

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

О.П. Довгопятий, Є.О. Севостьянов,
А.Л. Таргонський

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ.
ЧАСТИНА IV

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2025

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

*Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного
університету імені Івана Франка
(протокол № 23 від 23 грудня 2025 р.)*

Рецензенти:

В.П. Журавльов – доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач
кафедри загальної математики Поліського національного університету,
м. Житомир

І.В. Денєга – доктор фіз.-мат. наук, старший дослідник, провідний
науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу
Інституту математики НАН України, м. Київ

А.О. Погоруй – доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри
алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені
Івана Франка

В22 Математичний аналіз. Частина IV / Довгопятий О.П., Севос-
стьянов Є.О., Таргонський А.Л. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка,
2025. - 67 с.

Навчально-методичний посібник стосується невизначеного інтегра-
лу. Розглянуті питання первісної функції, невизначеного інтегралу, під-
ведення під спільний знак диференціалу, методу заміни, інтегрування
функцій, які містять квадратний тричлен, інтегрування частинами, інте-
грування раціональних та ірраціональних виразів, інтегралів від триго-
нометричних функцій. Кожен розділ містить в собі мінімальні теоретичні
відомості, необхідні для розв'язання задач, та приклади їх розв'язання.
Окремо наведені текстові питання, що мають рівень складності вище се-
реднього, та типові задачі для самостійного розв'язання по 30 варіантів
кожна.

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

© О.П. Довгопятий, Є.О. Севостьянов, А.Л. Таргонський

2025

© Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2025

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень	4
1 Невизначений інтеграл	5
1.1 Первісна функції. Невизначений інтеграл	5
1.2 Завдання для самоконтролю	10
1.3 Завдання для самостійної роботи № 1	12
1.4 Метод підведення під спільний знак диференціала	14
1.5 Завдання для самоконтролю	16
1.6 Завдання для самостійної роботи № 2	17
1.7 Метод заміни	18
1.8 Завдання для самоконтролю	22
1.9 Завдання для самостійної роботи № 3	23
1.10 Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен	25
1.11 Завдання для самоконтролю	30
1.12 Завдання для самостійної роботи № 4	31
1.13 Інтегрування частинами	32
1.14 Завдання для самоконтролю	38
1.15 Завдання для самостійної роботи № 5	39
1.16 Інтегрування раціональних функцій	42
1.17 Завдання для самостійної роботи № 6	49
1.18 Інтегрування ірраціональних виразів	51
1.19 Завдання для самостійної роботи № 7	60
1.20 Інтеграли від тригонометричних функцій	62
1.21 Завдання для самоконтролю	64
1.22 Завдання для самостійної роботи № 8	65
Рекомендована література	67

Перелік умовних позначень

$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел
$\mathbb{Q}$	множина раціональних чисел, $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
$[x]$	ціла частина числа x : найбільше ціле число, що не перевищує x
$A \Rightarrow B$	з умови A випливає умова B
$A \Leftrightarrow B$	умови A і B рівносильні
$\forall$	«для будь якого, для кожного, для всіх»
$\exists$	«існує, знайдеться»
$!$	«єдиний»
$x \in A$	«елемент x належить множині A »
$A \subset B$	«множина A включається у множину B », тобто, кожен елемент $x \in A$ також задовольняє умову $x \in B$
$f : D \rightarrow \mathbb{R}$	функція, область визначення якої є множина D , зі значеннями в $\mathbb{R}$
$f(A)$	$f(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in A : f(x) = y\}$ – образ множини $A \subset D$ при відображенні f
$f^{-1}(B)$	$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in B : f(x) = y\}$ – (повний) прообраз множини B при відображенні f
$f^{-1} : f(D) \rightarrow D$	обернене відображення до відображення f , $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D, f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in f(D)$
$ x $	Покладемо $ x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
$f'(x)$	$f'(x)$ служить означенням звичайної похідної f в точці x
$C^1(D)$	клас неперервних функцій $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

1 Невизначений інтеграл

1.1 Первісна функції. Невизначений інтеграл

Деякі операції в математиці мають обернені. В попередній частині цього навчально-методичного посібника читач мав змогу ознайомитися з поняттям диференціювання. Операцією оберненою до знаходження похідної є знаходження первісної функції.

