

АНАЛІЗ УМІНЬ УЧНІВ ПРОФІЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ КЛАСІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАВДАННЯ З ПАРАМЕТРАМИ В КОНТЕКСТІ ПІДГОТОВКИ ДО НМТ

Шевчук Катерина Сергіївна

здобувачка вищої освіти

Фізико-математичний факультет

Науковий керівник:

Прус Алла Володимирівна

канд. пед. наук, доцент

Кафедра алгебри та геометрії

Житомирський державний університет

імені Івана Франка, Україна

Одним із важливих умінь, яких потребує сучасний учень старшої школи для успішного складання Національного мультипредметного тесту з математики, є вміння працювати із завданнями, що містять параметр. Попри те, що у стандартному рівні математичної освіти поняття параметра майже не розглядається, у профільних математичних класах тема рівнянь, нерівностей і систем з параметрами входить до змісту навчання, а отже — має бути добре засвоєною. Саме тому включення таких завдань до НМТ є логічним і цілком виправданим для учнів, які обрали математику на профільному рівні.

Однак практика показує, що навіть учні із поглибленим вивченням математики не завжди впевнено виконують завдання з параметрами. Це може бути пов'язано з тим, що робота з параметрами вимагає комплексного поєднання алгебраїчних навичок, вміння мислити узагальнено, аналізувати структуру задачі та вибудовувати логічні міркування.

З метою дослідити, які саме труднощі виникають у старшокласників під час виконання подібних завдань, було проведено міні-дослідження: учні профільного математичного класу виконали добірку із шести задач з параметрами, взятих із НМТ 2025 року. На розв'язання було відведено 50 хвилин, а для аналізу були використані як результати Google-опитувальника, так і письмові чернетки учнів.

Отримані дані дали змогу визначити типові помилки, основні прогалини у розумінні теорії параметрів та характерні особливості підходів, які використовують учні під час розв'язування таких завдань. Окрім того, результати дозволяють оцінити, наскільки реальними є вимоги НМТ щодо параметрів для учнів профільних класів, та які аспекти підготовки потребують посилення.

Дослідження було проведено серед учнів ліцею при Житомирському державному університеті імені Івана Франка, які навчаються у класі з поглибленим вивченням математики. Участь узяли 23 учні 11 класу, що мають профільну підготовку відповідно до чинної навчальної програми та повинні володіти вмінням розв'язувати рівняння з параметрами як одним із елементів алгебраїчного курсу старшої школи.

Учням було запропоновано шість завдань з параметрами, відібраних із тесту НМТ–2025 року. Усі завдання належать до категорії рівнянь із параметрами та передбачають аналіз залежності кількості, наявності або характеру коренів від значення параметра. Такий вибір є обґрунтованим, оскільки завдання цього типу традиційно входять до структури зовнішнього оцінювання та є важливим елементом підготовки старшокласників профільних математичних класів.

Збір даних здійснювався у змішаному форматі:

- Google Форма дозволила зафіксувати кінцеві відповіді учнів та час, витрачений на виконання;
- чернетки розв'язань були використані для аналізу способів міркувань, математичних стратегій, проміжних перетворень та помилок, які не відображаються у фінальній відповіді.

Під час опрацювання результатів увагу було зосереджено на таких аспектах:

- правильність виконання завдань та кількісний розподіл відповідей;
- способи розв'язання, які обирали учні (алгебраїчні перетворення, аналіз області допустимих значень, графічні міркування тощо);
- типові помилки, що виникали під час роботи з параметрами — пропуск окремих випадків, механічні помилки у спрощенні виразів, некоректне врахування обмежень, передчасні узагальнення тощо.

Такий підхід дав змогу не лише оцінити рівень сформованості відповідних умінь, а й виявити характерні труднощі, з якими стикаються навіть учні профільного рівня підготовки.

Перше завдання було рівнянням лінійного типу з параметром:

Таблиця 1

Завдання 1	Відповідь
Визначте кількість цілих значень a , що належать проміжку $[-9; 9]$, за кожного з яких корінь $ax - 5 = a + 2x$ рівняння є додатним.	11

Це завдання належить до базового рівня складності серед задач із параметрами, оскільки передбачає стандартні алгебраїчні перетворення та

подальший аналіз знаку отриманого виразу. Для учнів профільного класу таке завдання має бути цілком доступним, що підтверджують результати.

