ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 375.3

В. В. Грищук,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
(Житомирський державний університет імені Івана Франка)

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ТЕОРЕТИЧНІЙ ФІЗИЦІ

Запропоновано підхід до знаходження явного вигляду силових та еквіпотенціальних ліній за відомими значеннями електростатичного потенціалу на поверхнях гіперболічного та циліндричного вигляду методом конформних відображень.

Дослідження електростатичного поля, встановлення його властивостей та одержання картини силових ліній є фундаментальними питаннями теорії поля. У більшості випадків розв'язується пряма задача електростатики, що полягає у визначенні напруженості та потенціалу електростатичного поля за відомим розподілом електричного заряду [1-3]. У роботі [4] систематизовано методи визначення напруженості електростатичного поля при різних розподілах електричного заряду. Проте, з методичної точки зору при викладанні теорії поля у вищій школі актуальною є задача по встановленню явного вигляду силових та еквіпотенціальних ліній за відомими значеннями потенціалу на поверхнях заданої форми. Загальноприйнятим підходом до розв'язання цієї задачі є використання методу конформних відображень комплексної площини [5]. Метою даної роботи є застосування методу конформних відображень для розв'язання деяких задач з електростатики.

Важливою властивістю конформних відображень для різноманітних застосувань є збереження кутів між лініями в точці комплексної площини, в якій відповідне конформне перетворення $w = f(z)$ має відмінну від нуля похідну. Причому, картина ліній на w -площині може бути значно простішою ніж на z - площині, що полегшує розв'язок конкретної задачі.

Встановимо аналітичний вигляд силових ліній електричного поля та еквіпотенціальних ліній між двома гіперболічними поверхнями, нормальні перерізи яких задаються рівняннями: $x^2 - y^2 = C_1$ і $x^2 - y^2 = C_2$, відповідно з потенціалами j_1 і j_2.

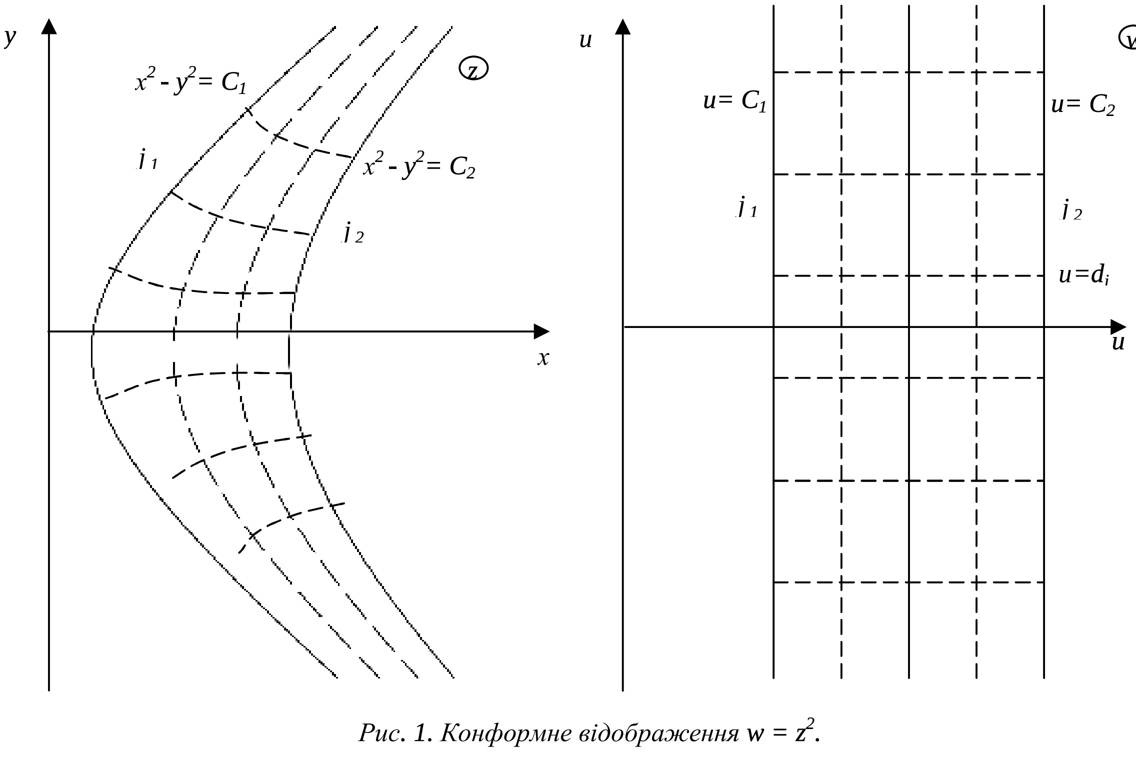

Рис. 1. Конформне відображення $w = z^2$.