Означення 1.1. Функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$, якщо для всіх $x \in [a; b]$ справедлива рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад 1. Функція $F_1(x) = x^4 + 8$ є первісною функцією для $f(x) = 4x^3$. Справді, $F_1'(x) = (x^4 + 8)' = 4x^3 = f(x)$. Функція $F_2(x) = x^4 + 13$ також є первісною для функції $f(x)$. Неважко здогадатися, що будь-яка функція вигляду $F(x) = x^4 + C$, де $C = \text{const}$, є первісною для функції $f(x)$ (оскільки похідна від сталої дорівнює нулю). $\square$

На відміну від диференціювання, якщо функція має первісну, то має їх безліч. Справедливою є наступна теорема:

Теорема 1.1. (Основна властивість первісних). *Кожна з первісних для функції $f(x)$ на даному проміжку має вигляд $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна із цих первісних, а C – довільна стала.*

Приклад 2. Нехай функція $F(x) = \ln(x) + 7$ є первісною для функції $f(x)$. Знайдіть $f(x)$.

Розв'язання. $F'(x) = \frac{1}{x}$. Отже, $f(x) = \frac{1}{x}$. $\square$

Перейдемо до поняття невизначеного інтеграла. Як ми бачимо, функція має не одну первісну, а цілий клас функцій, які є первісними для неї. Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$.

Означення 1.2. Нехай функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$. *Невизначеним інтегралом* від функції f називається сукупність усіх первісних цієї функції, тобто множина $\{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}$. Позначення:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

При знаходженні похідних ми користувалися так званими табличними похідними. Аналогічно, на основі означення невизначеного інтеграла, наведемо таблицю невизначених інтегралів.

Табличні інтеграли

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq -1;$
 $\int 0 dx = C;$
 $\int dx = x + C;$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C;$
3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C_1;$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1;$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1);$
6. $\int e^x dx = e^x + C;$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad (a \neq 0);$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C, \quad k \neq 0;$
13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + C_1, \quad (a \neq 0);$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C_1, \quad (a > 0);$$

$$15. \int \sinh x \, dx = \cosh x + C;$$

$$16. \int \cosh x \, dx = \sinh x + C;$$

$$17. \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$18. \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Зауваження 1.1. Якщо замість x в цих формулах знаходиться неперервно-диференційовна функція, то формули залишаються справедливими. Виконується наступна теорема.

Теорема 1.2. (Інваріантність формул інтегрування). Якщо $\int f(x) \, dx = F(x) + C$, то і $\int f(u) \, du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$, довільна функція що має неперервну похідну.

Властивості невизначених інтегралів

$$1. \left(\int f(x) \, dx \right)' = f(x).$$

$$2. \int d(F(x)) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$3. \int C f(x) \, dx = C \int f(x) \, dx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4.

$$\begin{aligned} & \int (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)) \, dx = \\ &= \int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx + \cdots + \int f_n(x) \, dx. \end{aligned}$$

$$5. \int f(kx + b) \, dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Зауваження 1.2. Зі шкільного курсу математики відомо, що:

1. $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
2. $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$.

Це дозволяє знаходити за допомогою першої формули інтеграли від досить широкого класу функцій.

Приклад 3. *Знайти*

$$\int (x^5 + \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{x^3}) dx.$$

Розв'язання. Скористаємося властивостями невизначеного інтеграла. Маємо:

$$\begin{aligned} \int \left(x^5 + \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx &= \int x^5 dx + \int \sqrt[5]{x^2} dx + \int \frac{1}{x^3} dx = \\ &= \int x^5 dx + \int x^{\frac{2}{5}} dx + \int x^{-3} dx = \\ &= \frac{1}{6}x^6 + \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} - \frac{1}{2}x^{-2} + C = \frac{1}{6}x^6 + \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} - \frac{1}{2x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

Зауваження 1.3. На практиці перетворювати «степені» знов у «корені» не потрібно. Задача на взяття інтегралу вважається розв'язаною, якщо знак інтегралу зник.

Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє інтегрування – це метод обчислення невизначених інтегралів, який полягає у прямому застосуванні таблиці основних інтегралів та використанні їх властивостей. Іншими словами, це використання табличних значень інтегралів та основних властивостей інтегралів для знаходження первісної функції. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 4. *Знайти*

$$\int \left(x^4 + 3x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cos x + \ln 7 \right) dx.$$

Розв'язання. Скористаємося властивостями невизначеного інтегра-

ла. Маємо:

$$\begin{aligned} & \int \left(x^4 + 3x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cos x + \ln 7 \right) dx = \\ &= \int x^4 dx + \int 3x^3 dx + \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int \cos x dx + \\ &+ \int \ln 7 dx = \frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^4 + \ln |x| - \frac{1}{x} + \sin x + x \ln 7 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти

$$\int (3x + 2)^5 dx.$$

Розв'язання. Скористаємося властивістю 5 на стор. 6. Звідси маємо:

$$\int (3x + 2)^5 dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} (3x + 2)^6 + C = \frac{1}{18} (3x + 2)^6 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Можна по-іншому, без властивості 5:

$$\begin{aligned} & \int (3x + 2)^5 dx = \frac{1}{3} \int (3x + 2)^5 d(3x + 2) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} (3x + 2)^6 + C = \frac{1}{18} (3x + 2)^6 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

В багатьох випадках, для того, щоб знайти інтеграл, для початку треба попрацювати з функцією, яка під ним знаходиться. Зокрема, в деяких завданнях використовується почленне ділення, ділення многочленів, або тригонометричні формули.

Приклад 6. Знайти

$$\int \sin^2 x dx.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою пониження степеня, а також властивостями інтегрування.

$$\begin{aligned} & \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\ &= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти

$$\int \frac{x^5 + x^3 + x}{x^2} dx.$$

Розв'язання. Скористаємося почленним діленням. Будемо мати, що

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^3 + x}{x^2} &= \int \frac{x^5}{x^2} dx + \int \frac{x^3}{x^2} + \int \frac{x}{x^2} = \\ &= \int x^3 dx + \int x dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \square \end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x - 1} dx.$$

Розв'язання. Поділивши многочлен $x^3 + x + 1$ на $x - 1$, отримаємо, що $x^3 + x + 1 = (x - 1)(x^2 + x + 2) + 3$ (перевірте ділення самостійно). Тоді:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x + 1}{x - 1} dx &= \int \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2) + 3}{x - 1} dx = \\ &= \int (x^2 + x + 2) dx + \int \frac{3}{x - 1} dx = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \ln|x - 1| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \square \end{aligned}$$

1.2 Завдання для самоконтролю

1. Нехай F та G – дві первісні функції f на проміжку $I \subset \mathbb{R}$. Доведіть, що в цьому випадку існує стала $C \in \mathbb{R}$ така, що $F(x) = G(x) + C$, $x \in I$.

Вказівка. Скористайтесь теоремою про ознаку монотонності і сталості функції на проміжку.

2. Вкажіть приклад функції, яка завідомо не має первісної на деякому проміжку $I = (a, b)$. Обґрунтуйте приклад такої функції.

3. Чи може функція $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, що має розрив першого роду $x_0 \in (a, b)$, мати первісну F на (a, b) ?

4. Чи може функція $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, що має розрив другого роду $x_0 \in (a, b)$, мати первісну F на (a, b) ?

5. Нехай $f(x) = g(x) + h(x)$, $f, g, h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, причому $g(x)$ не має первісної на (a, b) . Чи може так статися, що функція f має первісну? Якщо «так», то за яких умов на функцію h це можливо?

6. Чи має первісну будь-яка монотонна функція f , визначена на проміжку $I = (a, b)$? Якщо відповідь «ні», знайдіть необхідні вимоги, які має задовольняти така функція.

7. Чи має первісну функція $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на проміжку $(-1, 1)$?

8. Чи може мати первісну функція $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $I = (a, b)$, якщо на цьому проміжку ця функція приймає тільки скінченну кількість значень $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $1 \leq n < \infty$? Якщо відповідь «взагалі кажучи, так», то які вимоги мають задовольняти задані числа a_i , $i = \overline{1, n}$?

1.3 Завдання для самостійної роботи № 1

Задача 1. Знайти $\int f(x) dx$ для кожного з варіантів.

