УДК 512, 519.2
DOI: 10.37069/1683-4720-2025-39-2

©2025. **Т. Ю. Коломієць**

УМОВНА ЙМОВІРНІСНА МІРА В АЛГЕБРІ БІГІПЕРБОЛІЧНИХ ЧИСЕЛ

У статті представлено узагальнення поняття умовної ймовірнісної міри (умовної ймовірності) у випадку, коли міра набуває значень в алгебрі бігіперболічних чисел. Показано, що ця бігіперболічнозначна умовна ймовірність визначається всіма аксіомами бігіперболічнозначної ймовірності. Досліджено особливі випадки, коли бігіперболічнозначна умовна ймовірність набуває значень, які є дільниками нуля алгебри бігіперболічних чисел.

MSC: 30G35, 60B05.

Ключові слова: *бігіперболічні числа, дільники нуля, ідемпотенти, розкладення Пірса, вимірний простір, сигма-алгебра подій, відношення часткового порядку, бігіперболічнозначна ймовірність, бігіперболічнозначна умовна ймовірність.*

1. Вступ.

Актуальним напрямом сучасної математики є вивчення гіперкомплексних систем та їх можливих застосувань [1–6], зокрема для побудови теорії міри, теорії ймовірностей та математичної статистики [7, 8] в гіперкомплексних алгебрах.

Робота [9] присвячена вивченню комплекснозначної міри та її застосувань. У статті [10] автори вивчали властивості ймовірнісної міри зі значеннями в алгебрі гіперболічних (подвійних) чисел [11–14], зокрема у цій роботі введено поняття гіперболічнозначної умовної ймовірності. Аналоги базових понять теорії ймовірностей для алгебри гіперболічних чисел досліджено в [15, 16]. У статті [17] узагальнено деякі результати робіт [10] і [15] на випадок, коли ймовірнісна міра набуває значень в алгебрі бігіперболічних чисел, які ще називають гіперболічними кватерніонами [18]. Зокрема, у роботі [17] показано, що бігіперболічнозначна ймовірність задовольняє основні властивості класичної дійснозначної ймовірності. Визначено поняття відношення часткового порядку в алгебрі бігіперболічних чисел, бігіперболічнозначного модуля, бігіперболічнозначної норми, збіжної послідовності бігіперболічних чисел та доведено всі необхідні властивості.

У статті [19] авторами узагальнено результати робіт [10] та [15] і отримано аналоги деяких базових понять загальної теорії міри для гіперболічнозначної міри. У роботі [20] авторами узагальнено результати роботи [9] і одержано аналоги базових понять класичної дійснозначної міри у випадку, коли міра набуває значень в некомутативній алгебрі кватерніонів [21, 22].

2. Алгебра бігіперболічних чисел.

Означення 1. *[23]. Алгеброю бігіперболічних чисел називається чотиривимір-*

на комутативна алгебра виду

$$\mathbb{W}_4 = \mathbb{W}_4(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 e + a_2 f + a_3 g \,|\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

з базисом $\{1, e, f, g\}$ *і таблицею множення для базисних елементів*

$$e^2 = f^2 = g^2 = 1, ef = fe = g, eg = ge = f, fg = gf = e.$$

Алгебру $\mathbb{W}_4$ можна зобразити у вигляді

$$\mathbb{W}_2 = \{w_0 + w_1 f \,|\, w_0, w_1 \in \mathbb{W}\}$$

з базисом $\{1, f\}$, де $f^2 = 1$, а $\mathbb{W}$ — двовимірна комутативна алгебра гіперболічних чисел виду

$$\mathbb{W} = \{b_0 + b_1 e \,|\, b_0, b_1 \in \mathbb{R}\}$$

з базисом $\{1, e\}$, де $e^2 = 1$. Крім цього, уявна одиниця $f \in \mathbb{W}_2$ комутує з уявною одиницею $e \in \mathbb{W}$.

Алгебра $\mathbb{W}_4$ має чотири ідемпотенти [23]

$$\begin{aligned} i_1 &:= \frac{1+e+f+g}{4}, \quad i_2 := \frac{1-e-f+g}{4}, \\ i_3 &:= \frac{1+e-f-g}{4}, \quad i_4 := \frac{1-e+f-g}{4}, \end{aligned} \tag{1}$$

для яких легко перевірити співвідношення

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 1, \;\; i_k^2 = i_k, \;\; i_k i_l = 0 \text{ при } k \neq l, \;\; k, l = 1, 2, 3, 4.$$

Позначимо через $\mathbb{W}_4(i_k) := i_k \mathbb{W}_4$ – головні ідеали, породжені ідемпотентами $i_k, \; k = 1, 2, 3, 4$.

