi_{n+1} = j / \xi_n = i, \xi_{n-1} = x_{n-1}, \dots, \xi_1 = x_1) \\
 &= P\left(\sum_{k=1}^{\xi_n} \xi_k^{(n+1)} = j / \xi_n = i, \xi_{n-1} = x_{n-1}, \dots, \xi_1 = x_1\right) \\
 &= P\left(\sum_{k=1}^i \xi_k^{(n+1)} = j / \xi_n = i, \xi_{n-1} = x_{n-1}, \dots, \xi_1 = x_1\right) \\
 &= P\left(\sum_{k=1}^i \xi_k^{(n+1)} = j\right) = P(\xi_{n+1} = j / \xi_n = i).
 \end{aligned}$$

Теорема 6.2. (про середню чисельність покоління) Нехай ξ_n – процес розгалуження. Тоді середня чисельність n -го покоління дорівнює

$$E\xi_n = \mu^n.$$

Доведення. Із властивості b) твірної функції та твердження 6.1 маємо

$$E\xi_n = \varphi'_{\xi_n}(1) = \left(\varphi_{\xi_{n-1}}(\varphi_{\xi}(t))\right)' \Big|_{t=1} = \varphi'_{\xi_{n-1}}(1)\varphi'_{\xi}(\varphi_{\xi}(1)) = \mu E\xi_{n-1}.$$

Звідки за індукцією $E\xi_n = \mu^n$.

Задача 6.3. Знайти ймовірність виродження процесу розгалуження, якщо ξ має геометричний розподіл.

Задача 6.3. Вказати випадкову величину ξ , для якої;

- a) ймовірність виродження процесу розгалуження дорівнює нулю;
- b) ймовірність виродження процесу розгалуження дорівнює одиниці.

ЛЕКЦІЯ 7. МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ З НЕ БІЛЬШ НІЖ ЗЛІЧЕННИМ ФАЗОВИМ ПРОСТОРОМ

Означення 7.1. Випадковий процес $\xi(t)$, $t \geq 0$, називається марковським з фазовим простором станів $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, якщо для кожного $t \geq 0$, $\xi(t) \in X$ і для довільної послідовності $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ послідовність $\{\xi(t_n)\}$ є марковським ланцюгом.

Якщо при цьому марковський ланцюг $\{\xi(t_n)\}$ однорідний, то марковський процес $\xi(t)$ називається однорідним. Для однорідного процесу при $t > 0$ ймовірності

$$p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = x_j / \xi(0) = x_i\}$$

називаються перехідними ймовірностями за час t , а матриця $P(t) = \|p_{ij}(t)\|$ – матрицею перехідних ймовірностей за час t .

Рівняння Чепмена-Колмогорова для марковського процесу $\xi(t)$ має вигляд:

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{l \in \mathbb{N}} p_{il}(t)p_{lj}(s), \quad t, s > 0.$$

Це рівняння є наслідком рівняння Чепмена-Колмогорова для марковських ланцюгів.

Будемо вважати, що $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ і $\lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij}$ для усіх $i, j \in \mathbb{N}$.

Лема 7.1. Перехідні ймовірності $p_{ij}(t)$ рівномірно неперервні по $t > 0$ для усіх $i, j \in \mathbb{N}$.

Доведення. Для $h > 0$, з урахуванням рівняння Чепмена-Колмогорова, маємо

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) &= \sum_{l \in \mathbb{N}} (p_{il}(h) - \delta_{il})p_{lj}(t) \\ &= (p_{ii}(h) - 1)p_{ij}(t) + \sum_{l \neq i} p_{il}(h)p_{lj}(t). \end{aligned}$$

За домовленістю доданок $(p_{ii}(h) - 1)p_{ij}(t) \rightarrow 0$ при $h \downarrow 0$. І доданок

$$\sum_{l \neq i} p_{il}(h)p_{lj}(t) \leq \sum_{l \neq i} p_{il}(h) = 1 - p_{ii}(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \downarrow 0.$$

Для $h < 0$ такого, що $t+h > 0$, з урахуванням рівняння Чепмена-Колмогорова, маємо

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) &= p_{ij}(t+h) - \sum_{l \in \mathbb{N}} p_{il}(t+h)p_{lj}(-h) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{N}} p_{il}(t+h) (\delta_{lj} - p_{lj}(-h)) \\
&= p_{ij}(t+h) (1 - p_{jj}(-h)) - \sum_{l \neq j} p_{il}(t+h)p_{lj}(-h).
\end{aligned}$$

Очевидно, що $p_{ij}(t+h) (1 - p_{jj}(-h)) \leq 1 - p_{jj}(-h) \rightarrow 0$ при $h \uparrow 0$.

Далі,

$$\sum_{l \neq j} p_{il}(t+h)p_{lj}(-h) \leq \sum_{l \neq j} p_{lj}(-h) = 1 - p_{jj}(-h) \rightarrow 0 \text{ при } h \uparrow 0.$$

Теорема 7.1. Для будь-якого $i \in \mathbb{N}$ границя $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1-p_{ii}(h)}{h} = -a_{ii}$ існує, але може бути нескінченною.

Для будь-яких $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ границя $a_{ij} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h}$ існує і скінченна.

Теорема 7.1 приймається без доведення. Доведення цієї теореми можна знайти в [10].

Означення 7.2. Стан x_i називається регулярним, якщо $a_{ii} > -\infty$ та $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} = 0$. Якщо у процесу $\xi(t)$ усі стани регулярні, то він називається локально регулярним.

Розглянемо випадок скінченного фазового простору $X_c = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.

Будемо вважати, що $P(0) = I$, де I – одинична матриця $N \times N$, тобто, $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, тоді $\lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij}$.

Введемо збіжність матриць як по елементну збіжність, тобто, будемо вважати, що $P(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} C = \|c_{ij}\|$, якщо $\forall i, j \in \{1, \dots, N\} p_{ij}(t) \rightarrow c_{ij}$ при $t \rightarrow t_0$.

Отже, із $\lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij}$ випливає $\lim_{h \downarrow 0} P(h) = I$.

Нехай $\xi(t)$ локально регулярний випадковий процес з фазовим простором X_c .

Тоді із властивостей локально регулярного процесу випливає, що існує похідна матриці $P(t)$ у точці $t = 0$

$$A = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(h) - P(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} = \left\| \frac{d}{dt} p_{ij}(0) \right\| = \|a_{ij}\|.$$

Теорема 7.2. Матриця $P(t)$ при $t \geq 0$ задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt} P(t) = AP(t) = P(t)A, \quad (7.1)$$

причому $\frac{d}{dt} P(t)$ – неперервна.

Доведення. Дійсно,

$$\begin{aligned} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} &= P(t) \frac{P(h) - I}{h} \rightarrow P(t)A, & h \downarrow 0, \\ \frac{P(t+h) - P(t)}{h} &= \frac{P(h) - I}{h} P(t) \rightarrow AP(t), & h \downarrow 0. \end{aligned}$$

Тобто, існує права похідна $\frac{d}{dt} P(t) = P(t)A = AP(t)$.

Аналогічно для лівої похідної при $0 < h < t$

$$\frac{P(t) - P(t-h)}{h} = P(t-h) \frac{P(h) - I}{h} \rightarrow P(t)A, \quad h \downarrow 0.$$

Отже, існує права і ліва похідні і вони рівні. Оскільки $P(t)$ неперервна, то із (7.1) випливає, що $\frac{d}{dt} P(t)$ неперервна.

Означення 7.3. Матриця A називається інфінітезимальною матрицею процесу $\xi(t)$.

Із теорії диференціальних рівнянь відомо, що розв'язок (7.1) з урахуванням початкової умови $P(0) = I$ має вигляд

$$P(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

Рівняння (7.1) у координатній формі мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N a_{ik} p_{kj}(t), \quad (7.2)$$

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N p_{ik}(t) a_{kj}. \quad (7.3)$$

Рівняння (7.2) називають оберненими (або першими) рівняннями Колмогорова, а (7.3) – прямими (або другими) рівняннями Колмогорова.

