УДК 372.851:51

С.П.Семенець,
кандидат педагогічних наук, доцент
Л.М. Семенець,
асистент
(Житомирський державний університет)

ДЕЯКІ МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ВУЗІВСЬКОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ

Наведений приклад змістовного узагальнення навчального матеріалу при вивченні поверхонь другого порядку вузівського курсу геометрії.

Розв'язання конкретних задач сучасної системи освіти пов'язане із зміною типу мислення, що обумовлює нові цілі, зміст і методи навчальної діяльності. В основі нового підходу може стати „технологія” формування змістовних узагальнень, основою яких є не спостереження і порівняння зовнішніх властивостей предметів (традиційна наочність), а перетворювальна предметна дія та аналіз, які встановлюють істотні зв'язки цілісного об'єкта, його генетично вихідну форму. Тут відкриття і засвоєння абстрактно-загального передує засвоєнню конкретного.

Навчальний предмет, побудований на основі такого узагальнення, відповідає науковому викладанню фактичного матеріалу. Засвоєння його змісту повинно здійснюватись студентами шляхом самостійної навчальної діяльності. Ідею змістовних узагальнень у навчальній діяльності, як основи для формування і розвитку теоретичного мислення, розвинув один із фундаторів розвивального навчання В.В.Давидов [1].

Прикладом реалізації ідеї змістовних узагальнень може бути вивчення поверхонь другого порядку у вузівському курсі геометрії.

У своїй практичній діяльності людина завжди стикається із необхідністю вивчення форми, розмірів, взаємного розташування просторових фігур, поведінки кривих на різних типах поверхонь. Цими питаннями займаються геометри, геодезисти, астрономи, фізики. Однак перш за все науку цікавлять такі питання:

1. Як означити (задати) ту чи іншу поверхню? Якщо означень декілька, то чи є вони рівносильними (еквівалентними)?
2. Які властивості має поверхня, якщо відоме її аналітичне задання (рівняння).
3. Які криві одержуються в перерізі поверхні із різними площинами?
4. Яка внутрішня геометрія цієї поверхні (перша квадратична форма)?
5. Які особливості зовнішньої геометрії поверхні (друга квадратична форма)?
6. Як поводять себе криві ліній (асимптотичні, геодезичних, ліній кривини) на цій поверхні?
7. Яка геометрія (Евкліда, Ріманова, Лобачевского) виконується на цій поверхні? Як побудувати інтерпретацію (модель) цієї геометрії?

Наведений план може бути реалізований самостійно студентами для усіх поверхонь, вивчення яких передбачено навчальним планом (конусів, циліндрів, еліпсоїдів, параболоїдів, гіперболоїдів). Покажемо реалізацію його для гіперболічного параболоїда.

Традиційно в курсі вищої геометрії [2,3] таку поверхню, як гіперболічний параболоїд, означають аналітично, тобто, як геометричне місце точок простору (ГМТ), яке в усякій прямокутній декартовій системі координат (ПДСК) задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 2z \qquad (*)$$

Означимо цю поверхню геометрично.

Означення 1. Нехай в просторі вибрані деякі дві мимобіжні прямі і площина, яка перетинає кожну з них. Тоді ГМТ усіх прямих простору, які паралельні площині і перетинають кожну із мимобіжних прямих називається гіперболічним параболоїдом.

Покажемо, що вийшовши із такого означення, можна прийти до рівняння (*).

Нехай в просторі введена деяка ПДСК. У ній задані дві прямі l_1 і l_2, площина $\sum$ своїми рівняннями:

$$l_1:\begin{cases} x = pt, \\ y = qt, \\ z = 0. \end{cases} \quad l_2:\begin{cases} x = p + pt, \\ y = qt, \\ z = \frac{1}{2} + t. \end{cases} \quad \sum : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 0.$$

Прямі l_1 і l_2 – є мимобіжними. Справді, обчислимо детермінант:

$$\begin{vmatrix} p & q & 0 \\ p & q & 1 \\ p & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = pq \neq 0.$$

Пряма l_1 перетинає площину $\sum$.

