**Герус О.Ф., Ленчук І.Г., Сарана О.А.**

# Вступний екзамен з математики на фізико-математичному факультеті Житомирського державного університету імені Івана Франка

**Житомир - 2004**

**УДК 510-023**
**ББК 22.10**
**Г30**

Затверджено на засіданні вченої Ради Житомирського державного університету, протокол №11 від 28 травня 2004 р.

Рецензенти:

доцент кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету ім. Івана Франка, кандидат фіз.-мат. наук Таргонський Л.П.,

доцент кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету, кандидат фіз.-мат. наук Скуратівський С.І.

**Герус О. Ф., Ленчук І. Г., Сарана О. А.**

Г30 Вступний екзамен з математики на фізико-математичному факультеті Житомирського державного університету імені Івана Франка: Методичний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ, 2004. 83 с.

Посібник містить зразки завдань вступного екзамену з математики на фізико-математичному факультеті у 2000-2003 роках.

Посібник адресовано абітурієнтам та студентам фізико-математичного факультету Житомирського державного університету, вчителям математики.

**УДК 510-023**
**ББК 22.10**

# Передмова

Фізико-математичний факультет Житомирського державного університету імені Івана Франка діє з 1948 року. За цей час на факультеті створились певні традиції викладання, розроблено перевірені багаторічним досвідом навчальні плани і програми. Навчальний процес в достатній мірі забезпечено аудиторіями, добре обладнаними фізичними лабораторіями. Наші студенти мають можливість працювати в комп'ютерних класах з сучасними персональними комп'ютерами, оволодівати практикою роботи з сучасними пакетами прикладних програм. Навчання на факультеті проводиться за спеціальностями "Математика і фізика", "Математика та основи інформатики", "Математика та основи економіки", "Фізика і математика", "Фізика та основи інформатики", "Інформатика". Планується відкриття спеціальностей "Прикладна математика", "Соціальна інформатика".

Факультет працює в складі кафедр математичного аналізу (завідувач кандидат фізико-математичних наук, доцент Герус О.Ф.), математики (завідувач кандидат технічних наук, професор Ленчук І.Г.), фізики (завідувач кандидат фізико-математичних наук, доцент Ткаченко О.К.), інформатики (завідувач доктор фізико-математичних наук Ляшенко Б.М.). Більшість викладачів цих кафедр є випускниками фізико-математичного факультету. Організовує та керує навчальною, методичною та науковою роботою факультету деканат, який очолює з 2003 року кандидат фізико-математичних наук, доцент Франовський А.Ц.

На кафедрі математичного аналізу працюють 1 професор, 6 кандидатів фіз.-мат. наук. Науковцями цієї кафедри проводяться дослідження теорії сингулярних інтегралів (у співпраці з Національним політехнічним інститутом Мексики (м. Мехіко) та Інститутом математики НАН України), тонкої теорії потенціалу (у співпраці з Інститутом математики НАН України), теорії випадкових процесів, теорії та методики навчання математики у вищій та середній школі. В 1999 році випускник кафедри, нині науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України, Плакса С.А. за видатні дослідження в комплексному та гіперкомплексному аналізі отримав нагороду II Конгресу Міжнародного наукового товариства "ISAAC".

На кафедрі математики працюють 2 професори, 1 заслужений діяч науки і техніки України, 5 кандидатів наук. Науковцями цієї кафедри проводяться дослідження теорії та методики навчання математики у вищій та середній школі, теорії випадкових процесів, прикладних питань математичної фізики, механіки твердого тіла.

На кафедрі інформатики працюють 1 доктор наук, 2 кандидати наук. Науковцями цієї кафедри проводяться дослідження у галузі прикладної математики, математичного моделювання, інформатики та методики навчання інформатики у вищій та середній школі.

На кафедрі фізики працюють 1 доктор фіз.-мат. наук, 2 професори, 6 кандидатів наук. Науковцями цієї кафедри проводяться дослідження перспективних рідких кристалів, про що є договори про наукову співпрацю з Інститутом рідких кристалів (м. Кент, США), деяких питань теоретичної фізики, теорії та методики навчання фізики у вищій та середній школі. За останні 5 років 2 випускники кафедри працевлаштувались на наукову роботу в США, 1 – в ФРН.

За останні 5 років студенти фізико-математичного факультету займали на Всеукраїнських студентських олімпіадах серед педвузів 1-е місце з математики (Лущиков О.В., 1999 р.), 3-е місце з математики (Кривонос О.М., 1998 р.), 3-е місце з математики (Ткачук М.В., 2001 р.), 2-е місце з математики (Ткачук М.В., 2002 р.), 1-е місце з математики (Ткачук М.В., 2003 р.), 3-е місце з математики (Зіневич М.В., 2003 р.), 1-е місце з математики (Ходаківський В.В., 2004 р.)1-е місце з фізики (Закревський Ю.А., 1998 р.), 3-е місце з фізики (Крамарчук Г.Г., 1998 р.), 2-е місце з інформатики (Вітюк О.В., 1997 р.), 3-е місце з інформатики (Вітюк О.В., 1998 р.).

Кращі випускники факультету продовжують навчання в аспірантурі Інституту математики НАН України, Інституту фізики НАН України, Київського національного педагогічного університету. Після успішного закінчення аспірантури вони забезпечуються роботою в університеті. Також випускники факультету працюють у вищих навчальних закладах м. Житомира (інженерно-технологічний інститут, військовий інститут радіоелектроніки, державна агроекологічна академія), у вузах України та за кордоном.

# *Програма вступного екзамену з математики*

Програма з математики для вступників до вищих навчальних закладів III – IV рівнів акредитації складається з трьох розділів. Перший з них містить перелік основних математичних понять і фактів, якими повинен володіти вступник (вміти правильно їх використовувати при розв'язанні задач, посилатися на них при доведенні теорем).

У другому розділі вказано теореми, які треба вміти доводити. Зміст теоретичної частини іспитів повинен формуватися з цього розділу. У третьому розділі перелічено основні математичні вміння і навички, якими має володіти вступник.

На іспиті з математики вступник до вищого навчального закладу повинен показати:

а) чітке знання означень, математичних понять, термінів, формулювань правил, ознак, теорем, передбачених програмою, вміння доводити їх;

б) вміння точно і стисло висловити математичну думку в усній і письмовій формі, використовувати відповідну символіку;

в) впевнене володіння практичними математичними вміннями і навичками, передбаченими програмою, вміння застосовувати їх при розв'язанні задач і вправ.

## I. Основні математичні поняття і факти,

якими повинен володіти вступник (вміти правильно їх використовувати при розв’язанні задач, посилатися на них при доведенні теорем).

## Арифметика, алгебра і початки аналізу

1. Натуральні числа і нуль. Читання і запис натуральних чисел. Порівняння натуральних чисел. Додавання, віднімання, множення та ділення натуральних чисел.

2. Подільність натуральних чисел. Дільники і кратні натурального числа. Парні і непарні числа. Ознаки подільності на 2, 5, 3, 9, 10. Ділення з остачею. Прості і складені числи Розкладання натурального числа на прості множники. Найбільший спільний дільник, найменше спільне кратне.

3. Звичайні дроби. Порівняння звичайних дробів. Правильний і неправильний дріб. Ціла та дробова частина числа. Основна властивість дробу. Скорочення дробу. Середнє арифметичне кількох чисел. Основні задачі на дроби.

4. Степінь з натуральним і раціональним показником. Арифметичний корінь та його властивості.

5. Логарифми та їх властивості. Основна логарифмічна тотожність.

6. Одночлен і многочлен. Дії над ними. Формули скороченого множення.

7. Многочлен з однією змінною. Корінь многочлена (на прикладі квадратного тричлена).

8. Поняття функції. Способи задания функції. Область визначення, область значень функції. Функція, обернена до даної.

9. Графік функції. Зростання і спадання функції; періодичність, парність, непарність функції.

10. Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку. Поняття екстремуму функції. Необхідна умова екстремуму. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.

11. Означення і основні властивості функцій: лінійної $y = ax + b$, квадратичної $y = ax^2 + bx + c$, степеневої $y = x^n$ ($n \in Z$), показникової $y = a^x$ ($a > 0$), логарифмічної $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), тригонометричних $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$.

12. Рівняння. Розв'язування рівнянь, корені рівняння. Рівносильні рівняння. Графік рівняння з двома змінними.

13. Нерівності. Розв'язування нерівностей. Рівносильні нерівності.

14. Системи рівнянь і системи нерівностей. Розв'язування систем. Корені системи. Рівносильні системи рівнянь.

15. Арифметична та геометрична прогресії. Формула ***n***-го члена і суми ***n*** перших членів прогресій.

16. Синус і косинус суми та різниці двох аргументів (формули).

17. Перетворення в добуток $\sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos\alpha \pm \cos\beta$.

18. Означення похідної, її фізичний та геометричний зміст.

19. Похідні суми, добутку, частки та функцій $y = ax + b$, $y = x^n$ ($n \in Z$), $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$.

## Геометрія

1. Пряма, промінь, відрізок, ламана; довжина відрізка. Кут, величина кута. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прямі. Рівність і подібність геометричних фігур. Відношення площ подібних фігур.

2. Приклади перетворення геометричних фігур, види симетрії.

3. Вектори. Операції над векторами.

4. Многокутник. Вершини, сторони, діагоналі многокутника.

5. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їх властивості. Види трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.

6. Чотирикутник: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція; їх основні властивості.

7. Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорди, січні кола. Залежність між відрізками у колі. Дотична до кола. Дуга кола. Сектор, сегмент.

8. Центральні і вписані кути; їх властивості.

9. Формули площ геометричних фігур: трикутника, прямокутника, паралелограма, квадрата, ромба, трапеції.

10. Довжина кола і довжина дуги кола. Радіанна міра кута. Площа круга і площа сектора.

11. Площина. Паралельні площини і площини, що перетинаються.

12. Паралельність прямої і площини.

13. Кут прямої з площиною. Перпендикуляр до площини.

14. Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Перпендикулярність двох площин.

15. Многогранники. Вершини, ребра, грані, діагоналі многогранника. Пряма і похила призми. Піраміда. Правильна призма і правильна піраміда. Паралелепіпеди, їх види.

16. Тіла обертання: циліндр, конус, сфера, куля. Центр, діаметр, радіус сфери і кулі. Площина, дотична до сфери.

17. Формули площі поверхонь і об'ємів призми, піраміди, циліндра, конуса.

18. Формули площі поверхні сфери, об'єму кулі.

## II. Основні формули і теореми

## Алгебра і початки аналізу

1. Функція $y = ax + b$, її властивості, графік.

2. Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості, графік.

3. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості, графік.

4. Формула коренів квадратного рівняння.

5. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

6. Властивості числових нерівностей.

7. Логарифм добутку, степеня, частки.

8. Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, їх означення, властивості, графіки.

9. Корені рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\, x = a$.

10. Формули зведення.

11. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу.

12. Тригонометричні функції подвійного аргументу.

13. Похідна суми, добутку й частки двох функцій, степеневої функції.

14. Похідні тригонометричних функцій, показникової і логарифмічної функцій.

15. Рівняння дотичної до графіка функції.

## Геометрія

1. Властивості рівнобедреного трикутника.
2. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.
3. Ознаки паралельності прямих.
4. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.
5. Ознаки паралелограма.
6. Коло, описане навколо трикутника.
7. Коло, вписане в трикутник.
8. Дотична до кола та її властивість.
9. Вимірювання кута, вписаного в коло.
10. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.
11. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.
12. Формула відстані між двома точками. Рівняння кола.
13. Ознака паралельності прямої і площини.
14. Ознака паралельності площин.
15. Теорема про перпендикулярність прямої і площини.
16. Перпендикулярність двох площин.
17. Теорема про три перпендикуляри.
18. Паралельність прямих і площин.
19. Перпендикулярність прямих і площин.

# III. Основні вміння і навички

Вступник повинен уміти:

1. Виконувати арифметичні дії над натуральними числами, десятковими і звичайними дробами; користуватися калькулятором і таблицями.

2. Виконувати тотожні перетворення многочленів, алгебраїчних дробів, виразів, що містять степеневі, показникові, логарифмічні і тригонометричні функції.

3. Будувати і читати графіки лінійної, квадратичної, степеневої, показникової, логарифмічної та тригонометричних функцій.

4. Розв'язувати рівняння і нерівності першого і другого степеня, а також рівняння і нерівності, що зводяться до них;

розв'язувати системи рівнянь та нерівностей першого і другого степеня і ті, що зводяться до них; найпростіші рівняння і нерівності, що мають степеневі, показникові, логарифмічні і тригонометричні функції.

5. Розв'язувати задачі за допомогою рівнянь і систем рівнянь.

6. Зображати геометричні фігури на площині і виконувати найпростіші побудови на площині.

7. Використовувати відомості з геометрії при розв'язуванні алгебраїчних, а з алгебри і тригонометрії — геометричних задач.

8. Виконувати на площині операції над векторами (додавання і віднімання векторів, множення вектора на число) і використовувати їх при розв'язуванні практичних задач і вправ.

9. Застосовувати похідну при дослідженні функцій на зростання (спадання), на екстремуми, а також для побудови графіків функцій.

# Частина I. Зразки завдань вступного екзамену з математики в 2000 році

Вступний екзамен з математики в 2000 році відбувався в усній формі.

Кожен екзаменаційний білет містив 1 теоретичне питання та 3 практичні завдання. Відповідь на теоретичне питання повинна бути побудована не як переказ відповідного параграфу шкільного підручника, а як викладення всіх відомостей з шкільного курсу , пов’язаних з цим питанням. Розглянемо це на прикладі питання “Коло, описане навколо трикутника”. Часто відповідь абітурієнта складається лише з формулювання та доведення теореми про те, що навколо довільного трикутника можна описати коло, центр якого є точкою перетину перпендикулярів до сторін трикутника, проведених через середини цих сторін. Відповідаючи на це питання, абітурієнт повинен також вивести формули для знаходження радіуса описаного кола такі, як $R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$ та $R=\dfrac{abc}{4S}$ і практично побудувати центр описаного кола. При цьому абітурієнт може отримати додаткові запитання, наприклад, чи можна описати коло навколо довільного чотирикутника?

Практичні завдання охоплюють курс математики не тільки за 10-11 класи, а й за 7-9 класи. Не знаючи про це, деякі абітурієнти вважають, що хорошої підготовки до випускного екзамену з математики на атестат про середню освіту достатньо і для вступного екзамену. Тому часто найбільші труднощі в таких абітурієнтів викликають задачі на побудову, які вони вчаться розв’язувати в 7-9 класах, задачі на доведення та інші планіметричні питання.

Часто при розв’язуванні задач з алгебри та початків аналізу абітурієнт користується відомими схемами, які сам не в змозі пояснити. Такі схеми повинні бути обґрунтовані посиланнями на відповідні теореми, на властивості відповідних функцій, логічними міркуваннями тощо.

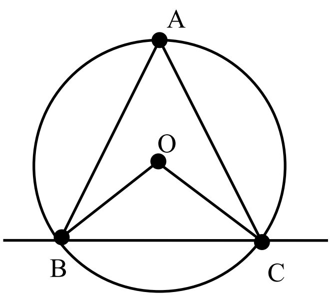
Автори сподіваються, що даний посібник допоможе абітурієнтам уникнути несподіваних ситуацій під час вступного екзамену з математики та краще підготуватися до нього.

## *Усний екзамен (стаціонарна форма навчання)*

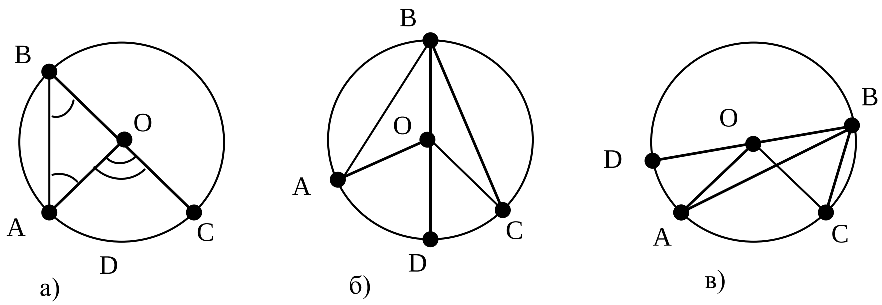
### Білет №1

**1.** Вимірювання кута, вписаного в коло.

**Відповідь.** *Означення 1. Центральним кутом* у колі називається плоский кут з вершиною у його центрі. Частина кола, розміщена всередині плоского кута, називається *дугою кола*, що відповідає цьому центральному куту. *Градусною мірою дуги* кола називається градусна міра відповідного центрального кута.




*Означення 2*. Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло, називається *вписаним у коло*. Кут BAC на рисунку вписаний у коло. Його вершина A лежить на колі, а сторони перетинають коло в точках B і C. Кажуть також, що кут A спирається на хорду BC. Пряма BC розбиває коло на дві дуги. Центральний кут, що відповідає тій дузі, яка не містить точку A, називається центральним кутом, *який відповідає даному вписаному куту.*




*Теорема 1.* Кут, вписаний у коло, дорівнює половині відповідного центрального кута.