Варіант	Функція $f(x)$	Варіант	Функція $f(x)$
1	$\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}} dx$	16	$\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x} dx$
2	$\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x} dx$	17	$\int \left(2x^3 - 3\sqrt{x^5} + \frac{4}{x}\right) dx$
3	$\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2} dx$	18	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2} dx$
4	$\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}} dx$	19	$\int \frac{3x^2-\sqrt{x^3}+7}{x^3} dx$
5	$\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2} dx$	20	$\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x} dx$
6	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} dx$	21	$\int \left(5\sqrt{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4\right) dx$
7	$\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt[4]{x}}{x} + 3\right) dx$	22	$\int \frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x^2} dx$
8	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}} dx$	23	$\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2} dx$
9	$\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x} dx$	24	$\int \left(\sqrt{x} - \frac{3x^2}{\sqrt{x^3}} + 2\right) dx$
10	$\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2} dx$	25	$\int \left(\sqrt[5]{x} - \frac{4}{x^5} + 2\right) dx$
11	$\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x} dx$	26	$\int \frac{\sqrt[4]{x^6}-2x^2+3}{x} dx$
12	$\int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1\right) dx$	27	$\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{2}{x^3} + 1\right) dx$
13	$\int \left(x^2 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x} - 3\right) dx$	28	$\int \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + 6\right) dx$
14	$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x} dx$	29	$\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} - \frac{7}{x^3} + 5\right) dx$
15	$\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + 2x^3 - 4\right) dx$	30	$\int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 2\right) dx$

Задача 2. Знайти $\int f(x) dx$ для кожного з варіантів.

Варіант	Функція $f(x)$	Варіант	Функція $f(x)$
1	$\int \sqrt{3+x} dx$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$
2	$\int \frac{dx}{3-x}$	17	$\int \frac{dx}{2-5x}$
3	$\int \sin(2-3x) dx$	18	$\int \sin(4-2x) dx$
4	$\int \sqrt[3]{1+x} dx$	19	$\int (1-4x)^7 dx$
5	$\int \frac{dx}{3x+9}$	20	$\int \frac{dx}{3x-2}$
6	$\int \sin(3-2x) dx$	21	$\int \cos(5-2x) dx$
7	$\int \sqrt[3]{(1+x)^2} dx$	22	$\int (1+4x)^5 dx$
8	$\int \frac{dx}{2-3x}$	23	$\int \frac{dx}{2x+3}$
9	$\int \sin(5-3x) dx$	24	$\int \cos(7x+3) dx$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$	25	$\int (1-3x)^4 dx$
11	$\int \frac{dx}{1-4x}$	26	$\int \frac{dx}{3x-4}$
12	$\int \cos(2+3x) dx$	27	$\int \sin(8x-3) dx$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}$	28	$\int \sqrt{1+3x} dx$
14	$\int \frac{dx}{2+3x}$	29	$\int \frac{dx}{4-3x}$
15	$\int \cos(3+2x) dx$	30	$\int \sin(3+4x) dx$

1.4 Метод підведення під спільний знак диференціала

Як зазначалося в попередньому параграфі, табличні інтеграли продовжують працювати, коли замість x знаходиться функція.

Приклад 9. *Знайти*

$$\int \sin^2 x \, d(\sin x) .$$

Розв'язання. Будемо мати:

$$\int \sin^2 x \, d(\sin x) = \frac{1}{3} \sin^3 x + C, \quad C \in \mathbb{R} . \quad \square$$

Зауваження 1.4. Для табличних похідних аналогічного правила немає. Зокрема, хоча $(\sin x)' = \cos x$, але $(\sin x^3)' \neq \cos x^3$.

Нагадаємо означення першого диференціала:

$$d(f(x)) = f'(x) \, dx .$$

Ця формула дозволяє звести достатньо багато інтегралів до табличних, але замість x буде деяка функція. Розглянемо цей підхід на прикладах.

Приклад 10. *Знайти $\int \sin(5x + 3) \, dx$ за допомогою методу підведення під спільний знак диференціала.*

Розв'язання. Міркування можна провести наступним чином. Було б дуже добре, якби замість dx стояло би $d(5x+3)$. Справді, в такому разі ми мали би табличний інтеграл. Скористаємося формулою для знаходження першого диференціала. Будемо мати, що

$$d(5x + 3) = (5x + 3)' \, dx = 5 \, dx .$$

У нас під інтегралом вже є dx , проте не вистачає 5. Важливо пам'ятати, що ми завжди можемо домножити на будь-яке число, яке нам потрібне (в даному випадку 5), але для «збереження балансу» необхідно домножити також і на число обернене до нього. Домножимо вираз під інтегралом на 5, а також на $\frac{1}{5}$. Маємо:

$$\int \sin(5x + 3) \, dx = \int \frac{1}{5} \sin(5x + 3) \cdot 5 \, dx .$$

Скористаємося тим, що $d(5x + 3) = (5x + 3)' dx = 5 dx$, а також властивістю, що числові множники можна виносити з під знаку інтеграла:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5} \sin(5x + 3) 5 dx &= \frac{1}{5} \int \sin(5x + 3) d(5x + 3) = \\ &= -\cos(5x + 3) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \square\end{aligned}$$

Приклад 11. Знайти $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ за допомогою методу підведення під спільний знак диференціала.