Лема 1. *[23]. При* $k \neq l, \;\; k, l = 1, 2, 3, 4,$ *виконується рівність*

$$\mathbb{W}_4(i_k) \cap \mathbb{W}_4(i_l) = 0.$$

Алгебру $\mathbb{W}_4$ можна зобразити у вигляді ідемпотентного розкладення (розкладення Пірса) [23]

$$\mathbb{W}_4 = \mathbb{W}_4(i_1) \oplus \mathbb{W}_4(i_2) \oplus \mathbb{W}_4(i_3) \oplus \mathbb{W}_4(i_4) \tag{2}$$

де $\oplus$ – операція прямої суми.

Лема 2. *[23]. Кожне бігіперболічне число*

$$\alpha = a_0 + a_1 e + a_2 f + a_3 g,$$

де $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ *можна записати у вигляді*

$$\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4, \tag{3}$$

де i_k *– ідемпотенти вигляду* (1), $r_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, 3, 4.$

Лема 3. *[23]. Ідеали* $\mathbb{W}_4(i_k)$ *можна представити у вигляді* $\mathbb{W}_4(i_k) = i_k\mathbb{R},\ k = 1, 2, 3, 4.$

Позначимо множину всіх дільників нуля через $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_{4,0}}$.

Легко бачити, що якщо у правій частині суми (2) відсутній хоча б один доданок, то елементи такої суми належать області дільників нуля $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_{4,0}}$. Справедливо й зворотне – якщо бігіперболічне число

$$\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4$$

є дільником нуля, тобто $\alpha \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_{4,0}}$, то існує індекс $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ такий, що

$$r_k = 0,\ \ k = 1, 2, 3, 4.$$

Отже, бігіперболічне число $\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4$ є дільником нуля тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел $r_k,\ k = 1, 2, 3, 4$, дорівнює нулю, тобто

$$\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_{4,0}} \Leftrightarrow r_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 4.$$

3. Бігіперболічнозначна ймовірнісна міра.

Означення 2. *[17]. Відношенням часткового порядку в алгебрі* $\mathbb{W}_4$ *називається відношення* $\preccurlyeq_{(\mathbb{W}_4)}$ *(далі* $\preccurlyeq$*), для якого виконується умова*

$$\alpha \preccurlyeq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{W}_4^+,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{W}_4,$$

де $\mathbb{W}_4^+$ *— множина невід'ємних бігіперболічних чисел, яка має вигляд*

$$\mathbb{W}_4^+ := \{x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4\ \mid\ x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4\}.$$

Якщо $\alpha \preccurlyeq \beta$ $(\beta \succcurlyeq \alpha)$*, але* $\alpha \neq \beta$*, то позначаємо* $\alpha \prec \beta$ $(\beta \succ \alpha)$*. Якщо ж* $\alpha \not\preccurlyeq \beta$ і $\beta \not\succcurlyeq \alpha$*, то вважаємо, що* α і β *є непорівнюваними.*

Основні властивості відношення часткового порядку доведено у статті [17]. Нехай A — випадкова подія, (Ω, Σ) — вимірний простір (Ω — простір елементарних подій ω), Σ — σ-алгебра подій (безліч підмножин Ω, які називаються випадковими подіями), $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_{4,0}}$ — область дільників нуля алгебри $\mathbb{W}_4$.

Означення 3. *[17]. Бігіперболічнозначною ймовірнісною мірою (*$\mathbb{W}_4$*-ймовірністю) називається бігіперболічнозначна функція, визначена на* σ*-алгебрі подій* Σ

$$P_{\mathbb{W}_4} = P_{\mathbb{W}_4}(\cdot) : \Sigma \to \mathbb{W}_4,$$

для якої виконуються умови:

1. $P_{\mathbb{W}_4}(A) \preccurlyeq 0\ \ \forall\ A \in \Sigma;$

2. $P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = \zeta$, *де* ζ *набуває одне з п'яти можливих значень:*

$$\zeta = \{1, i_1, i_2, i_3, i_4\};$$

3. *Для будь-якої послідовності* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ *попарно несумісних випадкових подій виконується рівність*

$$P_{\mathbb{W}_4}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\mathbb{W}_4}(A_n).$$