*Доведення.* Розглянемо спочатку випадок, коли одна із сторін кута проходить через центр кола. Трикутник AOB рівнобедрений, бо в нього сторони OA і OB рівні як радіуси. А тому кути A і B трикутника рівні. Оскільки їх сума дорівнює зовнішньому куту трикутника при вершині O, то кут трикутника дорівнює половині кута AOC, що й треба було довести.

Загальний випадок зводиться до розглянутого окремого, якщо провести допоміжний діаметр BD (рис. б, в).

Для випадку, поданому на рисунку б), маємо:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}\angle AOD + \frac{1}{2}\angle DOC = \frac{1}{2}\angle AOC .$$

Для випадку, поданому на рисунку в), маємо:

$$\angle ABC = \angle DBC - \angle DBA = \frac{1}{2}\angle DOC - \frac{1}{2}\angle DOA = \frac{1}{2}\angle AOC .$$

Теорему доведено.

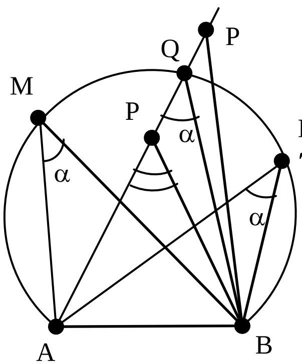
*Наслідок.* Вписані кути, сторони яких проходять через точки A і B кола, а вершини лежать з одного боку від прямої AB, рівні. Зокрема, кути, що спираються на діаметр, прямі.

Справедливе обернене твердження.

*Теорема 2.* Геометричним місцем точок – вершин кутів з даною градусною мірою, сторони яких проходять через дві дані точки, а вершини лежать з одного боку від прямої, що сполучає ці точки, є дуга кола з кінцями в цих точках.

*Доведення.* Нехай A, B – задані точки, а $\alpha$ – кут з визначеною градусною мірою. Якщо M – точка шуканого ГМТ, то $\angle AMB=\alpha$ за умовою. В зв'язку з цим природно згадати наслідок з вище доведеної теореми про рівність вписаних кутів, що спираються на одну і ту ж саму хорду AB.

Проведемо коло через три точки A, M і B, що не лежать на одній прямій, якщо $0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$. Тоді для деякої точки M′ дуги кола AMB (крім точок A і B) $\angle$A M′B теж рівний $\alpha$, тобто точка цієї дуги також належить шуканому ГМТ.



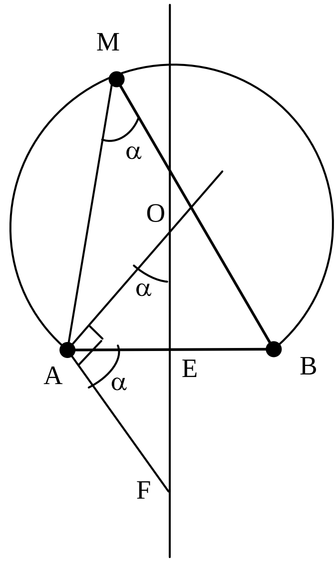

Крім того, очевидно, всі точки (крім A і B) дуги, симетричної з дугою AMB відносно прямої AB, мають ту ж властивість і тому належать тому ж ГМТ.

Щоб довести, що фігура $\Phi$, складена із двох симетричних дуг кіл, які проходять через точки A і B, справді є шуканим ГМТ, залишилося розглянути точки, що не належать цій фігурі. Якщо точка P лежить в області, обмеженій фігурою $\Phi$ (див. рис.), то, провівши промінь AP (чи BP) до зустрічі з фігурою $\Phi$ в точці Q, помічаємо, що $\angle APB > \angle AQB = \alpha$ (за теоремою про зовнішній кут трикутника). Якщо ж вибрати точку P поза вказаною областю, то одержимо протилежний результат : $\angle APB < \alpha$.

Отже, ГМТ, з яких даний відрізок видно під даним кутом α (так у більшості випадків кажуть), є об'єднання двох дуг кіл, що проходять через кінці відрізка AB і розташовані симетрично по відношенню до даного відрізка. Точки A і B не належать цьому ГМТ, бо при співпаданні точки M з будь-якою з точок A, B кут AMB стає невизначеним.

*Побудова* ГМТ площини, з яких даний відрізок AB видно під даним кутом α.

Нехай дуга AMB така, що всякий вписаний у неї кут AMB має градусну міру α. Питання зводиться до відшукання на рисунку центра цієї дуги. Оскільки центр O повинен бути однаково віддалений від точок A і B, то він лежить на прямій OE⊥AB, проведеній через середину AB. Крім того, він повинен лежати на перпендикулярі AO, проведеному до дотичної кола AF в його точці A, і, отже, шуканий центр є точкою перетину OA і OE. Щодо визначення положення AF, то помічаємо, що кути AMB і FAB вимірюються половиною одного і того ж самого центрального кута AOB (див. задачу 4, п. 8 і теорему), і тому $\angle FAB = \alpha$; ці умовиводи й показують як побудувати AF.




Із зазначеного випливає такий алгоритм побудови: 1) проводимо серединний перпендикуляр відрізка AB; 2) відкладаємо $\angle FAB = \alpha$ і проводимо в точці A перпендикуляр до AF. Центром шуканої дуги є точка перетину цих перпендикулярів.

Розв’язків два, бо кут α можна було б побудувати і в іншу півплощину. Якщо $\alpha = 90^{\circ}$, то точка O зливається з точкою E і обидві шукані дуги дають одне коло.

Підкреслимо, що розглянуте ГМТ має найширше застосування при розв’язуванні задач на побудову.

*Задача 1.* Доведіть, що якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці S (рис. 1), то $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

*Доведення.* Вписані в коло кути DCB і DAB рівні за наслідком із теореми.

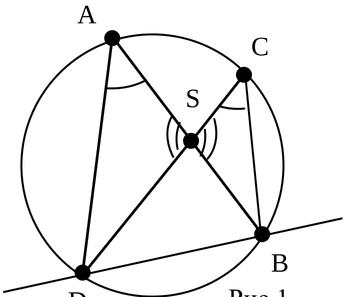



Рис.1

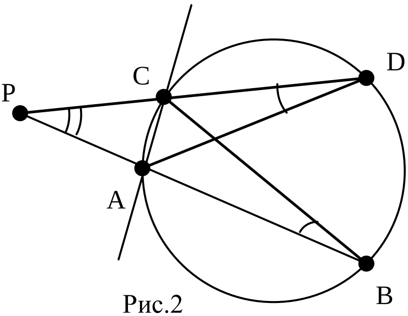



Рис.2

Кути ASD і BSC рівні як вертикальні. З рівності названих кутів випливає, що трикутники ASD і CSB подібні. З подібності трикутників випливає відношення $\frac{DS}{BS}=\frac{AS}{CS}$. Звідси AS·BS=CS·DS, що й треба було довести.

*Задача 2.* Доведіть, що якщо дві січні, що проходять через точку P, яка лежить поза колом, перетинають коло відповідно в точках A, B та C, D (рис. 2), то PA·PB=PC·PD.

*Доведення.* Нехай точки A і C найближчі до точки P точки перетину січних з колом (рис. 2). Трикутники PAD і PCB подібні. У них кут при вершині P спільний, а кути при вершинах B і D рівні за властивостями кутів, вписаних у коло. З подібності трикутників випливає відношення: $\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}$.

Звідси PA·PB=PC·PD, що й треба було довести.

*Наслідок.* Нехай січна та дотична проходять через точку P, яка лежить поза колом, січна перетинає коло в точках A та B, а дотична дотикається кола в точці C. Тоді $PC^2$=AP·BP.

**2.** Знайти найбільший корінь рівняння

$$3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1).$$

**Розв'язання.** З умов

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1 \end{cases}$$

знаходимо область допустимих значень: $x\in(-1;0)\bigcup(0;+\infty)$.

Скориставшись формулою $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, після введення нової змінної $t = \log_3(x+1)$ отримуємо рівняння $3 + \dfrac{2}{t} = 2t$, яке зводиться до квадратного. Знаходимо $t_1 = 2$, $t_2 = -\dfrac{1}{2}$. Отже, $\log_3(x+1) = 2$ або $\log_3(x+1) = -\dfrac{1}{2}$, звідки $x_1 = 8$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1$.

Відповідь: $x = 8$.

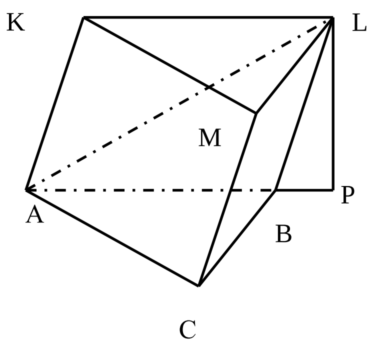
**3.** В основі похилої призми лежить правильний трикутник зі стороною, рівною $a$. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є ромб, більша діагональ якого рівна $b$. Знайти об'єм призми.

**Розв'язання.** Нехай $ABCKLM$ - задана призма, $AB = BC = AC = a$, $ABL \perp ABC$, $AL = b$.

Стереометричні задачі краще розв'язувати аналітичним методом: йти "від висновку до умови".

Відомо, що $V = S \cdot h$. Площа основи призми $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Отже, залишається знайти її висоту.

Опустимо з точки $L$ перпендикуляр $LP$ на основу $ABC$ призми. Із умови $ABL \perp ABC$ випливає, що $LP$ лежить у площині грані $ABLK$, тому




точка $P$ належить продовженню $AB$. Позначимо $LP = h,\ BP = x$. Оскільки $ABLK$ є ромб, то всі бічні ребра призми також рівні $a$. За теоремою Піфагора (для прямокутних трикутників $ALP$ і $BLP$) складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} b^2 = (a+x)^2 + h^2, \\ a^2 = x^2 + h^2. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримуємо

$h = \dfrac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$. Остаточно отримуємо, що об'єм призми

$V = \dfrac{ab\sqrt{3(4a^2 - b^2)}}{8}$.

**4.** Розв'язати рівняння $1 + \sin x \cos 2x = \sin x + \cos 2x$.

**Розв'язання.** Після очевидних рівносильних перетворень задане рівняння можна записати у вигляді

$$(1 - \sin x)(1 - \cos 2x) = 0,$$

звідки отримуємо: $\sin x = 1$ або $\cos 2x = 1$. Маємо два сімейства розв'язків.

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\ x = \pi k,\ k \in Z$.

**Білет №2**

1. Ознаки паралельності прямої і площини.

2. Знайти відношення $\dfrac{x}{y}$, якщо $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{3} = 3, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{y} = 3. \end{cases}$

3. Більша основа трапеції має довжину 24 см. Знайти довжину її меншої основи, якщо віддаль між серединами діагоналей трапеції рівна 4 см.

4. Розв'язати рівняння: $4^x \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}$.

**Білет №3**

1. Ознака паралельності площин.

2. Розв'язати нерівність: $|2x - 1| - |5x - 2| \ge 1$.

3. Навколо кола з радіусом $r$ описана прямокутна трапеція, менша сторона якої рівна $\dfrac{3}{2}r$. Обчислити площу цієї трапеції.

4. Розв'язати рівняння: $\log_{0,5}^2(4x) - \log_2\left(\dfrac{x^2}{8}\right) = 8$.

**Білет №4**

1. Теорема про перпендикулярність прямої і площини.

2. Розв'язати нерівність: $9 \cdot 4^{-1/x} + 5 \cdot 6^{-1/x} < 4 \cdot 9^{-1/x}$.

3. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 3 см і 9 см. Знайти сторони трапеції.

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \sqrt{5-4x}$ на проміжку $[-1;1]$.

**Білет №5**

1. Перпендикулярність двох площин.

2. Розв'язати рівняння: $tg\frac{x}{2} = 1 - \cos x$.

3. В основі чотирикутної піраміди лежить прямокутник, площа якого рівна $S$. Бічні ребра піраміди рівні і утворюють з площиною основи кут $45^0$. Кут між діагоналями основи дорівнює $60^0$. Знайти об'єм піраміди.

4. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x - x^2} > 5 - x$.

**Білет №6**

1. Коло, вписане в трикутник.

2. Знайти найбільше значення $(x + y)$, де $(x, y)$ - розв'язок системи

$$\begin{cases} xy(x+y) = 20, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

3. Радіуси вписаного і описаного кола прямокутного трикутника відповідно рівні 2 см і 5 см. Знайти катети трикутника.

4. Розв'язати рівняння $\log_3 8^{x-1} \cdot \log_2 27 = x + 7$.

**Білет №7**

1. Дотична до кута та її властивість.

2. Знайти найменший додатній корінь рівняння $\sin 3x = \cos x - \sin x$.

3. В основі трикутної піраміди лежить рівнобедрений трикутник, у якого площа рівна $S$, а кут при вершині - $\alpha$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо кут між кожним бічним ребром і висотою піраміди рівний $\beta$.

4. Знайти найменше рішення нерівності $\frac{|x-3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2$.

**Білет №8**

1. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.

2. Розв'язати рівняння $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$.

3. Бічні сторони трапеції, описаної навколо круга, утворюють з її більшою основою гострі кути $\alpha$ і $\beta$. Площа трапеції дорівнює $S$. Знайти площу круга.

4. Розв’язати нерівність $2-\sqrt{1-x^2}>\sqrt{4-x^2}$ .

**Білет №9**

1. Ознаки подібності трикутників.

2. Розв’язати рівняння: $\sqrt{\dfrac{x+5}{x}}+4\sqrt{\dfrac{x}{x+5}}=4$ .

3. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди рівна $a$, а двогранний кут при основі - $\alpha$. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, що ділить навпіл двогранний кут при основі.

4. Розв’язати нерівність: $\log_{3x+5}(9x^2+8x+8)>2$ .

**Білет №10**

1. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.

2. Розв’язати рівняння $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot 35+7^x\cdot 35=0$ .

3. Знайти гострий кут ромба ABCD, якщо пряма, проведена через вершину A, ділить кут BAD у відношенні 1:3, а сторону BC у відношенні 3:5.

4. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння $\sin^2 2x+\sin^2 x=\dfrac{3}{2}$.

**Білет №11**

1. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.

2. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння $\sin^4 x-\cos^4 x=\dfrac{1}{2}$.

3. Основи рівнобедреної трапеції рівні $a$ і $b$, а гострий кут $\beta$. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

4. Розв’язати нерівність: $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$.

**Білет №12**

1. Ознаки паралельності прямих.

2. Розв’язати рівняння: $\sqrt{3}\sin x-tgx+tgx\sin x-\sqrt{3}=0$ .

3. Із зовнішньої точки проведені до кола січна довжиною 12 см. і дотична, довжина, якої складає $2/3$ внутрішнього відрізка січної. Знайти довжину дотичної.

4. Розв'язати нерівність: $\left||x-3|+1\right| \geq 2$.

**Білет №13**

1. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.

2. Розв'язати рівняння: $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$.

3. Висота трикутника рівна 6 см. і ділить кут у відношенні 2:1, а основу трикутника ділить на відрізки, менший з яких, дорівнює 3 см. Знайти сторони трикутника.

4. Обчислити нерівність: $\log_{2x+2} x < 1$.

**Білет №14**

1. Ознаки паралелограма.

2. Знайти добуток розв'язків рівняння $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

3. В коло радіуса $R$ вписано рівнобедрений трикутник, у якого сума довжин основи і висоти дорівнює діаметру кола. Знайти висоту цього трикутника. Обчислити для $R=5$.

4. Обчислити: $-14\sqrt{10}\sin(\alpha+2\pi)$, якщо $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

**Білет №15**

1. Коло, описане навколо трикутника.

2. Розв'язати рівняння: $4\cdot 2^{2x} - 6^x = 18\cdot 3^{2x}$.

3. Спільну хорду двох кіл, що перетинаються, видно із їх центрів під кутами $90^0$ і $60^0$. Знайти радіуси кіл, якщо відстань між їх центрами рівна $(\sqrt{3}+1)$.

4. Знайти проміжки спадання функції: $y=\frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 18$.

**Білет №16**

1. Формула коренів квадратного рівняння.

2. Основа рівнобедреного трикутника рівна $4\sqrt{2}$ см., а медіана бічної сторони – 5 см. Знайти бічні сторони трикутника.

3. Розв'яжіть рівняння: $0{,}125\cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

4. Основою піраміди є прямокутник з кутом $\alpha$ між діагоналями. Бічні ребра утворюють з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус описаної навколо неї кулі дорівнює $R$.

**Білет №17**

1. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості і графік.

2. Периметр паралелограма дорівнює 90 см. і гострий кут містить $60^0$. Діагональ паралелограма ділить його тупий кут у відношенні 1:3. Знайдіть сторони паралелограма.

3. Розв'язати нерівність: $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$.

