ЩО ПОТРІБНО ЗНАТИ СТАРШОКЛАСНИКАМ ПРО АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД РОЗБУДОВИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені І. Франка, доктор педагогічних наук

Анотація. Розглянуто гіпотетично-дедуктивний аксіоматичний метод розбудови дисципліни «Геометрія» на базі системи аксіом О. В. Погорєлова. Вирізнено основні поняття стереометрії; дано розуміння математичної структури та терміну «аксіома» у дедуктивних наукових теоріях; означено вимоги до системи аксіом; пераховано найперші наслідки з аксіоматики; наведено приклади задач на доведення.
Ключові слова. Стереометрія, аксіоматичний метод, система аксіом, основні поняття, теорія геометрії, способи задавання площини.

Иван ЛЕНЧУК.
ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ СТАРШЕКЛАССНИКАМ ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИИ ГЕОМЕТРИИ
Аннотация. Рассмотрено гипотетически-дедуктивный аксиоматический метод построения дисциплины «Геометрия» на базе системы аксиом А. В. Погорелова. Выделено основные понятия стереометрии; дано понимание математической структуры и термина «аксиома» в дедуктивных научных теориях; определены требования к системе аксиом; перечислены первые следствия с аксиоматики; наведены примеры задач на доказательство.
Ключевые слова. Стереометрия, аксиоматический метод, система аксиом, основные понятия, теория геометрии, способы задания плоскости.

Ivan LENCHUK.
WHAT SENIORS NEED TO KNOW ABOUT THE AXIOMATIC METHOD OF CONSTRUCTING GEOMETRY
Summary. The hypothetical-deductive axiomatic method of constructing the discipline «Geometry» on the basis of the system of axioms of O.V. Pogorelov is considered. Are highlighted the basic concepts of stereometry; an understanding of the mathematical structure and the term «axiom» in deductive scientific theories is given; defined requirements for the system of axioms; the first consequences from axiomatics are listed; examples of proof problems are given.
Keywords. Stereometry, axiomatic method, system of axioms, basic concepts, theory of geometry, methods for specifying a plane.

У 10 класі ЗОНЗ математичного профілю, згідно з програмою, у вступі до стереометрії вивчається «Аксіоматичний метод». Учні зобов'язані **знати** не лише окремі аксіоми і **озвучувати** наслідки з них, але й **розуміти** структуру дедуктивного методу розбудови науки «Геометрія», а отримані знання грамотно застосовувати до розв'язування задач.

Властивості основних відношень між основними об'єктами евклідової геометрії у підручнику [3], який науковцями визнано класичним, описано спрощеною, фахово скомпонованою у групи системою аксіом, а розбудову дисципліни, послідовне викладення матеріалу на аксіоматичній основі здійснено коректно і строго обґрунтовано. В роботі [2] розкрито бачення суті аксіоматичного методу, коротко відображено логіку та науковий стиль О. В. Погорєлова в педагогічно виваженому введенні системи аксіом у навчальний процес, продемонстровано її структурний характер.

Природно, що в розділі «Стереометрія» система аксіом планіметрії розширюється, адже додається ще одна найпростіша фігура — площина, й вивчаються властивості тривимірних об'єктів. Окрім того, «Стереометрія» є чи не єдиною фундаментальною дисципліною у школі, яка ефективно формує в учнів життєво важливі якості людини і потенційного математика – просторове уявлення, наочно-образне і логічне мислення.

1. Основні поняття стереометрії

Стереометрія (від давньогрецького στερεος — «тілесний, об'ємний, просторовий» і μετρεω — «вимірюю») — це розділ геометрії, в якому вивчаються *позиційні* та *метричні* властивості фігур у просторі.

Основними поняттями у стереометрії, як і у планіметрії, вважають її ***основні об'єкти*** (найпростіші фігури), якими є ***точка***, ***пряма*** і ***площина***, а також ***основні відношення*** між основними об'єктами (належати, лежати між, довжина, градусна міра), котрі описуються ***аксіомами***. Аксіоми — це не що інше як явно виражені властивості основних відношень. Основні об'єкти і основні відношення неозначувані. Основні об'єкти — своєрідні «цеглинки», що є складниками похідних об'єктів геометрії.