Позначимо $p_j(t) = P(\xi(t) = x_j)$, $a_j = P(\xi(0) = x_j)$, $j = 1, \dots, N$. Тоді

$$p_j(t) = P(\xi(t) = x_j) = \sum_{i=1}^N P(\xi(t) = x_j / \xi(0) = x_i) P(\xi(0) = x_i) = \sum_{i=1}^N p_{ij}(t) a_i.$$

$$\frac{d}{dt} p_j(t) = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} p_{ij}(t) a_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N p_{ik}(t) a_{kj} a_i = \sum_{k=1}^N p_k(t) a_{kj},$$

$$p_j(0) = a_j, j = 1, \dots, N.$$

7.1. Процеси розмноження та загибелі.

Нехай $\xi(t)$, $t \geq 0$ – однорідний марковський процес з фазовим простором $X = \{0, 1, 2, \dots\}$, перехідні ймовірності $p_{ij}(t) = P(\xi(t) = j | \xi(0) = i)$ якого задовольняють такі умови:

$$\begin{aligned} p_{ii+1}(h) &= \lambda_i h + o(h), & i \in X; \\ p_{ii-1}(h) &= \mu_i h + o(h), & i \geq 1; \\ p_{ii}(h) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), & i \in X; \\ p_{ij}(h) &= o(h), & i, j \in X, \quad |i - j| \geq 2, \end{aligned} \tag{7.4}$$

де $\lambda_i > 0$, $i \geq 0$, $\mu_j > 0$, $j \geq 1$, $\mu_0 = 0$.

Твердження 7.1. *В умовах (7.4) перша система рівнянь Колмогорова має вигляд*

$$\frac{d}{dt} p_{0j}(t) = -\lambda_0 p_{0j}(t) + \lambda_0 p_{1j}(t), \tag{7.5}$$

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \mu_i p_{i-1j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1j}(t).$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(h)p_{kj}(t) \\
&= p_{ii-1}(h)p_{i-1j}(t) + p_{ii}(h)p_{ij}(t) + p_{ii+1}(h)p_{i+1j}(t) \\
&\quad + \sum_{\substack{k=0 \\ |i-k| \geq 2}}^{\infty} p_{ik}(h)p_{kj}(t) \\
&= p_{ii-1}(h)p_{i-1j}(t) + p_{ii}(h)p_{ij}(t) + p_{ii+1}(h)p_{i+1j}(t) + o(h).
\end{aligned}$$

З урахуванням умов (7.4)

$$p_{ij}(t+h) = \mu_i h p_{i-1j}(t) + (1 - (\lambda_i + \mu_i)h)p_{ij}(t) + \lambda_i h p_{i+1j}(t) + o(h).$$

Звідки,

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \mu_i p_{i-1j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1j}(t) + \frac{o(h)}{h}. \quad (7.6)$$

Переходячи в (7.6) до границі при $h \downarrow 0$, одержимо (7.5).

Нехай розподіл p_i , $i \in X$ є початковим розподілом, тобто $P(\xi(0) = i) = p_i$.

Якщо цей розподіл стаціонарний, тобто такий, що $p_i(t) = p_i$ для всіх t , то p_i задовольняє рівняння

$$0 = \mu_i p_{i-1} - (\lambda_i + \mu_i)p_i + \lambda_i p_{i+1}.$$

Звідки p_i мають задовольняти

$$p_i = \frac{\lambda_{i-1} \dots \lambda_0}{\mu_i \dots \mu_0}.$$

Для існування стаціонарного розподілу повинна виконуватись умова

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_{i-1} \dots \lambda_0}{\mu_i \dots \mu_0} < +\infty.$$

ЛЕКЦІЯ 8. НАПІВМАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ

8.1. Напівмарковське ядро

Нехай (X, Σ) – вимірний простір, X – фазовий простір станів деякого випадкового процесу, Σ – σ -алгебра підмножин X . Ми припускаємо, що Σ містить усі одноточкові множини X .

Означення 8.1. *Стохастичним ядром на (X, Σ) є дійсна функція двох змінних $P(x, B)$, $x \in X$, $B \in \Sigma$, яка задовольняє такі умови:*

- a) *Для фіксованого x функція $P(x, B)$ є мірою на Σ такою, що $P(x, X) \leq 1$,*
- b) *Для будь-якої фіксованої множини $B \in \Sigma$, $P(x, B)$ є Σ -вимірною функцією по x .*

Означення 8.2. *Невід'ємна функція $Q(x, B, t)$, $x \in X$, $B \in \Sigma$, $t \geq 0$, називається **напівмарковським ядром** якщо виконуються такі умови:*

1. *Для фіксованого $t > 0$ функція $Q(x, B, t)$ є стохастичним ядром (X, Σ) ;*
2. *$Q(x, B, t)$ є неспадна неперервна справа функція по $t \geq 0$ для фіксованих x, B і $Q(x, B, 0) = 0$;*
3. *$Q(x, B, +\infty) = P(x, B)$ є стохастичним ядром;*
4. *$Q(x, X, t) = G_x(t)$ є функцією розподілу по $t \geq 0$ для фіксованого $x \in X$.*

На дискретному фазовому просторі $X = \{1, 2, \dots, n\}$ напівмарковське ядро задається напівмарковською матрицею $Q(t) = \{Q_{ij}(t); i, j \in X\}$, де $Q_{ij}(t)$ неспадна функція по $t \geq 0$ і $P = Q(+\infty) = [p_{ij} = Q_{ij}(+\infty); i, j \in X]$ є стохастичною матрицею.

Приклади напівмарковських матриць:

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}, \quad t \geq 0, \quad \sum_{j \in X} p_{ij} = 1, \quad i \in X. \quad (8.1)$$

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}(1 - e^{-\lambda_i t}), \quad t \geq 0, \quad \sum_{j \in X} p_{ij} = 1, \quad \lambda_i > 0, \quad i \in X. \quad (8.2)$$

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}G_i(t), \quad t \geq 0, \quad \sum_{j \in X} p_{ij} = 1, \quad i \in X, \quad (8.3)$$

де $G_i(t)$ – функції розподілу невід’ємних випадкових величин.

8.2. Процес марковського відновлення (ПМВ)

Припустимо $\{\xi_n, n \geq 0\}$ є марковським ланцюгом з фазовим простором (X, Σ) і $\theta_i, i \geq 0$ – послідовність додатних незалежних випадкових величин на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) .

Розглянемо однорідний двокомпонентний ланцюг Маркова $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$, $\xi_n \in X$, $\theta_n \in [0, +\infty)$ такий, що $P\{\xi_0 \in B\} = p_0(B)$, $B \in \Sigma$;

$$P\{\xi_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t/\xi_0 \in B_0, \theta_0 < t_0, \xi_1 \in B_1, \theta_1 < t_1, \dots, \xi_n \in B_n, \theta_n < t_n\} = \\ P\{\xi_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t/\xi_n \in B_n\},$$

$$\text{де } B_i \in \Sigma, i = 0, 1, \dots, n, \text{ і } \{\xi_{n+1} \in X, \theta_{n+1} \leq \infty/\xi_n = x\} = 1.$$

Означення 8.3. *Однорідний двокомпонентний ланцюг Маркова $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$ називається процесом марковського відновлення (ПМВ) на фазовому просторі (X, Σ) за умови, що його перехідні ймовірності задаються напівмарковським ядром:*

$$Q(x, B, t) = P\{\xi_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t/\xi_n = x\}.$$

З означення ПМВ випливає, що його перша компонента $\{\xi_n, n \geq 0\}$ утворює марковський ланцюг, який називається *вкладеним ланцюгом Маркова*. Невід’ємні випадкові величини $\{\theta_n, n \geq 0\}$, задають інтервали між марковськими моментами відновлення $\tau_n = \sum_{i=0}^n \theta_i$.

Поклавши $t = +\infty$, ми отримаємо перехідні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова

$$P(x, B) = P\{\xi_{n+1} \in B/\xi_n = x\} = Q(x, B, +\infty).$$

Умовна функція розподілу часу відновлення залежить від станів вкладеного ланцюга Маркова наступним чином:

$$G_x(t) = Q(x, X, t) = P\{\theta_{n+1} \leq t/\xi_n = x\}.$$

Час перебування у стані $x \in X$ зручно позначати через θ_x з функцією розподілу $P\{\theta_x < t\} = G_x(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t/\xi_n = x\}$.