4. Знайдіть об'єм прямої призми, у якої основою служить прямокутний трикутник з гострим кутом $\alpha$, якщо бічне ребро призми має довжину $l$ і складає з діагоналлю більшої бічної грані кут $\beta$.

**Білет №18**

1. Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості і графік.

2. В трикутник, дві менші сторони якого рівні 3 см і 4 см, вписане півколо діаметром $24/7$ см, що лежить на більшій стороні. Знайти цю сторону трикутника.

3. Розв'язати нерівність: $\log_{0,1}\left[\log_2\left(\frac{x^2+1}{|x-1|}\right)\right] < 0$.

4. Апофема правильної шестикутної піраміди рівна $m$. Двогранний кут при основі рівний $\alpha$. Знайти повну поверхню піраміди.

**Білет №19**

1. Функція $y = ax + b$, її властивості і графік.

2. Об'єм правильної трикутної піраміди дорівнює $\frac{l^3}{6}$, де $l$ довжина бічного ребра. Знайти плоский кут при вершині піраміди (в градусах).

3. Розв'язати нерівність: $(1{,}25)^{1-x} < (0{,}64)^{2(1+\sqrt{x})}$.

4. Обчислити довжини невідомих сторін та кути трикутника, якщо $a = 24$ см., $h_a = 15$ см., $m_a = 17$ см.

**Білет №20**

1. Властивості рівнобедреного трикутника.

2. Знайти область визначення функції: $y = \sqrt{\log_{0,3}\left(\frac{x-1}{x-5}\right)}$.

3. при якому значенні довжини висоти прямокутна трапеція з гострим кутом у $45^0$ і периметром 4 см. має найбільшу площу?

4. Знайти $x + y$, де $(x, y)$ - цілочисельне рішення системи:

$$\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 2. \end{cases}$$

**Білет №21**

1. Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$, їх означення, властивості і графік.

2. Навколо круга з радіусом $r$ описано рівнобедрений трикутник з кутом $120^0$. Знайдіть сторони трикутника.

3. Розв'язати нерівність: $3\sqrt{6 + x - x^2} > 4x - 2$.

4. В кулю вписано конус. Площа осьового перерізу конуса дорівнює $S$, а кут між його твірною і висотою $\alpha$. Знайти об'єм кулі.

**Білет №22**

1. Функції $y = tgx,\ y = ctgx$, їх означення, властивості і графік.

2. Розв'язати нерівність: $x - 1 > 2\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}$.

3. Пряма, яка проходить через точку перетину діагоналей паралельно її основам, перетинає бічні сторони в точках $M$ і $N$. Знайти довжину відрізка $MN$, якщо довжини основ трапеції $a$ і $b$. Обчислити для $a = 6, b = 2$.

4. Площа повної поверхні правильної чотирикутної піраміди рівна $S$, плоский кут бічної грані при вершині рівний $\alpha$. Знайти висоту піраміди.

**Білет №23**

1. Логарифм добутку, степеня, частки.

2. На більшому катеті як на діаметрі описано півколо. Знайти його довжину, якщо менший катет рівний 30 см., а хорда, що з'єднує вершину прямого кута з точкою перетину гіпотенузи з півколом, рівна 24 см.

3. Розв'язати рівняння: $3\sin x = 2(1 - \cos x)$.

4. Основою піраміди є рівнобедрена трапеція, паралельні сторони якої рівні 3 см і 5 см, а бічна сторона – 7 см. Висота піраміди проеціюється в точку перетину діагоналей основи, а більше бічне ребро дорівнює 10 см. Знайти об'єм піраміди.

**Білет №24**

1. Властивості числових нерівностей.
2. Знайти діагональ і бічну сторону рівнобедреної трапеції, якщо її основи рівні 20 см і 12 см., а центр описаного кола лежить на більшій основі трапеції.
3. Розв’язати рівняння: $tg^3 x - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} - 3ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3$.
4. Через дві твірні конуса проведено площину, що відтинає на основі дугу $120^0$. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса $R$, а площина перерізу утворює з основою кут $\alpha$.

**Білет №25**

1. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
2. В трикутнику дві сторони рівні 18 см і 13 см. Обчисліть третю сторону, якщо довжина медіани, проведеної до більшої із даних сторін, рівна 8 см.
3. Деяке двозначне число у 4 рази більше за суму і у 3 рази більше за добуток своїх цифр. Знайти це число.
4. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, а площі діагональних перерізів рівні $m$ і $n$. Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.

**Білет №26**

1. Рівняння дотичної до графіка функції.
2. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з сторонами 39 см,39 см і 30 см. Двогранні кути при основі рівні між собою і мають градусну міру $45^0$. Визначити об’єм цієї піраміди.
3. Обчислити $x$, якщо $\log_2\left(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1\right) - 2\log_4\left(\sqrt{\lg x} + 1\right) = 1$.
4. Впишіть в даний трикутник квадрат, у якого дві вершини лежать на одній стороні, а дві інші вершини – на двох інших сторонах.

**Білет №27**

1. Тригонометричні функції подвійного аргументу.
2. В прямокутний трикутник вписане коло. Гіпотенуза ділиться точкою дотику у відношенні 2:3. Знайти площу трикутника, якщо його периметр рівний 36 см.
3. Обчислити суму рішень рівняння: $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3} = \frac{1}{x}$.
4. Побудуйте спільну зовнішню дотичну до двох заданих кіл.

**Білет №28**

1. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу.
2. В конус вписано циліндр, висота якого рівна радіусу основи конуса. Знайти величину кута між віссю конуса і його твірною, якщо площа повної поверхні циліндра відноситься до площі основи конуса як 3:2.

3. Розв’язати нерівність: $\frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3(5x) > \log_{1/3}(x+3)$.

4. Побудувати трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до однієї із них.

## Білет №29

1. Формули зведення.
2. Медіани трикутника рівні 3 см, 4 см і 5 см. Обчислити площу трикутника.
3. Розв’язати нерівність: $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}\left(x^2 5x+8\right)} \leq 2{,}5$.
4. Знайдіть об’єм правильної трикутної піраміди, якщо плоский кут при вершині рівний $\alpha$, а радіус кола, описаного навколо бічної грані, рівний $R$.

## Білет №30

1. Корені рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$.
2. В трапеції сума кутів при більшій основі дорівнює $90^0$. Доведіть, що довжина відрізка, який з’єднує середини основ, рівна піврізниці довжин основ.
3. Знайти найбільше значення $|x \cdot y|$, якщо: $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 8. \end{cases}$
4. Основою піраміди є прямокутник, площа якого рівна 12 см$^2$. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші складають з основою кути в $30^0$ та $60^0$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

# Частина II . Зразки завдань вступного екзамену з математики в 2001 році

Вступний екзамен з математики в 2001 році відбувався в усній формі.

## *Усний екзамен (стаціонарна форма навчання)*

### Білет №1

**1.** Властивості числових нерівностей.

**Відповідь.** *Означення.*

1) Число $a$ більше від числа $b$ (записують $a > b$), якщо різниця $a - b$ додатна;

2) число $a$ менше від числа $b$ (записують $a < b$), якщо різниця $a - b$ від'ємна;

3) число $a$ більше або дорівнює числу $b$ (записують $a \geq b$), якщо різниця $a - b$ невід'ємна;

4) число $a$ менше або дорівнює числу $b$ (записують $a \leq b$), якщо різниця $a - b$ недодатна.

Геометричний зміст: нехай $a > b$ . Тоді точка з координатою $a$ лежить на координатній прямій правіше точки з координатою $b$ .

Нерівності складені за допомогою знаків > або <, називають строгими; нерівності складені за допомогою знаків ≥ або ≤, називають нестрогими.

1. При будь-якому $a$ висловлення $a < a$ хибне.

2. Якщо $a$ і $b$ – різні числа, то істинним є лише одне з висловлень $a < b$ або $b < a$.

3. Якщо $a > b$, то $b < a$; якщо $a < b$, то $a > b$.

Справді, якщо $a$-$b$ – додатне число, то $b$-$a$ – від'ємне. І навпаки.

4. Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$ (транзитивність).

*Доведення.* Доведемо, що $a$-$c$ – від'ємне число. Маємо: $a-c=a-c+b-b=(a-b)+(b-c)$. За умовою $a < b$ *і* $b < c$, тому доданки $a$-$b$ і $b$-$c$ – від'ємні числа, тому їх сума є від'ємним числом. Отже $a < c$.

5. Якщо $a < b$ і $c$ – деяке число, то $a+c < b+c$.

*Доведення.* Розглянемо різницю $(a+c)-(b+c)$. Маємо: $(a+c)-(b+c)=a-b$. Оскільки $a < b$, то різниця $a$-$b$ – від'ємна, і різниця $(a+c)-(b+c)$ – від'ємна. Отже, $a+c < b+c$.

Таким чином, якщо до обох частин істинної нерівності додати одне і те саме число, то одержимо істинну нерівність.

*Наслідок.* Якщо доданок перенести з протилежним знаком із однієї частини істинної нерівності в іншу, то одержимо істинну нерівність.

Справді, $(a+b<c)\Rightarrow(a+b+(-b)<c+(-b)\Rightarrow(a<c-b)$.

6. Якщо $a<b$ і $c$ – додатне число, то $ac<bc$. Якщо $a<b$, і $c$ – від'ємне число, то $ac>bc$.

*Доведення.* Перетворимо різницю $ac-bc$ в добуток: $ac-bc=c(a-b)$.

Оскільки $a<b$, то $a-b$ – від'ємне число. При додатному $c$ добуток $c(a-b)$ – від’ємний, отже і різниця $ac-bc$ – від'ємна, тобто $ac<bc$. При від'ємному $c$ добуток $c(a-b)$ – додатний, отже і різниця $ac-bc$ – додатна, тобто $ac>bc$.

Таким чином, якщо обидві частини істинної нерівності помножити на одне і те ж додатне число, то одержимо істинну нерівність; якщо обидві частини істинної нерівності помножити на одне і те ж від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо істинну нерівність.

Відомо, що ділення можна замінити множенням на число, обернене дільнику. Тому справедливий наслідок: якщо обидві частини істинної нерівності розділити на одне і те ж додатне число, то одержимо істинну нерівність; якщо ж розділити на одне і те ж від'ємне число, змінивши знак нерівності на протилежний, то також одержимо істинну нерівність.

7. Якщо числа $a$ і $b$ додатні (або від’ємні) одночасно і $a<b$, то $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

*Доведення.* Перетворимо різницю $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$. Одержимо $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$.

Оскільки $b>a$, то $b-a$ – додатне число. Оскільки $a$ і $b$ одного знаку, то їх добуток $ab$ – додатне число. Отже, дріб $\dfrac{b-a}{ab}>0$ і, таким чином, $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

8. Якщо $a<b$ і $c<d$, то $a+c<b+d$.

*Доведення.* Додавши до обох частин нерівності $a<b$ число $c$, одержимо $a+c<b+c$. Додавши до обох частин нерівності $c<d$ число $b$, одержимо $c+b<d+b$ $(b+c<b+d)$. За транзитивністю із нерівностей $a+c<b+c$ і $b+c<b+d$ випливає, що $a+c<b+d$.

Таким чином, якщо додати почленно істинні нерівності одного знаку, то одержимо істинну нерівність.

9. Якщо $a>b$ і $c<d$, то $a-c>b-d$.

*Доведення.* Віднімемо від обох частин нерівності $a>b$ число $c$. Тоді одержимо $a-c>b-c$. Віднявши від обох частин нерівності $c<d$ число $b$, будемо мати $c-b<d-b$. Помноживши останню нерівність на –1, змінимо її знак на протилежний: $b-c>b-d$. Далі, за властивістю 4 маємо $a-c>b-d$, що й потрібно було довести.

Таким чином, при почленному відніманні істинних нерівностей різних знаків одержимо істинну нерівність, що має однаковий знак з нерівністю, від якої віднімаємо.

10. Якщо $a<b$ і $c<d$, де $a,b,c,d$ – додатні числа, то $ac<bd$.

*Доведення.* Помноживши обидві частини нерівності $a<b$ на додатне число $c$, одержимо $ac<bc$. Помноживши обидві частини нерівності $c<d$ на додатне число $b$, одержимо $bc<bd$. Із нерівностей $ac<bd$ і $bc<bd$ за транзитивністю випливає , що $ac<bd$.

Отже, якщо перемножити почленно істинні нерівності одного знаку, ліві і праві частини яких – додатні числа, то одержимо істинну нерівність.

*Наслідок.* Якщо числа $a$ і $b$ – додатні і $a>b$, то $a^n>b^n$, де $n$ – натуральне число.

*Доведення.* Перемноживши почленно $n$ істинних нерівностей $a>b$, в яких $a$ і $b$ – додатні числа, одержимо істинну нерівність $a^n>b^n$.

Отже, нерівність з додатніми числами не порушується, якщо її ліву і праву частини піднести до одного і того ж натурального степеня.

11. Якщо $a>b$ і $c<d$, де $a,b,c,d$ – додатні числа, то $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

*Доведення.* Поділимо обидві частини нерівності $a>b$ на число $c>0$. Одержимо $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$. Розділивши обидві частини нерівності $c<d$ на $b>0$, одержимо $\frac{c}{b}<\frac{d}{b}$. З урахуванням властивості 7, з останньої нерівності маємо $\frac{b}{c}>\frac{b}{d}$. Нарешті, скориставшись транзитивністю, доводимо, що $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

Таким чином, при почленному діленні істинних нерівностей протилежних знаків з додатними частинами одержуємо істинну нерівність однакового знаку з нерівністю, яку ділимо.

12. Якщо $a>b$, де $a$ і $b$ – невід'ємні числа, і $n$ – натуральне число, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$, тобто нерівність з додатними частинами не порушується, якщо з обох її частин добути корінь одного і того ж натурального степеня.

Доведення. Припустивши протилежне та перемноживши почленно $n$ нерівностей $\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{b}$, в яких $\sqrt[n]{a},\sqrt[n]{b}$ – невід'ємні числа, одержимо нерівність $a\le b$, яка протирічить тому, що $a>b$.

Аналогічні властивості мають місце також для нестрогих нерівностей.

**2.** Периметр ромба рівний $2p$, довжини діагоналей відносяться як $m:n$. Обчислити площу ромба.

**Розв'язання.** Дано : $ABCD$ — ромб, $P_{ABCD}=2p$, $AC:BD=m:n$. Знайти: $S_{ABCD}$.

Оскільки в ромба всі сторони рівні, то $AB=BC=CD=AD=\frac{p}{2}$; $AC:BD=m:n$, тому $AC=2mx$, $BD=2nx$, де $x$ – деякий відрізок. Діагоналі ромба $AC$ і $BD$ перетинаються в точці $O$ під прямим кутом і діляться точкою перетину навпіл. Записавши теорему Піфагора для трикутника $AOB$, отримаємо рівняння:

$(mx)^2+(nx)^2=\frac{p^2}{4}$, звідки $x=\frac{p}{2\sqrt{m^2+n^2}}$. Тоді $AC=\frac{pm}{\sqrt{m^2+n^2}}$;

$BD=\frac{pn}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Для знаходження площі ромба $ABCD$ використовуємо

формулу площі довільного опуклого чотирикутника $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, де

$d_1, d_2$ – його діагоналі, $\varphi$ – кут між діагоналями. Знаходимо

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{pm}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\frac{pn}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\sin 90^0=\frac{p^2mn}{2(m^2+n^2)}.$$

**3.** Розв‘язати систему рівнянь

$$\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4.\end{cases}$$

**Розв'язання.**

$$\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576\\ y-x=(\sqrt{2})^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4+x\\ 3^x\cdot 2^{4+x}=576\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4+x\\ 6^x=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=6\\ x=2.\end{cases}$$

Відповідь: $x=2,\ y=6$.

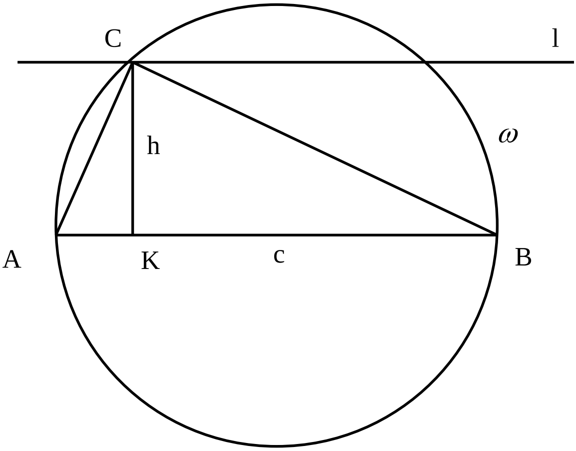
**4.** Побудуйте прямокутний трикутник за даними гіпотенузою і висотою, опущеною з вершини прямого кута на гіпотенузу.

**Аналіз.** Нехай $ABC$ – трикутник, в якому відомі гіпотенуза $AB=c$ і висота $CK=h$, опущена на гіпотенузу. Геометричним місцем точок, з яких відрізок $AB$ видно під прямим кутом, є коло $\omega$, для якого $AB$ є діаметром, тому точка $C$ знаходиться на колі $\omega$. Геометричним місцем точок, віддалених від прямої $AB$ на відстань $h$, є пряма $l$, яка паралельна $AB$ і така, що відстань між $l$ і $AB$ рівна $h$. Отже, точка $C$ може бути побудована як перетин кола $\omega$ і прямої $l$.

