ЯК НАВЧИТИ УЧНІВ ПОБУДОВАМ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

Юлія КОРОБЧУК — учитель математики та інформатики ЗОШ № 6 І — ІІІ ступенів, м. Новоград-Волинський, Житомирська область;
Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету ім. І. Я. Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. У статті розкриваються практичні засади розв'язання проблеми навчання побудовам стереометричних фігур учнями з урахуванням принципу поетапного формування часткових умінь. Наголошується на актуальності створення комп'ютерно-орієнтованих технологій навчання геометрії.
Ключові слова. Побудова проекційного креслення (малюнка), програма Cabri 3D, стереометрія, наочність.

Юлия КОРОБЧУК. Как обучить учащихся построению пространственных фигур
Аннотация. В статье раскрываются практические основы решения проблемы обучения построению стереометрических фигур учащимися с учётом принципа поэтапного формирования частичных умений. Ставится ударение на актуальности создания компьютерно-ориентированных технологий обучения геометрии.
Ключевые слова. Построение проекционного чертежа (рисунка), программа Cabri 3D, стереометрия, наглядность.

Yuliya KOROBCHUK. How to teach pupils to the constructions of stereometry figures
Summary. The article reveals the practical basis for solving the problem of teaching students to build stereometric figures, taking into account the principle of the gradual formation of partial skills. Emphasis is placed on the relevance of creating computer-oriented technologies for teaching geometry.
Keywords. The construction of projection drawing (drawing), Cabri 3D program, stereometry, clearness.

У друкованих навчальних працях можна зустріти чималий перелік матеріалів, присвячених застосуванню динамічних середовищ на уроках математики. Науковці і вчителі-практики відзначають не лише необхідність застосування таких середовищ для спрощення роботи вчителя на уроці, а й доцільність використання ППЗ для створення власного навчального світу учня, в якому мають бути особисті пошуки і власні відкриття. І саме такі середовища, де можливі конструктивні підходи, неформалізовані розв'язання, дослідження граничних випадків, дозволяють досить ефективно проникнути в сутність розглядуваного явища, зосередити увагу на побудові моделі та інтерпретації результатів і відійти від рутинного (обчислювального) боку задачі.

Кількість розроблених інтерактивних математичних середовищ, котрі підтримують 3D-дослідження, обмежена, методичні прийоми щодо застосування описані не надто глибоко. Поряд із цим, сучасні освітянські технології вельми потребують таких засобів навчання [5].

До накреслень просторових фігур у школі, як відомо, висуваються такі вимоги: а) правильності; б) наочності; в) простоти у виконанні.

У стереометрії тіла і поверхні зображують плоским малюнком, а це означає, що такий малюнок багато в чому умовний, зокрема, лінійні й кутові розміри на ньому спотворюються. Побудови проводяться подумки, з уявлень. Малюнок, яким супроводжують задачу на обчислення, носить переважно ілюстративний характер. Зазначені особливості стереометричних креслень у багатьох учнів викликають труднощі. Школярі часто не можуть їх ні зрозуміти, ні виконати.

Учитель має прагнути зробити малюнок якомога наочнішим, адже його головним завданням є викликати просторове уявлення досліджуваних геометричних залежностей і співвідношень. Не слід при цьому змішувати наочність із правильністю, адже малюнок може бути правильним, але ненаочним.

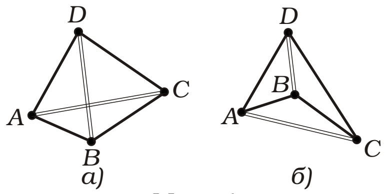
Перші уроки стереометрії присвячені ознайомленню з основними поняттями, аксіомами та наслідками з них. Важливою метою цього етапу є вирізнення способів задавання площини. Далі потрібно пригадати позначення, якими користувалися у планіметрії, і ввести нову суто стереометричну символіку.

Побудова проекційного креслення (малюнка) піраміди.

Зображенням піраміди є плоска фігура, що складається із многокутника — основи піраміди-оригіналу — та кількох трикутників із загальною вершиною, які зображують бічні грані піраміди.