8.3. Напівмарковський процес

На ймовірнісному просторі (Ω, F, P) розглянемо послідовність додатних незалежних випадкових величин θ_k , $k \geq 1$ із значеннями у вимірному просторі (X, Σ) . Покладемо $\tau_0 = 0$, $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$ $n \geq 1$. Послідовність $\{\tau_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ називається точковим процесом на (Ω, F, P) .

Розглянемо процес відновлення $\nu(t) = \max_n \{n \geq 0: \tau_n \leq t\}$, $t \geq 0$ і нехай $\{\xi_n, n \geq 0\}$ є марковський ланцюг на (X, Σ) . Позначимо через $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$ ПМВ з вкладеним ланцюгом Маркова $\{\xi_n, n \geq 0\}$ на (X, Σ) і перехідними ймовірностями, які задаються півмарковським ядром:

$$Q(x, B, t) = P\{\xi_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t/\xi_n = x\}.$$

Тоді вкладений ланцюг Маркова $\{\xi_n, n \geq 0\}$ має перехідні ймовірності

$$P(x, B) = P\{\xi_{n+1} \in B/\xi_n = x\} = Q(x, B, +\infty).$$

Час перебування θ_x у стані $x \in X$ має функцію розподілу

$$G_x(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t/\xi_n = x\}.$$

Оскільки $Q(x, B, t) \leq P(x, B)$ для всіх $x \in X$, $t \geq 0$, то із теореми Радона-Нікодіма випливає існування вимірної функції $G_{xy}(t)$ такої, що

$$Q(x, B, t) = \int_B G_{xy}(t) P(x, dy).$$

Легко переконатись, що функція $G_{xy}(t)$ має вигляд

$$G_{xy}(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t/\xi_n = x, \xi_{n+1} = y\}.$$

Функція $G_{xy}(t)$ є функцією розподілу часу перебування ПМВ у стані x при умові переходу в y . Зокрема, якщо $G_{xy}(t) = G_x(t)$ не залежить від y , тоді $G_{xy}(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t/\xi_n = x\}$ і $Q(x, B, t) = P(x, B)G_x(t)$.

Наприклад, у випадку дискретного фазового простору $X = \{1, 2, \dots, n\}$ напівмарковське ядро задається напівмарковською матрицею $Q(t) = \{Q_{ij}(t); i, j \in X\}$, де $Q_{ij}(t)$ може об'являтися у вигляді:

$$Q_{ij}(t) = p_{ij} G_i(t),$$

де $p_{ij}, i, j \in X$, – перехідні властивості вкладеного марковського ланцюга і $G_i(t)$ – функція розподілу часу перебування у стані $i \in X$.

Нехай $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$ є ПМВ з фазовим простором (X, Σ) і напівмарковським ядром $Q(x, B, t)$.

Означення 8.4. Процес $\xi(t) := \xi_{\nu(t)}, t \geq 0$ називається напівмарковським процесом (НМП).

У моменти відновлення τ_n НМП змінює свій стан. Час перебування НМП у стані $\xi_n = x$ дорівнює $\theta_{n+1} = \theta_x$.

Легко бачити, що НМП $\xi(t)$ не змінюється на інтервалі часу $[\tau_n, \tau_{n+1})$ і є неперервним справа:

$$\xi(t) = \xi_n, \tau_n \leq t < \tau_{n+1}.$$

Крім цього, $\xi(\tau_n) = \xi_n, n \geq 0$, де ланцюг Маркова $\xi_n, n = 1, 2, \dots$, називається вкладеним у НМП $\xi(t)$.

Неважко також переконатися, що моменти відновлення τ_n є марковським ланцюгом.

ЛЕКЦІЯ 9. СТРИБКОПОДІБНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ. РІВНЯННЯ МАРКОВСЬКОГО ВІДНОВЛЕННЯ

9.1. Конструктивне задання напівмарковського процесу

Щоб задати конструктивно напівмарковський процес необхідно:

1. Визначити процес марковського відновлення $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$ на фазовому просторі (X, Σ) з початковим розподілом $P_0(B) = P\{\xi_0 \in B\}$, $B \in \Sigma$;
2. Визначити процес відновлення (або лічильний процес) $\nu(t)$, $t \geq 0$ із значеннями у $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.
3. За означення НМП $\xi(t)$, $t \geq 0$, з фазовим простором (X, Σ) визначається так:
 $\xi(t) := \xi_{\nu(t)}$, $t \geq 0$.

Еволюція напівмарківського процесу з фазовим простором $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, (де $B(\mathbb{R})$ – борелівська сигма-алгебра) зображена на графіку:

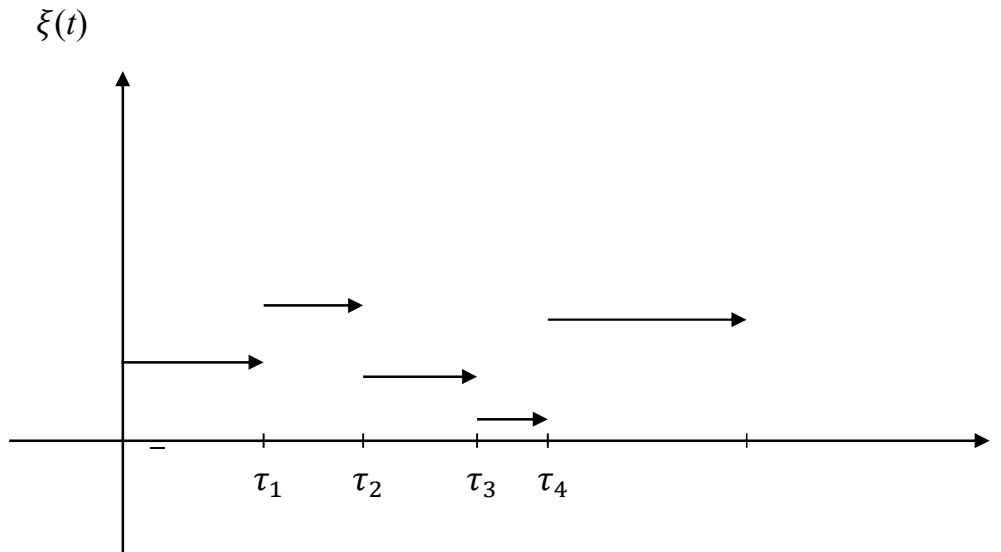


Рис.1

Нехай $X = \{1, 2, \dots, N\}$. Припустимо, що час перебування θ_i напівмарковського процесу $\xi(t)$ у стані i експоненціально розподілена випадкова величина з $\lambda_i > 0$, тобто, $G_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ для $i \in X$.

Добре відомо, що якщо випадкова величина θ є експоненуіально розподіленою ($P(\theta \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$), то

$$P(\theta > t + t_0/\theta > t_0) = P(\theta > t) = e^{-\lambda t}$$

для будь-якого $t_0 \geq 0$. Дійсно, $P(\theta > t) = 1 - P(\theta \leq t) = e^{-\lambda t}$ і

$$\begin{aligned} P(\theta > t + t_0/\theta > t_0) &= \frac{P(\theta > t + t_0, \theta > t_0)}{P(\theta > t_0)} = \frac{P(\theta > t + t_0)}{P(\theta > t_0)} = \frac{e^{-\lambda(t+t_0)}}{e^{-\lambda t_0}} \\ &= e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Ця властивість була названа А. Хінчіним відсутністю післядії.

Нехай $p_{ij}, i, j \in X$ – перехідні ймовірності вкладеного марковського ланцюга. Тоді

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}(1 - e^{-\lambda_i t}).$$

У цьому випадку напівмарковський процес стає марковським, який називають марковським стрибкоподібним процесом.

Марковський стрибкоподібний процес у $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$ на фазовому просторі (X, Σ) загальному випадку визначається напівмарковським ядром з часами відновлення, що мають експоненціальний розподіл:

$$Q(x, B, t) = P(x, B)(1 - e^{-q(x)t}).$$

Функція $q(x) \geq 0, x \in X$, визначає інтенсивності часів відновлення:

$$P\{\theta_{n+1} > t/\xi_n = k\} = e^{-q(x)t}.$$

Марковський стрибкоподібний процес однозначно задається генеруючим ядром

$$Q(x, B) = q(x)(P(x, B) - 1), x \in X, B \in \Sigma,$$

або, для дискретного фазового простору $X = \{1, 2, \dots, N\}$, генеруючою матрицею

$$Q = q(P - I),$$

де $q = [q_i \delta_{ij}; i, j \in X]$ є діагональна матриця інтенсивності; $I = [\delta_{ij}; i, j \in X]$ одинична матриця. Тут,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

є символом Кронекера.