**Побудова.**

1. Проводимо довільну пряму, на якій відкладаємо даний відрізок $AB=c$.
2. Вибираємо довільну точку $K\in AB$, проводимо $KM\perp AB$.
3. Відкладаємо від точки $K$ відрізок $KN=h$.

4. Через точку $N$ проводимо пряму $l \perp KM$ (тоді $l||AB$).




5. На $AB$ як на діаметрі будуємо коло $\omega$.
6. В перетині кола $\omega$ і прямої $l$ одержуємо т. $C$.
7. З‘єднуємо точки $C$ і $A$, $C$ і $B$.

**Доведення.** Очевидно, що побудований таким способом трикутник $ABC$ задовольняє умову задачі.

## Білет №2

1.Функція $y = \dfrac{k}{x}$, її властивості і графік.

2. У прямокутному трикутнику ABC із вершини C прямого кута проведена висота CD. Точка D знаходиться на відстанях $m$ і $n$ від катетів AB і BC відповідно. Знайти довжину більшого катета. Обчислити для $m = 4, n = 2$.

3. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння (в градусах): $tg3x = \sin 6x$.

4. В колі з діаметром $d$ проведено дві взаємно перпендикулярні хорди AB і CD. Доведіть, що $AD^2 + CB^2 = d^2$.

## Білет №3

1. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості і графік.

2. Обчислити площу круга, вписаного в рівнобедрену трапецію, довжин основ якої дорівнюють $a$ і $b$. Обчислити для $a = 8, b = 2/\pi$.

3. Розв’язати рівняння: $(0,6)^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$.

4. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

**Білет №4**

1. Формули коренів квадратного рівняння.
2. Куля, вписана в зрізаний конус, радіуси основ якого 8:2. Знайти відношення площі кулі до площі бічної поверхні зрізаного конуса.
3. Обчислити: $\frac{8\sqrt{3}}{\cos(\alpha - 60^0) - \cos(\alpha + 60^0)}$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{11}$.
4. Побудуйте трапецію за даними основами і бічними сторонами.

**Білет №5**

1. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
2. Бічна поверхня трикутної призми дорівнює 720 кв. см, довжина її бічного ребра 5 см. Сторони трикутника, який є перерізом, перпендикулярним бічному ребру, відносяться як 9:10:17. Знайти об’єм призми.
3. Знайти найменший додатній корінь рівняння (в градусах): $\sin 3x = \sin 2x + \sin x$.
4. Поділіть даний трикутник на три рівновеликі трикутники прямими, що проходять через одну вершину.

**Білет №6**

1.Функція $y = ax + b$, її властивості і графік.
2. Знайти бічну поверхню правильної шестикутної піраміди, висота якої рівна $h$, а бічне ребро рівне $l$.
3. Знайти $|x + y|$, якщо $\begin{cases} x^2 + y^2 = 37, \\ xy = 6. \end{cases}$
4. Дано коло і у його внутрішній області точка. Проведіть через задану точку хорду заданої довжини.

**Білет №7**

1. Логарифм добутку, степеня, частки.
2. Основи трапеції дорівнюють 1 см і 7 см. Знайти довжину відрізка прямої, яка паралельна основам і ділить площу трапеції навпіл.
3. Розв’язати нерівність: $x^2 \geq x\left(2 + \sqrt{12 - 2x - x^2}\right)$.
4. Доведіть, що в опуклий чотирикутник можна вписати коло тоді і лише тоді, коли суми довжин його протилежних сторін рівні.

**Білет №8**

1. Функції $y = \sin x, y = \cos x$, їх означення, властивості і графік.

2. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою, рівною $l$ і гострим кутом $30^0$. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $45^0$. Знайти об'єм піраміди.

3. Обчислити $x^4$, якщо $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$.

4. Навколо трапеції описане коло. Доведіть, що це можливо тоді і лише толі, коли дана трапеція рівнобічна.

**Білет №9**

1. Функції $y = tgx, y = ctgx$, їх означення, властивості і графік.

2. Обчислити об'єм правильного тетраедра, якщо радіус кола, описаного навколо його грані, дорівнює $R$.

3. Знайти найбільше цілочисельне рішення нерівності: $x^2 + 10 \le |3x + 1| + 7x$.

4. Нехай $a$ і $b$, $(a > b)$ – довжини основ трапеції. Доведіть, що відрізок, який з'єднує середини діагоналей трапеції, паралельний основам, а його довжина рівна $\frac{a-b}{2}$.

**Білет №10**

1. Корені рівнянь: $\sin x = a, \cos x = a$, $tgx = a$.

2. Знайдіть об'єм похилої трикутної призми, у якої площа однієї із бічних граней рівна $S$, а відстань від площини цієї грані до протилежного ребра рівна $d$.

3. Обчислити $x$, якщо $2\log_5 3 + 4\log_{25} 7 = \log_{0,2} x$.

4. Побудуйте спільну внутрішню дотичну до двох даних кіл.

**Білет №11**

1. Формули зведення.

2. Основа піраміди – прямокутна трапеція, у якої більша із непаралельних сторін рівна 12, а менший кут $\pi/6$. Всі бічні грані піраміди рівнонахилені до площини основи, а площа бічної поверхні рівна 90. Знайти об'єм піраміди.

3. Розв'язати нерівність: $\sqrt{(x-6)(x-12)} > x - 1$.

4. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить прямий кут у відношенні 1:2 і рівна $m$. Знайти сторони трикутника.

**Білет №12**

1. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу.
2. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 2, а сторона основи 1. Через середину бічного ребра і перехресну з ним сторону основи проведено переріз. Знайти відстань від вершини піраміди до площини цього перерізу.
3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9. \end{cases}$
4. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і сумою катетів.

**Білет №13**

1. Тригонометричні функції подвійного аргументу.
2. В трикутник вписане коло, радіус якого 4 см. Одна із сторін трикутника розділена точкою дотику на частини, рівні 6 см і 8 см. Яка довжина найбільшої із двох других сторін?
3. Розв'язати рівняння: $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$.
4. В даний трикутник вписати квадрат, дві вершини якого лежать на одній стороні трикутника, а на двох інших – по одній вершині квадрата.

**Білет №14**

1. Рівняння дотичної до графіка функції.
2. Знайти об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ рівна $d$, а ребра відносяться як $m:n:p$.
3. Розв'язати рівняння: $\sqrt{\frac{2x}{x+1}} - \sqrt{\frac{2(x+1)}{x}} = 1$.
4. В коло впишіть прямокутний трикутник, знаючи його гострий кут і точку, через яку проходить один з катетів.

**Білет №15**

1. Перпендикулярність двох площин.
2. Знайти найбільше значення $x \cdot y$, де $(x, y)$ - рішення системи $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$
3. Знайти об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого рівна $l$ і складає з однією гранню кут $30^0$, а з другою кут $45^0$.
4. При якому додатному $m$ вираз $x^2 + m(m-1)x + 36$є повний квадрат ?

**Білет №16**

1. Теорема про перпендикулярність прямої і площини.

2. Розв’язати рівняння: $(1-\lg 2)\log_5 x = \lg 3 - \lg(x-2)$.

3. Знайти величину кута між бічними сторонами трапеції, якщо довжина відрізка, що з’єднує середини основ, дорівнює на піврізниці їх довжин.

4. Розв’язати нерівність: $x^2 + 5x + 4 < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$.

**Білет №17**

1. Ознаки паралельності площин.

2. Розв’язати рівняння $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

3. Висота правильного тетраедра рівна $h$. Обчислити його повну поверхню.

4. Спростити вираз $ctg\alpha \cdot \dfrac{\cos\alpha - \sqrt{2}\cos(45^0 - \alpha)}{2\sin(30^0 + \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha}$.

**Білет №18**

1. Ознаки паралельності прямої і площини.

2. Знайти $(x \cdot y)$, якщо $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

3. Знайти об’єм правильної трикутної піраміди, висота якої рівна $h$, а всі плоскі кути при вершині прямі.

4. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння: $\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x = 1$.

**Білет №19**

1. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.

2. Знайти суму коренів рівняння $x^{1+\lg x} = 10x$.

3. Один з катетів прямокутного трикутника рівний 15см, а проекція другого катета на гіпотенузу рівна 16 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

4. Побудувати графік функції: $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$.

**Білет №20**

1. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.

2. Обчислити $\dfrac{10tg2\alpha + tg\alpha}{tg2\alpha - tg\alpha}$, якщо $\sin 2\alpha = 0,7$.

3. Сума довжин діагоналей ромба рівна $m$, а його площа рівна $S$. Знайти сторону ромба.

4. Розв’язати нерівність: $\frac{1}{3^x+5}<\frac{1}{3^{x+1}-1}$.

**Білет №21**

1. Ознаки подібності трикутників.

2. Розв’язати рівняння: $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$.

3. У правильній піраміді бічні грані нахилені до площини основи під кутом $\pi/4$. Знайти кут між суміжними бічними гранями.

4. Розв’язати нерівність: $\left||x-3|+1\right|\geq 2$.

**Білет №22**

1. Вимірювання кута, вписаного в коло.

2. Розв'язати рівняння $\log_{0,5x} x^2-14\log_{16x} x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0$.

3. Визначити площу трикутника, якщо дві його сторони відповідно рівні 27 см і 29 см., а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 26 см.

4. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння (в градусах)

$$\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x.$$

**Білет №23**

1. Дотична до кола та її властивість.

2. Розв’язати нерівність $|x-2|+|x-3|\geq|x-4|$.

3. Навколо квадрата, сторона якого рівна $a$, описано коло, а навколо кола – правильний шестикутник. Знайти площу шестикутника.

4. Розв’язати рівняння $\log_5 x+\log_{25} x=\log_{0,2}\sqrt{3}$.

**Білет №24**

1. Коло, вписане в трикутник.

2. Знайти $|x+y|$, якщо $\begin{cases} x^3y^2=9, \\ x^2y^3=27. \end{cases}$

3. У трикутнику АВС медіани АМ і BN взаємно перпендикулярні. Знайти площу трикутника АВС, якщо $AM=m,\ BN=n$.

4. Знайти найбільше значення $tg\frac{x}{2}$, якщо $3\sin x=2(1-\sin x)$.

**Білет №25**

1. Коло, описане навколо трикутника.

2. При якому найбільшому цілому $a$ рівняння $x^2 - 2x - \log_{1/3} a^2 = 0$ має корені?

3. Всередині прямокутного трикутника АВС $\left(\angle C = \dfrac{\pi}{2}\right)$ взято точку О так, що трикутники ОВА, ОВС і ОАС рівновеликі. Знайти ОС, якщо відомо, що $OA^2 + OB^2 = 5$.

4. Розв'язати рівняння: $15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{-x+2} = 135$.

**Білет №26**

1. Ознаки паралелограма.

2. Розв'язати рівняння: $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$.

3. Точка на гіпотенузі, рівновіддалена від обох катетів, ділить гіпотенузу на відрізки 30 см і 40 см. Знайти катети трикутника.

4. Розв'язати нерівність: $2\sin^2 \dfrac{x}{2} + \cos 2x < 0$.

**Білет № 27**

1. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.

2. Розв'язати рівняння: $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 4$.

3. Правильна чотирикутна піраміда OABCD розсічена площиною, яка паралельна бічному ребру ОА і проходить через середини сторін АВ і AD основи. Обчислити площу перерізу, якщо всі ребра піраміди рівні $4\sqrt[4]{2}$.

4. Обчислити $\left(ctg\dfrac{\alpha}{3} - tg\dfrac{\alpha}{3}\right) \cdot tg\dfrac{2\alpha}{3}$

**Білет №28**

1. Ознаки паралельності прямих.

2. Обчислити $x$, якщо $\log_z\left(9x^2\right) \cdot \log_3 x = 4$.

3. Коло з радіусом 13 см дотикається двох сумісних сторін квадрата довжина сторони якого рівна 18 см. На які два відрізки ділить коло кожну із двох інших сторін квадрата ?

4. Розв'язати нерівність $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x < 1$.

**Білет №29**

1. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.

2. Розв'язати рівняння: $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

3. У прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки довжиною 4 см і 5 см. Знайти площу трикутника.

4. Знайти проміжки спадання функції: $y = x^2 - 8x - 24\ln x + 2$.

**Білет №30**

1. Властивості рівнобедреного трикутника.
2. Знайти найменший додатній корінь рівняння: $\sin^3 x \cdot \cos x = \dfrac{1}{4} + \cos^3 x \cdot \sin x$.

3. Знайти площу трапеції, знаючи довжини $d_1$ і $d_2$ її діагоналей і довжину висоти $h$. Обчислити для $d_1 = \sqrt{116}, d_2 = 5, h = 4$.

4. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4. \end{cases}$

# Частина III. Зразки завдань вступного екзамену з математики в 2002 році

Вступний екзамен з математики в 2002 році відбувався в усній формі.

## *Співбесіда для призерів олімпіад та медалістів (стаціонарна форма навчання)*

**Варіант № 1**

**1.** Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=-1, \\ x^2+xy-4y^2=2. \end{cases}$

**Розв'язання.** Розділивши перше рівняння на друге, отримуємо, що розв'язок системи задовольняє рівняння

$$2x^2-4xy-2y^2=-x^2-xy+4y^2,$$

або

$$x^2-xy-2y^2=0.$$

Розв'язавши це рівняння як квадратне відносно змінної $x$, отримуємо:

$$D=9y^2,\ x=-y \text{ або } x=2y,$$

а тому дана система рівнянь рівносильна сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-y; \\ x^2+xy-4y^2=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2y; \\ x^2+xy-4y^2=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язавши їх, отримуємо розв'язки системи (2;1), (-2;-1).

**2.** Розв'язати рівняння $4^{x+1}-13\cdot 6^x+9^{x+1}=0$.

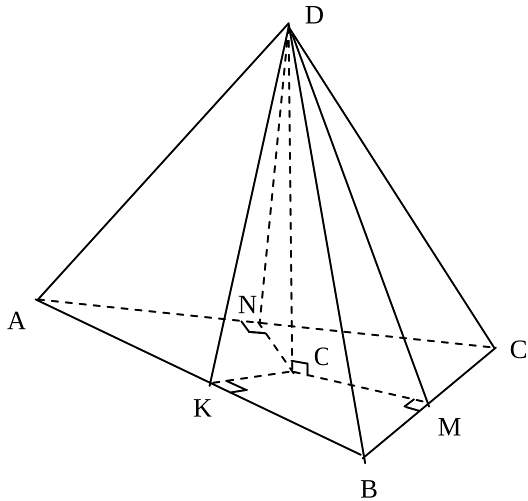
**Розв'язання.** Після ділення рівняння на $9^x \neq 0$ та заміни $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$,

приходимо до рівняння $4t^2-13t+9=0,$ звідки $t_1=1$, $t_2=\frac{9}{4}$. Тоді

$x_1=0$, $x_2=-2$.

**3.** Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Точка простору віддалена від кожної сторони цього трикутника на 5 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.

**Розв'язання.** Нехай *ABC* – даний трикутник, в якому *AB=13 см*, *BC=14см*, *AC=15см*, $DK \perp AB$, $DM \perp BC$, $DN \perp AC$, *DK=DM=DN=5см*, $DO \perp ABC$.




З рівності прямокутних трикутників *KOD*, *MOD* (за гіпотенузою та спільним катетом) випливає, що *OK=OM=ON*, тобто точка *O* є центром кола, вписаного в трикутник *ABC*. Тому *OM* знайдемо як радіус вписаного в трикутник кола за формулою Герона

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}}{42} = 4\ (см).$$

Тоді з трикутника *DOM* за теоремою Піфагора отримуємо $DO = \sqrt{DM^2 - OM^2} = 3\,см.$

**Варіант № 2**

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x}$ .

2. Розв'язати систему $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$

3. Із точки до площини правильного трикутника зі стороною $8\sqrt{3}\,см$ проведено перпендикуляр довжиною 5 см. Основою перпендикуляра є одна із вершин трикутника. Знайдіть відстань від точки до сторони трикутника, яка не містить основи перпендикуляра.

**Варіант № 3**

1. Розв'язати нерівність $|x-2| + |x-3| \geq |x-4|$.

2. Розв'язати рівняння $\log_3 x^2 - \log_3{}^2(-x) = -3.$

3. Ребро куба дорівнює *a*. Визначте площу перерізу, що проходить через діагоналі двох суміжних його граней.

**Варіант № 4**

1. Розв'язати рівняння $(x^2+2x)^2-11(x+1)^2+35=0$.

2. Розв'язати нерівність $\lg^2 x+\lg x^3+2\ge 0$.

3. Знайдіть координати кінців відрізка, який точками $C(2;0;2)$ і $D(5;-2;0)$ поділено на три рівні частини.