Зображенням тетраедра в паралельній проекції може слугувати будь-який повний чотирикутник. Повним чотирикутником називається фігура, що об'єднує плоский чотирикутник із двома його діагоналями.

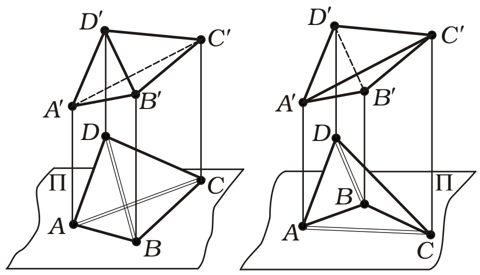
Повний чотирикутник може бути опуклим або неопуклим (мал. 1, *а*, *б*).



а) б)

Мал. 1

Якщо розглядати різні положення каркасного тетраедра $A'B'C'D'$ відносно площини проекцій П, а напрям проекціювання обрати таким, щоб жодна із граней тетраедра не лежала у проекціювальній площині, то можна помітити, що ребра даного тетраедра зображуються сторонами і діагоналями повного чотирикутника *ABCD*, опуклого або неопуклого (мал. 2, *а*, *б*).

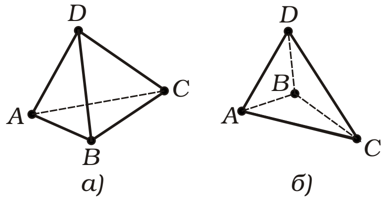


а) б)

Мал. 2

Цей факт було вперше сформульовано у вигляді теореми в 1853 р. німецьким математиком *К. Польке* для окремого випадку тетраедра, а потім (у 1864 р.) узагальнений для довільного тетраедра учнем К. Польке — німецьким математиком *Г. Шварцем*. Теорему називають **теоремою Польке-Шварца** [2].

Для зображення трикутної піраміди, треба спершу накреслити «косий» чотирикутник *DACB* (мал. 3, *а*). При цьому бажано перетин сторін чотирикутника *AB* і *BC* будувати під тупим кутом, близьким до 120°, й одну із сторін — меншою приблизно у два рази. Градусна міра інших кутів не повинна перевищувати 90°. Далі слід докреслити ще два ребра *AC* і *DB*. Невидимі ребра тетраедра зображають відрізками штрихових ліній, а видимі – суцільних основних. Щоб досягти кращої наочності зображення, рекомендується звести до мінімуму число невидимих ребер і граней. У такому розумінні малюнок 3, *а* правильний і наочний, а малюнок 3, *б* хоч і є правильним, проте ненаочним.

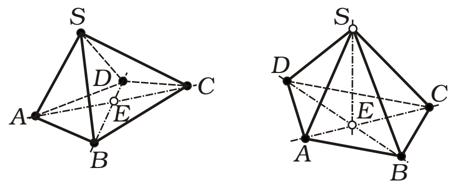


а) б)

Мал. 3

Коли зображаємо правильну трикутну піраміду, центр трикутника основи *O* знаходимо у перетині його медіан, а висоту *DO*, накреслену як правило штрих-пунктирною тонкою лінією, розташовуємо вертикально.

Для побудови зображення будь-якої чотирикутної піраміди виділимо спочатку в уявленнях трикутну піраміду $S'A'B'C'$ і зобразимо її у вигляді деякого повного чотирикутника *SABC* за вже відомим правилом (мал. 4, *а*). З метою побудови точки *D*, на діагональ *AC* основи піраміди візьмемо точку *E* так, щоб не порушити форму чотирикутника *ABCD*. Якщо, наприклад, в основі лежить трапеція (мал. 4, *б*), то її сторони *AB* і *CD* зображатимемо паралельними, а точку *E* вибираємо розумно на стороні *AC* трикутника *ABC*. Якщо ж це рівнобічна трапеція, то оскільки при паралельному проекціюванні просте відношення трьох точок на прямій зберігається, відношення відрізків *AE* : *EC* і *BE* : *ED* мають бути рівними. З'єднавши точку *D* відрізками прямих з точками *A*, *S* і *C*, отримуємо шукане зображення *SABCD* піраміди. Наочності досягаємо тим, що видимі ребра піраміди подаємо відрізками суцільної основної лінії, а невидимі — штрихової; діагоналі чотирикутника *ABCD*, як допоміжні у побудові, зображаємо суцільною тонкою (чи штрих-пунктирною) лінією.