Розв'язання. Помітимо, що у нас під знаком інтеграла є функція $(\ln x)$ і її похідна $(\frac{1}{x})$. Оскільки $d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$, то вираз під інтегралом можна переписати наступним чином:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x}.$$

Цей інтеграл є табличним:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \square$$

Приклад 12. Знайти $\int \operatorname{tg} x dx$ за допомогою методу підведення під спільний знак диференціала.

Розв'язання. Скористаємося означенням тангенсу. Врахуємо також, що $d(\cos x) = -\sin x dx$. Звідси $\sin x dx = -d(\cos x)$. Отже,

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \square$$

Аналогічно обчислюється інтеграл від котангенсу (знайдіть самостійно).

Приклад 13. Знайти $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ за допомогою методу підведення під спільний знак диференціала.

Розв'язання. Зауважимо, що $d(x^2 + 1) = 2x dx$. Домножимо чисельник на 2, щоб отримати в ньому диференціал знаменника. Для «збереження балансу» домножимо дріб на $\frac{1}{2}$. Будемо мати, що

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1} dx &= \int \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \square\end{aligned}$$

1.5 Завдання для самоконтролю

1. Внесення під знак диференціалу в інтегралі $\int f(x) dx$ ґрунтується на наступній властивості інваріантності форми першого диференціалу: якщо $F = F(u)$, $u \in I$, I – деякий проміжок числової осі, і $u = f(x)$, $x \in J$, J – деякий проміжок числової осі, $u : J \rightarrow I$, то $dF(u) = dF(f(x))$, за умови, що F та f – «достатньо гладкі функції». (Звісно, тут $dF(u) = F'(u) du$, а $dF(f(x)) = (F(f(x)))'(x) dx$). Покладемо $d^2 f(x) := d(d(f(x)))$ – другий диференціал функції f .

Доведіть, що за вказаних умов, взагалі кажучи, другий диференціал не має інваріантності форми, іншими словами, $d^2 F(u) \neq d^2 F(f(x))$.

2. Які вимоги має задовольняти функція $u = f(x)$, $x \in J$, щоб для довільної «достатньо гладкої функції» $F = F(u)$ виконувалася б рівність $d^2 F(u) = d^2 F(f(x))$?

3. Які вимоги має задовольняти функція $F = F(u)$, щоб для довільної «достатньо гладкої функції» $u = f(x)$, $x \in J$, виконувалася б рівність $d^2 F(u) = d^2 F(f(x))$?

1.6 Завдання для самостійної роботи № 2

Задача 3. Знайти інтеграл від функції $\int f(x) dx$ методом підведення під спільний знак диференціала

Варіант	Функція $f(x)$,	Варіант	Функція $f(x)$,
1	$\int \sqrt{5-4x} dx$	16	$\int \sqrt[5]{3-2x} dx$
2	$\int \frac{dx}{3x+4}$	17	$\int \frac{dx}{3-2x}$
3	$\int \sin(3-4x) dx$	18	$\int \sin(5x-3) dx$
4	$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3+3x}}$	19	$\int \sqrt[4]{1+3x} dx$
5	$\int \frac{dx}{4x-2}$	20	$\int \frac{dx}{5+3x}$
6	$\int \cos(4x+3) dx$	21	$\int \sin(5-3x) dx$
7	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}$	22	$\int \sqrt[3]{1+3x} dx$
8	$\int \frac{dx}{5-3x}$	23	$\int \frac{dx}{3-5x}$
9	$\int \cos(3-4x) dx$	24	$\int \sin(3x+6) dx$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$	25	$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^5}}$
11	$\int \frac{dx}{4-7x}$	26	$\int \frac{dx}{5+4x}$
12	$\int \cos(2+5x) dx$	27	$\int \cos(5x-8) dx$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$	28	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}$
14	$\int \frac{dx}{5x-3}$	29	$\int \frac{dx}{6-3x}$
15	$\int \cos(3x+5) dx$	30	$\int \cos(3x-7) dx$

Задача 4. Знайти інтеграл від функції $\int f(x) dx$ методом підведення під спільний знак диференціала.