Усі інші поняття стереометрії означають через уже відомі, раніше введені поняття, а решту властивостей фігур чи їх елементів отримують шляхом доведення відповідних теорем. Відмінність полягає в тому, що властивості всіх планіметричних фігур вивчають на одній-єдиній площині, а простір вміщує безліч площин.

Отже, традиційно розбудова стереометрії, яка є невід'ємною складовою евклідової геометрії у просторі, відбувається ***гіпотетично-дедуктивним*** *методом* на ***аксіоматичній*** *основі*.

Площини, як і прямі, нескінченні, тому їх зображення на рисунках можемо подавати, наприклад, криволінійними паралелограмами (рис. 1), а позначення — великими буквами грецького алфавіту: Δ, Λ, Σ, Ω, … . Усяка площина вміщує нескінченну множину точок і прямих.

Рис. 1

Властивості стереометричних фігур, утворених із точок, прямих і площин (тетраедр, паралелепіпед, конус тощо), встановлюються з посиланнями на властивості плоских фігур.

У стереометрії ґрунтовно розглядаються надто важливі похідні геометричні ***відношення***: паралельності, перпендикулярності, рівності та подібності геометричних фігур, а під час доведення теорем і розв'язування позиційних чи метричних задач з тілами користуються геометричними перетвореннями — рухами, подібністю та внутрішнім проекціюванням; ґрунтовно вивчають і застосовують на практиці декартові координати та вектори; означають геометричні величини і виводять формули для обчислення довжини відрізків, міри кутів, площ та об'ємів тіл і їх поверхонь.

Навчаючись стереометрії у просторі, як і на площині, надто важливо розв'язувати якомога більше задач обчислювального та конструктивного (побудовного) характеру.

2. Поняття про аксіоматичний метод. Аксіоми геометрії

Аксіоматичний метод є одним із методів розбудови наукового знання. Він має обмежене застосування, оскільки вимагає високого рівня розвитку змістової теорії, котра підлягає аксіоматизації. Аксіоматичний метод дає можливість створення завершених, повних і логічно несуперечливих наукових теорій. Ще більш важливе значення має й те, що математична (зокрема, геометрична) теорія, побудована аксіоматично, часто знаходить застосування на практиці — в побуті, інших науках, у техніці.

Використовують аксіоматичний метод, наразі, в розбудові математики (геометрії), логіки, окремих розділів фізики, теоретичної механіки, біології тощо. Це — особливий підхід до *введення об'єктів* і *встановлення відношень* між ними. Тут певні твердження теорії вибираються в якості вихідних, а всі останні закономірні факти отримують з вихідних винятково шляхом логічних міркувань, тобто, як ми вже наголошували, доведеннями.

У математиці (зокрема, в геометрії) ***аксіоматичні теорії***, в основу яких покладено теоретико-множинні поняття, набули широкого розвитку в кінці XIX ст. Такі теорії приводять до **математичних структур**.

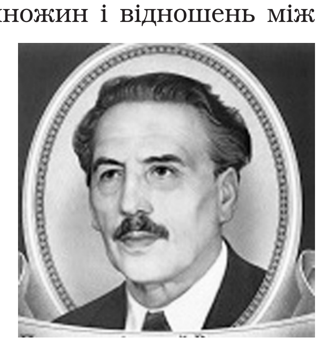
Нагадаємо, що собою уявляє математична структура.

Математична структура включає в себе одну чи декілька множин (сукупностей) M_1, M_2, …, M_k, елементи яких *довільної природи* і знаходяться в *деяких відношеннях* p_1, p_2, …, p_q, що можуть мати *будь-яку конкретну суть* і *описуються властивостями* α_1, α_2, …, α_n, котрі формулюються в термінах теорії множин.

Множини M_1, M_2, …, M_k називаються *базовими множинами* математичної структури, а їх елементи — *основними об'єктами*; відношення p_1, p_2, …, p_q називаються *основними відношеннями* математичної структури, а основні об'єкти і основні відношення, узяті разом, — *основними поняттями* математичної структури. Нарешті, властивості α_1, α_2, …, α_n основних відношень називаються ***аксіомами***.