**Варіант № 5**

1. Розв'язати рівняння $(x-1)^2-4(x^2-1)+3(x+1)^2=0$.

2. Розв'язати нерівність $(0{,}5)^{4x-2}-9\cdot 0{,}25^x+2\le 0$.

3. Ребро куба дорівнює *a*. Знайдіть відстань від вершини куба до його діагоналі.

**Варіант № 6**

1. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=4$.

2. Розв'язати систему $\begin{cases} 3^x\cdot 9^y=81, \\ \lg(x+y)^2-\lg y=2\lg 3. \end{cases}$

3. У прямому паралелепіпеді сторони основи 10 см і 17 см, одна з діагоналей основи дорівнює 21 см. Більша діагональ паралелепіпеда – 29 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

**Варіант № 7**

1. Розв'язати нерівність $\sqrt{21x+16}-\sqrt{x-4}<20$.

2. Розв'язати рівняння $2^{2x+3}-19\cdot 6^x-3^{2x+3}=0$.

3. $ABC$ – правильний трикутник, $O$ – його центр, $OM$ – перпендикуляр до площини $ABC$. $OM=1\,см$. Сторона трикутника дорівнює 3 см. Знайдіть відстані від точки $M$ до вершин трикутника.

**Варіант № 8**

1. Розв'язати систему $\begin{cases} x^2+3xy-8y^2=-1, \\ x^2-xy-4y^2=-1. \end{cases}$

2. Розв'язати рівняння $\log_{2x}(2x^2+x-1)=1$.

3. Вершина *C* рівностороннього трикутника *ABC*, сторона якого 8 см, віддалена від площини $\alpha$ на відстань $2\sqrt{3}$ см. Обчисліть кут між площинами трикутника *ABC* і $\alpha$, якщо сторона *AB* лежить у площині $\alpha$.

**Варіант № 9**

1. Розв'язати рівняння $|x+1|+|x+2|+|x+3|=6$.

2. Розв'язати нерівність $\log_{x+3}(x^2-x)\le 1$.

3. Кінці відрізка *A*(5;-2;1) і *B*(5;3;6). Знайдіть точку, симетричну середині відрізка відносно площини $xOz$.

**Варіант № 10**

1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-x-2}>4-x$.

2. Розв'язати рівняння $4^{x^2+5x-4}+3\cdot 2^{x^2+5x-4}-4=0$.

3. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться як 1:7, довжини діагоналей бічних граней дорівнюють 13 см та 37 см. Визначте площу повної поверхні паралелепіпеда.

**Варіант № 11**

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x-1}$.

2. Розв'язати систему $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2{,}5,\\ xy=27.\end{cases}$

3. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює $l$ і утворює з площиною основи кут $\beta$. Визначте площу бічної поверхні призми.

**Варіант № 12**

1. Розв'язати систему $\begin{cases}x+y+xy=5,\\ x^2+xy+y^2=7.\end{cases}$

2. Розв'язати рівняння $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$.

3. У правильній трикутній піраміді апофема утворює з її висотою кут $\alpha$. Визначте повну поверхню піраміди, якщо відрізок, що сполучає основу висоти з серединою апофеми, дорівнює $b$.

**Варіант № 13**

1. Розв'язати рівняння $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47$.

2. Розв'язати нерівність $2^{|x+2|}>16$.

3. Ортогональною проекцією даного трикутника, є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Площина трикутника утворює з площиною проекції кут $60^\circ$. Обчисліть площу даного трикутника.

**Варіант № 14**

1. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

2. Розв'язати нерівність $\log_x \log_3(9^x-6)\geq 1$.

3. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 5 см і утворюють кут $45^\circ$, менша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7 см. Визначте його повну поверхню.

**Варіант № 15**

1. Розв'язати нерівність $\dfrac{\sqrt{52-x^2}}{2-x}<1$.

2. Розв'язати рівняння $9^{x^2+x}-3^{x^2+x}-72=0$.

3. В основі піраміди лежить ромб, більша діагональ якого дорівнює $d$, а гострий кут – $\alpha$. Бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом $\beta$. Знайдіть об'єм піраміди.

## *Усний екзамен (стаціонарна форма навчання)*

**Білет № 1**

**1.** Функція $y=\dfrac{k}{x}$, її властивості і графік. Оберненою пропорційністю називають функцію виду $y=\dfrac{k}{x}$, де k - деяке дійсне число, відмінне від нуля. Число k називають коефіцієнтом оберненої пропорційності.

**Відповідь.** Властивості функції:

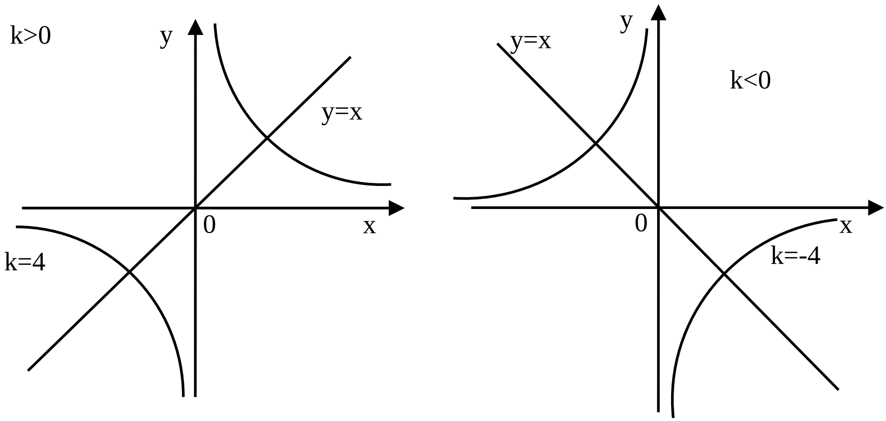
1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел (R),відмінних від нуля, тобто D(f)=(-∞;0) $\cup$ (0;∞).
2. Областю значень функції є також множина всіх дійсних чисел, крім нуля $y=\dfrac{k}{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{k}{y}$, тобто E(f)=(-∞;0) $\cup$ (0;∞).

3. Оскільки $f(-x)=\dfrac{k}{-x}=-\dfrac{k}{x}=-f(x)$, то функція $y=\dfrac{k}{x}$ - непарна. Це означає, що графік функції центрально симетричний відносно початку координат. Тому досить побудувати графік для $x>0$ і відобразити його симетрично відносно O(0;0).

4. Нулів функція не має, тобто її графік не перетинає вісь абсцис.

5. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{x}=\infty$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{k}{x}=0$ , то координатні осі $x=0$ і $y=0$ є асимптотами графіка функцій.

6. Якщо k>0, то y>0 при x>0 і y<0 при x<0, тобто графік функції




розміщується в I і III чвертях; якщо ж k<0, то y>0 при x<0 і y<0 при x>0, тобто графік функції розташовується в II і IV четвертях.

7. Похідна функції $f'(x)=\left(\dfrac{k}{x}\right)'=-\dfrac{k}{x^2}$. Звідси бачимо, що коли k<0, то $f'(x)>0$ і тому функція зростає на інтервалах $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$; якщо ж k>0, то $f'(x)<0$ і тому функція спадає на інтервалах $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$.

8. З означення оберненої пропорційності випливає, що при k>0 пряма y=x, а при k<0 пряма y=–x є віссю симетрії графіка функції.

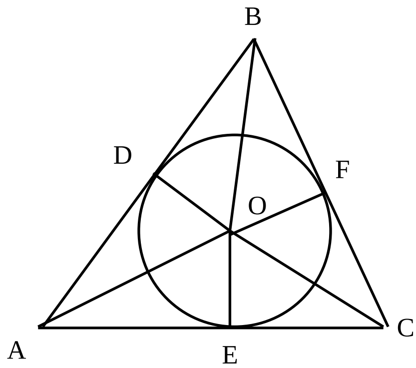
Графіком функції $y=\dfrac{k}{x}$ є крива, яка називається гіперболою та складається із двох віток.

За допомогою паралельного перенесення графіка $y = \frac{k}{x}$ на вектор $\overrightarrow{(-c;a)}$ отримуємо графік функції $y = \frac{ax+b}{x+c}$ (при $k = b - ac$).

**2.** Коло, вписане в трикутник.

**Відповідь.** *Означення 1.* Коло називається вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

*Теорема 1*. Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис.




*Доведення*. Нехай ABC – даний трикутник, O – центр вписаного в нього кола, D,E і F – точки дотику кола із сторонами. Прямокутні трикутники AOD і AOE рівні за гіпотенузою і катетом. У них гіпотенуза AO спільна, а катети OD і OE рівні як радіуси. З рівності трикутників випливає рівність кутів OAD і OAE. А це означає, що точка O лежить на бісектрисі кута BAC трикутника. Так само доводимо, що точка O лежить на двох інших бісектрисах трикутника.

Теорему доведено.

*Теорема 2*. У довільний трикутник можна вписати коло, і до того ж єдине.

*Доведення*. Нехай ABC – даний трикутник. Проведемо бісектриси кутів A і B трикутника ABC до перетину в точці O. З точки O опустимо перпендикуляри OD, OF, OE на сторони AB, BC, AC відповідно. З рівності трикутників AOD і AOE отримуємо OD=OE, з рівності трикутників BOD і BOF отримуємо OD=OF.

Отже, точка O рівновіддалена від сторін трикутника ABC, а тому коло з центром в точці O радіуса OD дотикається до всіх сторін трикутника ABC.

Єдиність вписаного кола випливає з єдиності точки перетину бісектрис трикутника.

Теорему доведено.

*Обчислення радіуса вписаного кола.*

Позначимо AB= $c$ , BC= $a$ , AC=b, OD= $r$ , $S_{ABC} = S$ . Тоді

$$S = S_{OBC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr,$$

звідки знаходимо

$$r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

**3.** Розв'язати рівняння $(x+3)(x+1)(x+5)(x+7) = -16$.

**Розв'язання.** Запишемо рівняння у вигляді

$(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+16=0$, або

$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+16=0$.

Після заміни $x^2+8x+7=t$ отримуємо рівняння $t^2+8t+16=0$, з якого знаходимо $t=-4$. З рівняння $x^2+8x+7=-4$ отримуємо відповідь $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{5}$.

**4.** Розв'язати нерівність $\sin x \sin 7x \le \sin 3x \sin 5x$.

**Розв'язання.** Після застосування формули

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

отримуємо нерівність

$$\cos 6x - \cos 8x \le \cos 2x - \cos 8x,$$

або послідовно отримуємо

$$\cos 2x - \cos 6x \ge 0, \quad 2\sin 2x \cdot \sin 4x \ge 0, \quad 4\sin^2 2x \cdot \cos 2x \ge 0.$$

Оскільки $\sin^2 2x \ge 0,$ то така нерівність рівносильна наступній сукупності:

$\left[\begin{array}{l}\cos 2x \ge 0 \\ \sin 2x = 0\end{array}\right.,$ з якої отримуємо

$$\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{2}+2\pi n \le 2x \le \frac{\pi}{2}+2\pi n, \qquad n\in Z; \\ \qquad 2x = \pi k, \qquad k \in Z\end{array}\right..$$

Відповідь: $x \in \left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right] \cup \left\{\frac{\pi k}{2}\right\}, \quad n\in Z, k\in Z$.

**Білет № 2**

1. Функція $y = ax+b$, її властивості і графік.
2. Коло, описане навколо трикутника.

3. Розв’язати рівняння $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$.
4. Розв’язати нерівність $\sin x\cos 5x \le \sin 9x \cos 3x$.

**Білет № 3**

1. Функція $y=ax^2+bx+c$**,** її властивості і графік**.**
2. Третя ознака рівності трикутників.
3. Розв’язати рівняння $3\cdot 9^x-29\cdot 6^{x-1}+2^{2x-1}=0$.
4. Розв’язати нерівність $\dfrac{4\sin x+3}{3\sin x+1}<2$.

**Білет № 4**

1. Формула коренів квадратного рівняння.
2. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.
3. Розв’язати нерівність $2^{4x+1}-9\cdot 4^x+4\le 0$.
4. Розв’язати рівняння $\sin x+ctg\dfrac{x}{2}=2$.

**Білет № 5**

1. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
2. Перша ознака подібності трикутників.
3. Розв’язати нерівність $2\cdot 7^x-3\cdot 2^x>\dfrac{43}{7}\cdot 14^{\frac{x}{2}}$.
4. Розв’язати рівняння $tg^2\dfrac{x}{2}+ctg^2\dfrac{x}{2}-2=4tgx$.

**Білет № 6**

1. Властивості числових нерівностей.
2. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.
3. Розв’язати рівняння $2^{x^2+2x}\cdot 3^{x^2+2x}=216^{x+2}$.
4. Розв’язати нерівність $\sin^4 x+\cos^4 x>\dfrac{5}{8}$.

**Білет № 7**

1. Логарифм добутку.
2. Ознаки паралельності прямих.
3. Розв’язати нерівність $(0,5)^{4x-2}-9\cdot(0,25)^x+2\le 0$.
4. Розв’язати рівняння $3\sin 2x=(1-\cos 2x)tgx$.

**Білет № 8**

1. Логарифм степеня.
2. Друга ознака подібності трикутників.
3. Розв’язати рівняння $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$.
4. Розв’язати нерівність $\sqrt{3-2\cos^2 x}>3\sin x+1$.

**Білет № 9**

1. Логарифм частки.
2. Перша ознака рівності трикутників.
3. Розв’язати рівняння $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=4$.
4. Розв’язати нерівність $\sin 2x>\cos x$.

**Білет № 10**

1. Функція $y=\sin x$, її означення, властивості і графік.
2. Вимірювання кута, вписаного в коло.
3. Розв’язати нерівність $\frac{(x^2+x-2)(x^2-6x+9)}{(x^2+x-2)(4x^2+12x+9)}\le 0$.
4. В трикутнику ABC кут A вдвічі більший кута B, AB=5, AC=4. Знайти BC.

**Білет № 11**

1. Функція $y=\cos x$, її означення, властивості і графік.
2. Ознаки паралельності прямої і площини.
3. Розв’язати рівняння $(\sqrt[5]{3})^x+(\sqrt[10]{3})^{x-10}=84$.
4. Обчислити площу трапеції, паралельні сторони якої дорівнюють 16 і 44, а непаралельні – 17 і 25.

**Білет № 12**

1. Функція $y=tgx$, її означення, властивості і графік.
2. Теорема про перпендикулярність прямої і площини.
3. Розв’язати рівняння $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.
4. Навколо кола радіуса 7,5 описано рівнобедрену трапецію, одна з основ якої дорівнює 9. Знайти бічну сторону трапеції.

**Білет № 13**

1. Розв'язки рівняння $\sin x=a$.
2. Перпендикулярність двох площин.
3. Розв’язати рівняння $2\log_2 x^2-\log_2^2(-x)=3$.
4. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює 9.

Обчислити площу квадрата, вписаного в те ж коло.

**Білет № 14**

1. Розв'язки рівняння $\cos x = a$.
2. Паралельність прямих і площин.
3. Розв’язати нерівність $\dfrac{(x^2 - x - 2)(x^2 + 5x + 6)}{(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 5x + 4)} \le 0$.
4. Знайти площу трикутника *ABC*, якщо $|AB| = 3$, $|BC| = 7$ і довжина медіани *BM* дорівнює 4.

**Білет № 15**

1. Розв'язки рівняння $tgx = a$.
2. Перпендикулярність прямих і площин.
3. Розв’язати рівняння $\dfrac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \dfrac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$.
4. Знайти величину кута між бічними сторонами трапеції, якщо довжина відрізка, що з’єднує середини основ, дорівнює піврізниці їх довжин.

**Білет № 16**

1. Формули зведення.
2. Формула відстані між двома точками площини. Рівняння кола.
3. Розв’язати нерівність $\dfrac{|2x - 1|}{x^2 + x - 2} \ge 3$.
4. Основа піраміди – рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою, рівною 6. Всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $\dfrac{\pi}{4}$. Знайти площу повної поверхні піраміди.

**Білет № 17**

1. Залежність між тригонометричними функціями одного, й того ж аргументу.
2. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.
3. Розв’язати рівняння $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$.
4. Куля перерізана площиною, віддаленою від центра кулі на 30. Визначити радіус кулі, якщо довжина кола, одержаного в перерізі, складає $4/5$ довжини великого кола.

**Білет № 18**

1. Тригонометричні функції подвійного аргументу.
2. Ознаки паралелограма.

3. Розв’язати нерівність $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|<1.$

4. Відстань від центра основи правильної трикутної піраміди до її бічної грані дорівнює 1, двогранний кут при ребрі основи дорівнює $\dfrac{\pi}{6}$. Знайти площу бічної поверхні.