Відомо, що еквіпотенціальні лінії та силові лінії електричного поля взаємно перпендикулярні, проте при таких граничних умовах неможливо визначити аналітичні вирази для даних ліній. Застосуємо аналітичне відображення $w = z^2 (z = x + iy)$, яке в прямокутній декартовій системі координат має вигляд $w = u + iv$, де $u = u(x, y) = x^2 - y^2$, $v = v(x, y) = 2xy$. Тоді рівнобічні ортогональні гіперболи $x^2 - y^2 = C_i$ $(C_1 \le C_i \le C_2)$, $2xy = d_j$ $(-\infty < d_j < \infty)$ на z площині відобразяться відповідно у прямі $u = C_i$ та $v = d_j$ на w -площині, а еквіпотенціальні лінії j_1 і j_2 – у вертикальні лінії $u = C_1$ і $u = C_2$ (рис. 1).

Таким чином, у комплексній площині $w = u + iv$ систему прямих $u = C_i$ можна розглядати як еквіпотенціальні лінії, а систему прямих $v = d_j$ – як силові лінії електричного поля. Зауважимо, що дані системи прямих взаємно перпендикулярні. При оберненому перетворенні $z = w^{1/2}$ ортогональність зберігається внаслідок конфорності відображення (крім точки $w = 0$). Тоді аналітичні вирази силових і еквіпотенціальних ліній електричного поля мають вигляд: $x^2 - y^2 = C_i$, $2xy = d_j$.

Таким чином, в комплексній площині $w = u + iv$ систему прямих $u = C_i$ можна розглядати як еквіпотенціальні лінії, а систему прямих $v = d_j$ – як силові лінії електричного поля. Зауважимо, що дані системи прямих взаємно перпендикулярні. При оберненому перетворенні $z = w^{1/2}$ ортогональність зберігається внаслідок конфорності відображення (крім точки $w = 0$). Тоді аналітичні вирази силових і еквіпотенціальних ліній електричного поля мають вигляд: $x^2 - y^2 = C_i$, $2xy = d_j$.

Доведемо, що гармонічна функція $\Phi(u,v)$ (розв'язок рівняння Лапласа) w площини після оберненого перетворення $z = w^{1/2}$ відобразиться у гармонічну функцію $f(x, y)$ z -площини. Або з фізичної точки зору: потенціал $\Phi = \Phi(u,v)$ w площини перейде у потенціал $f = f(x, y)$ z -площини. Вище вже було встановлено, що значення потенціалу на прямій $u = C_i$ w - площині дорівнює значенню функції $f(x, y)$ на гіперболі $x^2 - y^2 = C_i$ z -площини, тобто виконується рівність

$$\Phi(u,v) = \Phi[u(x, y), v(x, y)] = j (x, y) \qquad (1)$$

Тоді, диференціюючи функцію $\Phi(u,v)$ за змінною x , одержуємо рівності

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}.$$

Аналогічним чином встановлюємо рівність для другої похідної функції Φ за змінною y:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}.$$

Тоді, враховуючи рівність (1), одержуємо рівності для значення оператора Лапласа від функції j :

$$\Delta j (x, y) = \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) +$$

$$+ \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}. \qquad (2)$$

Оскільки $w = z^2$ – аналітична функція, то функції u і v задовольняють рівняння Лапласа:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0, \ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 0, \qquad (3)$$

а також вони зв'язані умовами Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (4)$$

Враховуючи тепер співвідношення (3) і (4), рівняння (1) набуває вигляду $\Delta j(x,y)=0$. Отже, доведено необхідне твердження про те, що гармонічність функції є інваріантом відносно даного аналітичного відображення.

Розглянемо наступну задачу. Між двома зарядженими півколовими в перерізі поверхнями (рис.2) різниця потенціалів рівна $2j_0$. Півкола, що належать z-площині мають одиничний радіус: $x^2+y^2=1$. Потрібно визначити потенціал в довільній точці між цими поверхнями.