Справді: $\begin{cases} x = pt \\ y = qt \\ z = 0 \\ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$. Отже, точка $O(0;0;0)$ – є точкою перетину.

Пряма l_2 перетинає площину $\sum$.

Справді: $\begin{cases} x = p + pt \\ y = qt \\ z = \frac{1}{2} + t \\ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ Отже, точка $A(\frac{p}{2};-\frac{q}{2};0)$ – є точкою перетину.

Знайдемо рівняння ГМТ усіх прямих простору, які перетинають прямі l_1, l_2 і паралельні площині $\sum$.

Нехай точка $M(x, y, z)$ – довільна точка шуканого ГМТ, і $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ – напрямний вектор прямої l, на якій міститься точка M. Тоді рівняння прямої l буде мати вигляд: $X = x + a_1 t$, $Y = y + a_2 t$, $Z = z + a_3 t$.

Оскільки пряма перетинає прямі l_1 і l_2, то

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ і } \begin{vmatrix} x - p & y & z - \frac{1}{2} \\ p & q & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

З умови паралельності прямої l площині $\sum$ випливає, що $\frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{q} = 0$.

Отже, одержуємо систему трьох лінійних рівнянь відносно невідомих a_1, a_2, a_3:

$$\begin{cases} -qza_1 + pza_2 + (xq - py)a_3 = 0 \\ (y - qz + \frac{q}{2})a_1 + (\frac{p}{2} + pz - x)a_2 + (xq - pq - py)a_3 = 0 \\ \frac{1}{p}a_1 + \frac{1}{q}a_2 = 0 \end{cases} \qquad (^{**}).$$

Оскільки невідомі a_1, a_2, a_3 не дорівнюють нулю одночасно, то система лінійних однорідних рівнянь (**) має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли детермінант матриці системи дорівнює нулю.

Отже,
$$\begin{vmatrix} -qz & pz & xq - py \\ y - yz + \frac{q}{2} & \frac{p}{2} + pz - x & xq - pq - py \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{q} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Або в розгорнутому вигляді:
$$\frac{qx^2}{p} - \frac{py^2}{q} = 2pqz.$$

Оскільки $p \neq 0$, $q \neq 0$, то подамо одержане рівняння у вигляді:
$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 2z \qquad (^*).$$

Отже, якщо точка $M(x; y; z)$ належить шуканому ГМТ, то її координати задовольняють рівняння (*). Провівши міркування в оберненому порядку, легко обґрунтувати, що довільна точка поверхні із рівнянням (*), буде належати прямій l, яка перетинає прямі l_1, l_2 і паралельна площині $\sum$.

Дослідимо поверхню (*) методом перерізів. Координатна площина XOZ ($y = 0$) перетинає цю поверхню по параболі:
$$x^2 = 2p^2 z, \ y = 0 \qquad (1),$$
для якої вісь Oz є віссю симетрії і, очевидно, що $z \geq 0$.

Площина $x = h$, яка паралельна площині YOZ перетинає поверхню (*) по параболі, рівняння якої буде:
$$\begin{cases} y^2 = -2q^2 z + \frac{q^2 h^2}{p^2} \\ x = h \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y^2 = -2q^2 (z - \frac{h^2}{2p^2}) \\ x = h \end{cases} \qquad (2).$$