9.2. Рівняння марковського відновлення

Згортка напвмарковського ядра $Q(x, B, t)$ з деякою дійсною функцією $U(t, x)$ має вигляд:

$$Q * U = \int_0^t \int_X Q(x, dy, ds) U(t - s, y).$$

Для дискретного фазового простору $X = \{1, 2, \dots, N\}$ згортка матриці $Q(t) = \{Q_{ij}(t); i, j \in X\}$ з вектор-функцією $U(t) = \{U_i(t); i \in X\}$ має вигляд:

$$Q * U = \left[\sum_{j \in X} \int_0^t Q_{ij}(ds) U_j(t - s); i \in X \right].$$

Відмітимо, що n -та згортка півмарковського ядра $Q(x, B, t)$ з собою

$$Q^{(n)}(x, B, t) = \int_0^t \int_X Q(x, dy, ds) Q^{(n-1)}(y, B, t - s), n \geq 2,$$

дає розподіл процесу марковського відновлення після n кроків

$$Q^{(n)}(x, B, t) = P\{\xi_n \in B, \tau_n \leq t/\xi_0 = x\},$$

що є наслідком рівняння Чепмена-Колмогорова.

Означення 9.1. Рівняння марковського відновлення з даною функцією $V(t, x)$ має вигляд:

$$U(t, x) - \int_0^t \int_X Q(x, dy, ds) U(t - s, y) = V(t, x).$$

Використовуючи позначення для згортки це рівняння можна подати у вигляді:

$$[I - Q] * U = V,$$

де I одиничний оператор (у дискретному випадку $X = \{1, 2, \dots, N\}$, I – одинична матриця). Легко бачити, що $I * U = U * I = U$.

Теорема 9.1. Перехідні ймовірності напвмарковського процесу $\xi(t)$:

$$\varphi(t, x, B) = P\{\xi(t) \in B / \xi(0) = x\}, B \in \Sigma, x \in X, t \geq 0,$$

є розв'язком такого рівняння марковського відновлення

$$\varphi(t, x, B) - \int_0^t \int_X Q(x, dy, ds) \varphi(t - s, y, B) = I_B(x) \bar{G}_x(t),$$

де

$$I_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B, \end{cases}$$

$$i \quad \bar{G}_x(t) = 1 - G_x(t).$$

Доведення. Позначимо через θ_x час перебування НМП $\xi(t)$ у початковому стані $\xi(0) = x$.

Тоді

$$\begin{aligned} P\{\xi(t) \in B / \xi(0) = x\} &= P\{\xi(t) \in B, \theta_x > t / \xi(0) = x\} + \\ &+ P\{\xi(t) \in B, \theta_x \leq t / \xi(0) = x\}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Неважко переконатись, що

$$\begin{aligned} P\{\xi(t) \in B, \theta_x > t / \xi(0) = x\} \\ &= P\{\xi(t) \in B / \xi(0) = x, \theta_x > t\} P\{\theta_x > t / \xi(0) = x\} \\ &= I_B(x) \bar{G}_x(t). \end{aligned}$$

Використовуючи марковську властивість півмарковського процесу у моменти відновлення, ми отримаємо для другого доданку (9.1) таке зображення у вигляді інтегралу згортки:

$$P\{\xi(t) \in B, \theta_x \leq t / \xi(0) = x\} = \int_0^t \int_X Q(x, dy, ds) \varphi(t - s, y, B),$$

що завершує доведення.

ЛЕКЦІЯ 10. ПУАССОНІВСЬКИЙ ПРОЦЕС ТА ЙОГО ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

Означення 10.1. Випадковий процес $(v_t, t \geq 0)$ називається пуассонівським процесом (або процесом Пуассона) інтенсивності $\lambda > 0$, якщо:

1. $v_0 = 0$ м.в.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_0, t_1, \dots, t_n$ таких, що $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ випадкові величини $v_{t_0}, v_{t_2} - v_{t_1}, \dots, v_{t_n} - v_{t_{n-1}}$ незалежні в сукупності. Процес, який задовольняє цю властивість називається процесом з незалежними приростами.
3. $v_t - v_s, 0 \leq s < t$, має розподіл Пуассона з параметром $\lambda(t - s)$, тобто,

$$P(v_t - v_s = k) = \frac{\lambda^k (t - s)^k e^{-\lambda(t-s)}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4. Траєкторії процесу неперервні справа м.в.

Із означення процесу Пуассона випливає, що $\forall t > 0$

$$P(v_t = k) = \frac{\lambda^k t^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Звідки легко бачити, що $Ev_t = \lambda t$ та $\lambda = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} P(v_\Delta = 1)$.

Параметр λ називається **інтенсивністю** пуассонівського процесу v_t .

Пуассонівські випадкові величини дискретні і невід'ємні, а, отже, траєкторії є кусково-постійні неспадні функції, причому стрибки більші від 1 мають нульову ймовірність. Дійсно, позначимо через $\tau_n, n \geq 1$, – моменти стрибків процесу v_t . Тоді $P(\tau_1 > 1) = P(v_t = 0) = e^{-\lambda t}$, тобто, перший стрибок відбудеться через показниково розподілений час. Нехай $0 < t < s$ і $0 < \delta_1 < s - t, 0 < \delta_2$, тоді

$$\begin{aligned} P(\tau_1 \in [t, t + \delta_1], \tau_2 \in [s, s + \delta_2]) &= P(v_t = 0, v_{t+\delta_1} = 1, v_s = 1, v_{s+\delta_2} = 2) \\ &= P(v_t = 0, v_{t+\delta_1} - v_t = 1, v_s - v_{t+\delta_1} = 0, v_{s+\delta_2} - v_s = 1) \\ &= e^{-\lambda} \lambda \delta_1 e^{-\lambda \delta_1} e^{-\lambda(s-t-\delta_1)} \lambda \delta_2 e^{-\lambda \delta_2}. \end{aligned}$$

Звідки щільність розподілу $f_{\tau}(t, s)$ випадкового вектора $\tau = (\tau_1, \tau_2)^t$ має вигляд:

$$f_{\tau}(t, s) = \lambda^2 e^{-\lambda s} I_{\{t < s\}}.$$

Знайдемо щільність розподілу вектора $\eta = (\tau_1, \tau_2 - \tau_1)^t$. Оскільки

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tau,$$

То, позначивши $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, з урахуванням того, що $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, маємо

$$\begin{aligned} f_{\eta}(t, s) &= f_{A\tau}(t, s) = |\det A|^{-1} f_{\tau}(A^{-1}(t, s)^t) = f_{\tau}(t, t + s) = \lambda^2 e^{-\lambda(t+s)} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda s}. \end{aligned}$$

Отже, τ_1 та $\tau_2 - \tau_1$ незалежні і мають експоненціальний розподіл з параметром λ . Аналогічно доводиться, що для довільного натурального $n \geq 2$ випадкові величини $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}$ незалежні в сукупності і кожна із них має експоненціальний розподіл з параметром λ .

Траєкторія процесу Пуассона зображена на Рис. 1.

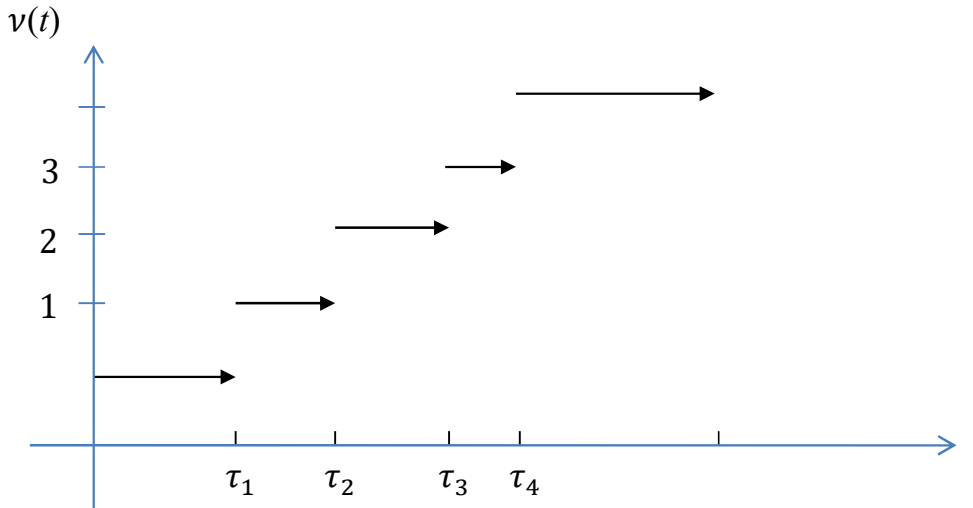


Рис. 1

10.1. Конструктивне задання пуассонівського процесу

Нехай $\{\theta_k, k \geq 1\}$ послідовність незалежних випадкових величин, кожна з яких має експоненціальний розподіл з параметром λ . Покладемо $\tau_0 = 0$, $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$, $n \geq 1$.

