УДК 51(07)

В. П. Вовк,
вчитель
(Житомирська міська гуманітарна гімназія № 23)

ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Статтю присвячено розв'язуванню задач за допомогою векторів, які іншими методами розв'язувати набагато важче. Розглянуто доведення задач за допомогою векторів, яке більш зрозуміле учням і є більш наочним. Це ще раз підтверджує, що поняття вектора є важливим поняттям шкільного курсу. Також приділено увагу труднощам, з якими стикаються учні при вивченні теми "Вектори", і пошуку способів подолання цих труднощів.

Актуальність теми. Тема "Вектори" з'явилася в курсі математики шкіл порівняно нещодавно – в 1963 році. Питання про те, чи повинні вивчатися вектори в шкільному курсі, в даний час практично не обговорюється. Ця тема важлива тому, що, по-перше, дозволяє, використовуючи вектори, спростити рішення багатьох задач шкільного курсу математики, які іншими методами вирішуються набагато важче. Так само вектори в шкільному курсі геометрії дозволяють зробити доведення багатьох теорем не тільки більш зрозумілими учням, а й більш природними і наочними, що сприяє навчанню пошуку доведень теорем та розв'язання задач.

По-друге, поняття вектора використовується в багатьох додатках математики, таких, як сучасна алгебра і геометрія, теорія функцій та теорія ймовірностей.

По-третє, поняття вектора є важливим поняттям шкільного курсу фізики і відіграє істотну роль у міжпредметних зв'язках математики і фізики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Незважаючи на велику увагу, яка приділяється темі "Вектори" в методичній літературі, вона до цих пір залишається однією із найважчих для учнів тем шкільного курсу, про що свідчать дослідження таких авторів, як: А. Д. Александров, Л. С. Атанасян, Г. П. Бевз, В. Г. Болтянський, В. Ф. Бутузов, М. Б. Волович, Г. Д. Глейзер, В. А. Гусєв, С. Б. Кадомцев, В. М. Клопський, А. Н. Колмогоров, Ю. М. Колягін, Г. Л. Луканкін, І. А. Лурьє, А. Ф. Пічурін, В. А. Погорєлов, В. І. Рижик, Г. І. Саранцев, А. Ф. Семенович, А. Д. Семушина, З. А. Скопець, І. М. Смірнова, В. А. Смірнов, Ф. І. Фетисов, Р. С. Черкасов, І. Ф. Шаригін, І. М. Яглом, М. І. Ягодовський та ін. У дослідженнях велика увага приділяється виявленню труднощів, з якими стикаються учні при вивченні теми "Вектори", і відшуканню способів їх подолання.

Виклад основного матеріалу. Програма з математики містить формування поняття вектора і його творчого застосування. У підручниках із геометрії для 8-11 класів вміщено задачі для свідомого засвоєння цього поняття. Крім задач підручника, я в своїй педагогічній практиці підбираю задачі, що містять оригінальні рішення за допомогою векторів і демонструють цікаві властивості геометричних фігур як в планіметрії, так і в стереометрії. Ось кілька таких задач.

Задача 1. Нехай M – точка перетину середніх ліній чотирикутника *ABCD* і *O* – довільна точка простору. Довести, що $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

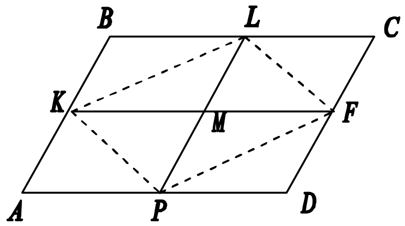

Рис. 1.

Розв'язок:

Нехай *KF* і *PL* – середні лінії чотирикутника *ABCD.* Тоді чотирикутник *KLFP* – паралелограм. *PM = ML, KM = MF.*

Використовуючи формулу для середини відрізка запишемо рівності:

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OL}\right)$, $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)$, $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. Звідси: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Задача 2. Довести, що сума квадратів відстаней будь-якої точки кола до вершин вписаного правильного трикутника є величина постійна, не залежна від положення точки на колі.

Традиційний розв'язок цієї задачі є в книгах. Однак за допомогою векторів розв'язати її можна набагато простіше.

Розв'язок:

Нехай правильний трикутник *ABC* вписано в коло з центром *O*, а *M* – довільна точка цього кола.

Тоді $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}$. Звідки:

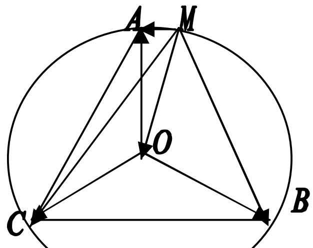

Рис. 2.

$\overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{MO} \times \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \times \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO} \times \overrightarrow{OC}$.