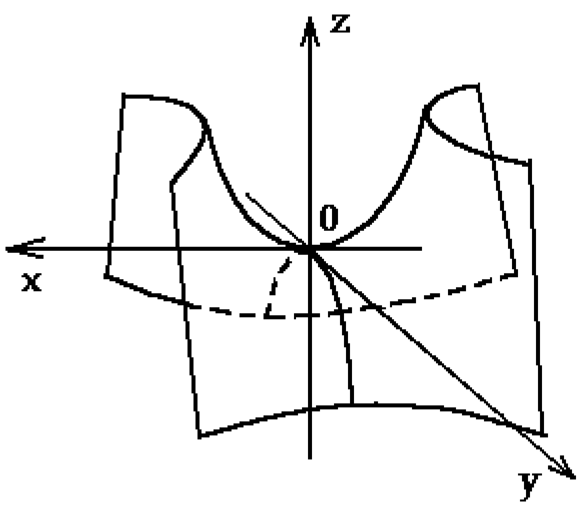

Рис. 1

Із рівняння (2) випливає, що параболи, розміщені в площинах $x = h$, мають один і той самий параметр q, їх осі знаходяться в площині XOZ, вітки парабол напрямлені вниз (у від'ємному напрямку осі Oz), а їх вершини мають аплікату $z = \frac{h^2}{2p^2}$. Оскільки із рівняння параболи, розміщеної в площині XOZ при $x = h$ одержуємо $z = \frac{h^2}{2p^2}$, то вершини парабол (2) знаходиться на параболі (1). Тому гіперболічний параболоїд можна означити ще й так.

Означення 2. Поверхня, утворена рухомою параболою, яка своєю вершиною „ковзає” по параболі з протилежно напрямленими вітками, залишаючись у площині, перпендикулярній до площини нерухомої параболи та рухомою віссю, паралельною осі нерухомої параболи, називається гіперболічним параболоїдом (рис.1).

Перетинаючи поверхню (*) площиною $z = h$, одержимо в перетині гіперболу з рівнянням:

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 2h,\ z = h \qquad (3).$$

При $h > 0$ дійсна вісь симетрії гіперболи паралельна осі Ox, при $h < 0$ – осі Oy.

Коли $z = 0$ одержуємо дві прямі:

$$\frac{x}{p} - \frac{y}{q} = 0,\ z = 0;\ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 0,\ z = 0.$$

Виконаємо афінне перетворення у введеній ПДСК, яке аналітично задається формулами:

$$x' = \frac{x}{p} - \frac{y}{q},\ y' = \frac{x}{p} + \frac{y}{q},\ z' = z.$$

Тоді одержимо рівняння гіперболічного параболоїда (*) у новій ПДСК:

$$z' = x'y' \qquad (**).$$

Зауважимо, що при перетині гіперболічного параболоїда $z = xy$ площинами $x = h$, $y = h$, утворюються прямі лінії, які називаються прямолінійними твірними.

Справді, системи рівнянь:

$$\begin{cases} z = hy \\ x = h \end{cases} \text{ і } \begin{cases} z = hx \\ y = h \end{cases} \qquad (4)$$

в просторі визначають прямі лінії (прямі, як перетин площин). Прямі можна розглядати як сітку координатних ліній на гіперболічному параболоїді. Отже, впорядкована пара (x, y) визначатиме положення точки на ньому, оскільки можна встановити взаємно однозначну відповідність між впорядкованими парами чисел (x, y) та впорядкованими трійками чисел (x, y, xy) Криві поверхні, вздовж яких змінюється тільки координата x називаються x–лініями поверхні (для них $y = const$) і коли змінюється тільки y координата, то їх називають y–лініями поверхні ($x = const$). У нашому випадку x– та y–лінії є прямими – прямолінійними твірними гіперболічного параболоїда. А системи (4) визначають два їх сімейства.

Задамо гіперболічний параболоїд вектор-функцією:

$$\vec{r} = \vec{r}(x; y; xy) \qquad (5).$$

Знайдемо квадрат диференціала довжини дуги будь-якої кривої на поверхні (5), тобто її першу квадратичну форму:

$$\begin{matrix} \overline{r_x} = \overline{(1;0;y)}, \\ \overline{r_y} = \overline{(0;1;x)}, \end{matrix} \quad E = \vec{r}_x^{\,2} = 1 + y^2, \quad \begin{matrix} F = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_y = xy, \\ G = \vec{r}_y^{\,2} = 1 + x^2. \end{matrix}$$

Отже, $$\mathrm{I} = ds^2 = (1 + y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 + x^2)dy^2 \qquad (6).$$

Кут між двома кривими на поверхні обчислюється за формулою:

$$\cos\alpha = \frac{Edx\delta x + F(dx\delta y + dy\delta x) + Gdy\delta y}{\sqrt{Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2} \cdot \sqrt{E\delta x^2 + 2F\delta x\delta y + G\delta y^2}}.$$

Отже, для гіперболічного параболоїда (**) ця формула набуде вигляду:

$$\cos\alpha = \frac{(1 + y^2)dx\delta x + xy(dx\delta y + dy\delta x) + (1 + x^2)dy\delta y}{\sqrt{(1 + y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 + x^2)dy^2} \cdot \sqrt{(1 + y^2)\delta x^2 + 2xy\delta x\delta y + (1 + x^2)\delta y^2}}$$

Знайдемо кут між прямолінійними твірними параболоїда (x - та y - лініями). Виберемо диференціали: для x–ліній – d, для y–ліній – δ.