Триплет $(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4})$ *називається* $\mathbb{W}_4$*-ймовірнісним простором.*

З урахуванням запису бігіперболічного числа (3), бігіперболічнозначну ймовірнісну міру $P_{\mathbb{W}_4}$ можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{W}_4}(A) &= p_1(A) + p_2(A)e + p_3(A)f + p_4(A)g = \\ &= P_1(A)i_1 + P_2(A)i_2 + P_3(A)i_3 + P_4(A)i_4, \end{aligned} \tag{4}$$

де

$$\begin{aligned} P_1(A) &= p_1(A) + p_2(A) + p_3(A) + p_4(A), \\ P_2(A) &= p_1(A) - p_2(A) - p_3(A) + p_4(A), \\ P_3(A) &= p_1(A) + p_2(A) - p_3(A) - p_4(A), \\ P_4(A) &= p_1(A) - p_2(A) + p_3(A) - p_4(A) \end{aligned}$$

є дійснозначними ймовірнісними мірами.

З умови 1) означення 3 випливає, що якщо $P_{\mathbb{W}_4}(A) \succcurlyeq 0$, то

$$P_k(A) \geq 0 \ \ \forall\, A \in \Sigma, \ \ k = 1, 2, 3, 4.$$

З умови 2) означення 3 маємо

$$P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = \zeta = P_1(\Omega)i_1 + P_2(\Omega)i_2 + P_3(\Omega)i_3 + P_4(\Omega)i_4,$$

причому:

a) якщо $\zeta = 1$, то

$$P_1(\Omega) = P_2(\Omega) = P_3(\Omega) = P_4(\Omega) = 1;$$

b) якщо $\zeta = i_k$, то

$$P_k(\Omega) = 1, \ \ P_l(\Omega) = 0, \ \ l \neq k, \ \ k, l = 1, 2, 3, 4.$$

Із умови 3) означення 3 безпосередньо випливає рівність

$$P_k\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_k(A_n).$$

де $P_k, k = 1, 2, 3, 4$ — дійснозначні ймовірнісні міри.

Отже, щоб визначити бігіперболічнозначну ймовірнісну міру $P_{\mathbb{W}_4}$ на вимірному просторі (Ω, Σ) достатньо ввести на цьому ж просторі чотири дійснозначні ймовірнісні міри $P_k(\Omega), k = 1, 2, 3, 4$. У випадку a) всі $P_k(\Omega), k = 1, 2, 3, 4$, є дійснозначними ймовірнісними мірами. Випадок b) можна розглядати як чотири варіанти вкладення дійснозначних ймовірнісних мір $P_k(\Omega), k = 1, 2, 3, 4$, у поняття бігіперболічнозначних ймовірнісних мір $P_{\mathbb{W}_4}(\Omega)$. Такі дійснозначні ймовірнісні міри будемо ототожнювати з бігіперболічнозначними ймовірнісними мірами, які набувають значень в області дільників нуля $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ алгебри $\mathbb{W}_4$.

Основні властивості бігіперболічнозначної ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ доведено у статті [17].

4. Бігіперболічнозначна умовна ймовірнісна міра.

Нехай $(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4})$ — $\mathbb{W}_4$-ймовірнісний простір, A, B — дві випадкові події.

ОЗНАЧЕННЯ 4. *Бігіперболічнозначною умовною ймовірнісною мірою (умовною ймовірністю) події A за умови, що подія B відбулася, будемо називати ймовірність $P_{\mathbb{W}_4}(A|B)$, яка задовольняє умови:*

(I) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)}$, *якщо* $P_{\mathbb{W}_4}(B) \succ 0$ *і* $P_{\mathbb{W}_4}(B) \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$;

(II) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := P_{\mathbb{W}_4}(A)$, *якщо* $P_{\mathbb{W}_4}(B) = 0$;

(III) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{\mu_1} i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4$,
якщо $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_1 i_1 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},\ \mu_1 > 0$;

(IV) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := P_{\mathbb{W}_4}(A) i_1 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{\mu_2} i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4$,
якщо $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_2 i_2 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},\ \mu_2 > 0$;

(V) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := P_{\mathbb{W}_4}(A) i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{\mu_3} i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4$,
якщо $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_3 i_3 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},\ \mu_3 > 0$;

(VI) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := P_{\mathbb{W}_4}(A) i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{\mu_4} i_4$,
якщо $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_4 i_4 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},\ \mu_4 > 0$.