Означення 10.2. Процес $(v_t, t \geq 0)$ називається пуассонівським, якщо його можна зобразити у вигляді

$$v_t = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{\tau_i < t\}}.$$

Величини τ_n називаються моментами відновлення процесу Пуассона v_t . Легко бачити, що

$$v_t = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{\tau_i < t\}} = \sup\{n: \tau_n \leq t\}.$$

Звідки одержуємо інше означення процесу Пуассона:

Означення 10.3. Процес $(v_t, t \geq 0)$ називається пуассонівським, якщо v_t – процес відновлення побудований по послідовності $\{\theta_k\}$.

10.2. Основні властивості процесу Пуассона

- 1) Процес Пуассона **стаціонарний**, тобто, ймовірність того, що в інтервал $[a, b)$ попало $n \in \mathbb{N}$ моментів відновлення процесу така ж як для інтервалу $[a + h, b + h)$ для довільного $h > 0$.

Доведення. Позначимо через $P_n[a, b)$ ($P_n[a + h, b + h)$) ймовірність того, що в інтервал $[a, b)$ ($[a + h, b + h)$) попало $n \in \mathbb{N}$ моментів відновлення. Тоді

$$\begin{aligned} P_n[a, b) &= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} I_{\{a \leq \tau_i < b\}} = n\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} I_{\{\tau_i < b\}} - \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{\tau_i < a\}} = n\right) \\ &= P(v_b - v_a = n) = \frac{\lambda^n (b - a)^n e^{-\lambda(b-a)}}{n!}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n[a+h, b+h) &= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} I_{\{a+h \leq \tau_i < b+h\}} = n\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} I_{\{\tau_i < b+h\}} - \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{\tau_i < a+h\}} = n\right) = P(v_{b+h} - v_{a+h} = n) \\
&= \frac{\lambda^n (b-a)^n e^{-\lambda(b-a)}}{n!}.
\end{aligned}$$

- 2) Процес Пуассона **ординарний**, тобто, ймовірність того, що на інтервалі $[a, a + \delta)$ виявиться більше одного моменту відновлення процесу v_t дорівнює $o(\delta)$.

Доведення. Використовуючи попередні позначення, цю ймовірність записуємо у вигляді

$$1 - P_0[a, a + \delta) - P_1[a, a + \delta) = 1 - e^{-\lambda\delta} - \lambda\delta e^{-\lambda\delta} = o(\delta).$$

- 3) **Відсутність післядії.** Кількості моментів відновлення, які попадають у відрізки, що не перетинаються, є незалежні випадкові величини.

Доведення. Ця властивість є наслідком властивості незалежності приростів процесу v_t .

Задача 10.1. Довести, що з додатною ймовірністю траєкторія v_t розривна на довільному скінченному відрізку $[a, b]$.

ЛЕКЦІЯ 11. ПРОЦЕС ВІНЕРА ТА ЙОГО БАЗОВІ ВЛАСТИВОСТІ

11.1. Два еквівалентні означення вінерового процесу

Означення 11.1. Процес $(w_t, t \geq 0)$ називається вінеровим (або процесом броунівського руху), якщо:

1. $w_0 = 0$ (м.в.);
2. w_t має незалежні прирости;
3. $w_t - w_s \sim N(0, t - s)$, $t > s \geq 0$.

Теорема 11.1. Процес $(w_t, t \geq 0)$ є вінеровим тоді і тільки тоді, коли виконуються три умови:

1. w_t – гауссівський процес, тобто, для будь-яких $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ вектор $(w_{t_1}, \dots, w_{t_n})$ має нормальний розподіл;
2. $EW_t = 0 \quad \forall t \geq 0$;
3. $\text{cov}(w_s, w_t) = \min(s, t)$, $s, t \geq 0$.

Доведення. Необхідність. Покажемо, що вінерів процес w_t є гауссівським. Нехай $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ і $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Тоді випадкові величини $w_{t_n} - w_{t_{n-1}}, \dots, w_{t_2} - w_{t_1}, w_{t_1}$ незалежні в сукупності і нормальні. Звідки випливає, що випадковий вектор $\vec{\xi} = (w_{t_n} - w_{t_{n-1}}, \dots, w_{t_2} - w_{t_1}, w_{t_1})$ є нормальним. Розглянемо вектор $\vec{\eta} = (w_{t_n}, \dots, w_{t_1})$, який нам потрібен для доведення. Очевидно, що $\vec{\eta}$ отримується із $\vec{\xi}$ лінійним перетворенням:

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \vec{\xi}. \quad (11.1)$$

А, отже, $\vec{\eta}$ нормальний вектор, тобто, w_t – гауссівський процес.

Відмітимо, що оскільки $w_t \sim N(0, t)$, то $EW_t = 0$.

Далі,

$$\text{cov}(w_s, w_t) = (t > s) = \text{cov}(w_s, w_s + w_t - w_s) =$$

$$\begin{aligned}
&= \text{cov}(w_s, w_s) + \text{cov}(w_s, w_t - w_s) = Dw_s + \text{cov}(w_s, w_t - w_s) = s = \\
&= |\text{в загальному випадку}| = \min(s, t).
\end{aligned}$$

Отже, друге означення вінерового процесу (теорема 13.1.) випливає із першого означення.

Тепер доведемо достатність, тобто, покажемо, що з другого означення вінерового процесу випливає перше.

Спочатку покажемо, що процес, який сформульований у теоремі 11.1 існує. Ми маємо теорему про існування гауссівських випадкових процесів, за якою залишається перевірити, що кореляційна функція $\min(s, t)$ є невід'ємно визначеною.

$$\begin{aligned}
&\text{Нехай } t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+ \text{ і } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \text{ Тоді} \\
&\sum_{i,j=1}^n \min(t_i, t_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \int_0^t I_{[0,t_j]}(y) dy x_i x_j = \int_0^t \sum_{i,j=1}^n x_i I_{[0,t_j]}(y) x_j I_{[0,t_j]}(y) dy = \\
&= \int_0^t \left(\sum_{i,j=1}^n x_i I_{[0,t_j]}(y) \right)^2 dy \geq 0.
\end{aligned}$$

Отже, $\text{cov}(w_s, w_s)$ є невід'ємно визначена і процес існує.

Розглянемо випадковий вектор $(w_{t_n} - w_{t_{n-1}}, \dots, w_{t_2} - w_{t_1}, w_{t_1})$, де $0 < t_1 < \dots < t_n$. Відмітимо, що це гауссівський випадковий вектор, оскільки він отримується лінійним перетворенням гауссівського вектора $(w_{t_n}, w_{t_{n-1}}, \dots, w_{t_1})$ (це випливає із формули 11.2).

Перевіримо, що прирости w_t незалежні, а для цього, оскільки вони нормально розподілені, досить показати, що вони некорельовані. Дійсно,

$$\begin{aligned}
&\text{cov}(w_{t_j} - w_{t_{j-1}}, w_{t_k} - w_{t_{k-1}}) = |j > k| = \\
&= \text{cov}(w_{t_j}, w_{t_k}) - \text{cov}(w_{t_{j-1}}, w_{t_k}) - \text{cov}(w_{t_j}, w_{t_{k-1}}) + \text{cov}(w_{t_{j-1}}, w_{t_{k-1}}) = \\
&= t_k - t_k - t_{k-1} + t_{k-1} = 0.
\end{aligned}$$

Отже, прирости $w_{t_j} - w_{t_{j-1}}, w_{t_k} - w_{t_{k-1}}, j \neq k$, є незалежними.