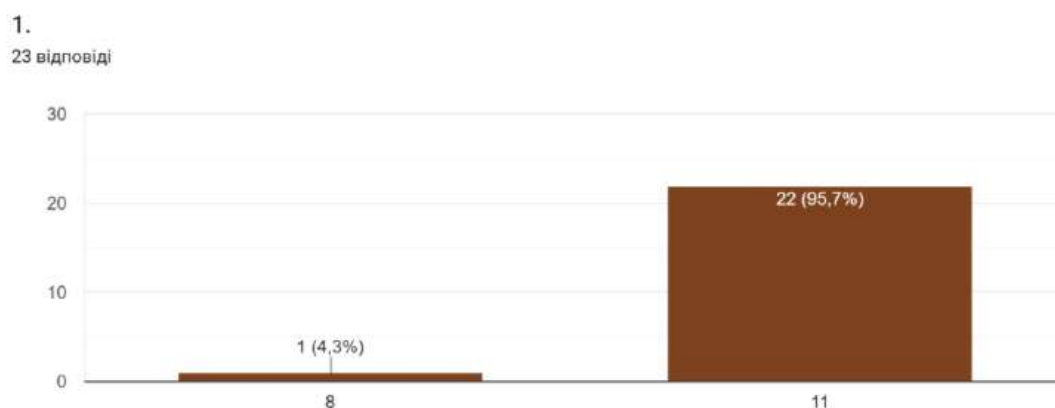


Рис. 1 Діаграма за результатами відповідей на завдання 1

З 23 учасників дослідження (рис. 1):

- 22 учні ($\approx 96\%$) дали правильну відповідь;
- 1 учень ($\approx 4\%$) припустився помилки.

Отримана статистика свідчить, що більшість учнів володіє вмінням виконувати елементарні перетворення в рівняннях з параметрами та правильно аналізувати умову щодо знаку кореня. Аналіз чернеток показав, що переважна частина школярів діяла за однаковим алгоритмом:

1. перенесення доданків;
2. виокремлення x ;
3. знаходження розв'язку у вигляді $x = f(a)$;
4. встановлення умови $x > 0$;
5. визначення відповідних значень параметра на заданому проміжку.

Єдиний неправильний розв'язок був пов'язаний із неправильною трансформацією рівняння (помилка при перенесенні доданків). При цьому в аналізі чернетки не було виявлено концептуальних непорозумінь щодо самого поняття параметра — лише механічна арифметична помилка.

Загалом перше завдання продемонструвало високий рівень сформованості базових умінь, необхідних для подальших, більш складних задач із параметрами.

Друге завдання мало суттєво вищу складність і вимагало знання умов існування та відсутності розв'язків систем лінійних рівнянь:

Таблиця 2

Завдання 2	Відповідь
Знайдіть усі значення a , за яких система рівнянь $\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ (5a + 6)x + 16y = 24 \end{cases}$ не має розв'язків. Якщо таких значень кілька, то у відповідь запишіть їх <i>добуток</i> .	-3,2

Система не має розв'язків тоді, коли її коефіцієнти утворюють паралельні прямі, що відповідає виконанню двох умов: відношення коефіцієнтів при x та y збігається; відношення коефіцієнтів при вільних членах не збігається.

Завдання передбачає вміння: працювати з коефіцієнтами системи; встановлювати пропорційність виразів; застосовувати умови сумісності та несумісності систем; виконувати алгебраїчні перетворення з параметром.

За результатами виконання серед 23 учасників (рис. 2):

- 3 учні ($\approx 13\%$) дали правильну відповідь;
- 8 учнів ($\approx 35\%$) обрали варіант «– / ?»;
- 12 учнів ($\approx 52\%$) дали неправильну відповідь.

Таким чином, завдання виявилось одним із найбільш складних – понад 87% учнів не впоралися з ним.