Тоді $dy = 0$ ($y = const$) і $\delta x = 0$ ($x = const$). Одержуємо:

$$cos\alpha = \frac{xydx\delta y}{\sqrt{(1+y^2)dx^2} \bullet \sqrt{(1+x^2)\delta y^2}} = \frac{xy}{\sqrt{(1+y^2)(1+x^2)}} \qquad (7).$$

Отже, прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда ортогональні в точках, у яких б одна з координат x або y дорівнює нулю. Так прямолінійні твірні, які проходять через початок координат є ортогональними.

Знайдемо другу квадратичну форму гіперболічного параболоїда, яка характеризує його зовнішній вигляд:

$$\mathrm{II} = \mathrm{L}dx^2 + 2Mdxdy + Ndy^2 .$$

$$\vec{r}(x,y) = \left(\overrightarrow{x, y, xy}\right),$$

Знаходимо:

$$\vec{r}_x(1,0,y), \quad \vec{r}_{xx}(0,0,0),$$
$$\vec{r}_y(0,1,x), \quad \vec{r}_{yy}(0,0,0),$$
$$\vec{r}_{xy}(0,0,1).$$

$$L = \frac{(\vec{r}_{xx}\cdot\vec{r}_x\cdot\vec{r}_y)}{\sqrt{EG-F^2}} = 0, \ N = \frac{\left(\vec{r}_{yy}\cdot\vec{r}_x\cdot\vec{r}_y\right)}{\sqrt{EG-F^2}} = 0,$$

$$M = \frac{\left(\vec{r}xy\cdot\vec{r}x\cdot\vec{r}y\right)}{\sqrt{Eg-F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} .$$

Отже,
$$II = \frac{2dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \qquad (8).$$

Оскільки II квадратична форма характеризує відхилення кривої поверхні від дотичної площини, то із рівності (8) випливає, що найбільше це відхилення в точці $\mathrm{O}(0,0,0)$.

Знайдемо повну (гаусову) кривину:

$$K = k_1\cdot k_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$$, де k_1 і k_2 – головні кривини.

Отже, повна кривина гіперболічного параболоїда є від’ємною у всіх його точках, причому найбільшого значення (за абсолютною величиною) набуває в точці $\mathrm{O}(0;0;0)$.

Всі точки гіперболічного параболоїда є гіперболічними $(K<0)$ і головні кривини мають різні знаки.

Криві поверхні, в кожній точці яких відхилення від дотичної площини до поверхні дорівнює нулю, називаються асимптотичними лініями. Отже, прирівняємо другу квадратичну форму до нуля, одержуємо

$$\frac{2dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = 0$$. Звідки $x = const$ або $y = const$.

Отже, прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда і тільки вони, є його асимптотичними лініями.

Цікаво, що лінії, які ділять навпіл кут між прямолінійними твірними гіперболічного параболоїда, є лініями його кривини.

Справді, виберемо диференціали:

d_1 – для *x*-ліній, d_2 – для *y*-ліній, δ – для k-ліній, які ділять кут навпіл між *x*- та *y*- лініями.

Тоді $d_1\vec{r} = \vec{r}_x d_1 x$, $(y = const)$; $d_2\vec{r} = \vec{r}_y d_2 y$; $(x = const)$; $\delta\vec{r} = \vec{r}_x\delta x + \vec{r}_y\delta y$.