Далі, оскільки w_t — гауссівський процес, то всі w_t — нормальні випадкові величини, зокрема, w_0 — нормальна. За умовою 2 теореми

$$Ew_0 = 0.$$

Обчислимо дисперсію:

$$Dw_0 = \text{cov}(w_0, w_0) = \min(0, 0) = 0.$$

Отже, w_0 — вироджена гауссівська випадкова величина з розподілом $w_0 \sim N(0, 0)$, а це означає, що $w_0 = 0$ (м.в.).

Залишилось показати, що $w_t - w_s \sim N(0, t - s)$, $t > s \geq 0$. Дійсно, оскільки випадковий вектор (w_t, w_s) — нормальний, то випадкова величина $w_t - w_s$ — нормальна, тому що є лінійним перетворенням цього вектора. За умовою 2 теореми, маємо $E(w_t - w_s) = Ew_t - Ew_s = 0$. Обчислимо дисперсію:

$$\begin{aligned} D(w_t - w_s) &= \text{cov}(w_t - w_s, w_t - w_s) \\ &= \text{cov}(w_t, w_t) - \text{cov}(w_s, w_t) - \text{cov}(w_t, w_s) + \text{cov}(w_s, w_s) \\ &= t - s - s + s = t - s. \end{aligned}$$

Отже, $w_t - w_s \sim N(0, t - s)$, $t > s \geq 0$.

11.2. Властивості траєкторій вінерового процесу

11.2.1. Неперервність

Означення 11.2. Процес $Y_t, t \in T$ називається модифікацією процесу $X_t, t \in T$, якщо $\forall t \in T, P(X_t = Y_t) = 1$.

У цьому випадку кажуть, що процеси X_t та Y_t — стохастично еквівалентні. Траєкторії стохастично еквівалентних процесів можуть суттєво відрізнятись.

Приклад 11.1. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathfrak{B}[0, 1], \text{міра Лебега})$

На відрізку $T = [0, 1]$ визначимо два процеси $\forall t \in T, \omega \in \Omega$

$$X(t) \equiv 0, \quad Y_t = I_{[\omega=t]}$$

Тоді $P(X_t = Y_t) = P(t \neq \omega) = 0 \Rightarrow X_t \sim Y_t$.

З іншого боку, всі траєкторії X_t — неперервні, а всі Y_t — розривні.

Теорема 11.2 (Колмогорова про існування неперервної модифікації).

Нехай $T = [a, b]$ і $(X_t, t \in [a, b])$ — випадковий процес. Якщо існують числа

$C, \alpha, \varepsilon > 0$, що $\forall s, t \in T$ виконується нерівність $E|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\varepsilon}$, то у X_t існує модифікація, всі траєкторії якої неперервні (без доведення).

Теорему приймаємо без доведення.

Наслідок 11.1. Вінерів процес має неперервну модифікацію.

Доведення. Розглянемо $w_t - w_s \sim N(0, |t - s|)$. Із теорії ймовірностей відомо, що

$$E|w_t - w_s|^4 \leq 3|t - s|^2,$$

тобто, маємо $\alpha = 4, C = 3, \varepsilon = 1$. Тоді за теоремою Колмогорова w_t має неперервну модифікацію на будь-якому скінченному відрізку $[a, b]$.

Нехай $w_t^{(n)}$ – неперервна модифікація w_t на $[n, n + 1], n \in \mathbb{Z}_+$. Покладемо

$$X_t = \{w_t^{(n)}, t \in [n, n + 1)\}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

У процесу X_t можливі розриви траєкторій тільки у цілих точках якщо

$$w_{n+1}^{(n)}(\omega) \neq w_{n+1}^{(n+1)}(\omega).$$

але оскільки $w_t^{(n)}$ та $w_t^{(n+1)}$ – це модифікації процесу w_t , то

$$P(w_{n+1}^{(n)} = w_{n+1}) = 1 = P(w_{n+1}^{(n+1)} = w_{n+1}).$$

Отже, ймовірність того, що траєкторія процесу X_t має розрив така ж як і ймовірність події $\{\exists n \in \mathbb{N}: w_{n+1}^{(n)} \neq w_{n+1}^{(n+1)}\}$, але з урахуванням вищесказаного маємо

$$P(\exists n \in \mathbb{N}: w_{n+1}^{(n)} \neq w_{n+1}^{(n+1)}) = 0.$$

Позначимо $\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{якщо } \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1}^{(n)} = w_{n+1}^{(n+1)}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

Отже, $\tilde{X}_t(\omega)$ – шукана модифікація X_t з неперервними траєкторіями.

Зауваження 11.1. У теоремі Колмогорова $\varepsilon > 0$. Ця умова істотна.

Покажемо, що якщо $\varepsilon = 0$, то теорема не виконується.

Дійсно, розглянемо процес Пуассона $\{v_t, t \geq 0\}$ з інтенсивністю $\lambda > 0$.

Тоді $E|v_t - v_s| = \lambda|t - s|$, тобто, задовольняється умова теореми з $\varepsilon = 0$.

Але з ймовірністю 1 траєкторії $v_t, t \geq 0$ розривні на всій $\mathbb{R}_+$, і з додатною ймовірністю траєкторія v_t розривна на довільному скінченному відрізку $[a, b]$.

11.2.2. Недиференційованість траєкторій вінерового процесу

Теорема 11.3. Нехай $s = t_{0,n} < t_{1,n} < \dots < t_{n,n} = t$ – послідовність розбиттів відрізка $[s, t]$ з $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_i |t_{i,n} - t_{i-1,n}| = 0$. Тоді

$$S_n = \sum_{i=1}^{n+1} (w_{t_{i,n}} - w_{t_{i-1,n}})^2 \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Обчислимо ES_n, DS_n .

$$ES_n = \sum_{i=1}^{n+1} E(w_{t_{i,n}} - w_{t_{i-1,n}})^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (t_{i,n} - t_{i-1,n}) = t - s.$$

Враховуючи незалежність приростів, маємо

$$DS_n = \sum_{i=1}^{n+1} D(w_{t_{i,n}} - w_{t_{i-1,n}})^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \left[E(w_{t_{i,n}} - w_{t_{i-1,n}})^4 - \left(E(w_{t_{i,n}} - w_{t_{i-1,n}})^2 \right)^2 \right].$$

Як відомо з теорії ймовірностей, якщо $\xi \sim N(0, \sigma^2)$, то $E\xi^4 = 3\sigma^2$, звідки

$$\begin{aligned} DS_n &= 2 \sum_{i=1}^{n+1} (t_{i,n} - t_{i-1,n})^2 \leq 2 \max_i |t_i - t_{i-1}| \sum_{i=1}^{n+1} (t_{i,n} - t_{i-1,n}) \\ &= 2 \max_i |t_i - t_{i-1}| (t - s) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Звідки випливає $S_n - ES_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty$.

Із математичного аналізу ми знаємо, що варіацією функції f на відрізку $[a, b]$ називається величина

$$var_{[a,b]}(f) = \sup \sum_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|,$$

де супремум береться по всіх розбиттях відрізка $[a, b]$. Якщо f на відрізку $[a, b]$ має похідну, то

$$var_{[a,b]}(f) = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Зауваження 11.1. Із математичного аналізу відомо, що якщо f неперервна на відрізку $[a, b]$ і $\text{var}_{[a, b]}(f) < +\infty$, то $\lim_n \sum_i (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 = 0$ при $\max_{n \rightarrow +\infty} (t_{i+1} - t_i) = 0$

Теорема 11.4. З ймовірністю 1 траєкторії вінерового процесу не диференційовані в жодній точці півосі $[0, +\infty)$.

Доведення. Із того, що за теоремою 11.3 $S_n \xrightarrow{P} b - a$ випливає, що існує підпослідовність $\{n_m\}$ така, що $S_{n_m} \rightarrow b - a$ (м.в.). Але, згідно зауваження 11.1, будь-яка траєкторія $t \rightarrow w_t$, для якої це виконується, має необмежену варіацію.

11.2.3. Закон повторного логарифма (ЗПЛ)

Теорема 11.5 (ЗПЛ) Для вінерового процесу w_t має місце

$$P \left(\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{w_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right) = 1.$$

Без доведення.