Умова (II) означення 4 є очевидною.

Покажемо, що умови (III)–(VI) повністю узгоджуються з умовою (I). Дійсно, враховуючи ідемпотентне зображення $\mathbb{W}_4$-значної ймовірнісної міри (4), умову (I) можна записати рівністю

$$P_{\mathbb{W}_4}(A|B) = \frac{P_1(A\cap B)}{P_1(B)} i_1 + \frac{P_2(A\cap B)}{P_2(B)} i_2 + \frac{P_3(A\cap B)}{P_3(B)} i_3 + \frac{P_4(A\cap B)}{P_4(B)} i_4 =$$

$$= P_1(A|B) i_1 + P_2(A|B) i_2 + P_3(A|B) i_3 + P_4(A|B) i_4,$$

тоді як умова (III) має вигляд:

$$P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{\mu_1} i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4 =$$

$$= \frac{P_1(A\cap B) i_1 + P_2(A\cap B) i_2 + P_3(A\cap B) i_3 + P_4(A\cap B) i_4}{P_1(B)} i_1 +$$

$$+\left(P_1(A)i_1+P_2(A)i_2+P_3(A)i_3+P_4(A)i_4\right)i_2+$$
$$+\left(P_1(A)i_1+P_2(A)i_2+P_3(A)i_3+P_4(A)i_4\right)i_3+$$
$$+\left(P_1(A)i_1+P_2(A)i_2+P_3(A)i_3+P_4(A)i_4\right)i_4=$$
$$=\frac{P_1(A\cap B)}{P_1(B)}i_1+P_2(A)i_2+P_3(A)i_3+P_4(A)i_4=$$
$$=P_1(A|B)i_1+P_2(A|B)i_2+P_3(A|B)i_3+P_4(A|B)i_4.$$

Аналогічно можна перевірити для умов (IV) – (VI).

Таким чином, виконується формула (I) та еквівалентні їй умови (III) – (VI).

Покажемо, що для фіксованої події B, коли $P_{\mathbb{W}_4}(B)\neq 0$, бігіперболічнозначна умовна ймовірність $P_{\mathbb{W}_4}(A|B)$ визначається всіма аксіомами $\mathbb{W}_4$-ймовірності так, що вона визначає $\mathbb{W}_4$-ймовірнісну міру на вимірному просторі (B,Σ_B), де Σ_B — σ-алгебра множин виду $A\cap B$ при $A\in\sigma$. Для цього перевіримо всі три умови означення 3, а також особливі випадки, коли $\mathbb{W}_4$-ймовірність є дільником нуля алгебри $\mathbb{W}_4$.

1) Очевидно, що $P_{\mathbb{W}_4}(A|B)\succcurlyeq 0$.

2) Легко перевірити, що $P_{\mathbb{W}_4}(B|B)=\zeta$. Дійсно:

(a) якщо $P_{\mathbb{W}_4}(B)\notin\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, то

$$P_{\mathbb{W}_4}(B|B)=\frac{P_{\mathbb{W}_4}(B\cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)}=\frac{P_{\mathbb{W}_4}(B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)}=1;$$

(b) якщо $P_{\mathbb{W}_4}(B)\in\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ і $P_{\mathbb{W}_4}(B)=\mu_1 i_1$, то

$$P_{\mathbb{W}_4}(B|B)=\frac{P_{\mathbb{W}_4}(B\cap B)}{\mu_1}i_1+P_{\mathbb{W}_4}(B)i_2+P_{\mathbb{W}_4}(B)i_3+P_{\mathbb{W}_4}(B)i_4=$$
$$=\frac{P_{\mathbb{W}_4}(B)}{\mu_1}i_1=i_1;$$

(c) якщо $P_{\mathbb{W}_4}(B)\in\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ і $P_{\mathbb{W}_4}(B)=\mu_2 i_2$, то

$$P_{\mathbb{W}_4}(B|B)=P_{\mathbb{W}_4}(B)i_1+\frac{P_{\mathbb{W}_4}(B\cap B)}{\mu_2}i_2++P_{\mathbb{W}_4}(B)i_3+P_{\mathbb{W}_4}(B)i_4=$$
$$=\frac{P_{\mathbb{W}_4}(B)}{\mu_2}i_2=i_2;$$