Варіант	Функція $f(x)$,	Варіант	Функція $f(x)$,
1	$\int \frac{dx}{(2x+1) \sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$	16	$\int \frac{dx}{(x+2) \sqrt[3]{\ln(x+2)}}$
2	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1} dx$	17	$\int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1} dx$
3	$\int \frac{dx}{(1-x) \sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$	18	$\int \frac{dx}{(x-3) \ln^4(x-3)}$
4	$\int \frac{dx}{(1-x) \sqrt[3]{\ln^3(1-x)}}$	19	$\int \frac{dx}{(x+5) \ln^3(x+5)}$
5	$\int \frac{\ln^3(1-x)}{x-1} dx$	20	$\int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5} dx$
6	$\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx$	21	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{x+4} dx$
7	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1} dx$	22	$\int \frac{\ln^5(x-7)}{x-7} dx$
8	$\int \frac{dx}{(x+1) \ln^2(x+1)}$	23	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln^3(x+3)}}{x+3} dx$
9	$\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt[3]{\ln(x+1)}}$	24	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{x-5} dx$
10	$\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx$	25	$\int \frac{dx}{(x+3) \ln^4(x+3)}$
11	$\int \frac{\sqrt[5]{\ln^5(x+1)}}{x+1} dx$	26	$\int \frac{\ln^5(x-8)}{x-8} dx$
12	$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx$	27	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln^3(x+6)}}{x+6} dx$
13	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln^3(x+1)}}{x+1} dx$	28	$\int \frac{dx}{(x-4) \ln^5(x-4)}$
14	$\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt[5]{\ln(x+1)}}$	29	$\int \frac{\ln^6(x+9)}{x+9} dx$
15	$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^7(x+1)}}{x+1} dx$	30	$\int \frac{\ln(3x+5)}{3x+5} dx$

1.7 Метод заміни

Метод заміни змінної полягає у введенні нової змінної $u = g(x)$, що дозволяє спростити підінтегральний вираз.

Приклад 14. Знайти $\int \sin(2x+7) dx$ за допомогою методу заміни.

Розв'язання. Позначимо через $u(x) = 2x + 7$. Тоді $du = 2dx$. Виразимо звідси dx , щоб записати інтеграл в термінах нової змінної. Маємо: $dx = \frac{du}{2}$. Після того, як інтеграл буде знайденим, повернемося до старої змінної. Отже,

$$\int \sin(2x+7) dx = \int \frac{\sin u}{2} du = -\frac{\cos u}{2} + C = -\frac{\cos(2x+7)}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Метод заміни особливо ефективний, коли підінтегральна функція містить вираз разом із його похідною. В таких випадках за нову змінну зручно позначати саме цей вираз, а не похідну.

Приклад 15. Знайти $\int \frac{3x^2}{x^3+7} dx$ за допомогою методу заміни.

Розв'язання. Неважко бачити, що чисельник є похідною знаменника. Тоді зручно буде за нову змінну позначити саме знаменник. Нехай $u = x^3 + 7$. Тоді $du = 3x^2 dx$. Перепишемо інтеграл в термінах нової змінної. Маємо:

$$\int \frac{3x^2}{x^3+7} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |x^3 + 7| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Зауваження 1.5. Метод підведення під спільний знак диференціала є неявним застосуванням методу заміни. Справді, розглянемо один з попередніх прикладів і розв'яжемо його методом підведення під спільний знак диференціала.

Приклад 16. Знайти $\int \sin(2x+7) dx$ методом підведення під спільний знак диференціала.

Розв'язання. Маємо, що

$$\begin{aligned} \int \sin(2x+7) dx &= \int \frac{1}{2} \sin(2x+7) \cdot 2 dx = \\ &= \int \frac{1}{2} \sin(2x+7) d(2x+7) = -\frac{1}{2} \cos(2x+7) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

Хоча заміна формальна і не була введена, але якщо на останньому кроці перед знаходженням інтеграла ввести заміну $u = 2x + 7$ ми отримаємо табличний інтеграл $\int \sin u du$, який ми і знаходили.