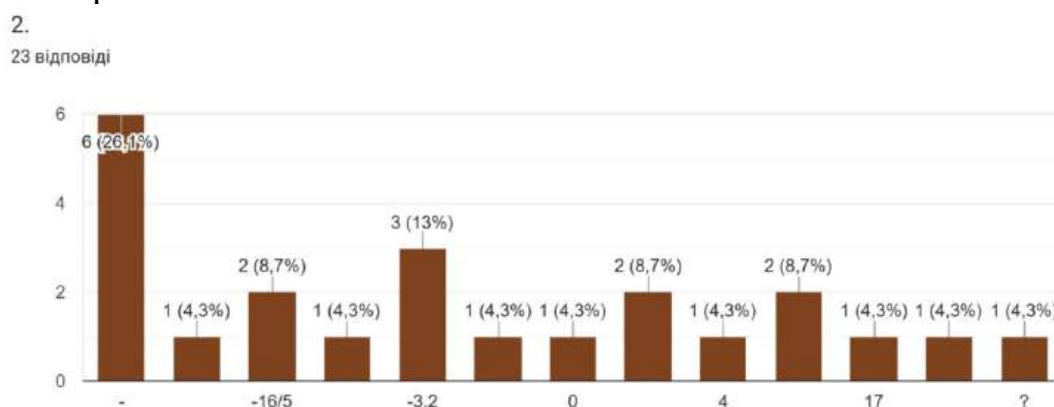


Рис. 2 Діаграма за результатами відповідей на завдання 2

Отримані результати демонструють суттєвий розрив між вміннями розв'язувати лінійні рівняння з параметром та системи рівнянь із параметром. Учні впевнено виконують завдання першого рівня складності, проте стикаються з труднощами, коли необхідно застосувати теоретичні знання про сумісність систем. Учні, які правильно розв'язали завдання, підходили до розв'язання не лише шляхом графічних міркувань, а й аналітичним методом. Найчастіше вони ділили одне рівняння системи на інше, встановлювали пропорційність коефіцієнтів та виконували необхідні алгебраїчні обчислення з параметром. Такий підхід передбачає вміння оперувати символічними виразами та застосовувати умови сумісності і несумісності систем лінійних рівнянь, що робить завдання цінним для оцінювання глибини математичної компетентності учнів.

Третє завдання вимагало від учнів вміння працювати з параметром у геометричному контексті, а саме — аналізувати положення кола залежно від зміщення його центра:

Таблиця 3

Завдання 3	Відповідь
Знайдіть <i>найменше</i> ціле значення a , за якого коло $(x - 11 - 3a)^2 + (y + 2)^2 = 49,$ двічі перетинає вісь ординат.	-5

Результати показують, що це завдання є середнього рівня складності, однак вимагає міжпредметного поєднання алгебри та геометрії (знаходити центр і радіус кола з рівняння; обчислювати відстань від точки до прямої і т.д.), що традиційно викликає труднощі навіть у профільних класах.

Серед 23 учнів (рис. 3):

- 10 учнів ($\approx 43\%$) дали правильну відповідь;
- 8 учнів ($\approx 35\%$) позначили варіант «—» (фактична відмова від розв'язання);
- 5 учнів ($\approx 22\%$) дали неправильну відповідь.

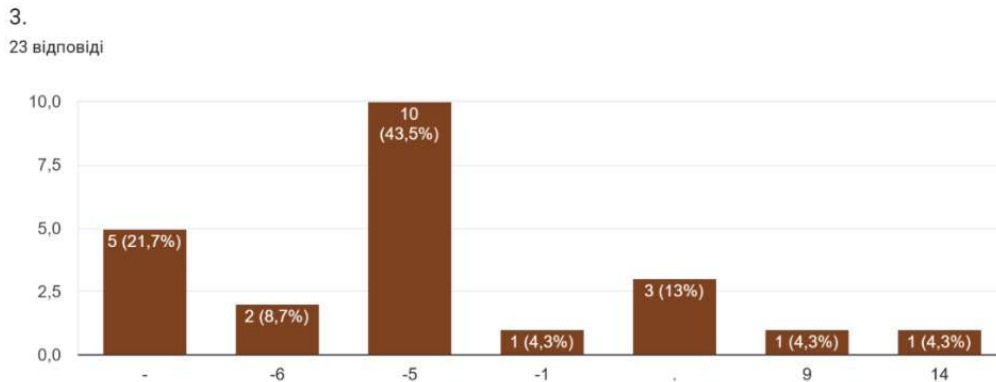


Рис. 3 Діаграма за результатами відповідей на завдання 3

Це завдання показало, що вміння працювати з параметрами у геометричній інтерпретації є менш сформованим, ніж у задачах алгебраїчного типу. Майже половина учнів правильно визначили відповідь, однак значна частина або припустилася помилок, або взагалі не змогла розпочати розв'язання.

Завдання виявило типові проблеми учнів: недостатнє оперування геометричними образами та неготовність інтегрувати знання з різних розділів математики.

