Олександр Сарана,

доцент кафедри математичного аналізу,
бізнес-аналізу та статистики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Житомирський державний університет імені Івана Франка

ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАВДАНЬ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Однією з обов'язкових тем занять математичного гуртка є використання властивостей функцій для розв'язування рівнянь та систем рівнянь підвищеної складності. Такі задачі регулярно використовуються на різних олімпіадах з математики [1], [2], [3], [4], [5].

Часто при розв'язуванні таких задач використовуються наступні властивості функції: ***обмеженість, парність, непарність, періодичність, монотонність***. Розглянемо приклади таких завдань.

Одна з поширених ідей використання обмеженості функції полягає у наступному твердженні: *якщо при всіх допустимих значеннях змінної x виконуються нерівності $f(x) \geq A$, $g(x) \leq A$, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі рівнянь* $\begin{cases} f(x) = A; \\ g(x) = A. \end{cases}$

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 8x - x^2 - 12 = \sqrt{x + 4y}, \\ 3x - 4y = \sqrt{x + 4y - 16}. \end{cases}$$

Розв'язання. З умови $x + 4y - 16 \geq 0$ отримуємо $\sqrt{x + 4y} \geq 4$, а тому $8x - x^2 - 12 \geq 4$, звідси $x = 4$. З системи $\begin{cases} 4 = \sqrt{4 + 4y}, \\ 12 - 4y = \sqrt{4y - 12} \end{cases}$ отримуємо $y = 3$, а тому відповідь: $x = 4$, $y = 3$.

Ідея використання парності функції полягає у наступному твердженні: *якщо функція* $f(x)$ *парна (чи непарна) та* x_0 *— корінь рівняння* $f(x) = 0$, *то* $(-x_0)$ *також корінь цього рівняння.*

Приклад 2. Знайти значення параметра a, при яких рівняння

$$a^2 \cdot \cos x - 8 = a(2 + |x|)$$

має єдиний корінь.

Розв'язання. Оскільки ліва та права частини рівняння є парні функції, то єдиним коренем рівняння може бути лише $x_0 = 0$. Тому параметр a має задовольняти умові $a^2 - 8 = 2a$, звідки $a = 4$ або $a = -2$.

При $a = 4$ отримуємо рівняння $4\cos x = 4 + |x|$, яке має єдиний розв'язок $x = 0$.

При $a = -2$ отримуємо рівняння $2\cos x = 2 - |x|$, яке має п'ять розв'язків.

Відповідь: $a = 4$.

Ідея використання парності функції полягає у наступних твердженнях:

1) якщо функція $f(x)$ *є строго монотонною, то рівняння* $f(x) = A$ *може мати не більше одного кореня;*

2) якщо функція $f(x)$ *є строго монотонною, то рівняння* $f(g(x)) = f(h(x))$ *рівносильне рівнянню* $g(x) = h(x)$ *(за умови, що область визначення функції* $f(x)$ *містить область значень функцій* $g(x)$ *та* $h(x)$*), зокрема у разі монотонності функції* $f(x)$ *рівняння* $f(f(x)) = f(x)$ *рівносильне рівнянню* $f(x) = x$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{(5x-8)(4x-1)} - 4\sqrt{x+9} = \sqrt{(x+9)(4x-1)} - 4\sqrt{5x-8}.+11.$$

Розв'язання. Область визначення рівняння: $x \in [1{,}6;\ +\infty)$. Запишемо дане рівняння у вигляді:

$$\left(\sqrt{5x-8} - \sqrt{x+9}\right)\left(\sqrt{4x-1} + 4\right) = 11.$$

Неважко довести, що функції $f(x) = \sqrt{5x-8} - \sqrt{x+9}$ та $g(x) = \sqrt{4x-1} + 4$ є зростаючими на проміжку $[1{,}6;\ +\infty)$, причому $f(x) < 0$ для $x \in [1{,}6;\ 4{,}25)$, $f(x) \geq 0$ для $x \in [4{,}25;\ +\infty)$, $g(x) > 0$ для $x \in [1{,}6;\ +\infty)$. Тому функція $f(x)g(x)$ є неперервною, набуває від'ємних значень на проміжку $[1{,}6;\ 4{,}25)$ та є зростаючою на проміжку $[4{,}25;\ +\infty)$. Отже, рівняння $f(x)g(x) = 11$ не має коренів на проміжку $[1{,}6;\ 4{,}25)$ та має не більше одного кореня на проміжку $[4{,}25;\ +\infty)$. Шляхом підбору знаходимо, що цей корінь $x = 7$.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 8tgx = 5\,sin\,y + 3y, \\ 8tgy = 5sin\,x + 3x. \end{cases}$$

якщо $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Віднявши рівняння системи, отримуємо, що розв'язок повинен задовольняти рівняння-наслідок:

$$8tgx + 5\sin x + 3x = 8tgy + 5\sin y + 3y.$$

Розглянемо функцію $f(x) = 8tgx + 5\sin x + 3x$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Її похідна $f'(x) = \frac{8}{cos^2 x} + 5\cos x + 3 > 0$ для всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, отже $f(x)$ є зростаючою на цьому проміжку. Тому вказане вище рівняння $f(x) = f(y)$ може виконуватись лише при виконанні умов $x = y$, $8tgx + 5\sin x + 3x = 0$. Оскільки при всіх $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ виконується $\sin x < x < tgx$, а при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ виконується $\sin x > x > tgx$, то єдиним розв'язком системи є пара чисел $x = y = 0$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + x}}}} = x.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = \sqrt{12 + x}$ є зростаючою, а її область визначення $D(f) = [-12, +\infty)$ містить її область значень $E(f) = [0, +\infty)$. Тому при $-12 \le x < \sqrt{12 + x}$ виконується

$$x < \sqrt{12 + x} < \sqrt{12 + \sqrt{12 + x}} < \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + x}}} <$$
$$\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + x}}}},$$

а при $x > \sqrt{12 + x}$ виконується

$$x > \sqrt{12+x} > \sqrt{12+\sqrt{12+x}} > \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+x}}} >$$
$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+x}}}}.$$

Тому дане рівняння рівносильне рівнянню $x = \sqrt{12+x}$, з якого знаходимо відповідь: $x = 4$.

Список використаних джерел та літератури

1. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України: 1991-2000 рр. Київ: “Техніка”, 2003. - 541с.
2. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України: 2001-2006 рр. Львів: “Каменяр”, 2008. - 348 с.
3. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2014-2015. / Аннікушин А.В., Клурман О.О. та ін.: за ред. Б.В.Рубльова. Харків: “Гімназія”, 2016. – 464 с.
4. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2021-2022. / Аннікушин А.В., Жук І.В. та ін.: за ред. Б.В.Рубльова. Харків: “Гімназія”, 2023. – 384 с.
5. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2011. 400 с.