Якщо додати три останніх рівності, враховуючи, що *MO = AO = OB = OC =R*, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, то одержимо $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

Звідси бачимо, що сума квадратів указаних відстаней не залежить від положення точки *M* на колі, а залежить тільки від її радіуса. Такий розв'язок набагато коротший традиційного. Але переваги його не тільки в цьому. Дане доведення вірне і для довільної точки *M* сфери, описаної навколо трикутника так, що її центр співпадає з центром трикутника.

Неважко узагальнити цю задачу і для випадку, коли в коло (або сферу) вписано не трикутник, а довільний правильний многокутник. Він може бути не обов'язково правильним, але симетричним відносно центра *O*.

Доведемо, наприклад, якщо $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, - правильний *n*-кутник з центром в т. О, а *M* – довільна точка вписаного в нього кола, то сума квадратів відстаней від *M* до всіх вершин даного *n*-кутника не залежить від розміщення *M*.

Розв'язок:

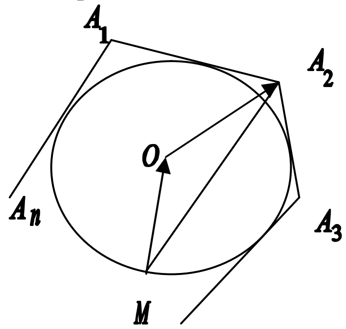

Рис. 3.

Маємо $\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MA_1}^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA_1}^2 + 2\overrightarrow{MO} \times \overrightarrow{OA_1}$.

Якщо додати *n* відповідних рівностей (для *i* = 1,2,3,….*n*), одержимо, що шукана сума квадратів відстаней рівна $nr^2 + nR^2$, де *r* і *R* – радіуси, вписані в даний многокутник кола і описаного навколо нього, тобто для даного многокутника величина стала. Можна і далі продовжувати узагальнювати задачу: розглядати многокутник (многогранник) не обов'язково правильний або симетричний відносно О, а коло (сферу) не обов'язково вписане або описане, важливо лиш, щоб сума всіх векторів $\overrightarrow{AO_1}$ дорівнювала нульовому вектору.

Задача 3. Довести, що для довільного паралелограма у якого *a* і *b* – довжина сторін, *m* і *n* довжини діагоналей, виконується нерівність $a^2 - b^2 < m \times n$.

Розв'язок: Якщо ABCD – паралелограм, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, то $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$, тоді $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{DB} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$, звідси $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{DB} = (a^2 - b^2)$, але $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{DB} = m \times n \cos\varphi$, звідси $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{DB} < m \times n$ і $a^2 - b^2 < m \times n$.

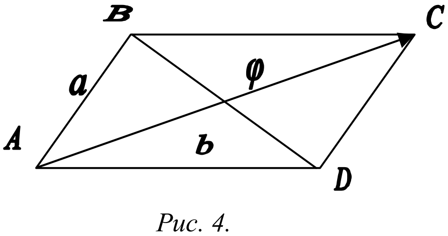

Рис. 4.

Задача 4. Довжина ребер тетраедра *ABCD* рівні *a, b, c, m, n, k.* Знайдіть відстань від вершини *A* до точки перетину медіан грані *BCD.*

Розв'язок:

Нехай O – точка перетину медіан грані BCD. Позначимо $\angle BAC=\varphi_1$, $\angle CAD=\varphi_2$, $\angle DAB=\varphi_3$. Скористаємось рівністю $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

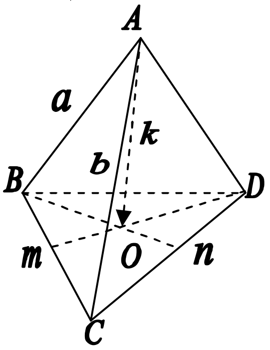

Рис. 5.

Звідси $\overrightarrow{AO}^2=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)^2$ або

$\overrightarrow{AO}^2=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\times\left|\overrightarrow{AC}\right|\times cos\,\varphi_1+2\left|\overrightarrow{AC}\right|\times\left|\overrightarrow{AD}\right|\times cos\,\varphi_2+2\left|\overrightarrow{AD}\right|\times\left|\overrightarrow{AB}\right|\times cos\,\varphi_3\right)$. Останню рівність запишемо так: $AO^2=\frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2+2ab\,cos\,\varphi_1+2bc\,cos\,\varphi_2+2ac\,cos\,\varphi_3\right)$.

За теоремою косинусів

$2ab\,cos\,\varphi_1=a^2+b^2-m^2\,2,\ 2bc\,cos\,\varphi_2=b^2+c^2-n^2,\ 2ac\,cos\,\varphi_3=a^2+c^2-k^2$.

Тоді $\overrightarrow{AO}^2=\frac{1}{9}\left(\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(m^2+n^2+k^2\right)}\right)$.

Якщо довжини всіх ребер тетраедра рівні a, то $OA=\frac{1}{3}\sqrt{9a^2-3a^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Задача 5. В паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ довжина всіх ребер рівна a, величина плоского кута BCD рівна 60^0. Довести, що $C_1B^2+C_1D^2=C_1A^2$.