Четверте завдання стосувалося розв'язування рівняння з параметром, у якому необхідно враховувати область допустимих значень. Умова мала вигляд дробово-раціонального рівняння з однаковими знаменниками, тому перевірка ОДЗ була ключовим етапом. Правильну відповідь обрали 11 учнів, а 6 — пропустили завдання або позначили «—». Це свідчить, що значна частина учнів або не змогла правильно організувати розв'язання, або зупинилася на одному з проміжних етапів (зокрема, при знаходженні ОДЗ чи перевірці коренів на належність до неї).

Таблиця 4

Завдання 4	Відповідь
Знайдіть усі значення a , за кожного з яких рівняння $\frac{x^2 - 4x + 3}{3x - a} = \frac{42 + 3x - x^2}{3x - a}$ має один корінь. Якщо таке значення a одне, запишіть його у відповіді. Якщо таких значень a кілька, то у відповіді запишіть їхню суму.	-10,5

Зміст операцій, які мав виконати учень, охоплює декілька важливих умінь:

- роботу з раціональними рівняннями та визначення ОДЗ (формується у 8 класі);

- перехід від рівняння з однаковими знаменниками до рівняння чисельників;
- зведення квадратного рівняння до стандартного вигляду та знаходження його коренів;
- аналіз ситуації з параметром, коли кількість коренів залежить від виключених значень.

4.

23 відповіді

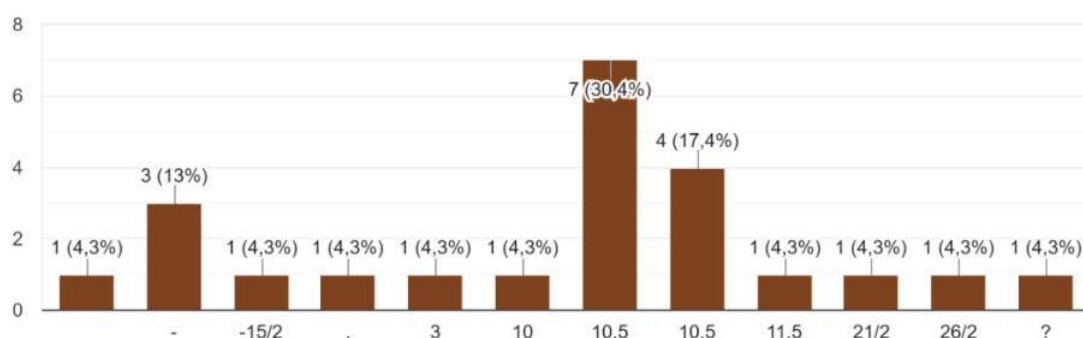


Рис. 4 Діаграма за результатами відповідей на завдання 4

Попри те, що завдання є базовим за технічними діями (квадратне рівняння, спрощення, підстановка), воно потребує узагальненого мислення: вміння аналізувати структуру рівняння, співвідносити знайдені корені з умовами існування розв'язків. Саме такі завдання є ключовими у модулі «Завдання з параметрами», адже вони тренують логіку аналізу залежностей між величинами, а не лише обчислювальні навички.

Порівняно високий відсоток правильних відповідей (понад половина учнів) свідчить про те, що структура завдання була для учнів доступною та знайомою. Водночас кількість пропусків демонструє, що частина учасників могла відчувати брак часу або невпевненість у роботі з умовами типу «рівняння має один корінь», що вимагає додаткового аналізу та більше часу на виконання.

П'яте завдання виявилось одним із найскладніших у всьому дослідженні. Воно поєднувало показниковий вираз з основою 3, наявність арифметичних коренів у знаменнику та необхідність правильно врахувати область визначення. Лише 6 учнів із 23 ($\approx 26\%$) впоралися із ним правильно; 9 учнів завдання пропустили, а 8 надали неправильні відповіді.

Таблиця 5

Завдання 5	Відповідь
Визначте <i>найбільше</i> значення a , за якого має корені рівняння $\frac{3^{2a-5x+2} - \sqrt{27}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}} = 0.$	7,25

Складність завдання зумовлена тим, що воно поєднує одразу кілька елементів: роботу з показниковими виразами, зведенням степенів із основою 3,

використанням властивостей квадратних коренів, а також аналізом області визначення виразу. Учень повинен не лише знайти корені рівняння, а й правильно накласти умови, щоб визначити допустимі значення змінних та параметра.