Приклад 17. Знайти $\int \sin^3 x \cos x dx$ за допомогою методу заміни.

Розв'язання. Бачимо в підінтегральному виразі як синус, так і косинус. Може виникнути питання, яку з цих функцій зручніше позначати за нову змінну. В даному випадку зручніше позначати саме синус. Справді, якщо $u = \sin(x)$, то $du = \cos x dx$ і ми зразу можемо переписати підінтегральний вираз в термінах нової змінної:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Зауваження 1.6. В випадках інтегралів від виразів з синусом і косинусом, де незрозуміло, яку з цих функцій позначати через нову змінну, можна користуватися наступним орієнтиром. В більшості таких завдань зручно позначати через нову змінну тригонометричну функцію, яка знаходиться в «незручному» положенні. Під «незручним» положенням мається на увазі наявність степеня, або випадки, в яких тригонометрична функція знаходиться в знаменнику.

Приклад 18. *Знайти*

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin^3(2x)} dx$$

за допомогою методу заміни.

Розв'язання. Бачимо, що в «незручному» положенні знаходиться саме синус (синус знаходиться в знаменнику, а також підноситься до кубу). Введемо нову змінну $u = \sin(2x)$. Тоді $du = 2 \cos 2x dx$, $\cos 2x dx = \frac{du}{2}$. Запишемо підінтегральний вираз в термінах нової змінної і знайдемо інтеграл. Будемо мати, що

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin^3(2x)} dx = \int \frac{du}{2u^3} = -\frac{1}{4}u^{-2} + C = -\frac{1}{4\sin^2 2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Розглянемо ще декілька прикладів.

Приклад 19. *Знайти*

$$\int \frac{\operatorname{tg}^7 3x}{\cos^2 3x} dx$$

за допомогою методу заміни.

Розв'язання. Бачимо, що під інтегралом знаходиться як функція $\operatorname{tg} 3x$, так і її похідна $\frac{1}{\cos^2 3x}$ з точністю до числового множника. Як ми зазначали раніше, в таких випадках зручно позначати за нову змінну саме $\operatorname{tg} 3x$. Нехай $u = \operatorname{tg} 3x$. Тоді $du = \frac{3}{\cos^2 3x} dx$. Звідси $\frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{du}{3}$. Звідси:

$$\int \frac{\operatorname{tg}^7 3x}{\cos^2 3x} dx = \int \frac{u^7}{3} du = \frac{1}{24}u^8 + C = \frac{1}{24}\operatorname{tg}^8 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Приклад 20. Знайти

$$\int \frac{\operatorname{arccotg}^4 8x}{1+64x^2} dx$$

за допомогою методу заміни.

Розв'язання. Бачимо, що під інтегралом знаходиться як функція $\operatorname{arccotg}^4 8x$, так і її похідна $\frac{1}{1+64x^2}$ з точністю до числового множника. Нехай $u = \operatorname{arccotg}^4 8x$. Тоді $du = -\frac{8}{1+64x^2} dx$. Звідси $\frac{dx}{1+64x^2} = -\frac{du}{8}$. Звідси:

$$\int \frac{\operatorname{arccotg}^4 8x}{1+64x^2} dx = -\int \frac{u^4}{8} du = -\frac{1}{40} u^5 + C = -\frac{1}{40} \operatorname{arccotg}^5 8x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Приклад 21. Знайти

$$\int e^{4-5x^2} x dx$$

за допомогою методу заміни.

Розв'язання. Бачимо, що під інтегралом знаходиться як функція $4-5x^2$, так і її похідна x з точністю до числового множника. Нехай $u = 4-5x^2$. Тоді $du = -10x dx$. Звідси $x dx = -\frac{du}{10}$. Звідси:

$$\int e^{4-5x^2} x dx = -\int \frac{1}{10} e^u du = -\frac{1}{10} e^u + C = -\frac{1}{10} e^{4-5x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

1.8 Завдання для самоконтролю

1. Нехай складна функція $f(x(t))$ визначена на деякому проміжку, де $x = x(t)$ є диференційовною і має обернену $t = t(x)$. Доведіть, що в такому випадку існує інтеграл $\int f(x(t))x'(t) dt$, при цьому

$$\int f(x) dx = \int f(x(t))x'(t) dt,$$

що включає до себе існування інтегралу ліворуч.