Наслідок 11.2.

$$P \left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{w_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \right) = 1.$$

Доведення. Розглянемо $Y_t = -w_t$. Тоді Y_t – вінерів. Дійсно, Y_t має незалежні прирости, $Y_0 = 0$ (м.в.) та $Y_t - Y_s \sim N(0, |t - s|)$.

Звідки

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{w_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{-Y_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = - \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{Y_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \text{ (м. в.)}$$

згідно закону повторного логарифма.

Наслідок 11.3. (локальний закон повторного логарифма)

$$P \left(\limsup_{t \rightarrow +0} \frac{w_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1 \right) = 1.$$

Доведення. Розглянемо процес

$$B_t = \begin{cases} t w_{\frac{1}{t}}, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Покажемо, що B_t – вінеровий процес. Нехай $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ – є лінійним перетворенням вектора $(w_{\frac{1}{t_1}}, \dots, w_{\frac{1}{t_n}})$, а це гаусівський вектор, оскільки w_t – гаусівський. Отже, $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ – гаусівський вектор. Далі,

$$EB_t = Etw_{\frac{1}{t}} = 0 \text{ для } t > 0, EB_0 = 0.$$

$$\text{cov}(B_s, B_t) = \text{cov}\left(sB_{\frac{1}{s}}, sw_{\frac{1}{t}}\right) = st \min\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) = \frac{st}{\max(s, t)} = \min(s, t)$$

За теоремою 11.1 B_t – вінеровий.

Маємо

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{w_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} &= \left| \begin{array}{c} \text{заміна часу} \\ s = \frac{1}{t} \end{array} \right| \\ &= \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{w_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2 \frac{1}{s} \ln \ln s}} = \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{sw_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2s \ln \ln s}} = \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{B_s}{\sqrt{2s \ln \ln s}} = 1 \end{aligned}$$

за законом повторного логарифма. І в силу симетрії, маємо

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{w_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = -1\right) = 1.$$

ЛЕКЦІЯ 12. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ МАРТИНГАЛІВ

12.1. Умовне математичне сподівання

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір і $\Delta = \{D_1, D_2, \dots\}$ деяке не більш ніж зліченне розбиття Ω набором множин $\{D_i\} \subset \mathcal{F}$ таких, що $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$ і $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \Omega$.

Припустимо, що $P(D_i) > 0$ для всіх $i \geq 1$. У цьому випадку умовна ймовірність випадкової події A відносно Δ є величина

$$P(A/\Delta)(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A/D_j) I_{D_j}(\omega).$$

Неважко помітити випадкова величина $P(A/\Delta)(\omega)$ є $\sigma a(\Delta)$ -вимірною.

Відмітимо, що у скінченному випадку $a(\Delta) = \sigma a(\Delta)$.

Для простої випадкової величини $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^k x_i I_{A_i}(\omega)$ умовне математичне сподівання $E(\xi/\Delta)$ випадкової величини $\xi(\omega)$ відносно Δ має вигляд:

$$E(\xi/\Delta) = \sum_{i=1}^k x_i P(A_i/\Delta) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\infty} x_i P(A/D_j) I_{D_j}(\omega).$$

Очевидно, що $E(\xi/\Delta)$ також $\sigma a(\Delta)$ -вимірна. З цієї причини $E(\xi/\Delta)$ позначають як $E(\xi/\mathfrak{F})$, де $\mathfrak{F} = \sigma a(\Delta)$, а $P(A/\Delta)$ позначають як $P(A/\mathfrak{F})$.

Властивості

Лема 12.1. Для довільної $B \in \mathfrak{F}$ має місце

$$\int_B E(\xi/\mathfrak{F}) dP = \int_B \xi dP.$$

Доведення. Нехай $\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ – скінченна декомпозиція Ω . Тоді алгебра $a(\Delta)$ (вона ж є і σ -алгеброю $\sigma a(\Delta)$) має вигляд

$$\sigma a(\Delta) = a(\Delta) = \left\{ \bigcup_{s=1}^t D_{j_s} : 1 \leq t \leq n, \{D_{j_1}, \dots, D_{j_t}\} \subset \Delta \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

Отже, якщо $B \in \sigma a(\Delta)$, то існують множини $\{D_{j_1}, \dots, D_{j_m}\} \subset \Delta$ такі, що

$$B = \bigcup_{s=1}^m D_{j_s}.$$

Отже, припустивши, що

$$P(D_j \cap B) = \begin{cases} P(D_j), & D_j \subset B, \\ 0, & D_j \not\subset B, \end{cases}$$

маємо

$$\begin{aligned} \int_B E(\xi/\mathfrak{F}) dP &= \int_B \sum_{i=1}^k x_i P(A_i/\Delta) dP = \int_B \left[\sum_{i=1}^k x_i \sum_{j=1}^n P(A_i/D_j) I_{D_j}(\omega) \right] dP = \\ &= \sum_{i=1}^k x_i \sum_{j=1}^n P(A_i/D_j) P(D_j \cap B) = \sum_{i=1}^k x_i \sum_{s=1}^m P(A_i/D_{j_s}) P(D_{j_s}) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i \sum_{s=1}^m P(A_i \cap D_{j_s}) = \sum_{i=1}^k x_i P\left(A_i \cap \bigcup_{s=1}^m D_{j_s}\right) = \sum_{i=1}^k x_i P(A_i \cap B) \\ &= \int_B \xi dP. \end{aligned}$$

Використовуючи властивість умовного математичного сподівання для простої випадкової величини, доведену у лемі 12.1, дамо означення математичного сподівання для довільної невід'ємної випадкової величини:

Нехай $\mathfrak{F}$ є σ -алгебра така, що $\mathfrak{F} \subset \mathcal{F}$.

Означення 12.1. Умовне математичне сподівання невід'ємної випадкової величини ξ по відношенню до σ -алгебри $\mathfrak{F}$ є невід'ємна випадкова величина $E(\xi/\mathfrak{F})$ така, що

1. $E(\xi/\mathfrak{F})$ є $\mathfrak{F}$ -вимірною;
2. Для довільного $B \in \mathfrak{F}$, $\int_B E(\xi/\mathfrak{F}) dP = \int_B \xi dP$.

Введемо випадкові величини

$$\xi^+ = \max(\xi, 0) \text{ та } \xi^- = -\min(\xi, 0).$$

Означення 12.2. Умовне математичне сподівання невід'ємної випадкової величини ξ по відношенню до σ -алгебри $\mathfrak{F}$ визначене, якщо майже всюди

$$\min(E(\xi^+/\mathfrak{F}), E(\xi^-/\mathfrak{F})) < +\infty.$$

У цьому випадку

$$E(\xi/\mathfrak{F}) \stackrel{\text{def}}{=} E(\xi^+/\mathfrak{F}) - E(\xi^-/\mathfrak{F}).$$

На P -нульовій множині, де $\min(E(\xi^+/\mathfrak{F}), E(\xi^-/\mathfrak{F})) = +\infty$, ми припускаємо, що $E(\xi/\mathfrak{F}) = 0$.

Існування умовного математичного сподівання для невід'ємної випадкової величини впливає з теореми:

Теорема 12.1 (Радон-Никодим). Нехай $\mathfrak{F}$ є σ -алгебра, $\mathfrak{F} \subset \mathcal{F}$ і ξ є невід'ємною випадковою величиною. Тоді існує невід'ємна $\mathfrak{F}$ -вимірна випадкова величина η така, що для довільного $B \in \mathfrak{F}$ має місце

$$\int_B \eta dP = \int_B \xi dP.$$

Без доведення.

Отже, позначимо $E(\xi/\mathfrak{F}) = \eta$.

Властивості умовного математичного сподівання:

1. Якщо $\xi = C \in \mathbb{R}$ (м.в.), то $E(\xi/\mathfrak{F}) = C$ (м.в.).
2. Якщо $\xi \leq \eta$ (м.в.), то $E(\xi/\mathfrak{F}) \leq E(\eta/\mathfrak{F})$ (м.в.).
3. Якщо $a, b \in \mathbb{R}$ і ξ, η невід'ємні випадкові величини, то $E(a\xi + b\eta/\mathfrak{F}) = aE(\xi/\mathfrak{F}) + bE(\eta/\mathfrak{F})$ (м.в.).
4. Нехай $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Тоді $E(\xi/\mathfrak{F}_0) = E\xi$ (м.в.).
5. $E(\xi/\mathcal{F}) = \xi$ (м.в.).
6. $EE(\xi/\mathfrak{F}) = E\xi$ (м.в.).
7. Нехай η – $\mathfrak{F}$ -вимірна випадкова величина, $E|\xi| < +\infty$ і $E|\xi\eta| < +\infty$. Тоді

$$E(\xi\eta/\mathfrak{F}) = \eta E(\xi/\mathfrak{F}) \quad (\text{м.в.}).$$

Вправа 12.1. Довести властивості 1 – 7.