Прирівняємо косинуси кутів між k- лініями та x-, *y*- лініями:

$$\frac{\delta\vec{r}\cdot d_1\vec{r}}{|\delta\vec{r}|\cdot|d_1\vec{r}|} = \frac{\delta\vec{r}\cdot d_2\vec{r}}{|\delta\vec{r}|\cdot|d_2\vec{r}|} .$$

Або
$$\frac{\left(\vec r_x \delta x + \vec r_y \delta y\right)\vec r_x d_1 x}{\sqrt{d_1 \vec r^{\,2}}} = \frac{\left(\vec r_x \delta x + \vec r_y \delta y\right)\vec r_y d_2 y}{\sqrt{d_2 \vec r^{\,2}}}.$$

Враховуючи одержані вище коефіцієнти першої квадратичної форми (6), одержуємо:
$$\frac{\left(1+y^2\right)\delta x + xy\delta y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{xy\delta x + \left(1+x^2\right)\delta y}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Або
$$\left(\sqrt{1+x^2}\,\delta y - \sqrt{1+y^2}\,\delta x\right)\cdot\left(\frac{xy}{\sqrt{1+y^2}\cdot\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = 0.$$

Звідки
$$\sqrt{1+x^2}\,\delta y = \sqrt{1+y^2}\,\delta x,$$
$$\int\frac{\delta y}{\sqrt{1+y^2}} = \int\frac{\delta x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \ln C_1.$$
$$y+\sqrt{1+y^2} = C_1\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Друге сімейство ліній одержимо, коли косинуси кутів відрізняються знаком. Тоді одержимо рівняння:
$$y+\sqrt{1+y^2} = \frac{C_2}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

Отже, шукані сімейства ліній матимуть рівняння:
$$\begin{cases} z = xy, \\ y+\sqrt{1+y^2} = \dfrac{C_1}{x+\sqrt{1+x^2}}. \end{cases} \qquad \begin{cases} z = xy, \\ y+\sqrt{1+y^2} = C_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right). \end{cases}$$

Легко перевірити, що знайдені сімейства кривих задовольняють диференціальне рівняння ліній кривини:
$$\left(LF - EM\right)dx^2 + \left(LG - NE\right)dxdy + (MG - FN)dy^2 = 0.$$

Виберемо на поверхні дві будь-які точки. Лінія поверхні, яка є найкоротшою серед усіх кривих, які проходять через ці дві точки, як відомо, називається геодезичною. Очевидно, що прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда є його геодезичними лініями.

Відомо, що сума внутрішніх кутів геодезичного трикутника на поверхні обчислюється за формулою:
$$\alpha+\beta+\gamma = \pi + \iint\limits_{\Sigma} K dxdy$$

Так для площини $K = 0$, тому $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Для гіперболічного параболоїда $K < 0$, тому $\alpha+\beta+\gamma<\pi$. Остання нерівність виконується в геометрії Лобачевського.

Отже, на гіперболічному параболоїді виконується геометрія Лобачевського.

Відомо, що геометрія Лобачевського ґрунтується на твердженнях абсолютної геометрії (яка не містить аксіоми паралельності) та твердженні, яке заперечує аксіому паралельності (аксіомі Лобачевського).

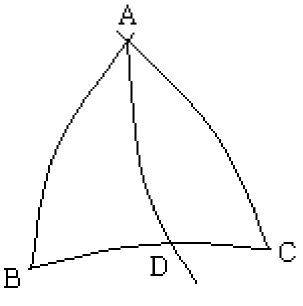

Рис. 2

Можна побудувати модель геометрії Лобачевского на гіперболічному параболоїді: $z = xy$.

За точки гіперболічного параболоїда можна прийняти впорядковані пари чисел *(x,y)*, а за прямі – його геодезичні лінії, які визначаються відповідним диференціальним рівнянням другого порядку [2].

Неважко перевірити виконання усіх аксіом абсолютної геометрії.