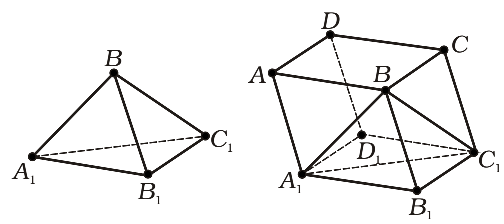


а) б)

Мал. 4

Побудова проекційного креслення (малюнка) паралелепіпеда.

Зображенням паралелепіпеда (зокрема, прямокутного паралелепіпеда і куба) є фігура, що складається із трьох пар паралелограмів, причому в кожній парі один із них отримується з іншого паралельним перенесенням.



а) б)

Мал. 5

Спочатку за вже відомою схемою будуємо повний чотирикутник $A_1B_1C_1B$ (мал. 5, *а*), що є зображенням уявлюваного тетраедра $A'_1B'_1C'_1B'$. Тут відрізки зі спільною точкою *B* вибираємо так, щоб $BC : AB \approx 1 : 2$, а кут *ABC* був близьким до 120°. Оскільки при паралельному проекціюванні рівні паралельні відрізки також зображують рівними паралельними відрізками, то відрізки-зображення інших ребер паралелепіпеда-оригіналу будуємо рівними і паралельними одному з відрізків B_1A_1, B_1C_1 і B_1B відповідно. Тоді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 5, *б*) — шукане зображення паралелепіпеда, на якому протилежні грані зображено рівними паралелограмами. Видимі ребра паралелепіпеда подаємо відрізками суцільних основних ліній, невидимі — штрихових.

Практично паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можна зображати ще й так:

1. Верхню основу паралелепіпеда — паралелограм $ABCD$ – зображуємо щоб сторони AD і AB складали кут не більший 45°, AB мала горизонтальне розміщення та, до того ж, AD була меншою AB приблизно у два рази.

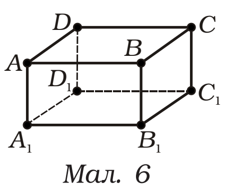
2. Проводимо з одного боку від площини паралелограма (зверху → вниз) рівні й паралельні відрізки AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1.

3. Наводимо паралелограм $A_1B_1C_1D_1$.

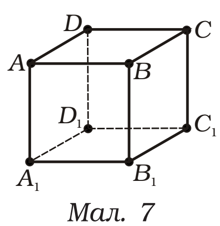
4. Виділяємо видимі та невидимі ребра.

У таких побудовах слід враховувати, що у паралелепіпеда всі грані — прямокутники, а у куба — квадрати. Це означає, що зображенням кожної грані одного й іншого тіла є паралелограм. Оскільки бічні ребра прямокутного паралелепіпеда і куба перпендикулярні до основи, то, з метою унаочнення, доцільно ці ребра зображати вертикальними відрізками.

Якщо картинна площина паралельна двом протилежним бічним граням паралелепіпеда (куба), то проекції цих граней будуть не лише рівними, а й матимуть оригінальну форму. На так отриманих зображеннях прямокутного паралелепіпеда (мал. 6) і куба (мал. 7) чотирикутник AA_1B_1B — прямокутник і квадрат відповідно.



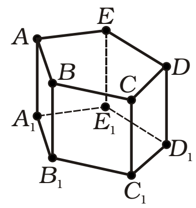
Мал. 6



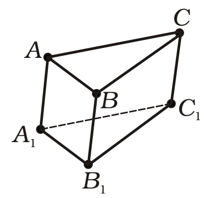
Мал. 7

Побудова проекційного креслення (малюнка) призми.