(d) якщо $P_{\mathbb{W}_4}(B)\in\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ і $P_{\mathbb{W}_4}(B)=\mu_3 i_3$, то

$$P_{\mathbb{W}_4}(B|B)=P_{\mathbb{W}_4}(B)i_1+P_{\mathbb{W}_4}(B)i_2+\frac{P_{\mathbb{W}_4}(B\cap B)}{\mu_3}i_3+P_{\mathbb{W}_4}(B)i_4=$$
$$=\frac{P_{\mathbb{W}_4}(B)}{\mu_3}i_3=i_3;$$

(е) якщо $P_{\mathbb{W}_4}(B) \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ і $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_4 i_4$, то

$$P_{\mathbb{W}_4}(B|B) = P_{\mathbb{W}_4}(B)i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(B)i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(B)i_3 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B \cap B)}{\mu_4}i_4 =$$

$$= \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B)}{\mu_4}i_4 = i_4.$$

3) Для будь-якої послідовності попарно несумісних випадкових подій виду

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j,$$

отримаємо різні випадки:

A. Якщо $P_{\mathbb{W}_4}(B) \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, то

$$P_{\mathbb{W}_4}(A|B) = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)} = \frac{P_{\mathbb{W}_4}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap B\right)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} P_{\mathbb{W}_4}(A_k \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A_k \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)} = \sum_{k=1}^{n} P_{\mathbb{W}_4}(A_k|B).$$

B. Нехай $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_1 i_1 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$. Враховуючи, що

$$A_k \cap B \subset B, \ \ \forall\, k, A \cap B \subset B,$$

і позначивши через $P_{\mathbb{W}_4}(A_k \cap B) = \nu_k i_1$, отримаємо

$$P_{\mathbb{W}_4}(A_k \cap B) = \nu i_1 = P_1(A \cap B)i_1 =$$

$$= P_1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap B\right) i_1 = \sum_{k=1}^{\infty} P_1(A_k \cap B)i_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k i_1,$$

звідки

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{W}_4}(A|B) &= \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{\mu_1}i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A)i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A)i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A)i_4 = \\ &= \frac{\nu}{\mu_1} + P_2(A)i_2 + P_3(A)i_3 + P_4(A)i_4 = \\ &= \frac{1}{\mu_1}\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k i_1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_2(A_k)i_2 + \sum_{k=1}^{\infty} P_3(A_k)i_3 + \sum_{k=1}^{\infty} P_4(A_k)i_4 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_{\mathbb{W}_4}(A_k|B). \end{aligned}$$

C. Аналогічно можна довести для випадків, коли $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_2 i_2 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_3 i_3 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ та $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_4 i_4 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$.

Отже, бігіперболічнозначна умовна ймовірність $P_{\mathbb{W}_4}(A|B)$ задовольняє всі аксіоми $\mathbb{W}_4$-ймовірності і вимірний простір $(B, \Sigma_B, P_{\mathbb{W}_4}(A|B))$ є новим $\mathbb{W}_4$-ймовірнісним простором. $\square$

5. Висновки.

Узагальнено поняття дійснозначної умовної ймовірності, яка набуває значень в алгебрі бігіперболічних чисел. Доведено, що ця бігіперболічнозначна умовна ймовірність визначається всіма аксіомами бігіперболічнозначної ймовірності. При цьому, досліджені особливі випадки, коли бігіперболічнозначна умовна ймовірність набуває значень, які є дільниками нуля алгебри бігіперболічних чисел.

Одержані результати можуть бути використані при подальших дослідженнях відповідних розділів теорії ймовірностей та математичної статистики.