**Білет № 19**

1. Похідна суми і добутку двох функцій.
2. Дотична до кола та її властивість.
3. Розв’язати нерівність $\log_{4-x}(x^2-x-2)\le\log_{4-x}(x+6)$.
4. Розв’язати рівняння

$$2\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0.$$

**Білет № 20**

1. Похідна частки двох функцій.
2. Коло, вписане в трикутник.
3. Розв’язати рівняння $(x+5)^4+(x+3)^4=2$.
4. Розв’язати систему $\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=80, \\ y^2+y\sqrt[3]{yx^2}=5. \end{cases}$

**Білет № 21**

1. Похідна степеневої функції.
2. Коло, описане навколо трикутника.
3. Розв’язати рівняння $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$.
4. Розв’язати систему $\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy}-3\sqrt{xy}=4, \\ x+y=20. \end{cases}$

**Білет № 22**

1. Похідні тригонометричних функцій.
2. Третя ознака подібності трикутників.
3. Розв’язати рівняння $x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$ .
4. Основи трапеції дорівнюють 1 і 7. Знайти довжину відрізка прямої, яка паралельна основам і ділить площу трапеції навпіл.

**Білет № 23**

1. Похідна показникової функції.

2. Ознаки паралелограма.
3. Розв’язати нерівність $\log_{x^2+2x}(x+2)\le 1$.
4. Розв’язати рівняння $2\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x-5\cos^3 x=0$.

**Білет № 24**

1. Похідна логарифмічної функції.
2. Ознаки паралельності прямих.
3. Розв’язати нерівність $9\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{-\frac{1}{x}}<4\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$.
4. Розв’язати рівняння $\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1$.

**Білет № 25**

1. Рівняння дотичної до графіка функції.
2. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.
3. Розв’язати нерівність $\log_x \log_2(4^x-12)\le 1$.
4. Розв’язати рівняння $\sin 6x+2=2\cos 4x$.

**Білет № 26**

1. Функція $y=ax+b$, її властивості і графік.
2. Властивості рівнобедреного трикутника.
3. Розв’язати нерівність $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x\le 1$.
4. Розв’язати рівняння $\cos 2x+\cos\frac{3}{4}x-2=0$.

**Білет № 27**

1. Функція $y=\frac{k}{x}$, її властивості і графік.
2. Коло, вписане в трикутник.
3. Розв’язати рівняння $\log_x 125x\cdot\log_{25}^2 x=1$.
4. Розв’язати систему $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2},\\ x+y+xy=9.\end{cases}$

**Білет № 28**

1. Функція $y=ax^2+bx+c$, її властивості і графік.
2. Дотична до кола та її властивість.

3. Розв'язати рівняння $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10$.

4. Розв'язати систему $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y+4} + \sqrt[3]{y+7} = 4, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

**Білет № 29**

1. Формула коренів квадратного рівняння.
2. Вимірювання кута, вписаного в коло.
3. Розв'язати рівняння $4^{x^2 - x} - 17 \cdot 2^{x^2 - x + 2} + 256 = 0$.
4. Розв'язати нерівність $\sin^6 x + \cos^6 x \le \frac{7}{16}$.

**Білет № 30**

1. Властивості числових нерівностей.
2. Друга ознака рівності трикутників.
3. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}} - 2\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}} = \frac{7}{3}$.
4. Розв'язати систему $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ xy = 2. \end{cases}$

## *Усний екзамен (заочна форма навчання)*

**Білет № 1**

1. Функція $y = ax + b$, її властивості і графік.
2. Ознака паралельності площин.
3. Розв'язати рівняння $0{,}5\sin 2x + \cos^2 x = 0$.

**Білет № 2**

1. Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості і графік.
2. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.
3. Розв'язати рівняння $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$.

**Білет № 3**

1. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості і графік**.**
2. Третя ознака рівності трикутників.

3. Спростити вираз $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

**Білет № 4**

1. Формула коренів квадратного рівняння.
2. Перша ознака подібності трикутників.
3. Розв’язати рівняння $\sqrt{x-2+2\sqrt{x+6}} = 4$.

**Білет № 5**

1. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
2. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.
3. Розв’язати рівняння $\sqrt{4x^2+5x-2} = 2$.

**Білет № 6**

1. Властивості числових нерівностей.
2. Ознаки паралельності прямих.
3. Розв’язати рівняння $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2+x}}$.

**Білет № 7**

1. Логарифм добутку.
2. Друга ознака подібності трикутників.
3. Розв’язати систему $\begin{cases} x^2-x-2 \geq 0, \\ x^2-x-6 \leq 0. \end{cases}$

**Білет № 8**

1. Логарифм степеня.
2. Перша ознака рівності трикутників.
3. Спростити вираз $\dfrac{tg 2\alpha \ tg\alpha}{tg 2\alpha - tg\alpha}$.

**Білет № 9**

1. Логарифм частки.
2. Вимірювання кута, вписаного в коло.
3. Розв’язати рівняння $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$.

**Білет № 10**

1. Функція $y = \sin x$, її означення, властивості і графік.
2. Формула відстані між двома точками площини. Рівняння кола.
3. Розв’язати нерівність $\dfrac{x^2+x}{x-2} > \dfrac{6}{x-2}$.

**Білет № 11**

1. Функція $y = \cos x$, її означення, властивості і графік.
2. Ознаки паралельності прямої і площини.
3. Розв’язати рівняння $\lg(3-x) - \lg(x+2) = 2\lg 2$.

**Білет № 12**

1. Функція $y = tgx$, її означення, властивості і графік.
2. Теорема про перпендикулярність прямої і площини.
3. Розв’язати рівняння $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$.

**Білет № 13**

1. Розв'язки рівняння $\sin x = a$.
2. Перпендикулярність двох площин.
3. Розв’язати рівняння $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} + \frac{x+5}{1-x^2} = 0$.

**Білет № 14**

1. Розв'язки рівняння $\cos x = a$.
2. Паралельність прямих і площин.
3. Розв’язати нерівність $\frac{x^2 + 3x}{x+2} \geq -2$.

**Білет № 15**

1. Розв'язки рівняння $tgx = a$.
2. Перпендикулярність прямих і площин.
3. Розв’язати рівняння $\frac{x^2 + 1}{x-4} - \frac{x^2 - 1}{x+3} = 23$.

**Білет № 16**

1. Формули зведення.
2. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.
3. Розв’язати нерівність $\log_2(x^2 + 3x) \leq 2$.

**Білет № 17**

1. Залежність між тригонометричними функціями одного, й того ж аргументу.
2. Ознаки паралелограма.
3. Розв’язати рівняння $|x^2 + x| + 3x - 5 = 0$.

**Білет № 18**

1. Тригонометричні функції подвійного аргументу.
2. Дотична до кола та її властивість.

3. Розв'язати нерівність $\log_{0,3}\dfrac{1+2x}{1+x}>1$.

**Білет № 19**

1. Похідна суми і добутку двох функцій.
2. Коло, вписане в трикутник.
3. Довести тотожність $\dfrac{tg2\alpha\cdot tg\alpha}{tg2\alpha-tg\alpha}=\sin 2\alpha$.

**Білет № 20**

1. Похідна частки двох функцій.
2. Коло, описане навколо трикутника.
3. Довести тотожність $1-8\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=\cos 4\alpha$.

**Білет № 21**

1. Похідна степеневої функції.
2. Третя  ознака подібності трикутників.
3. Розв'язати рівняння $\left|x^2-x-12\right|=8-2x$.

**Білет № 22**

1. Похідні тригонометричних функцій.
2. Ознаки паралелограма.
3. Розв'язати систему $\begin{cases} x-y+\sqrt{xy}=20, \\ xy=64. \end{cases}$

**Білет № 23**

1. Похідна показникової функції.
2. Ознаки паралельності прямих.
3. Розв'язати систему $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30. \end{cases}$

**Білет № 24**

1. Похідна логарифмічної функції.
2. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.
3. Розв'язати систему $\begin{cases} x^2+x-6\le 0, \\ x^2+x-2\ge 0. \end{cases}$

**Білет № 25**

1. Рівняння дотичної до графіка функції.
2. Властивості рівнобедреного трикутника.

3. Розв'язати систему $\begin{cases} \log_x y - \log_y x = 1{,}5 \\ x + y = 0{,}75. \end{cases}$.

**Білет № 26**

1. Функція $y = ax + b$, її властивості і графік.
2. Коло, описане навколо трикутника.
3. Розв'язати систему $\begin{cases} \log_x y - \log_y x = 1{,}5 \\ \dfrac{x}{y} = 2. \end{cases}$.

**Білет № 27**

1. Функція $y = \dfrac{k}{x}$, її властивості і графік.
2. Коло, вписане в трикутник.
3. Розв'язати нерівність $9^x - 3^x \geq 6$.

**Білет № 28**

1. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості і графік**.**
2. Дотична до кола та її властивість.
3. Розв'язати нерівність $2^{1+\frac{8}{x}} \geq 0{,}5 \cdot 2^x$.

**Білет № 29**

1. Формула коренів квадратного рівняння.
2. Вимірювання кута, вписаного в коло.
3. Знайти область визначення функції $y = \arcsin\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$.

**Білет № 30**

1. Властивості числових нерівностей.
2. Друга ознака рівності трикутників.
3. Знайти область визначення функції $y = \arccos\dfrac{x-2}{5} + \sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}$.

# Частина IV. Зразки завдань вступного екзамену з математики в 2003 році

Вступний екзамен з математики в 2003 році відбувався в усній формі.

## *Співбесіда для призерів олімпіад та медалістів (стаціонарна форма навчання)*

### Варіант № 1

**1.** Розв'язати рівняння: $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$.

**Розв'язання.** Очевидно, що $x=0$ не є коренем рівняння. Отже, $\sqrt{2x^2+3x+5}\neq\sqrt{2x^2-3x+5}.$

Тому після множення на вираз $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}$ отримуємо рівносильне даному рівняння:

$$(2x^2+3x+5)-(2x^2-3x+5)=3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})$$

або

$$6x=3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}).$$

Після скорочення на $x\neq 0$ отримуємо

$$\sqrt{2x^2+3x+5}=\sqrt{2x^2-3x+5}+2.$$

Обидві частини рівності невід'ємні, тому після піднесення до квадрату отримуємо рівносильне рівняння:

$3x-2=2\sqrt{2x^2-3x+5}$, яке рівносильне наступній системі:

$$\begin{cases}3x-2\geq 0;\\(3x-2)^2=4(2x^2-3x+5);\\2x^2+3x+5\geq 0.\end{cases}$$

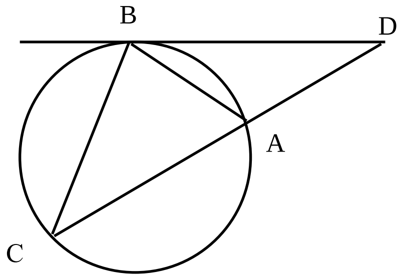
Розв'язавши її, знаходимо відповідь: $x=4$.

**2.** Навколо трикутника $ABC$ описано коло. Через точку $B$ проведено дотичну до кола, яка перетинає продовження сторони $CA$ в точці $D$ за точкою $A$. Знайти периметр трикутника $ABC$, якщо $AB+AD=AC$, $CD=3$, $\angle BAC=60^\circ$.

**Розв'язання.** Позначимо $AC = x$. Тоді $AD = 3 - x$, $AB = AC - AD = 2x - 3$.

За теоремою косинусів з трикутника *ABD* знаходимо

$$BD^2 = (3-x)^2 + (2x-3)^2 - 2(3-x)(2x-3)\cos 120^0 = 3x^2 - 9x + 9.$$




За властивістю дотичної і січної, проведених з однієї точки, маємо $DB^2 = DA \cdot DC$. З рівняння

$$3x^2 - 9x + 9 = (3 - x) \cdot 3$$

знаходимо $3x^2 - 6x = 0,\ \ x = 2$. Тоді $AB = 1$.

За теоремою косинусів з трикутника *ABC* знаходимо

$BC = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^0} = \sqrt{3}.$ Периметр трикутника *ABC* $P = 2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}.$

Відповідь: $3 + \sqrt{3}.$

**Варіант № 2**

1. Розв'язати рівняння: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$.

2. На гіпотенузі прямокутного трикутника як на стороні побудовано квадрат (зовні трикутника). Центр квадрата з'єднано з вершиною прямого кута трикутника. На які відрізки розбивається гіпотенуза, якщо катети рівні 21 і 28 см?

**Варіант № 3**

1. Розв'язати рівняння: $x^{\log_2^2 x^2 - \log_2 2x - 2} + (x+2)^{\log_{(x+2)^2} 4} = 3$.

2. В коло вписано чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці $E$. Пряма, яка проходить через точку $E$ і перпендикулярна до $AB$, перетинає $CD$ в точці $M$. Знайти $EM$, якщо $AD = 8$ см, $AB = 4$ см і $\angle CDB = \alpha$.

**Варіант № 4**

1. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^{\log_y x} \cdot y = x^{2,5}, \\ \log_4 y \cdot \log_y (y-3x) = 1. \end{cases}$

2. Довести, що сума добутків протилежних сторін чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює добутку його діагоналей (теорема Птолемея).

**Варіант № 5**

1. Розв'язати нерівність: $\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right| + \left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| - 12 < 0$.

2. Кут $AOB$ дорівнює $\alpha$. Коло дотикається сторони $AO$ в точці $C$ і перетинає сторону $OB$ в точках $D$ і $E$. Знайти $DE$ і радіус кола, якщо відомо, що $OC = a$ і $OD = b$ $(b > a)$.

**Варіант № 6**

1. Розв'язати рівняння: $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$.

2. Побудувати трапецію за основою $a$, бічною стороною $d$, кутом $C$ за умови, що діагональ $AC$ є бісектрисою кута $A$.

**Варіант № 7**

1. Знайти область визначення функції

$$f(x) = \sqrt{\sin x - 0,5} + \log_3(25 - x^2).$$

2. В правильній трикутній призмі сторона основи рівна $a$, кут між діагоналями (що не перетинаються) двох бічних граней дорівнює $\beta$. Знайти об'єм призми.

**Варіант № 8**

1. Розв'язати нерівність: $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}$.

2. На поверхні кулі з радіусом $R$ лежать всі вершини рівнобедреної трапеції, у якої менша основа рівна бічній стороні, а гострий кут дорівнює $\beta$. Знайти відстань від центра кулі до площини трапеції, якщо більша основа трапеції рівна радіусу кулі.

**Варіант № 9**

1. Розв'язати нерівність: $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$.

2. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і різницею гіпотенузи та другого катета.

**Варіант № 10**

1. Розв’язати нерівність: $\left(8-x\right)^{\log_2^2(8-x)} \le 2^{3x-4}$ .

2. Побудувати прямокутник за периметром і кутом між його діагоналями.

**Варіант № 11**

1. Розв’язати нерівність: $6\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2 x > 2$ .

2. Центр кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду, ділить висоту піраміди у відношенні $m:n$ , рахуючи від вершини піраміди. Знайти кут між двома суміжними бічними гранями піраміди.

**Варіант № 12**

1. Розв’язати нерівність: $\sin x + \cos x < \frac{1}{\sin x}$ .

2. Дві грані трикутної піраміди – рівні між собою прямокутні трикутники із спільним катетом, що дорівнює $l$ . Кут між цими гранями дорівнює $\alpha$ . Дві інші грані піраміди утворюють двогранний кут $\beta$ . Знайти радіус кулі, описаної навколо піраміди.

**Варіант № 13**

1. Розв’язати рівняння: $2x-5+2\sqrt{x^2-5x}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}=48$.

2. Основою піраміди є прямокутник, у якого кут між діагоналями дорівнює $\alpha$ . Одне з бічних ребер перпендикулярне площині основи, а найбільше бічне ребро складає з площиною основи кут $\beta$ . Радіус кулі, описаної навколо піраміди, дорівнює $R$ . Знайти об’єм піраміди.

**Варіант № 14**

1. Розв’язати рівняння: $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 4$.

2. Побудувати чотирикутник $ABCD$ за даними сторонами, якщо відомо, що діагональ $AC$ є бісектрисою кута $A$ .

**Варіант № 15**

1. Розв’язати рівняння: $\left(3x-4\right)^{2x^2+2} = \left(3x-4\right)^{5x}$ .

2. В конус вписано куб так, що одна з граней куба лежить в площині основи конуса. Відношення висоти конуса до ребра куба дорівнює $k$ . Знайти кут між твірною і висотою конуса.

**Варіант № 16**

1. Розв’язати нерівність: $\frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - \sqrt[4]{\frac{192x}{x-2}} > 0$ .

2. В трикутнику $ABC$ відомо, що $AB = BC$, $\angle BAC = arctg\frac{8}{5}$. Коло з радіусом 1 см дотикається сторін $AB$ і $BC$ і перетинає основу $AC$ в точках $E$ і $K$ ($AE < AK$), $M$ - точка дотику кола до прямої $BA$, $AM = \frac{15}{8}$ см. Обчислити площу трикутника $AMK$.

**Варіант № 17**

1. Розв'язати нерівність: $\sqrt{13^x - 5} \le \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}$.

2. В трикутник з сторонами 16, 30 і 34 см вписано коло. Обчислити площу трикутника, вершинами якого служать точки дотику.