Зауважимо, що сума кутів геодезичного трикутника не є сталою, тобто не одна і та ж для всіх трикутників. Справді, нехай ABC –

довільний геодезичний трикутник, а D – точка на стороні BC (рис.2). Тоді

$$\sum(\angle\Delta ABC)=\sum(\angle\Delta ABD)+\sum(\angle\Delta ABD)-180^\circ$$

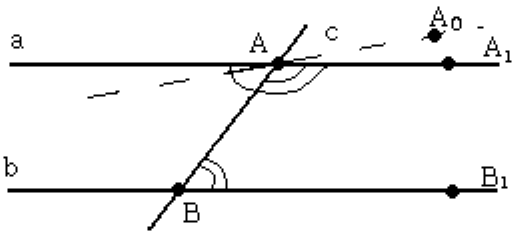

Рис. 3

Оскільки $\sum(\angle\Delta ADC)-180^\circ<0$, то

$$\sum(\angle\Delta ABC)<\sum(\angle\Delta ABD).$$

Для перевірки аксіоми Лобачевского доведемо спочатку, що аксіома паралельності евклідової геометрії є еквівалентом теореми: якщо прямі паралельні, то сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених будь-якою січною, дорівнює 180° (рис. 3).

Отже, нехай відомо, що виконується теорема: $a\|b\Rightarrow\angle A_1AB+\angle ABB_1=180^\circ$. Припустимо, що через точку А до прямої b можна провести ще одну паралельну пряму a_0. Тоді за теоремою: $\angle A_0AB+\angle ABB_1=180^\circ$ і $\angle A_1AB+\angle ABB_1=180^\circ$.

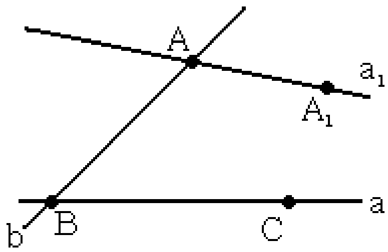

Рис. 4

Звідки $\angle A_0AB=\angle A_1AB$, що суперечить аксіомі відкладання кута.

Нехай виконується аксіома паралельності: $A\in a_1$ і $a_1\|a$ (рис. 4).

Проведемо через точку А будь-яку пряму b:

$$b\cap a=B.$$

Від півпрямої AB у півплощину, в якій міститься точка C, відкладемо кут $\angle BAA_1$, який є доповняльним до кута $\angle ABC$. Тоді за ознакою паралельності двох прямих: $(AA_1)\|a$. За аксіомою паралельності прямі AA_1 і a_1 співпадають. Отже, $\angle A_1AB+\angle ABC=180^\circ$.

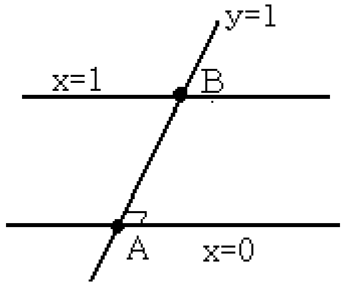

Рис. 5

Покажемо, що на гіперболічному параболоїді існують геодезичні лінії, які не перетинаються і при перетині із третьою геодезичною (січною) утворюють кути, сума яких не дорівнює 180°. Очевидно, що це твердження буде запереченням аксіоми паралельності, тобто буде прикладом виконання аксіоми Лобачевского.

За дві геодезичні, які не перетинаються виберемо прямолінійні твірні (координатні лінії) $x=0$, $x=1$, а за третю геодезичну – пряму $y=1$ (рис. 5). Тоді за формулою (7):

$$\cos\angle A=0,$$

$$\cos\angle B=\frac{1}{2}.$$ Отже, $\angle A+\angle B\neq180^\circ$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов). – М.: Педагогика, 1972. – 424 с.
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. 2. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.: ил.
3. Погорєлов А.В. Геометрия. Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности „Математика” – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 288 с.
4. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии Под ред. Воднева В. Т. – Минск, „Вышейшая школа”, 1970. – 376 с.

Матеріал надійшов до редакції

Семенец С.П., Семенец Л.Н. Некоторые методические аспекты изучения поверхностей второго порядка вузовского курса геометрии.
Приведён пример содержательного обобщения учебного материала при изучении поверхностей второго порядка вузовского курса геометрии

S. Semenets., L. Semenets. Some methodical aspects studying surface second level high school rate geometry.
Was resulted example substantial generalization educational material in time studying surface second level high school rate geometry?