Приклад 12.1. Нехай ξ та η – випадкові величини з сумісною щільністю розподілу $f_{\xi\eta}(x, y)$. Розглянемо $f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$, де $f_{\eta}(y)$ – щільність розподілу η . Тоді

$$P(\xi \in B / \eta = y) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y) dx, \quad (10.1)$$

де $B \in B(R)$.

Співвідношення (10.1) є наслідком формули

$$P(\xi \in B / \eta \in B_1) = \frac{P(\xi \in B \cap \eta \in B_1)}{P(\eta \in B_1)} = \frac{\int_B \int_{B_1} f_{\xi\eta}(x, y) dx dy}{\int_{B_1} f_{\eta}(y) dy}$$

і того, що для нескінченно малої множини B_1 такої, що $y \in B_1$, маємо

$$\frac{\int_B \int_{B_1} f_{\xi\eta}(x, y) dx dy}{\int_{B_1} f_{\eta}(y) dy} \approx \int_B f_{\xi|\eta}(x|y) dx.$$

Звідки, для умовного математичного сподівання, маємо

$$E(\xi / \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi|\eta}(x|y) dx.$$

12.2. Елементи теорії мартингалів

Нехай (Ω, F, P) – ймовірнісний простір, T – деякий інтервал дійсних чи натуральних чисел. Тобто, T може бути однією із такого типу множин: $T = [0, +\infty)$, $T = [0; s]$, $s \in (0, +\infty)$, $T = \{1, 2, \dots, n\}$ чи $T = \{1, 2, \dots\}$.

Позначимо через $\{F_t\}$, $t \in T$ набір випадкових подій, які ми можемо спостерігати до моменту часу t . Логічно вважати що $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ для усіх $t_1 < t_2$. Розглянемо сімейство випадкових величин $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $t \in T$, які можуть бути визначені до моменту часу t . Отже, $\xi(t) \in F_t$ -вимірною для кожного $t \in T$. Перейдемо до строгих означень.

Означення 12.3. Сімейство σ -алгебр $\{F_t\}$, $t \in T$, що задовольняє умову

$F_{t_1} \subset F_{t_2} \subset F$ для усіх $t_1 < t_2$ називається фільтрацією. F_t інтерпретується як відповідна інформація доступна до моменту t і кількість інформації зростає з плином часу.

Означення 12.4. Випадковий процес $\xi(t)$ узгоджений з фільтрацією $\{F_t\}$, якщо випадкова величина $\xi(t) \in F_t$ -вимірною для всіх $t \in T$.

Надалі, у разі $T = [0, +\infty)$ або $T = [0; s]$, $s \in (0, +\infty)$, будемо вважати що фільтрація неперервна справа: $\bigcap_{s>t} F_s = F_{t+} = F_t$ і повна: $\{A: P(A) = 0\} \in F_0$.

Для довільного випадкового процесу $\xi(t)$ ми визначаємо $F_t^\xi = \sigma\{\xi(s); s \leq t\}$ – σ -алгебру подій, отриманих спостереженням процесу $\xi(s)$ до моменту часу t .

Процес $\xi(t)$ узгоджений з фільтрацією F_t , якщо $F_t^\xi \subset F_t$ для кожного $t \in T$.

Означення 12.5. Процес $\xi(t)$, $t \in T$ називається F_t -мартингал, якщо

1. Процес $\xi(t)$ узгоджений з F_t ;
2. $E|\xi(t)| < +\infty$ для всіх $t \in T$;
3. $E(\xi(t)/F_s) = \xi(s)$, $s < t$ (м.в.).

Процес $\xi(t)$ називається мартингалом, якщо $F_t^\xi = F_t$ для кожного $t \in T$.

Приклади:

1. Нехай ξ_i , $i \geq 0$, – послідовність незалежних випадкових величин з $E\xi_i = 0$. Позначимо через $F_n^\xi = \sigma\{\xi_i; 0 \leq i \leq n\}$ мінімальну σ -алгебру індуковану випадковими величинами $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, тобто, $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in F_n^\xi$ -вимірними і не існує σ -алгебри $T \subset F_n^\xi$ (крім самої F_n^ξ) такої, що всі $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – T -вимірні.

Послідовність $\eta_n = \sum_{i=0}^n \xi_i$, $n \geq 1$ є мартингалом, узгодженим з фільтрацією F_n^ξ .

Дійсно, з урахуванням незалежності $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, для всіх $n > m$, маємо

$$\begin{aligned}
E(\eta_n/F_m^\xi) &= E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i / F_m^\xi\right) = E\left(\sum_{i=1}^m \xi_i / F_m^\xi\right) + E\left(\sum_{i=m}^n \xi_i / F_m^\xi\right) \\
&= \sum_{i=1}^m \xi_i + E \sum_{i=m}^n \xi_i = \sum_{i=1}^m \xi_i = \eta_m
\end{aligned}$$

2. Нехай ξ – випадкова величина така, що $E|\xi| < +\infty$, $\{F_t\}$ – довільна фільтрація. Тоді випадковий процес $\xi(t) = E(\xi/F_t)$ – мартингал.

Дійсно, з урахуванням властивості 7, для $s < t$ маємо:

$$E(\xi(t)/F_s) = E(E(\xi/F_t)/F_s) = E(\xi/F_s) = \xi(s).$$

12.3. Квадратична характеристика мартингала

Означення 12.6. Випадковий процес $\eta(t), t \in T$, узгоджений з фільтрацією F_t називається зростаючим, якщо $\eta(0) = 0$, $\eta(s) \leq \eta(t)$, (м.в.) для $s \leq t$.

Зростаючий процес $\eta(t)$ називається інтегрованим, якщо

$$\lim_{t \rightarrow T} E\eta(t) < +\infty.$$

Означення 12.7. Мартингал $\xi(t)$, називається квадратично інтегрованим, якщо

$$\sup_{t \in T} E\xi^2(t) < +\infty.$$

Теорема 12.2. (розклад Дуба-Мейєра). Припустимо, що $\xi(t), t \in T$ квадратично інтегрований F_t -мартингал. Тоді існує розклад для $\xi^2(t)$ такого виду

$$\xi^2(t) = \langle \xi \rangle(t) + \bar{\xi}(t),$$

де $\bar{\xi}(t) \in F_{t-}$ мартингал, а $\langle \xi \rangle(t)$ – зростаючий квадратично інтегрований процес, узгоджений з фільтрацією $\{F_t\}$.

Без доведення.

Означення 12.8. Процес $\langle \xi \rangle(t)$ називається квадратичною характеристикою мартингала $\xi(t)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения [Текст] / В. Феллер, том 1 – М.: Мир, 1984. – 527 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения [Текст] / В. Феллер, том 2 – М.: Мир, 1984. – 750 с.
3. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов [Текст] / А. Д. Вентцель. – М.: Наука, 1975. – 316 с.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов [Текст] / И. И. Гихман, А. В. Скороход – М.: Наука, 1977. – 568 с.
5. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы [Текст] / Дж. Л. Дуб. – М.: Издательство иностранной литературы 1956. – 600 с.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей [Текст] / Б. В. Гнеденко – М.: Наука, 1969. – 400 с.
7. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика : навч. посібник [Текст] / М. В. Карташов – К.: Київський університет, 2008. – 504 с.
8. Королюк В. С. Стохастичні моделі систем [Текст] / В. С. Королюк – К.: Либідь, 1993. – 136 с.
9. Королюк В.С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения [Текст] / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин – К.: Наукова думка, 1976. – 182 с.
10. Скороход А. В. Лекції з теорії випадкових процесів : навч. посібник [Текст] / А. В. Скороход. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.

Навчальне видання

Погоруй Анатолій Олександрович
Чемерис Ольга Анатоліївна

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

навчальний посібник