**Варіант № 18**

1. Розв'язати нерівність: $\log_{x+2,5}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 < 0$.

2. В трикутнику $ABC$ відомо, що $\angle C = 60^\circ$, а радіус описаного кола дорівнює $2\sqrt{3}$ см. На $AB$ взято точку $D$ так, що $AD : DB = 2:1$, $CD = 2\sqrt{2}$ см. Обчислити площу трикутника $ABC$.

**Варіант № 19**

1. Перевірте рівність: $tg30^\circ + tg40^\circ + tg50^\circ + tg60^\circ = \frac{8\sqrt{3}\cos 20^\circ}{3}$.

2. Навколо трикутника $ABC$ описано коло. Дотична до кола в точці $B$ перетинає пряму $AC$ в точці $D$ (точка $C$ лежить між $A$ і $D$). Знайти площу трикутника $BCD$, якщо $\angle BDC = \arccos\frac{21}{29}$, $BD = 29$ см, а відстань від центра кола до $AC$ дорівнює 10 см.

**Варіант № 20**

1. Розв'язати рівняння: $\sin 2x + 5\sin x + 5\cos x + 1 = 0$.

2. В гострокутному трикутнику $ABC$ із вершин $A$ і $C$ опущено висоти $AD$ і $CE$. Відомо, що площа трикутника $ABC$ дорівнює 18 см$^2$, площа трикутника $BDE$ дорівнює 2 см$^2$, $DE = 2\sqrt{2}$ см. Обчислити радіус кола, описаного навколо трикутника $ABC$.

## *Усний екзамен (стаціонарна форма навчання)*

## Білет № 1

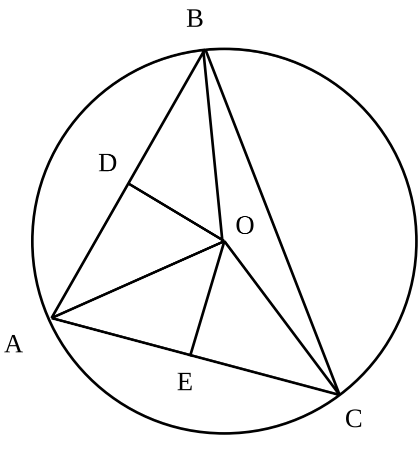
**1.** Коло, описане навколо трикутника.

**Відповідь.** *Означення 1*. Колом називається фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Ця точка називається центром кола. Відстань від точок кола до його центра називається радіусом кола.

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називається хордою. Хорда, що проходить через центр кола, називається діаметром.

*Означення 1*. Коло називається описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини. При цьому трикутник називається вписаним в коло.

*Теорема 1*. Навколо довільного трикутника можна описати коло, до того ж єдине. Центр цього кола є точкою перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника.




*Доведення*. Нехай ABC – даний трикутник, D – середина AB, E – середина AC. Проведемо серединні перпендикуляри цих сторін, нехай O – точка їх перетину. Покажемо, що точка O – центр описаного кола.

Трикутники OAD і BOD рівні за двома катетами, тому AO=BO. Аналогічно рівні трикутники AOE і COE рівні, тому AO=CO.

Отже, AO=BO=CO, тобто точка O рівновіддалена від вершин трикутника ABC, а тому коло з центром в точці O радіуса AO проходить через усі вершини трикутника ABC.

Доведемо, що таке коло єдине. Нехай точка O – центр описаного кола. Тоді трикутник AOC – рівнобедрений; у ньому сторони OC і OA рівні як радіуси. Медіана OD цього трикутника одночасно є його висотою. Тому центр кола лежить на прямій, яка перпендикулярна до сторони AC і проходить через її середину. Так само доводимо, що центр кола лежить на перпендикулярах до двох інших сторін трикутника, які ділять відповідні сторони навпіл. З єдиності точки перетину серединних перпендикулярів випливає єдиність описаного навколо трикутника кола.

Теорему доведено.

З теореми випливає, що коло можна однозначно задати трьома його точками, які не лежать на одній прямій.

*Знаходження радіуса описаного кола.* Позначимо у трикутнику ABC AC=b, AB=*c*, BC=*a*, ∠ABC=β, а через S – його площу. У трикутнику AOC ∠AOC=2∠ABC=2β (властивість вписаного кута), медіана OD є одночасно і висотою, і бісектрисою. З прямокутного трикутника AOD маємо $\sin\angle AOD = \frac{AD}{AO}$, тобто $\sin\beta = \frac{b}{2R}$. Звідки $R = \frac{b}{2\sin\beta}$.

Використавши формулу площі трикутника $S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$, отримуємо іншу формулу для радіуса описаного кола $R = \frac{abc}{4S}$.

**2.** Знайти (в градусах) найбільший від'ємний корінь рівняння $\cos 2x = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}}$.

**Розв'язання.** Запишемо рівняння у вигляді

$\cos^2 x - \sin^2 x - \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}} = 0$, $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$.

Таке рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь

$\left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{array}\right.$, або $\left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \end{array}\right.$. Звідси отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z,\ \ x_2 = \frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z,$

$x_3 = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z$; найбільший від‘ємний корінь $-\frac{\pi}{4}$.

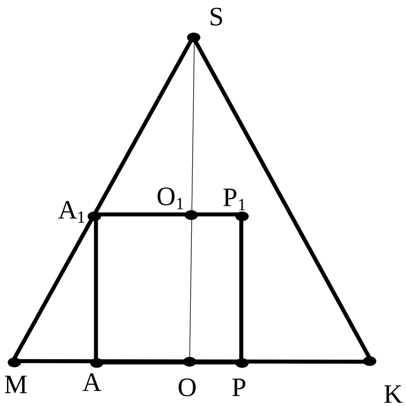
**3.** Розв'язати нерівність $\log^2_{0.2}(x-1) > 4$.

**Розв‘язання.** Дана нерівність рівносильна сукупності нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}\log_{0,2}(x-1) > 2;\\ \log_{0,2}(x-1) < -2;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_{0,2}(x-1) > \log_{0,2} 0,2^{2};\\ \log_{0,2}(x-1) < \log_{0,2} 0,2^{-2};\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < x-1 < 0,04;\\ x-1 > 25;\end{array}\right.$$

з яких отримуємо відповідь: $x \in (1;1,04) \cup (26;+\infty)$. При розв‘язанні враховано, що функція $y = \log_{0,2} x$ визначена при $x > 0$ та є спадною на цьому інтервалі.

**4.** У конусі радіус основи R і висота h. В нього вписана правильна трикутна призма, бічні грані якої – квадрати. Визначити ребро призми.




**Розв‘язання.** Нехай $S$ – вершина конуса, $OS=h$, $OM=R$, $O$ – центр його основи, $ABCA_1B_1C_1$ – вписана в конус призма.

Розглянемо переріз конуса площиною, яка проходить через його вісь та вершину $A$ вписаної призми. Тоді $P$—середина $BC$, $P_1$—середина $B_1C_1$.

Позначимо довжину ребер призми $x$. Тоді $AP=A_1P_1=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ (як довжина висоти правильного трикутника). Точка $O$ є центром трикутника $ABC$, тому

$$AO = A_1O_1 = \frac{2}{3}AP = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

З подібності трикутників $SOM$ та $SO_1A_1$ отримуємо $\dfrac{A_1O_1}{MO} = \dfrac{SO_1}{SO}$, або $\dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{3}}{R} = \dfrac{h-x}{h}$. З цієї рівності знаходимо $x = \dfrac{Rh}{h\frac{\sqrt{3}}{3}+R} = \dfrac{Rh\sqrt{3}}{h+R\sqrt{3}}$.

## Білет № 2

1. Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості і графік.

2. Сторона трикутника дорівнює 35 см, а дві інші утворюють кут $60^0$ і відносяться як 8:3. Обчисліть периметр трикутника.

3. Розв’язати нерівність $\frac{\sqrt{2x-1}}{|x-2|} < 1$.

4. Побудувати дотичну до даного кола, яка проходить через задану точку а) на колі; б) поза колом.

**Білет № 3**

1. Формула коренів квадратного рівняння.

2. В трикутнику довжини двох сторін складають 6 і 3 см. Знайти довжину третьої сторони, якщо півсума висот, проведених до даних сторін, дорівнює третій висоті.

3. Розв’язати нерівність: $\sqrt{5-x^2} > x-1$.

4. Довести, що у довільному вписаному коло чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює $180^0$.

**Білет № 4**

1. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

2. У зрізаній піраміді сторони основ відносяться як 3:11. В якому відношенні площа її поверхні ділиться перерізом, що проходить через середини бічних ребер?

3. Розв’язати рівняння:

$$2\sin(\frac{x}{2})\cos^2 x - 2\sin(\frac{x}{2})\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x .$$

4. Побудувати прямокутний трикутник за даними катетом і радіусом вписаного кола.

**Білет № 5**

1. Властивості числових нерівностей.

2. Доведіть, що в будь-якому описаному навколо кола чотирикутнику суми протилежних сторін рівні.

3. Розв'язати рівняння $3+5\sin 2x=\cos 4x$.

4. Побудувати рівнобедрений трикутник за кутом при основі і висотою, проведеною до бічної сторони.

**Білет № 6**

1. Ознаки паралельності прямих.

2. Спростити вираз: $\dfrac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2(2\alpha-\frac{3}{2}\pi)-4+4\sin^2\alpha}$.

3. Хорда кола дорівнює 10 см. Через один кінець хорди проведено дотичну до кола, а через другий – січну, паралельну дотичній. Знайти радіус кола, якщо внутрішній відрізок січної дорівнює 12 см.

4. Знайти цілочисельне рішення рівняння: $\log_x(9x^2)\log_3 x=4$.

**Білет № 7**

1. Ознаки подібності трикутників.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y=x^2+x+1$, яка перпендикулярна прямій $x+5=0$.

3. Знайти гострі кути прямокутного трикутника, якщо медіана проведена до його гіпотенузи, ділить прямий кут у відношенні 1:2.

4. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{x+6}{3}}(\log_2\dfrac{x-1}{2+x})>0$.

**Білет № 8**

1. Функції $y=\cos x$ і $y=\sin x$, їх означення, властивості і графік.

2. Знайти сторони прямокутного трикутника, якщо відомо, що радіус вписаного кола дорівнює 1 см, а його периметр – 12 см.

3. При якому найменшому цілому k нерівність

$$x^2 - 2(4k-1)x + (15k^2 - 2k + 7) > 0.$$

4. Дано круг і точку в середині нього. Проведіть через дану точку хорду заданої довжини.

## Білет № 9

1. Функції $y = tgx$ і $y = ctgx$ їх означення, властивості і графік.

2. Розв'язати нерівність: $x^2 5^x - 5^{2+x} < 0$.

3. Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.

4. Прямокутна трапеція, у якої більша із паралельних сторін рівна 2 і менший кут $\alpha$ ($\sin\alpha = 3/5$), є основою піраміди. Всі бічні грані однаково нахилені до основи. Об'єм піраміди дорівнює $\sqrt{77}/9$. Знайти площу її бічної поверхні.

## Білет №10

1. Формули зведення.

2. Висота прямокутного трикутника, проведена із вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких на 11 см більший за інший. Знайти гіпотенузу, якщо катети відносяться як 6:5.

3. Розв'язати рівняння: $5^x \cdot \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$.

4. Циліндр і конус мають спільну основу, а вершина конуса знаходиться в центрі другої основи циліндра. Повна поверхня циліндра відноситься до повної поверхні конуса як 7:4. Знайти $\sin\alpha$, де $\alpha$- кут між віссю конуса і його твірною.

## Білет № 11

1. Коло, вписане в трикутник.

2. Розв'язати нерівність: $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) > 5$.

3. Побудувати прямокутний трикутник за гострим кутом і бісектрисою прямого кута.

4. Розв'язати рівняння: $\cos x - 2\sin^2(\frac{x}{2}) = 0$.

**Білет № 12**

1. Дотична до кола та її властивості.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2 \end{cases}$.

3. В ромб, який ділиться своєю діагоналлю на два рівносторонні трикутники, вписане коло радіусом 2 см. Обчислити сторону ромба.

4. Розв'язати рівняння: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

**Білет № 13**

1. Рівняння дотичної до графіка функції.

2. У паралелепіпеді довжини трьох ребер, які виходять із спільної вершини, дорівнюють відповідно $2\sqrt{2}$, 4 і 6. Кути між цими ребрами, взятими попарно, рівні $\pi/3$. Знайти об'єм паралелепіпеда.

3. Розв'язати нерівність $\frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} \geq 2$.

4. Радіуси вписанного і описанного кіл стосовно прямокутного трикутника відповідно рівні 2 і 5 см. Обчислити довжини сторін трикутника.

**Білет № 14**

1. Ознака паралельності площин.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}} = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

3. У похилій трикутній призмі площа однієї із бічних граней рівна $m^2$, а відстань її від протилежного ребра $2a$. Чому дорівнює об'єм призми?

4. Спростити вираз: $ctg(4\alpha - \pi)(\cos^4(\frac{9}{4}\pi - 2\alpha) - \sin^4(\frac{9}{4}\pi - 2\alpha))$.

**Білет № 15**

1. Формули зведення.

2. Дві площини, що дотикаються до кулі, утворюють кут $120^0$. Найкоротша відстань на поверхні кулі між точками дотику дорівнює 70 см. Знайти радіус кулі.

3. Розв'язати нерівність: $\log_{\frac{1}{2}}(5 + 4x - x^2) > -3$.

4. Доведіть, що у прямокутному трикутнику катет, котрий лежить проти кута $30^0$, дорівнює половині гіпотенузи.

**Білет № 16**

1. Теорема про три перпендикуляри.

2. Розв'язати рівняння: $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

3. В сектор AOB з радіусом R і кутом $90^0$ вписане коло, що дотикається відрізків OA, OB і дуги AB. Знайти радіус кола.

4. Розв'язати нерівність: $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_4(x^2 - 5)\right] > 0$.

**Білет № 17**

1. Тригонометричні функції подвійного аргументу.

2. Основою похилого паралелепіпеда є паралелограм ABCD, у якого AB = 3 дм, AD = 7дм і BD = 6 дм. Діагональний переріз $AA_\perp C_\perp C$ перпендикулярний до площини основи і його площа 1 м$^2$. Визначити об'єм паралелепіпеда.

3. Розв'язати нерівність: $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$.

4. Побудуйте трапецію за основами і кутами при одній із основ.

**Білет № 18**

1. Ознака паралельності прямої і площини.

2. Знайти найбільший корінь рівняння: $3 + 2\log_{x+1} 3 = 2\log_3 (x+1)$.

3. Доведіть, що в трапеції, діагоналі якої є бісектрисами кутів при одній із основ, довжини трьох сторін рівні.

4. Розв'язати нерівність: $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$.

**Білет № 19**

1. Логарифм  добутку, степеня, частки.

2. Середина гіпотенузи віддалена від катетів прямокутного трикутника на 5 і 12 см. Обчислити периметр трикутника.

3. Спростити вираз: $\dfrac{4\sin(\frac{5}{2}\pi + \alpha)}{tg^2(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{2}) - ctg^2(\frac{3}{2}\pi + \frac{\alpha}{2})}$.

3. Основою піраміди є ромб з стороною 15 см, утворені кути при основі рівні $45^0$, а площа бічної поверхні – 4 дм$^2$. Знайти об'єм піраміди.

**Білет № 20**

1.  Функції y=ctgx, y=tgx, їх означення властивості і графік.

2.   Знайти висоту циліндра, у якого площа його бічної поверхні в три рази більша площі основи.

3. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

4. Побудуйте прямокутний трикутник за гострим кутом і його бісектрисою.

**Білет № 21**

1. Функції $y = \cos x$ і $y = \sin x$, їх означення, властивості і графік.

2. Основою піраміди є трикутник, сторони якого рівні 7, 7 і 6 см. Апофеми бічних граней рівні і відносяться до висоти піраміди як 5:4. Знайти об'єм піраміди.

3. Розв'язати нерівність: $3^{72}(\frac{1}{3})^{x} \cdot (\frac{1}{3})^{\sqrt{x}} > 1$.

4. Побудуйте коло даного радіуса, що проходить через дану точку і дотикається до даної прямої.

**Білет № 22**

1. Корені рівнянь sinx=a, cosx=a і tgx=a.

2. Визначити об'єм правильної зрізаної піраміди, якщо сторони її основ *а* і *в*, а бічне ребро утворює з площиною основи кут $30^0$.

3. Розв'язати нерівність: $\sqrt{x^2+1} > x-1$.

4. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриса зовнішнього кута при вершині, протилежній основі, паралельна основі.

**Білет № 23**

1. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу.

2. Дві висоти паралелограма, проведені із вершини кута, рівні 12 і 18 см, а кут між ними дорівнює $30^0$. Обчислити площу паралелограма.

3. Розв'язати систему рівнянь : $\begin{cases} 3^{x} - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{y} = 7 \end{cases}$.

4. Побудуйте трикутник за серединами його сторін.

**Білет № 24**

1. Функція $y = ax + b$, її властивості і графік.

2. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 15, а висота 20. Знайти найкоротшу відстань від сторони до тієї діагоналі призми, яка її не перетинає.

3. Розв’язати нерівність: $\log_2((x-3)(x+2))+\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}3$.

4. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і сумою катетів.

**Білет № 25**

1. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.

2. Розв’язати рівняння: $1-\sin 2x=\cos x-\sin x$.

3. Обчислити площу трикутника, якщо до його сторони, довжиною 4 см, прилягають кути $45^0$ і $60^0$.

4. Розв’язати нерівність: $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}\le 3$.

**Білет № 26**

1. Вимірювання кута, вписаного в коло.

2. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, рівні сторони якого дорівнюють б см, а третя – 8 см. Бічні ребра рівні між собою і кожне рівне 9 см. Знайти об’єм піраміди.

3. Розв’язати нерівність: $x+4>2\sqrt{4-x^2}$ .

4. Спростити вираз: $\frac{tg(\frac{5}{4}\pi-\alpha)(1+\sin 2\alpha)}{\cos(\frac{5}{2}\pi-2\alpha)}$.

**Білет № 27**

1. Функції $y=ax^2+bx+c$ , її властивості і графік.

2. Пряма, яка проходить через точку перетину діагоналей трапеції паралельна її основам, перетинає бічні сторони в точках M і N. Знайти довжину відрізка MN, якщо довжини основ трапеції рівні *а* і *в* (а=6; в=2)

3. Розв'язати нерівність: $\sqrt{(x-3)(2-x)} > 3+2x$.

4. В конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом $\frac{\pi}{2}$ і площа основи якого рівна $3\sqrt[3]{\pi}$ , вписано кулю. Знайти об'єм конуса, який відтинається від даного площиною кола, що є колом дотику поверхонь кулі і конуса.

**Білет № 28**

1. Функція $y = k/x$, її властивості і графік.

2. Бісектриса кута при основі і основа рівнобедреного трикутника рівні 6 і 5 см відповідно. Знайти бічну сторону трикутника.

3. Розв'язати рівняння: $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 3$.

Бічна поверхня трикутника, що є нормальним перерізом рівна 720, довжина її бічного ребра – 5. Сторони трикутника, що є нормальним перерізом призми, відносяться як 9:10:17. Знайти об'єм призми.

**Білет № 29**

1. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.

2. Розв'язати рівняння: $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$ .

3. Доведіть, що бісектриси кутів, прилеглих до бічних сторін трапеції, перетинаються під прямим кутом і точка їх перетину лежить на середній лінії трапеції.

4. Розв'язати нерівність: $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$ .

**Білет № 30**

1. Ознака паралельності прямої і площини.

2. Довести тотожність: $tg(45^0+\alpha)-tg(45^0-\alpha)=2tg2\alpha$.

3. У кулю вписано циліндр, радіус основи якого відноситься до висоти як m:n. Визначити повну поверхню циліндра, якщо поверхня кулі рівна *S*.

4. Розв'язати нерівність: $(\frac{2}{5})^{\frac{6-5x}{2+5x}}<\frac{25}{4}$.

## *Усний екзамен (заочна форма навчання)*

**Білет № 1**

1. Функція $y=ax+b$, її властивості і графік.

2. Площа основ зрізаної піраміди Q і q, а її об'єм V. Знайти об'єм повної піраміди.

3. Розв'язати нерівність: $\log_{\frac{1}{6}}(x^2-3x+2)+1<0$.

**Білет № 2**

1. Функція $y=\frac{k}{x}$, її властивості і графік.

2. Побудуйте трикутник за його основою, висотою, проведеною до основи, і радіусом описаного кола.

3. Розв'язати рівняння: $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$.

**Білет № 3**

1. Функція $y=ax^2+bx+c$, її властивості і графік.

2. Діагоналі ромба рівні 30 і 40 см. Вписане коло дотикається сторін ромба в точках A, B, C, D. Обчислити площу чотирикутника ABCD.

3. Розв'язати рівняння: $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$.

**Білет № 4**

1. Властивості рівнобедреного трикутника.

2. Розв'язати нерівність: $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$.

3. Розв'язати рівняння: $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.

**Білет № 5**

1. Формули коренів квадратного рівняння.

2. Бісектриса кутів A і D прямокутника ABCD ділять його сторони BC на три частини по 12 см. Визначити площу описаного навколо чотирикутника кола.

3. Розв'язати нерівність: $\sqrt{4-x^2} + \dfrac{|x|}{x} < 0$.

**Білет № 6**

1. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

2. Площа паралелограма зі сторонами 5 і 6 см дорівнює 24 см$^2$. Обчислити довжину діагоналей паралелограма.

3. Розв'язати рівняння: $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = (\dfrac{\sqrt{2}}{8})^{-x}$.

**Білет № 7**

1. Властивості числових нерівностей.

2. Побудуйте коло, що проходить через дану точку і дотикається до даної прямої в даній на ній точці.

3. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12} \end{cases}$.

**Білет № 8**

1. Властивості функції $y = ax^2 + bx + c$ та її графік.

2. В прямокутний трикутник з катетами *а* і *в* вписано квадрат, що має з трикутником спільний прямий кут. Знайдіть периметр квадрату.

3. Розв'язати нерівність: $x+2<\sqrt{x+14}$.

**Білет № 9**

1. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.

2. Розв'язати нерівність: $1-x<\sqrt{x^2-2x}$.

3. Розв'язати рівняння: $\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.

**Білет № 10**

1. Коло описане навколо трикутника.

2. Розв'язати нерівність: $(1{,}25)^{1-x}<(0{,}64)^{2(1+\sqrt{x})}$.

3. Розв'язати рівняння: $\cos 4x+2\cos^2 x=0$.

**Білет № 11**

1. Вимірювання кута вписаного в коло.

2. Розв'язати рівняння: $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$.

3. Розв'язати нерівність: $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

**Білет № 12**

1. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу.

2. Відношення катетів прямокутного трикутника рівне 3:4, а висота, опущена на гіпотенузу, дорівнює 12 см. Обчислити периметр трикутника.

3. Розв'язати нерівність: $3^{72}\cdot(\frac{1}{3})^x\cdot(\frac{1}{3})^{\sqrt{x}}>1$.

**Білет № 13**

1. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.

2. Розв'язати рівняння: $\cos(\frac{\pi}{2}-3x)-\sin 2x=0$.

3. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y = \ln(2x+2)$ в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$.

**Білет № 14**

1. Рівняння дотичної до графіка функції.

2. Основою піраміди є ромб з стороною 15 см, двогранний кут при основі дорівнює $45^0$, а площа бічної поверхні дорівнює 4 дм$^2$. Знайти об'єм піраміди.

3. Знайти проміжки зростання функції $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$.

**Білет № 15**

1. Тригонометричні функції подвійного аргументу.

2. Радіуси вписаного і описаного кіл навколо прямокутного трикутника відповідно рівні 2 і 5 см. Обчислити довжини сторін цього трикутника.

3. Розв'язати нерівність: $\log_{\frac{1}{5}}(\frac{4x+6}{x}) \geq 0$.

**Білет № 16**

1. Ознаки паралелограма.

2. Довести тотожність: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{tg^2\alpha+1}{tg^2\alpha-1}$.

3. Розв'язати рівняння: $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0{,}5 = 0$.

**Білет № 17**

1. Коло, вписане в трикутник.

2. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{x^2+1}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3. Розв’язати нерівність: $\sqrt{3}\cos^{-2} x < 4tgx$.

**Білет № 18**

1. Ознаки паралельності прямих.

2. Розв’язати нерівність: $9^x + 6^x \le 2 \cdot 4^x$.

3. Розв’язати рівняння: $\dfrac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2 \frac{x}{2}} = tg^2 \dfrac{x}{2}$.

**Білет № 19**

1. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.

2. Розв’язати рівняння: $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5 (3^x - 5^{2-x})$.

3. Розв’язати нерівність: $|x-6| > |x^2 - 5x + 9|$.

**Білет № 20**

1. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.

2. Знайти область визначення функції:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{(x+3)(x-4)} - 1} + \frac{1}{\log_8 (x-4)}.$$

3. Розв’язати рівняння: $\cos 15x = \sin 5x$.

**Білет № 21**

1. Ознаки подібності трикутників.

2. Розв’язати нерівність: $\left|\dfrac{3x}{x^2 - 4}\right| \le 1$.

3. Доведіть тотожність: $\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot ctg^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$.

**Білет № 22**

1. Дотична до кола та її властивість.

2. Розв’язати рівняння: $\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = 0$.

3. Розв’язати нерівність: $\sqrt{2x+14} > x+3$.

**Білет № 23**

1. Теорема про три перпендикуляри.

2. Розв’язати рівняння: $(1+\frac{1}{2x})\lg 3 + \lg 2 = \lg(27 - 3^{\frac{1}{x}})$.

3. Знайти екстремуми функції: $y = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 7$.

**Білет № 24**

1. Ознака паралельності площин.

2. Розв’язати нерівність: $\frac{x^2 + 6x - 7}{|x+4|} < 0$.

3. Довести тотожність: $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$.

**Білет № 25**

1. Ознака паралельності прямої і площини.

2. Розв’язати нерівність: $x+3 < \sqrt{x+33}$.

3. Перевірте рівність: $\sin 47^0 + \sin 61^0 - \sin 11^0 - \sin 25^0 = \cos 7^0$.

**Білет № 26**

1. Теорема про перпендикулярність прямої і площини.

2. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ x^y = 4^6 \end{cases}$.

3. Розв’язати нерівність: $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 0$.

**Білет № 27**

1. Ознака паралельності площин.

2. Розв’язати рівняння: $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$.

3. Розв'язати нерівність: $\left|2x-\left|3-x\right|-2\right|\le 4$.

**Білет № 28**

1. Властивості паралельних площин.

2. Знайти *x*, якщо $\log_2 x+\log_{\sqrt{2}} x+\log_{0,5} x=6$.

3. Розв'язати нерівність: $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\ge 1$.

**Білет № 29**

1. Коло, описане навколо трикутника.

2. Розв'язати рівняння: $1-\cos 6x=tg3x$.

3. Розв'язати нерівність: $\frac{2}{x}-\frac{1}{2}>\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}}$.

**Білет № 30**

1. Коло, вписане в трикутник.

2. Розв'язати рівняння: $0,6^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$.

3. Розв'язати нерівність: $6\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x>2$.

# Критерії оцінювання відповідей абітурієнтів на усних вступних іспитах з математики в 2004 році

***Стаціонарна форма навчання***

Кожен білет до усного вступного іспиту з математики на стаціонарну форму навчання складається з чотирьох питань. Перше – теоретичне з алгебри і початків аналізу, друге – теоретичне з геометрії, третє – практичне, четверте – практичне. Питання білета оцінюються наступним чином:

| № питання | Максимальна кількість балів |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | 2 |
| Разом: | 12 |

Оцінювання відповідей на теоретичні питання

| Зміст | Оцінка |
|---|---|
| Абітурієнт правильно сформулював відповідні означення, правильно сформулював і повністю довів усі необхідні твердження по даному питанню. | 3 |
| Абітурієнт правильно сформулював відповідні означення, правильно сформулював усі необхідні твердження по даному питанню, довів їх, але окремі частини доведень недостатньо обгрунтовані. | 2 |
| Абітурієнт правильно сформулював відповідні означення, правильно сформулював і усі необхідні твердження по даному питанню, правильно почав їх доводити, але не закінчив жодного доведення. | 1 |
| Абітурієнт сформулював означення і твердження з незначними неточностями, не починав доводити жодне з тверджень, але правильно відповів на додаткові питання. | 0,5 |
| Абітурієнт не приступив до відповіді на питання або відповів на інше питання, або його відповідь неправильна. | 0 |

Оцінювання відповідей на практичні питання

| Зміст | Оцінка | |
|---|---|---|
| | 3 питання | 4 питання |
| Вірне, повне, цілком обґрунтоване розв’язання задачі. | 4 | 2 |
| Хід розв’язування в цілому вірний, але допущена одна не груба помилка, або окремі висновки в розв’язанні недостатньо обгрунтовані. | 3 | 1,5 |
| Абітурієнт не закінчив розв’язання, але правильно виконав не менше половини логічних кроків, які ведуть до розв’язку. | 2 | 1 |
| Абітурієнт правильно почав розв’язання. | 1 | 0,5 |
| Інші випадки. | 0 | 0 |

Якщо сума балів, яку набрав абітурієнт, не виражається цілим числом, то вона заокруглюється в бік збільшення до цілого числа.

### *Заочна форма навчання*

Кожен білет до усного вступного іспиту з математики на заочну форму навчання складається з трьох питань. Перше – теоретичне з алгебри і початків аналізу, друге – теоретичне з геометрії, третє – практичне. Питання білета оцінюються наступним чином:

| № питання | Максимальна кількість балів |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 4 |
| 3 | 4 |
| Разом: | 12 |

Оцінювання відповідей на теоретичні питання

| Зміст | Оцінка |
|---|---|
| Абітурієнт правильно сформулював відповідні означення, правильно сформулював і повністю довів усі необхідні твердження по даному питанню. | 4 |
| Абітурієнт правильно сформулював відповідні означення, правильно сформулював усі необхідні твердження по даному питанню, довів їх, але окремі частини доведень недостатньо обгрунтовані. | 3 |
| Абітурієнт правильно сформулював відповідні означення, | 2 |

| | |
|---|---|
| правильно сформулював і усі необхідні твердження по даному питанню, правильно почав їх доводити, але не закінчив жодного доведення. | |
| Абітурієнт сформулював означення і твердження з незначними неточностями, не починав доводити жодне з тверджень, але правильно відповів на додаткові питання. | 1 |
| Абітурієнт не приступив до відповіді на питання або відповів на інше питання, або його відповідь неправильна. | 0 |

Оцінювання відповідей на практичне питання

| Зміст | Оцінка |
|---|---|
| Вірне, повне, цілком обґрунтоване розв’язання задачі | 4 |
| Хід розв’язування в цілому вірний, але допущена одна не груба помилка, або окремі висновки в розв’язанні недостатньо обгрунтовані. | 3 |
| Абітурієнт не закінчив розв’язання, але правильно виконав не менше половини логічних кроків, які ведуть до розв’язку. | 2 |
| Абітурієнт правильно почав розв’язання. | 1 |
| Інші випадки. | 0 |

## Список рекомендованої літератури


1. Литвиненко Г.М., Федченко Л.Я., Швець В.О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частини 1, 2. – Львів: ВНТЛ, 1997.
2. Збірник задач з математики для вступників до втузів. За ред. М.І.Сканаві. – Київ: Вища школа, 1992.
3. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Конкурсні задачі з математики. – Київ: “Вища школа”, 2001.
4. Говоров В.М., Дыбов Т.П., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике. - Москва: Просвещение, 1983.
5. Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчук Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики. - Київ: Вища школа, 1988.
5. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебраїчний тренажер. – Київ: АСК, 1995.

ЗМІСТ

Герус Олег Федорович, Ленчук Іван Григорович, Сарана Олександр Анатолійович

Вступний екзамен з математики на фізико-математичному факультеті Житомирського державного університету

Навчальний посібник

Житомир

Поліграфічний центр Житомирського державного універстиету

---

Надруковано з оригінал-макета авторів.
Підписано до друку 2.08.2002. Формат 60х90/16. Ум.друк.арк.9.0. Обл.вид.арк.17.5.
Друк різографічний. Зам.361. Наклад 150.
Поліграфічний центр ЖДУ, вул. Велика Бердичівська, 40

## Інститут післядипломної освіти інформує

Інститут післядипломної освіти
Житомирського державного університету імені Івана Франка
здійснює набір на навчання для отримання другої вищої освіти
за спеціальностями:

1. "Психологія";
2. "Англійська мова та література";
3. "Німецька мова та література ";
4. "Українська мова та література";
5. "Російська мова та література";
6. "Інформатика";
7. "Математика та основи інформатики";
8. "Фізика та основи інформатики";
9. "Історія та правознавство";
10. "Біологія";
11. "Соціальна педагогіка";
12. "Початкове навчання".

***Умови вступу до інституту:***

приймаються громадяни України із вищою освітою;
навчання здійснюється за рахунок коштів юридичних та фізичних осіб;
зарахування проводиться за результатами співбесіди;
термін навчання – 2 роки; форма навчання – заочна.
Вступники подають документи:

- заяву про вступ до ЖДУ на ім'я ректора університету, в якій вказують обрану спеціальність і форму навчання;
- нотаріально завірені документ державного зразка про вищу освіту та додаток до нього;
- 4 фотокартки розміром 3х4 см;
- медичну довідку за формою 086-У;
- копію довідки про присвоєння ідентифікаційного коду платника податків.

При подачі документів паспорт та диплом про вищу освіту вступник пред'являє особисто.

Випускники інституту після державної атестації отримують диплом державного зразка.

***З питань прийому звертатися за адресою:***

10008, м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40, Контактні телефони:
(0412)-34-24-60; (0412)-37-78-86.