Розв'язок:

Розглянемо вектори $\overrightarrow{C_1B}$ і $\overrightarrow{C_1D}$: $\overrightarrow{C_1B}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CD}$.

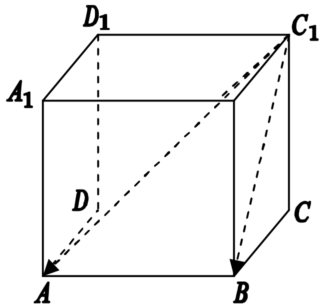

Рис. 6.

Тоді $\overrightarrow{C_1B}^2=2a^2+2\overrightarrow{C_1C}\times\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{C_1D}^2=2a^2+2\overrightarrow{C_1C}\times\overrightarrow{CD}$.

Із двох останніх рівностей слідує: $C_1D^2+C_1B^2=4a^2+2\overrightarrow{CC_1}\times\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\right)$ *(1).*

Скориставшись правилом паралелепіпеда запишемо: $\overrightarrow{C_1A}=\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1C}$.

Звідси $C_1A^2=3a2+2\overrightarrow{CC_1}\times\left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)+2\overrightarrow{C_1D_1}\times\overrightarrow{C_1B_1}$ *(2)*

Оскільки кут BCD дорівнює куту $B_1C_1D_1$ = 60°, $cos\,\angle BCD=cos\,\angle B_1C_1D_1=\frac{1}{2}$, тоді рівність (2) буде мати вигляд:

$C_1A^2=4a^2+2\overrightarrow{CC_1}\times\left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)$ (3).

В рівностях (1) і (3): $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{C_1B_1}$ і $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{C_1D_1}$. Звідси $C_1B^2+C_1D^2=C_1A^2$.

Задача 6 Один із плоских кутів при вершині трикутної піраміди прямий, висота піраміди проходить через точку перетину висот основи. Знайти величини решти плоских кутів при вершині піраміди.

Розв'язок:

Нехай дана піраміда *MABC*, в якої $\angle AMB = 90^0$, $MO \perp (ABC)$, *O* – точка перетину висот *AF, BK, CD* основи *ABC*.

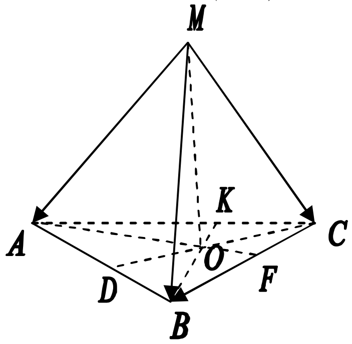

Рис. 7.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{CB}$. Із умови маємо: $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = 0$.

Але $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}$, тоді $\overrightarrow{MA} \times \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}\right) = 0$ або $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{CB} = 0$ (1).

Доведемо, що $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{CB} = 0$.

За умовою $(BC) \perp (AO)$. За теоремою про три перпендикуляри $(BC) \perp (MA)$.

Звідси $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{CB} = 0$.

Із рівності (1) одержимо, що $MA \perp MC$, тобто кут АМС – прямий. Аналогічно можна довести, що кут ВМС – прямий.

Висновки і перспективи подальших досліджень:

З усього видно, що тема "Вектори" є досить важлива в шкільному курсі. Вона дає можливість спростити рішення багатьох задач шкільного курсу і водночас є однією із важливих тем для учнів, тому необхідно і далі працювати над даною темою, розв'язувати задачі, доводити теореми за допомогою векторів, щоб учні краще засвоїли дану тему.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуманова С. И. Поиски решения задачи / С. И. Гуманова. – М. : Просвещение, 1969. – С. 208–211.

REFERENCES (TRANSLATED & TRANSLITERATED)

1. Gumanova S. I. Poiski resheniia zadachi [Ways of Solving the Task] / S. I. Gumanova. – M. : Prosveshchenie, 1969. – S. 208–211.

Матеріал надійшов до редакції 08.05. 2013 р.

Вовк В. П. Использование векторов к решению задач.

Статья посвящена решению задач при помощи векторов, которые другими методами решать гораздо сложнее. Рассмотрено доказательство задач при помощи векторов, которые более понятно учащимся и более наглядно. Это еще раз подтверждает, что понятие вектора является важным понятием школьного курса. Также уделяется внимание трудностям, с которыми сталкиваются учащиеся при изучении темы "Векторы" и поиску способов преодоления этих трудностей.

Vovk V. P. The Usage of Vectors to the Solution of Tasks.

The article is dedicated to the solution of tasks by means of vectors, which are very difficult to solve by other means. The proof of tasks by means of vectors, which are more understandable and descriptive by pupils, is considered. It justifies again that the notion of vector is the important notion of the school course. The attention is drawn on the complications the pupils are dealing with while studying the subject "Vectors" and the search of ways of overcoming these difficulties.