Сукупність тверджень, які обґрунтовуються логічним шляхом на базі аксіом α_1, α_2, …, α_n, називається ***теорією*** математичної структури.

Якщо припустити, що для деякої системи аксіом $\mathbf{A}$ теорії $\mathbf{\Gamma}_A$ існують певні множини і такі відношення між елементами цих множин, що всі аксіоми $\mathbf{A}$ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ є істинними твердженнями, то логічні висновки, які випливають з цих аксіом, що очевидно, теж будуть істинними для вказаних множин і відношень між ними.



Погорєлов О. В.

Математична структура, яку запровадив у курс геометрії видатний вітчизняний математик (геометр-теоретик і прикладник) академік О. В. Погорєлов (1919 — 2002 рр.), вміщує:

1. ***Базові множини E, F, G.*** Їх елементи (точки, прямі, площин) — ***основні об'єкти***.

2. ***Основні відношення*** між основними об'єктами (належати (лежати на); лежати між; довжина; градусна міра).

Базові множини і основні відношення між їх об'єктами є, як ми уже зазначали, ***основними поняттями***. Вони не мають означень.

3. *Аксіоми*, в яких явно формулюються властивості основних відношень.

4. *Теорію* евклідової геометрії, розбудовану і викладену на основі цієї системі аксіом.

До формально-логічної системи аксіом у геометрії пред'являються вимоги ***сумісності*** (несуперечливості), ***незалежності*** та ***повноти***. Процес доведення цих вимог називають *дослідженням* системи аксіом.

Система аксіом називається ***сумісносною*** (несуперечливою), якщо теорія, похідна від неї, не містить протиріч, тобто неможливо в цій теорії довести хоч які два твердження, що суперечать одне іншому.

Система аксіом називається ***незалежною***, якщо жодну з аксіом неможливо вивести як теорему з решти аксіом.

Система аксіом називається ***повною***, якщо її неможливо доповнити новими аксіомами, які не випливають зі сформульованої системи і не суперечать жодній з уже сформульованих аксіом.

Насправді точки, прямі, а також площини — об'єкти нереальні (абстрактні), таких у природі не існує. Отже й описати, означити їх неможливо. Проте адаптувати ці найпростіші фігури до уявлюваних розумом понять зовсім нескладно. Покладіть долоню руки на поверхню письмового столу, і ви «фізично поспілкуєтесь» із площиною; проведіть по ребру стільниці, й ваша рука ковзатиме вздовж прямої лінії; нарешті, доторкніться до куточка стільниці, ви відчуєте точковий укол.

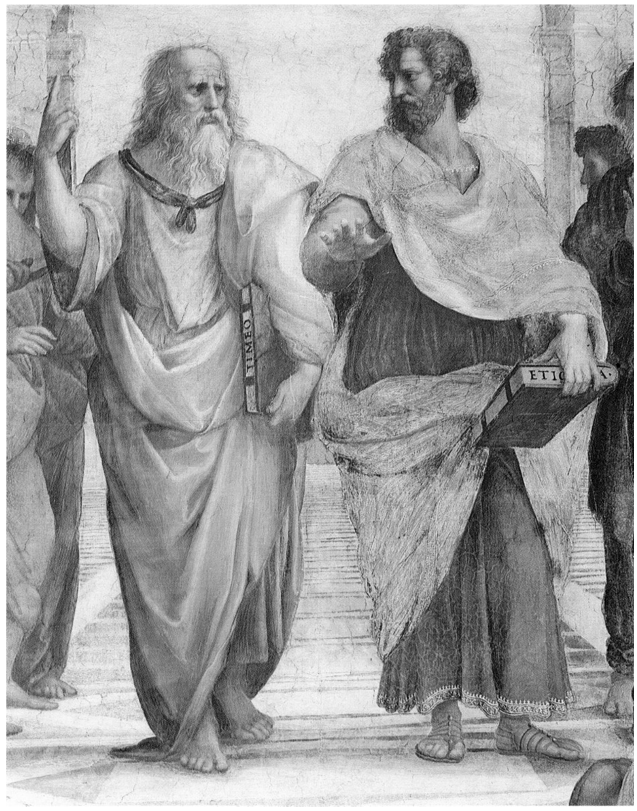
Або ж, кожному добре знайомі єгипетські піраміди. Напевно, що зовсім неважко на поверхні такої громіздкої споруди візуально чи в уявленнях вирізнити хоча б одну точку (вершину) й кілька відсіків (кусків) прямих (ребер) і площин (граней).