Цитована література

1. *Yaglom I. M.* Complex numbers in geometry. – New York-London: Academic Press, 1966.
2. *Kantor I. L., Solodovnikov A. S.* Hypercomplex numbers. An elementary introduction to algebras. Translated by A. Shenitzer. – New York etc.: Springer-Verlag, 1989.
3. *Keller J.* Quaternionic, complex, duplex and real Clifford algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. – 1994. – Vol. 4, No. 1. – P. 1–12.
4. *Olariu S.* Complex numbers in N dimensions. – North-Holland Mathematics Studies, 190. – Amsterdam: North-Holland, 2002.
5. *Pogorui A., Kolomiiets T.* Some algebraic properties of complex Segre quaternions // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. – 2019. – Т. 33. – С. 158–169.
6. *Gu Y.* Miraculous hypercomplex numbers // Mathematics and Systems Science. – 2023. – Vol. 1, iss. 1. – P. 1–13.
7. *Карташов М. В.* Імовірність, процеси, статистика: посібник. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008.
8. *Погоруй А. О., Коломієць Т. Ю.* Теорія міри. Теорія ймовірностей: навч. посіб. – Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2023.
9. *Rudin W.* Real and complex analysis. 3rd ed. – New York, NY: McGraw-Hill, 1987.
10. *Alpay D., Luna-Elizarrar's M. E., Shapiro M.* Kolmogorov's axioms for probabilities with values in hyperbolic numbers // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2017. – Vol. 27, No. 2. – P. 913–929.
11. *De Morgan A.* Trigonometry and double algebra. – London: Taylor, Walton and Maberly, 1849.
12. *Sobczyk G.* New foundations in mathematics. The geometric concept of number. – New York, NY: Birkhauser, 2013.
13. *Rochon D., Shapiro M. S.* On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers // Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Matematica. – 2004. – Vol. 11. – P. 71–110.
14. *Shapiro M., Struppa D. C., Vajiac A., Vajiac M. B.* Hyperbolic numbers and their functions // Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Matematica. – 2012. – Vol. 19, No. 1. – P. 265–283.
15. *Kumar R., Sharma K.* Hyperbolic valued random variables and conditional expectation // arXiv:1611.06850v2 [math.PR] 27 Mar 2017.
16. *Kumar R., Sharma K.* Hyperbolic valued measures and Fundamental law of probability // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 13, No. 10. – P. 7163–7177.
17. *Коломієць Т. Ю.* Елементи теорії ймовірностей із значеннями у бігіперболічній алгебрі // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. – 2020. – Т. 34. – С. 36–49.
18. *Carmody K.* Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions – further results // Applied Mathematics and Computation. – 1997. – Vol. 84, No. 1. – P. 27–47.
19. *Ghosh Ch., Biswas S., Yasin T.* Hyperbolic valued signed measure // International Journal of Mathematics Trends and Technology. – 2018. – Vol. 55, No. 7. – P. 515–522.

20. *Luna-Elizarrarás M. E., Pogorui A., Shapiro M., Kolomiiets T.* On Quaternionic Measure // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2020. – Vol. 30, iss. 4, art. 63. – P. 1–17.
21. *Hamilton W. R.* Elements of quaternions. – London: Longmans, Green and Company, 1866.
22. *Grigoryan A. M., Agaian S. S.* Quaternion and Octonion Color Image Processing with MATLAB. Chapter 1. Complex and Hypercomplex Numbers. – 2018. – P. 1–84.
23. *Pogorui A. A., Rodriguez-Dagnino R. M., Rodriguez-Said R. D.* On the set of zeros of bihyperbolic polynomials // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2008. – Vol. 53, No. 7. – P. 685–690.