Цей тип завдань вимагає комплексного підходу: спочатку спростити вираз у чисельнику, зрозуміти, за яких значень він дорівнює нулю, а потім врахувати обмеження, пов'язані з радикалами в знаменнику. Для багатьох учнів саме поєднання кількох тем в одному завданні викликало труднощі.

5.

23 відповіді

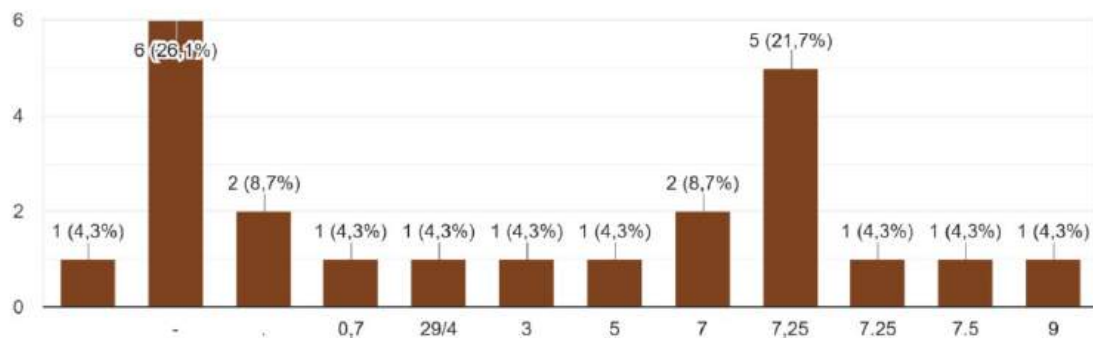


Рис. 5 Діаграма за результатами відповідей на завдання 5

Аналіз чернеток учнів показав, що переважна більшість неправильних відповідей не були результатом послідовних міркувань чи часткового розв'язання. У багатьох випадках учні:

- або робили випадкові позначки, обираючи відповідь навмання;
- або взагалі не починали розв'язувати рівняння через його складний вигляд;
- або припиняли роботу над завданням через нестачу часу.

Правильні відповіді були лише в тих учнів, які чітко володіють властивостями степенів із основою 3, знають, як переходити від чисел виду $\sqrt[3]{27}$ до $3^{\frac{1}{3}}$, та вміють працювати з умовами існування виразів із коренями.

Таким чином, завдання засвідчило наявність прогалин у темах:

- перетворення показникових виразів з однією основою;
- аналіз області визначення виразів із коренями;
- застосування цих умінь у задачах із параметрами.

Це свідчить про доцільність більш системної роботи зі складеними завданнями, у яких поєднуються кілька математичних компетентностей одночасно.

Завдання 6 передбачало визначення найбільшого значення параметра a , за якого система має хоча б один розв'язок. Завдання відзначалося високим рівнем складності, оскільки потребувало не лише навичок алгебраїчних перетворень, а й аналітичного оцінювання залежності існування розв'язків від параметра.

Таблиця 6

Завдання 6	Відповідь
Знайдіть <i>найбільше</i> значення a , за якого система рівнянь $\begin{cases} 3^x + y^2 = a + 3 \\ 3^{x+1} + 2y^2 = 7a + 6 \end{cases}$ має хоча б один розв'язок.	0,75

Проаналізувавши чернетки учнів, було встановлено, що значна частина учасників (більше половини) взагалі не приступила до виконання завдання. Це свідчить про суттєві труднощі, пов'язані з розумінням умов існування розв'язку систем рівнянь із параметром, а також про психологічний фактор уникання складних завдань.

Серед тих учнів, хто працював над завданням аналітично, спостерігався типовий підхід: вони намагалися поєднувати рівняння системи через підстановку або зведення до одного рівняння з параметром. Проте більшість не змогли правильно визначити залежність між параметром та існуванням розв'язку. Зокрема, учні часто припускалися помилок при спрощенні виразів з показниковими та квадратичними членами, а також некоректно оцінювали умови, за яких змінні приймають допустимі значення.

Результати виконання завдання були наступними: 4 учні ($\approx 17\%$) дали правильну відповідь, 7 учнів ($\approx 30\%$) — неправильну, а 12 учнів ($\approx 52\%$) залишили завдання без розв'язку («– / ?»).

6.