Оскільки основами призми служать рівні багатокутники, що лежать в паралельних площинах, а бічними гранями є паралелограми, то побудову призми варто розпочинати із зображення однієї з її основ (краще з верхньої). Подальші операції аналогічні тим, що виконувалися під час моделювання паралелепіпеда: бічні ребра прямої призми для більшої наочності малюнків зображають вертикальними відрізками (мал. 8), а похилої призми — під кутом до площини основи (мал. 9). При цьому всі невидимі ребра призми проводять відрізками штрихових ліній, а видимі — суцільних основних. Число невидимих ребер і граней має бути якомога меншим.



Мал. 8

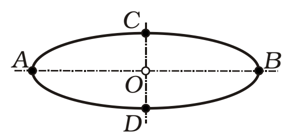


Мал. 9

Побудова проекційного креслення (малюнка) циліндра.

Циліндром є тіло, яке може бути отримане шляхом обертання будь-якого прямокутника навколо однієї з його сторін. Цю сторону приймають за вісь циліндра, яку й називають віссю обертання. Основами циліндра є рівні кола.

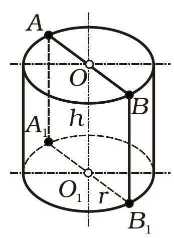
Побудову циліндра варто розпочати із зображення його верхньої основи — кола. Коло, нахилене під кутом до картинної площини, проекціюється на неї в еліпс. Еліпс — це центрально-симетрична фігура, яка ще й має дві осі симетрії: велику AB і малу CD (мал. 10). Перетин великої і малої осей еліпса утворює точку O, яка має назву *центр еліпса*.



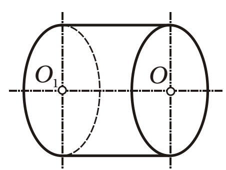
Мал. 10

Щоб побудувати еліпс, проведемо спочатку дві взаємно перпендикулярні прямі лінії. Від точки O їх перетину в обидва боки приблизно у відношенні 3 : 1 (чи 7 : 4) відкладаємо рівні відрізки. Чотири точки з’єднуємо плавною лінією. Звертаємо увагу на характер кривої, — як м’яко, по дотичній, лінія підходить до граничних точок кожної з осей.

Далі, штрих-пунктирною тонкою лінією (як і осі еліпса) проводимо вісь симетрії циліндра й виконуємо паралельне перенесення еліпса верхньої основи з радіусом r в еліпс нижньої основи на відрізок висоти циліндра h. Завершуємо оформлення зображення, провівши у крайніх точках великої осі обрисові твірні поверхні, які водночас є дотичними до верхньої і нижньої основ (мал. 11).



Мал. 11



Мал. 12

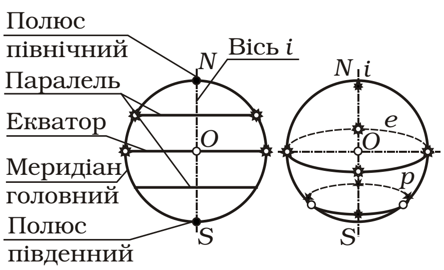
Горизонтальний циліндр зображають аналогічно: спочатку з'ясовують і наносять габарити, потім накреслюють вісь та відкладають велику і малу осі еліпса-основи (7 : 4, мал. 12). Після цього акуратно накреслюють сам еліпс у вертикальному розміщенні. Далі паралельно переносять еліпс однієї основи в місце розташування іншої й наводять обрисові твірні.

Побудова проекційного креслення (малюнка) кулі (сфери).

З усіх геометричних тіл, які вивчають у школі, найбільші труднощі викликає побудова зображення кулі. Важливо, що зображення кулі буде наочнішим, якщо його виконано в ортогональній проекції. Оскільки контур (обрис) кулі у вигляді кола не додає відчуття наочності на малюнку, то його необхідно доповнити зображенням деяких (цілком певних) перерізів кулі. При цьому сферу потрібно умовно «нахилити» на спостерігача (див. детально у [3]).

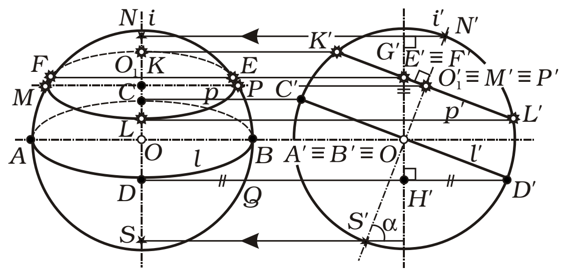
Неважко довести, що *ортогональною проекцією сфери є коло, радіус якого дорівнює радіусу сфери*.