References

1. Yaglom, I. M. (1966). *Complex numbers in geometry.* New York–London: Academic Press.
2. Kantor, I. L., Solodovnikov, A. S. (1989). *Hypercomplex numbers. An elementary introduction to algebras.* Translated by A. Shenitzer. New York etc.: Springer-Verlag.
3. Keller, J. (1994). Quaternionic, complex, duplex and real Clifford algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras, 4*(1), 1–12.
4. Olariu, S. (2002). *Complex numbers in N dimensions.* North-Holland Mathematics Studies, 190. Amsterdam: North-Holland.
5. Pogorui, A., Kolomiiets, T. (2019). Some algebraic properties of complex Segre quaternions. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, 33*, 158–169.
6. Gu, Y. (2023). Miraculous hypercomplex numbers. *Mathematics and Systems Science, 1*(1), 1–13.
7. Kartashov, M. V. (2008). *Imovirnist, protsesy, statystyka: posibnyk.* Kyiv: Vydavnychopolihrafichnyi tsentr "Kyivskyi universytet" (in Ukrainian).
8. Pogorui, A. A., Kolomiiets, T. Yu. (2023). *Teoriia miry. Teoriia ymovirnostei: navch. posib.* Zhytomyr: Zhytomyrskyi derzhavnyi universytet imeni Ivana Franka (in Ukrainian).
9. Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis. 3rd ed.* New York, NY: McGraw-Hill.
10. Alpay, D., Luna-Elizarrarás, M. E., Shapiro, M. (2017). Kolmogorov's axioms for probabilities with values in hyperbolic numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras, 27*(2), 913–929.
11. De Morgan, A. (1849). *Trigonometry and double algebra.* London: Taylor, Walton and Maberly.
12. Sobczyk, G. (2013). *New foundations in mathematics. The geometric concept of number.* New York, NY: Birkhauser.
13. Rochon, D., Shapiro, M. (2004). On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. *Analele Universitătii din Oradea, Fascicola Matematica, 11*, 71–110.
14. Shapiro, M., Struppa, D. C., Vajiac, A., Vajiac, M. B. (2012). Hyperbolic numbers and their functions. *Analele Universitătii din Oradea, Fascicola Matematica, 19*(1), 265–283.
15. Kumar, R., Sharma, K. (2017). Hyperbolic valued random variables and conditional expectation. arXiv:1611.06850v2 [math.PR] 27 Mar 2017.
16. Kumar, R., Sharma, K. (2017). Hyperbolic valued measures and Fundamental law of probability. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 13*(10), 7163–7177.
17. Kolomiiets, T. Yu. (2020). Elementy teorii ymovirnostei iz znacheniiamy u bihiperbolichnii alhebri. *Pratsi Instytutu prykladnoi matematyky i mekhaniky NAN Ukrainy, 34*, 36–49 (in Ukrainian).
18. Carmody, K. (1997). Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions – further results. *Applied Mathematics and Computation, 84*(1), 27–47.
19. Ghosh, Ch., Biswas, S., Yasin, T. (2018). Hyperbolic valued signed measure. *International Journal of Mathematics Trends and Technology, 55*(7), 515–522.
20. Luna-Elizarrarás, M. E., Pogorui, A., Shapiro, M., Kolomiiets, T. (2020). On Quaternionic Measure. *Advances in Applied Clifford Algebras, 30*(4, art. 63), 1–17.
21. Hamilton, W. R. (1866). *Elements of quaternions.* London: Longmans, Green and Company.
22. Grigoryan, A. M., Agaian, S. S. (2018). Quaternion and Octonion Color Image Processing with MATLAB. *Complex and Hypercomplex Numbers, 1*, 1–84.
23. Pogorui, A. A., Rodriguez-Dagnino, R. M., Rodriguez-Said, R. D. (2008). On the set of zeros of bihyperbolic polynomials. *Complex Variables and Elliptic Equations, 53*(7), 685–690.

T. Yu. Kolomiiets

Conditional probability measure in the algebra of bihyperbolic numbers.

An important area of modern mathematics is the study of hypercomplex systems and their possible applications, in particular, for the construction of hypercomplex measure theory, probability theory and mathematical statistics. In this paper, we present a generalization of the notion of a conditional probability measure (real-valued conditional probability) in the case when the measure takes on values in the commutative algebra of bihyperbolic numbers, also called hyperbolic quaternions. Such a generalized conditional probability measure defined on a bihyperbolic probability space for two random events A and B is called a bihyperbolic conditional probability measure or a bihyperbolic conditional probability of event A, provided that event B has occurred. It is shown that a bihyperbolic conditional probability measure is defined by all the axioms of a bihyperbolic probability measure. In particular, it is proved that for a fixed event B, when the bihyperbolic probability of event B is not zero, the bihyperbolic conditional probability of event A, provided that event B has occurred is defined by all the axioms of bihyperbolic probability so that it defines a bihyperbolic probability measure on the measurable space (B, Σ_B), where Σ_B is a σ-algebra of sets of the form $A \cap B$ for $A \in \sigma$. For this purpose, we checked the fulfillment of all three conditions for the definition of a bihyperbolic probability for a bihyperbolic conditional probability. The special cases when the bihyperbolic conditional probability takes on values that are divisors of zero of the algebra of bihyperbolic numbers are investigated. The obtained results can be used in further studies of the relevant sections of probability theory and mathematical statistics.

Keywords: *bihyperbolic numbers, divisors of zero, idempotents, Pierce decomposition, measurable space, sigma algebra of events, partial order relation, bihyperbolic probability, bihyperbolic conditional probability.*

Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир
tamila.kolomiiets@gmail.com

Отримано 26.02.2025