Давньогрецький вчений-енциклопедист, філософ і логік Аристотель (384-322 рр. до н.е.) був переконаний, що «Всі науки, в яких наявні доведення, застосовують аксіоми ... . ***Аксіоми*** *володіють найвищим ступенем загальності й* ***є початком усього***».

Аксіома (від гр. *axiōma* — загальноприйняте, безперечне; *axiō* — вважаю гідним, наполягаю, вимагаю).

У дедуктивних наукових теоріях під *аксіомами* розуміють наступне:

1. Основні вихідні положення чи твердження, котрі не викликають сумнівів, з яких шляхом дедукції, тобто суто *логічними* засобами, одержують весь інший зміст теорії.



Платон і Аристотель

2. Те, що не потребує жодних обґрунтувань, самоочевидні, наочні, непорушно істинні факти, відомі ***без досвіду***, незалежні від нього, спроба обґрунтовувати котрі спроможна була б лише підірвати їх очевидність (так розумів сутність аксіоми Евклід).

3. Твердження, заперечення якого заперечує самі основи логічного мислення.

4. Це — складові елементи теорії, розбудова і підтвердження якої є одночасно **обґрунтовуванням істинності й самих аксіом**.

Перерахуємо аксіоми планіметрії.

I. ***Аксіоми належності***

I_1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

I_2. Через будь-які дві точки можна провести пряму лінію і тільки одну.

II. ***Аксіоми порядку***

II_1. Із трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

II_2. Пряма розбиває площину на дві півплощини. Якщо кінці будь-якого відрізка належать одній із півплощин, то відрізок не перетинає пряму. Якщо ж кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму.

III. ***Аксіоми вимірювання відрізків і кутів***

III_1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

III_2. Кожний кут має певну градусну міру, більшу нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

IV. *Аксіоми відкладання відрізків і кутів*

IV_1. На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини і тільки один.

IV_2. Від будь-якого променя у вибрану півплощину можна відкласти кут заданої градусної міри, меншої 180°, і тільки один.

IV_3. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому в заданому розміщенні відносно заданого променя.

V. *Аксіома паралельних*

V_1. Через точку, котра не лежить на заданій прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну заданій.

Введення площини, як основного геометричного об'єкту, рівноправного із точкою та прямою, потребує не лише розширення системи аксіом, але й уточнення деяких аксіом планіметрії, котрі виконуватимуть роль аксіом простору. Це у першу чергу стосується аксіом II_2, IV_2, IV_3 і V_1. Подаємо уточнені формулювання аксіом, які озвучуються так:

II_2. Пряма, ***яка належить площині***, розбиває дану площину на дві півплощини. Якщо кінці будь-якого відрізка належать одній із півплощин, то відрізок не перетинає пряму. Якщо ж кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму.

IV_2. Від будь-якого променя ***на площині, яка містить його***, у вибрану півплощину можна відкласти кут заданої градусної міри, меншої 180°, і тільки один.

IV_3. Який би не був трикутник ***у заданій площині***, існує трикутник, що дорівнює йому в заданому розміщенні відносно заданого променя ***у цій площині***.

V_1. ***На площині*** через задану точку, котра не лежить на заданій прямій ***цієї ж площини***, можна провести не більше як одну пряму, паралельну заданій.

Окрім сформульованих десяти аксіом планіметрії, аксіоматика евклідової геометрії має **три** аксіоми просторового змісту, які в розділі «Стереометрія» додаються до вже відомих планіметричних аксіом.

