



УДК 517.977

Нагорний А. А.

здобувач вищої освіти фізико-математичного факультету
Житомирський державний університет імені Івана Франка, Україна

ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛОЩІ ТА ОБ'ЄМУ ЗА ДОПОМОГОЮ СУЧАСНИХ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

В умовах повоєнного відновлення регіонів України критично важливою є ефективність використання ресурсів та матеріалів [4]. При проектуванні інженерних та будівельних конструкцій, пакувальних матеріалів, контейнерів для зберігання та логістики виникає пряма економічна задача: мінімізація площі поверхні (матеріальних витрат) при заданому об'ємі (корисній місткості), або навпаки – максимізація об'єму при фіксованому периметрі/площі поверхні [3]. Дане дослідження застосовує методи сучасного математичного аналізу [1, с. 254] для визначення оптимальної форми правильних n -кутних призм, що безпосередньо впливає на собівартість матеріалів та енергоефективність будівельних рішень

При вивченні об'ємів многогранників виникає практичне питання: яку форму повинен мати многогранник, щоб:

- 1) при заданому периметрі мати найбільший об'єм;
- 2) при заданій площі поверхні мати найбільший об'єм.

Розглянемо розв'язання прямого питання для деяких типів многогранників. Друге питання дослідимо в роботі.

Оскільки визначення об'ємів подібних многогранників дорівнює кубу відношення їх периметрів, то для подібних многогранників відношення

$$\frac{V}{p^3} \text{ є сталим}$$

Це дозволяє звести дослідження першого питання для правильних многогранників до дослідження функцій однієї змінної

Основні результати дослідження

Теорема 1. Серед правильних n -кутних призм даного периметру найбільший об’єм має призма висота якої дорівнює стороні її основи

Постановка задачі: Знайти співвідношення між висотою h та стороною основи a , при якому об’єм V призми є максимальним для фіксованого периметра P .

Для n -кутної призми зі стороною основи a та висотою h :

Периметр: $P = 2na + nh$

$$y = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a * \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$S = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$(1) \text{ Об'єм } - V = \frac{n}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} a^2 h \quad [2, \text{ с. 110}]$$

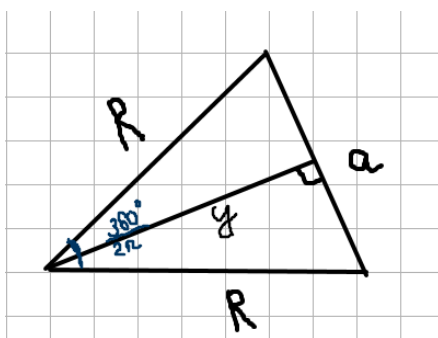


Рис. 1 Елементи основи правильної n -кутної призми (Де a — сторона основи; y — апофема)

$$\text{Відношення: } \frac{V}{p^3} = \frac{\frac{n}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} a^2 h}{n^3 (2a + h)^3} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}}{4n^2} * \frac{a^2 h}{(2 + h)^3}$$

(2) Використовуючи формулу (1) та (2), досліджуємо відношення $\frac{V}{p^3}$.

$$\text{Позначимо } \frac{\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}}{4n^2} = A \text{ та } \frac{h}{a} = x$$

Отримана функція для дослідження:

$$\frac{V}{p^3} = A \frac{a^2 ax}{(2a + ax)^3} = A * \frac{x}{(x + 2)^3} = f(x)$$

(3) Для знаходження максимуму обчислюємо похідну $f'(x)$:

$$f'(x) = A \frac{1(x + 2)^3 - 3x(x + 2)^2}{(x + 2)^6} = A * \frac{x + 2 - 3x}{(x + 2)^4} = A * \frac{2 - 2x}{(x + 2)^4}$$

(4) Прирівнюючи до нуля, $2 - 2x = 0$, отримуємо $x = 1$ – точка максимуму.

Висновок: Серед правильних n – кутних призм даного периметру найбільший об’єм має призма, висота якої дорівнює стороні її основи $h = a$ оскільки $(x = \frac{h}{a} = 1)$

Теорема 2 Серед правильних n – кутних призм даного периметру найбільший об’єм має правильна трикутна призма, висота якої дорівнює стороні основи

Постановка задачі: Дослідити, як змінитись максимальне значення частки $\frac{V}{p^3}$ при збільшенні n

Дослідимо як змінюється частка $\frac{V}{p^3}$ для правильної призми при збільшенні n . При кожному $n \geq 3$ її максимальне значення дорівнює

$$\max \frac{V}{p^3} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}}{4n^2} * \frac{a^3}{(3a)^3} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}}{108n^2}$$

(5) Розглянемо функцію, що визначає залежність від n

$$f(x) = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{x}}{x^2} \text{ при } x \geq 3$$

(6) Похідна $f'(x)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{x}} * \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x} * 2x}{x^4} = \frac{\pi}{\sin^2 \frac{\pi}{x}} - \frac{2x \cos \frac{\pi}{x}}{\sin \frac{\pi}{x}} \\ &= \frac{\pi \sin \frac{\pi}{x} - 2x \cos \frac{\pi}{x}}{\sin^2 \frac{\pi}{x}} \end{aligned}$$

(7) Дослідження знаку чисельника при $x \geq 3 : \frac{\pi}{x} \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right], \sin \frac{\pi}{x} \leq \frac{\sqrt{3}}{2};$

При $x \geq 3$: $2x \cos \frac{\pi}{x}$ є зростаючою, $\cos \frac{\pi}{2} \geq \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Показує що $2x \cos \frac{\pi}{x} \geq 3$, то $\pi \sin \frac{\pi}{x} - 2x \cos \frac{\pi}{x} \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - 3 < 0$.

Отже $\max f(x) = f(3); [3; +\infty)$.

Висновок: Оскільки $f'(x) < 0$ для $x \geq 3$, функція $f(x)$ є спадною. Отже максимальне значення досягається при найменшому можливому n , тобто при $n = 3$. Це доводить, що серед правильних n – кутних призм даного периметру найбільший об’єм має правильна трикутна призма ($n = 3$), при умові $h = a$.

Висновки

Дослідження підтвердило, що:

Оптимальною формою правильної n -кутної призми (при заданому периметрі) є та, де висота дорівнює стороні основи ($h = a$).

При фіксованому периметрі та оптимальному співвідношенні $h = a$, найбільший об’єм має правильна трикутна призма ($n = 3$).

Отримані результати можуть бути використані в інженерних розрахунках для оптимізації матеріальних витрат при проектуванні елементів, що є важливим внеском у ресурсоефективне відновлення інфраструктури [4].

Список літератури

1. Калініна В. І. Математичний аналіз : підручник. Київ : Вища школа, 2018. 400 с.
2. Погорелов О. В. Геометрія. Стереометрія : навч. посіб. Харків : Ранок, 2017. 224 с.
3. Мельник А. М., Василенко В. О. Оптимізаційні методи в економіці та бізнесі : монографія. Івано-Франківськ : Говерла, 2022. 312 с.
4. Петренко О. І. Ресурсоефективність інженерних конструкцій: оптимізація форм у повоєнному відновленні. *Збірник наукових праць НУ “Львівська політехніка”*. 2024. № 3. С. 45–55. URL: <http://nps.lp.edu.ua/> (дата звернення: 05.11.2025).