23 відповіді

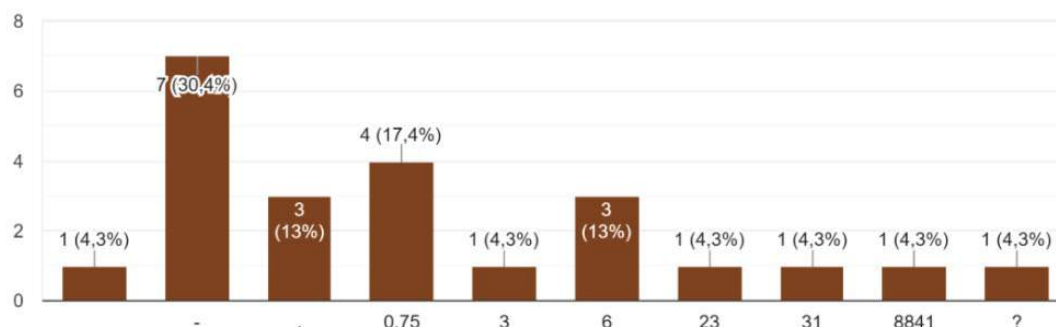


Рис. 6 Діаграма за результатами відповідей на завдання 6

Таким чином, завдання продемонструвало низький рівень сформованості навичок роботи з системами рівнянь із параметром та аналітичного оцінювання умов сумісності. Водночас воно виявило конкретні труднощі учнів: недостатнє розуміння взаємозв'язку між параметром та розв'язком системи, невміння здійснювати послідовні алгебраїчні перетворення та логічно оцінювати допустимі значення змінних. Результати дослідження підкреслюють необхідність додаткової роботи над формуванням стратегій для розв'язання завдань високої складності, що поєднують алгебраїчні обчислення та аналітичний аналіз.

Для оцінювання успішності учнів за всіма шістьма завданнями використовувалася така система оцінювання: за кожне правильне виконане

завдання нараховувалося 2 бали, за неправильну відповідь — 0 балів. Таким чином, максимальна можлива кількість балів складала 12, що відповідає правильному виконанню всіх завдань.

За результатами дослідження середнє значення балів становило 4,87/12, медіана — 4/12 (рис. 7). Розподіл балів учнів був наступним:

- 7 учнів отримали 2 бали (правильна відповідь лише на одне завдання);
- 8 учнів — 4 бали;
- 2 учні — 6 балів;
- 4 учні — 8 балів;
- 1 учень — 10 балів;
- 1 учень — 12 балів.

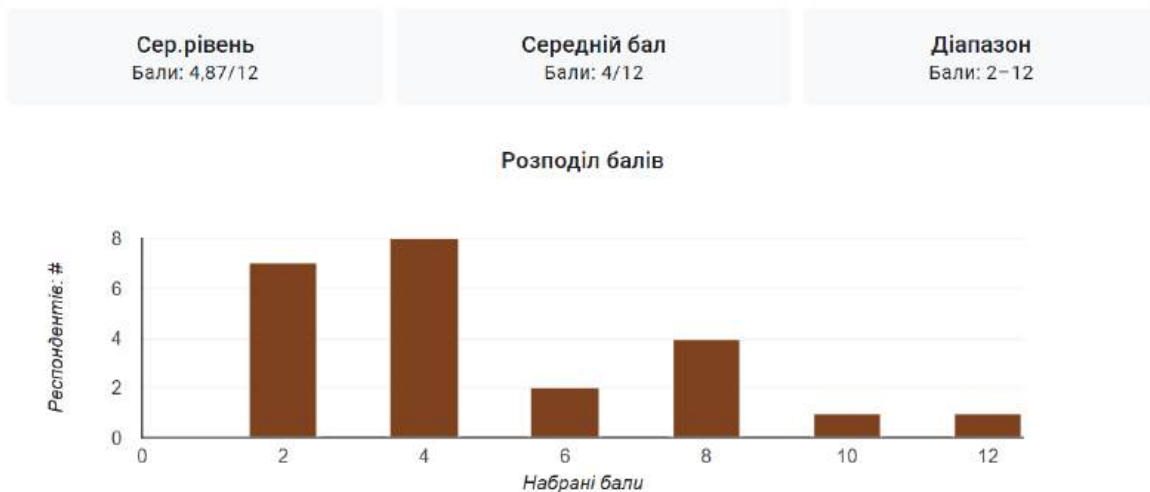


Рис. 7 Статистика успішності учнів по виконанню всіх завдань

Аналіз цих даних свідчить про низький рівень сформованості навичок виконання завдань підвищеної складності: більшість учнів (15 з 23) набрали не більше 4 балів, що відповідає правильному виконанню одного–двох завдань із шести. Лише невелика частина учнів продемонструвала високий рівень компетентності: 6 учнів набрали 8 балів і більше, і лише один учень виконав усі завдання правильно.