Шоста група аксіом (C_{1-3}), котрі виражають властивості основних відношень між основними об'єктами простору, вміщує три аксіоми:

C_1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй (порівняйте з аксіомою I_1).

C_2. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Аксіома C_2 стверджує, що коли дві різні площини Λ і Σ мають спільну точку, то існує пряма a, яка належить кожній із заданих площин. При цьому, якщо точка A належить обом площинам, то вона належить також прямій a.

C_3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Це потрібно розуміти так: коли дві різні прямі b і c перетинаються в точці A, то існує площина Λ, яка вміщує в собі кожну із прямих b і c; до того ж, площина, яка має таку властивість, єдина.

Аксіома C_3 встановлює ***перший спосіб*** *задавання площини* — двома прямими, що перетинаються.

Отже, авторська система аксіом О. В. Погорєлова евклідової геометрії складається з ***десяти*** аксіом планіметрії та ***трьох*** аксіом групи **C**.

Важливо розрізняти, що **I**, **II** і **V** групи аксіом та аксіоми групи **C** описують властивості основних об'єктів стереометрії, а групи **III** і **IV** — похідних (означуваних) об'єктів: відрізків, променів і кутів.

Додамо, що у шкільному підручнику О. В. Погорєлова система аксіом дещо підсилена в порівнянні з її категоричним, суто науковим тлумаченням (див. [4]). Це свідомо зроблено автором із методичних міркувань, задля більш простого викладення (засвоєння) матеріалу.

3. Найперші наслідки із системи аксіом

I. Існування площини, яка проходить через задані точку і пряму.

Теорема 3.1. ***Через пряму і точку, яка не належить прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну***.

Теорема 3.1 установлює ***другий спосіб*** *задавання площини* — точкою і прямою, коли точка не належить прямій.

Задача 1. Доведіть, що через пряму можна провести дві різні площини.

Рис. 2

Розв'язання. Нехай a — задана пряма (рис. 2). За аксіомою I_1 існує точка A, яка не належить прямій a. За теоремою 3.1 через пряму a і точку A можна провести площину Λ. За аксіомою C_1 існує точка B, яка не лежить у площині Λ. Однак, точкою B і прямою a, згідно з тією ж теоремою 3.1, визначається площина Σ. Площини Λ і Σ різні, оскільки точка B площини Σ не належить площині Λ.

Наслідок. Через пряму a можна провести безліч площин.

Усі площини, узяті разом, називаються *пучком* площин із *віссю* a.

ІІ. Перша ознака належності прямої площині

Теорема 3.2. ***Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.***

Наслідок 1. Якщо пряма не належить площині, то вона або не має із площиною спільних точок, або перетинає площину в одній-єдиній точці.

Маємо три можливі варіанти взаємного розміщення прямої і площини: пряма належить площині; пряма не має спільних точок із площиною; пряма перетинає площину в одній-єдиній точці.

Наслідок 2. Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій цієї площини.

Щоб узяти точку чи провести пряму на площині, потрібно дотримуватися ознак належності прямої площині. Коли ми говоримо, що точка A належить площині Σ, то це означає, що точка лежить на прямій площини, дві точки якої завідомо лежать у цій площині. Отож, завжди, щоб *узяти точку* на площині, потрібно спочатку провести пряму в заданій площині, й лише потім узяти точку на цій прямій.

Аналогічно потрібно брати точки на поверхні багатогранника чи тіла обертання, тобто спочатку слід провести лінію на поверхні тіла, а потім на цій лінії узяти точку. Такими лініями є переважно відрізки прямих і кіл.

Задача 2. Задано дві різні прямі b і c, які перетинаються в точці A. Доведіть, що всі прямі, які перетинають обидві дані прямі й не проходять через точку A, лежать в одній площині.

Розв'язання. Проведемо через задані прямі b і c, які перетинаються в точці A (рис. 3), площину Λ (аксіома $\mathbf{C}_3$). Будь-яка пряма a, котра перетинає прямі b *і* c, має із площиною Λ дві спільні точки B і C відповідно до твердження аксіоми $\mathbf{C}_1$. Згідно з теоремою 3.2 пряма a належить площині Λ.