Щоб унаочнити зображення сфери, на ньому виділяють екваторіальне коло, площина якого утворює гострий кут із напрямом проекціювання, та полюси — кінці діаметра, перпендикулярного площині великого кола. Кола, що лежать у площинах, паралельних площині екватора, називають паралелями, пряму, яка проходить через полюси, – віссю, а великі кола, що вміщують вісь, а отже, проходять через полюси, називають меридіанами (мал. 13).



Мал. 13

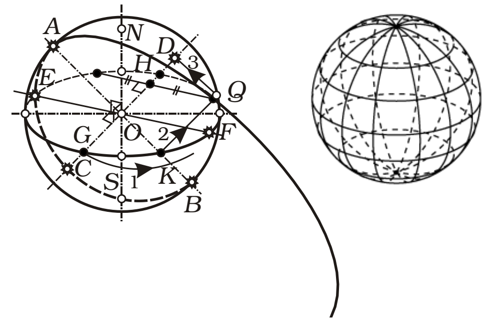
Проекцією виділеного великого кола буде еліпс. Для побудови зображення полюсів вважатимемо вихідну ортогональну проекцію сфери видом спереду, і побудуємо вид сфери зліва. Оскільки переріз сфери площиною, яка проходить через її вісь перпендикулярно картинній площині, є великим колом, то на вигляді зліва вісь сфери і екваторіальне коло зображатимуться перпендикулярними діаметрами AB і CD (мал. 14). Зображення полюсів на вигляді спереду отримаємо паралельним перенесенням полюсів із вигляду сфери зліва.



Мал. 14

На практиці можна не вдаватися до побудови допоміжного малюнку (вид сфери зліва). Для побудови зображення полюсів N і S досить зауважити, що прямокутні трикутники $O'G'N'$ і $D'H'O'$ рівні (за гіпотенузою та гострим кутом). Очевидно, має місце рівність відрізків $O'G'$ і $D'H'$. Крім того, маємо $O'G' = ON$, а $D'H' = DQ$. Отже, $ON = OS = DQ$. Після цього точки N і S вибираються таким чином, щоб указані рівності виконувалися.

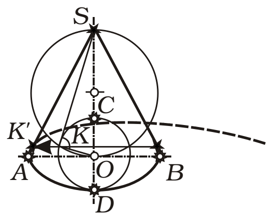
На зображенні сфери, крім екватора та полюсів, досить часто доводиться будувати паралелі або ж меридіани (мал. 15). Обрис кулі є головним меридіаном. На цьому ж малюнку зліва продемонстровано алгоритм у три кроки побудови меридіана на сфері, відповідного (узятому за вибором виконавця) діаметру EF екваторіального кола. Велика вісь еліпса-меридіана зображується відрізком AB, а мала — CD. A і B є, водночас, точками дотику меридіана і обрису сфери.



Мал. 15

Побудова проекційного креслення (малюнка) конуса.

З метою унаочнення зображення конуса, як для сфери та циліндра, нахилимо в уявленнях його вісь на спостерігача. Тоді коло в основі конуса, розміщене під кутом до картинної площини, зобразиться еліпсом з великою віссю AB, малою CD і центром у точці O. Через точку O проведемо вертикальну пряму й на ній візьмемо точку S — вершину конуса. Проведемо дотичні з точки S до еліпса. Цю останню побудову неважко зрозуміти з малюнка 16, адже еліпс можна ще уявити фігурою, що утворилася в результаті рівномірного розтягу кола з діаметром CD від його центра вздовж великої осі AB. Тут $K \to K'$, SK є дотичною до кола, а SK' — до еліпса.



Мал. 16

Вітчизняним продуктом для підтримки вивчення стереометрії (і просторових об'єктів у тому числі) є ППЗ Gran 3D (Україна, 2003 р., автори: М. І. Жалдак, О. В. Вітюк). Ґрунтовний аналіз закладених у ньому інструментів показує, що указане середовище можна більш ефективно використовувати при розв'язуванні задач обчислювального характеру.