Відобразимо півкола на w-площину за допомогою аналітичного відображення $w=ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Помножимо тепер чисельник і знаменник виразу, що стоїть під знаком логарифма на спряжений вираз до знаменника, одержуємо рівність $w=u+iv=ln\left(\frac{1-x^2-y^2+2iy}{1-2x+x^2+y^2}\right)$.

Позначимо тепер одержаний вираз під знаком логарифма через Re^{iq} ($0\le q<2p$). Тоді $u+iv=ln(Re^{iq})=ln\,R+iq$. Визначимо тепер q через декартові координати: $\frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2}+i\frac{2y}{1-2x+x^2+y^2}=Re^{iq}=R(cos\,q+i\,sin\,q)$. Звідси одержуємо рівність

$$tgq=\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}, \text{ а отже } v=q=arctg\left(\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}\right).$$

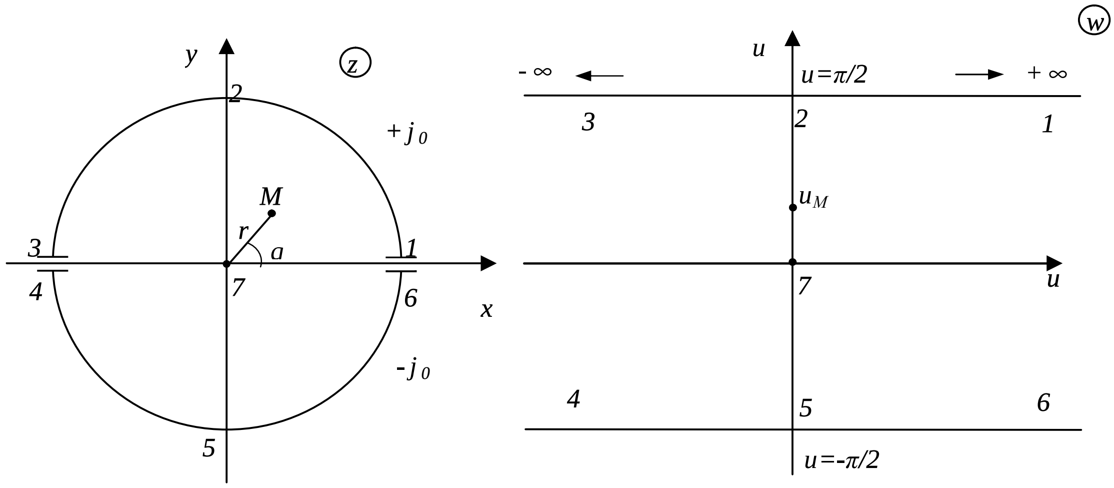

Рис. 2. Заряджені півколові поверхні в z *та* w *– площинах.*

Відображення верхнього і нижнього півкіл відбувається у відповідності:

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to 1,\\ y>0}} arctg\left(\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}\right)=\frac{p}{2}, \quad \lim_{\substack{x^2+y^2\to 1,\\ y<0}} arctg\left(\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}\right)=-\frac{p}{2}.$$

Нарешті, шуканий потенціал в точці M дорівнює:

$$j=\frac{2j_0}{p}v=\frac{2j_0}{p}arctg\left(\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}\right)=\frac{2j_0}{p}arctg\left(\frac{2r\,sin\,q}{1-r^2}\right), \text{ де } 0<r\le 1.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Ландау Л. Ф., Лифшиц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 502 с.
2. Федорченко А. М. Теоретична фізика. – К.: Вища школа, 1992. – 529 с.
3. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высшая школа, 1983. – 460 с.
4. Грищук В. В. Визначення напруженості електростатичного поля різними методами // Наукові записки. – 2003. – Випуск LIII. – С. 72-80.

5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

Матеріал надійшов до редакції 12.06.2009 р.

Грищук В. В. Некоторые применения конформних отображений в теоретической физике.

Предложен подход к получению явного вида силовых и эквипотенциальных линий по известным значениям электростатического потенциала на поверхностях гиперболического и цилиндрического вида методом конформных отображений.

Grishchuk V. V. Some Applications of Conformal Mappings in Theoretical Physics.

An approach to obtaining an exact form of power and equipotentials lines by the known values on the surfaces of hyperbolic and cylindrical types by means of the method of conformal mappings is suggested.