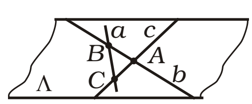


Рис. 3

ІІІ. Існування площини, яка проходить через три задані точки

Теорема 3.3. ***Через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну***.

Теорема 3.3 установлює ***третій спосіб*** *задавання площини* — трьома точками, які не лежать на одній прямій.

Через три точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, як відомо, можна провести єдине коло; з'єднавши ці точки відрізками, отримаємо трикутник; трикутник зовсім легко добудувати до паралелограма і т. ін. Отже, *задавати площину* можна також будь-якою плоскою фігурою.

Це — ***четвертий спосіб*** задавання площини у стереометрії.

Задача 3. Чи можна провести площину через три точки, які лежать на одній прямій? Відповідь поясніть.

Розв'язання. Уявимо собі, що три точки A, B і C лежать на одній прямій p. Візьмемо довільну точку M, яка не належить прямій p (аксіома $\mathbf{I}_1$). За теоремою 3.3 через точки A, B і M можна провести площину. Ця площина містить дві точки A і B прямої p, а тому, згідно до теореми 3.2, містить і точку C. Таким чином, через три точки, які лежать на одній прямій, завжди можна провести площину (пучок площин).

IV. Зауваження до аксіоми $\mathbf{I}_1$

У розділі «Планіметрія» аксіома $\mathbf{I}_1$ забезпечує існування точок поза заданою прямою на площині, в якій лежить пряма. Саме у такому розумінні застосовувалася ця аксіома при розбудові геометрії на площині.

В розділі «Стереометрія» аксіома набуває іншого змісту. Тепер аксіома $\mathbf{I}_1$ забезпечує існування точок поза прямою взагалі. З неї безпосередньо не випливає, що існують точки поза заданою прямою на площині простору, в якій лежить пряма. Це потребує окремого доведення. Наведемо це доведення (рис. 4).

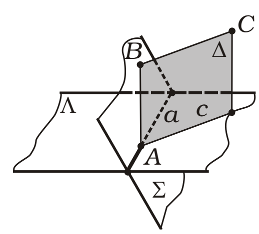


Рис. 4

Нехай Λ — будь-яка площина простору і a — пряма, що лежить у цій площині. Доведемо існування точок у площині Λ, котрі не належать прямій a.

Візьмемо точку A на прямій a (аксіома $\mathbf{I}_1$) і точку B поза площиною Λ (аксіома $\mathbf{C}_1$). Через точку B і пряму a проведемо площину Σ (теорема 3.1).

Візьмемо точку C поза площиною Σ (аксіома $\mathbf{C}_1$) і проведемо через пряму AB і точку C площину Δ (теорема 3.1). Площини Λ і Δ мають спільну точку A і перетнуться по деякій прямій c (аксіома $\mathbf{C}_2$), яка проходить через точку A й відмінна від прямої a. Отже, точки прямої c, відмінні від точки A, лежать у площині Λ поза прямою a, що й потрібно було довести.

Теореми 3.1 — 3.3 і наслідки з них обов'язково доводяться.

Отже, аксіомою $\mathbf{C}_3$ та теоремами 3.1 і 3.3 задекларовано чотири різні способи задавання площини у стереометрії: ***двома прямими***, що перетинаються; ***прямою і точкою***, яка не належить прямій; ***трьома точками***, що не лежать на одній прямій; будь-якою ***плоскою фігурою***. Ці способи прийнято вважати стандартними. До них належить також спосіб задавання площини ***двома паралельними прямими***.

Розглянемо приклади найпростіших перерізів тіл площиною, що задана трьома точками, точкою і прямою.

Задача 4. *Побудуйте переріз куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *площиною* Σ, *що задана трьома точками* M, N, P, *які ділять навпіл ребра куба зі спільною вершиною* B.

Розв'язання. Точки M і P належать площині верхньої грані куба $ABCD$ і січній площині Σ, а тому ці дві площини перетинаються по прямій MP. Отже, січна площина висікає на верхній грані відрізок MP (рис. 5).