Нами проаналізовано й інші інтерактивні геометричні середовища (ІГС), серед яких заслуговує на увагу ІГС Carbri 3D (Франція, 2000 р., автор: Jean-Marie Laborde) — середовище, створене спеціально для оперування просторовими об'єктами та встановлення їх позиційних і метричних характеристик [4].

Середовище Cabri з'явилося одним із перших у переліку програм динамічної математики. Наразі його остання версія Cabri 3D є ліцензійною, але пересічний учитель може встановити пробну версію, яка діє 30 днів.

Програма Carbri 3D має широкі, й вельми суттєві можливості, реалізовує побудови як на площині, так і у просторі. На малюнку 17 представлена панель інструментів Інтерактивної Стереометрії. Функціональне призначення кожної із кнопок (1) — (10) описано в інструкції користувачу.

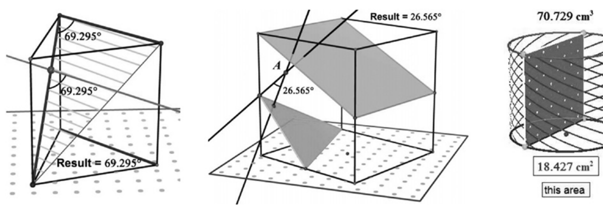
Мал. 17

Окрім різнохарактерних суто геометричних побудов програма дає змогу вимірювати відстані між точками, довжину відрізків, градусну міру кутів, площі та об'єми; обчислювати скалярний добуток векторів; відтворювати координати точок, векторів, рівняння об'єктів; має функцію калькулятора.

У чинній програмі з математики зокрема зазначено: «Передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу … вимірює геометричні величини, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходить кількісні характеристики фігур (площі, об'єми)».

Окремо зауважимо, що за традиційного «безмашинного» опанування стереометрії вказані уміння й навички відпрацьовуються слабо, а Cabri 3D — потужний і високоточний засіб для розв'язування задач на вимірювання і побудову — інтенсифікує процес учіння.

При наявності цієї програми на робочому місці суб'єкта навчання можна з успіхом індукувати у кожного з них розвиток геометричного бачення ситуації, привчати до віртуального простору як до робочого.



а) б) в)

Мал. 18

Задача 1. Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює стороні основи. Знайти градусну міру кута між стороною основи й діагоналлю бічної грані, яка цю сторону не перетинає.

Побудувавши модель, виконуємо вимірювання (*Angle*) (мал. 18, *а*). Наразі можна вибрати довільну точку на діагоналі, провести через неї паралельну пряму до прямої, що містить сторону основи й виміряти градусну міру утвореного кута з вершиною у цій точці.

Задача 2. Знайти величину кута між площинами, виділеними на малюнку. Усі вершини трикутника і прямокутника є або вершинами куба, або серединами його ребер.

Кут між площинами дорівнює куту між перпендикулярними прямими, проведеними до цих площин (мал. 18, *б*). Обчислюємо градусну міру кута з вершиною *A*, що утворилася в перетині зазначених прямих.

Задача 3. Знайти об'єм і площу перерізу циліндра (мал. 18, в).

Вбудованими засобами середовища вимірюємо об'єм циліндра (*Volume*) і площу прямокутника-перерізу (*Area*).

Висновки. Втілення діяльнісного підходу в навчанні геометрії — одна із важливих умов удосконалення математичної освіти й розвитку учнів в цілому, а роль методики навчання, без перебільшення, є визначальною.

Геометрія має орієнтувати учнів на правильне сприйняття навколишнього світу, розвивати просторові уявлення і уяву, виробляти навички застосування геометричних закономірностей на практиці, удосконалювати логічне мислення. Це основні орієнтири, якими зобов'язаний керуватися вчитель при проектуванні навчальної діяльності у школі.