Такий розподіл результатів вказує на нерівномірну підготовленість учнів до виконання завдань із параметрами та системами рівнянь. Він підкреслює необхідність додаткової роботи над розвитком аналітичних умінь, навичок виконання алгебраїчних перетворень із параметром та логічного оцінювання умов існування розв'язків.

Діаграма, включена до роботи, наочно відображає нерівномірний розподіл балів та дозволяє виділити групи учнів із низьким, середнім та високим рівнем успішності (рис. 7).

Запитання, на які часто відповідають неправильно ?

Запитання	Правильні відповіді
2.	3/23
3.	10/23
4.	11/23
5.	6/23
6.	4/23

Рис. 8 Запитання, на які часто відповідають неправильно

Згідно з даними, у 23 учнів найменше правильних відповідей спостерігається у наступних завданнях: завдання 2 (правильні відповіді дали лише 3 учні ($\approx 13\%$), тобто 87% учнів не впоралися з завданням); завдання 5 (правильні відповіді дали 6 учнів ($\approx 26\%$), неправильні відповіді — 74%); завдання 6 (правильні відповіді дали 4 учні ($\approx 17\%$), неправильні — 83%).

У результаті проведеного дослідження було визначено, що найбільші труднощі для учнів викликали завдання з параметрами, що вимагали комплексного застосування знань з різних тем алгебри та логічного мислення. Зокрема:

Завдання 2 – виявилось складним через необхідність досліджувати, при яких значеннях параметра система не має розв'язків. Багато учнів не враховували умову несумісності або неправильно знаходили критичні значення a . Для його розв'язання потрібно було чітко розуміти взаємозв'язок коефіцієнтів у системі та застосовувати критерії несумісності, що робить цю задачу складнішою, ніж звичайне розв'язування систем рівнянь.

Завдання 5 – було складним через поєднання показникової та дробової функцій. Для його розв'язання учні повинні були враховувати область визначення і аналізувати залежність коренів від параметра.

Завдання 6 – виявилося складним через необхідність аналізу залежності розв'язності системи від параметра, а також поєднання показникової та квадратичної функцій. Учні часто не враховували взаємозв'язок між обома рівняннями системи та не вміли правильно визначати критичне значення параметра.

Таким чином, ці завдання виявилися найбільш складними для учнів, оскільки вони поєднували декілька рівнів мислення: алгебраїчні перетворення, аналіз знаків, роботу з показниковими та дробовими функціями, а також залежність розв'язків систем рівнянь від параметра. Аналіз показав, що саме на таких завданнях учні найчастіше допускали помилки, що свідчить про необхідність додаткової підготовки з теми рівнянь і систем рівнянь з параметрами для успішної підготовки до НМТ.

Дослідження показало, що найбільші труднощі у учнів викликали завдання з параметрами, які потребують одночасного аналізу існування розв'язків рівнянь і систем, роботи з показниковими та дробовими функціями, а також визначення критичних значень параметра. Варто відзначити, що ці завдання виконували учні з поглибленим вивченням математики, і навіть багатьом із них вони давалися складно. Статистика виконання завдань свідчить про часті помилки саме на таких етапах, що підкреслює необхідність додаткової підготовки та розвитку відповідних умінь. Результати дослідження можуть бути використані для вдосконалення методики навчання та планування завдань для підготовки до НМТ.

Список використаних джерел

1. Прус, А. В., Швець, В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики: навчально-методичний посібник. Житомир: Рута, 2016. 468 с.
2. Український центр оцінювання якості освіти. Програма НМТ з математики для вступу 2024/2025 року. Київ: УЦОЯО, 2024. 28 с.
3. Математика з ІЦА Підготовка до НМТ : телеграм-канал [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://t.me/abitmath>
4. Тести ЗНО/НМТ онлайн з математики [Електронний ресурс] // Освіта.ua. – Режим доступу: <https://zno.osvita.ua/mathematics/>