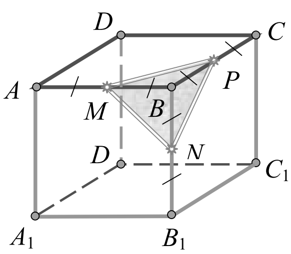


Рис. 5

Нехай ребро куба дорівнює a. Оскільки точки M, N, P ділять ребра куба, які виходять із точки B, навпіл, а три плоскі кути при вершині B прямі, то прямокутні трикутники MBN, NBP, PBM із катетами довжиною $\frac{a}{2}$, рівні. Звідси: $MN = NP = PM = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Отже, периметр трикутника MNP рівний $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Схоже будується переріз куба площиною $\Sigma(M, N, P)$, коли задані точки розташовані зовні куба на продовжені ребер. Нехай, наприклад, $AM = B_1N = CP = \frac{a}{2}$ (рис. 6). З'єднавши точки M, N, P між собою, отримаємо трикутник, сторони якого належать площинам, що задаються передньою, правою і верхньою гранями куба відповідно. З урахуванням цього факту, фігура перерізу будується просто. З'ясуйте форму фігури перерізу самостійно.

Аналогічно переконуємося, що права грань куба BB_1C_1C має у перетині із площиною Σ відрізок NP, а передня AA_1B_1B — відрізок MN.

Таким чином, перерізом куба і січної площини Σ є трикутник MNP.

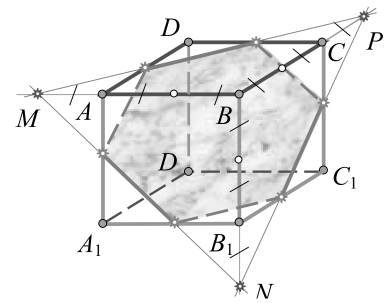


Рис. 5

Якби це була задача на обчислення, то в її умові було б задано ребро куба, а у висновку — вимога знайти периметр (чи площу) трикутника MNP.

В умовах стереометричних задачах на перерізи можливі й інші варіанти розташування площини відносно елементів заданого тіла. Наприклад, січна площина паралельна деякій прямій багатогранника й уміщує дві його точки чи паралельна грані та проходить через фіксовану точку; містить вершину й перпендикулярна до певного ребра чи грані і т. ін. Розв'язуючи задачу, варто перезадати площину — звести рисунково до стандартного вигляду.

Зауважимо також, що геометрія є природною теоретико-практичною дисципліною. Французький філософ і матеріаліст, письменник-просвітитель Д. Дідро (1713 — 1784) закликав: «*Спробуйте навчити дітей геометрії, і ви побачите, яка зміна станеться з народом неосвіченим і марновірним*». А співвітчизник Д. Дідро, відомий архітектор XX століття Ле Корбюз'є (1887 — 1965) був переконаний, що: «*Усе навкруги Геометрія*!». Авторитетні історичні постаті праві, геометрія справді заполонила наше життя, вона всюди — у найпростіших буденних ситуаціях, ... і в аерокосмічних дослідженнях.

«... Навряд чи можна сьогодні назвати іншого математика, який збагатив би науку такою кількістю сильних, глибоких і конкретних результатів в області геометрії ...». ***О. Д. Александров*** про ***О. В. Погорєлова.***

ЛІТЕРАТУРА

1. Б е в з Г. П. Методика викладання математики: Навчальний посібник для студентів techінститутів. — 3-тє видання, перероблене і доповнене / Г.П. Бевз. — К.: Вища шк., 1989. — 367 с.

2. Л е н ч у к І. Г. Точки, прямі, площини, ..., аксіоми і теореми: Введення в евклідову геометрію / І. Г. Ленчук. — Наук.-метод. журнал «Математика в рідній школі». — Вид-во: «Педагогічна преса», 2015. — № 5. — С. 21 — 25.

3. П о г о р є л о в О. В. Геометрія: Підручник для 10 — 11 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 129 с.

4. П о г о р е л о в А. В. Геометрия: Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» / А. В. Погорелов. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 282 с.