Одним із найважливіших завдань у навчанні стереометрії і, водночас, найскладнішим є формування вмінь будувати малюнки з уявлень. Необхідно на самому початку навчити учнів правильно зображати просторові фігури, «читати» вже готові проекційні креслення, правильно уявляти зображену просторову фігуру, встановлювати за зображенням її властивості та конструювати алгоритм розв'язання стереометричної задачі на обчислення чи на побудову.

Адже малюнок — це графічна модель геометричної конструкції [1].

Досвід роботи з учнями і проведені дослідження підтверджують високу ефективність застосування ІГС у навчанні стереометрії та їхній помітний гуманітарний потенціал, пов'язаний з розвитком творчого мислення.

На часі створення комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання математики, системних досліджень з вивченням функціональних можливостей ІГС і супутніх педагогічних ризиків.

Для молодших школярів середовища інтерактивного моделювання можуть сприяти побудові якісно нових, електронних пропедевтичних курсів геометрії, для старших — пошуку й удосконаленню конструктивних способів розв'язування задач, розв'язуванню задач прикладного і практичного характеру, створенню і глибокому дослідженню різнопланових математичних моделей.

Робота з Cabri 3D візуалізує просторову інформацію, надає можливість відкривати закономірності шляхом варіювання вихідної конструкції, допомагає вирізняти окремі елементи складного об'єкта, працювати з робочими модулями, розглядати шляхи розв'язання задач аналітичним і синтетичним методами. Конструювання у віртуальному просторі є важливою віхою у вивченні та викладанні стереометрії з використанням комп'ютерів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бродський Я. С., Гречук В. Ю., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Стереометрія у старшій школі: Посібник для вчителя. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2005. — 404 с.

2. Бескин Н. М. Изображения пространственных фигур. — М.: Наука, 1971. — 80 с.

3. Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навчальний посібник. — Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. — 368 с.

4. Михрина Т. В. Использование программы CABRI 3D на уроках стереометрии. — М.: ЮЗАО, 2012. — 11 с.

5. Разумова О. В., Садикова Е. Р. Геометрическое построение в пространстве: Учебно-методическое пособие. — Казань: Казан. ун-т, 2014. — 71 с.

УСНІ ЗАДАЧІ З ТЕМИ «ПРИЗМА»

Ірина СВЕРЧЕВСЬКА — доцент кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка

Важливою складовою вивчення геометрії є розв'язування задач. Як свідчить досвід, найбільші труднощі викликають стереометричні задачі, а уміння їх розв'язувати приходить з практикою. Пропонуємо вдосконалювати ці уміння і навички під час усного розв'язування стереометричних задач.

У більшості підручників з геометрії немає простих задач про прямі й площини у просторі та геометричні тіла, тому на уроці їх можна розв'язати приблизно 2 — 3, а пропонувати більше задач для розв'язування вдома неприпустимо, оскільки це призводить до перевантаження учнів. Крім того, задачі середньої складності, які є у підручниках, не всім учням під силу. Якщо розв'язувати тільки такі задачі, то багато учнів не зможуть брати активну участь в їх розв'язуванні і матимуть низький рівень навчальних досягнень. Тому, пропонуючи задачі на 1 — 2 операції для усного розв'язування, можна зробити їх посильними для всіх учнів.

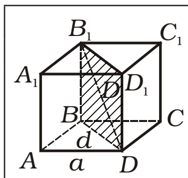
У статті наведено усні задачі з теми «Призма». Їх розподілено за видами: на доведення, на дослідження, на побудову, на обчислення. Пропонувати умови задач можна усно, використовуючи готові малюнки, або окремі картки, можна у вигляді таблиць, використовуючи для розв'язування малюнок та необхідні формули, записані на дошці.

Задачі на обчислення

Ребро куба дорівнює a. Знайдіть: діагональ грані; діагональ куба; периметр основи; площу грані; площу діагонального перерізу; площу поверхні куба; периметр і площу перерізу, що проходить через кінці трьох ребер, які виходять з однієї вершини.

За даними в таблиці 1 знайдіть інші елементи куба.

Таблиця 1



№	Ребро a	Діагональ основи, d	Діагональ куба, D	Площа основи, S	Площа діаг. перерізу, Q
1	5				
2		14			
3			$11\sqrt{3}$		
4				196	
5					$36\sqrt{2}$