2. Нехай на деякому проміжку E визначена складна функція $f(u(x))$, $u(x)$ диференційовна на E . Тоді

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du,$$

де $u = u(x)$, за умови, що існує інтеграл праворуч. Доведіть.

3. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\int e^{4-5x^2} x dx = -\frac{1}{10} e^{4-5x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\frac{\operatorname{tg}^7 3x}{\cos^2 3x} dx = \frac{1}{24} \operatorname{tg}^8 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.9 Завдання для самостійної роботи № 3

Задача 5. Знайти інтеграл від функції $\int f(x) dx$ методом заміни

Варіант	Функція $f(x)$	Варіант	Функція $f(x)$
1	$\int \frac{dx}{(2+x)^3}$	16	$\int \sqrt[3]{4-2x} dx$
2	$\int \frac{dx}{6+5x}$	17	$\int \frac{dx}{5-2x}$
3	$\int \cos(5x-6) dx$	18	$\int \sin(8x-5) dx$
4	$\int \sqrt[5]{5-2x} dx$	19	$\int \sqrt[3]{3-4x} dx$
5	$\int \frac{dx}{1-7x}$	20	$\int \frac{dx}{2x+7}$
6	$\int \sin(7x+1) dx$	21	$\int \cos(8x-4) dx$
7	$\int \sqrt[5]{5-4x} dx$	22	$\int \sqrt[5]{3+2x} dx$
8	$\int \frac{dx}{1+6x}$	23	$\int \frac{dx}{2x+9}$
9	$\int \cos(7x+3) dx$	24	$\int \sin(9x-1) dx$
10	$\int \sqrt[5]{(6-5x)^2} dx$	25	$\int \sqrt[4]{(3+5x)^3} dx$
11	$\int \frac{dx}{2+7x}$	26	$\int \frac{dx}{7x-3}$
12	$\int \sin(7-4x) dx$	27	$\int \cos(10x-3) dx$
13	$\int \sqrt[4]{2-5x} dx$	28	$\int \sqrt[3]{(2-x)^2} dx$
14	$\int \frac{dx}{7-3x}$	29	$\int \frac{dx}{6x+1}$
15	$\int \cos(3x-7) dx$	30	$\int \sin(9x+7) dx$

Задача 6. Знайти інтеграл від функції $\int f(x) dx$ методом заміни

Варіант	Функція $f(x)$	Варіант	Функція $f(x)$
1	$\int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx$	16	$\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$
2	$\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx$	17	$\int \frac{\operatorname{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x} dx$
3	$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 3x}}{1+9x^2} dx$	18	$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1+4x^2} dx$
4	$\int \frac{x dx}{e^{3x^2+4}}$	19	$\int e^{\cos x} \sin x dx$
5	$\int \frac{x}{7x^2+4} dx$	20	$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}} dx$
6	$\int \sqrt{\cos 7x} \sin 7x dx.$	21	$\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx$
7	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[3]{\operatorname{tg}^3 x}}$	22	$\int \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{\cos^2 4x} dx$
8	$\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$	23	$\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$
9	$\int \frac{x dx}{e^{x^2+3}}$	24	$\int e^{2x^3-1} x^2 dx$
10	$\int \frac{1-2x}{5x^2-1} dx$	25	$\int \frac{3x-2}{2x^2+7} dx$
11	$\int \sin^6 3x \cos 3x dx.$	26	$\int \sin^4 8x \cos 8x dx$
12	$\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^4 x}$	27	$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}}{\cos^2 5x} dx$
13	$\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$	28	$\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg}^3 x}$
14	$\int \frac{x^2 dx}{e^{x^3+1}}$	29	$\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$
15	$\int \frac{2x+1}{5x^2+1} dx$	30	$\int \frac{5-x}{3x^2+1} dx$

1.10 Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен

В цій секції розглянемо алгоритм знаходження інтегралів від деяких виразів, які містять квадратний тричлен.

Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Ідея знаходження таких інтегралів полягає у виділенні повного квадрату знаменника. Розглянемо це на прикладі.

Зауваження 1.7. Якщо квадратний тричлен в знаменнику не зведений, то для зручності можна спочатку винести коефіцієнт a за знак інтеграла.

Приклад 22. *Знайти*

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 6}.$$

Розв'язання. Винесемо $\frac{1}{2}$ за знак інтеграла. Після цього виділимо в знаменнику повний квадрат і скористаємося методом заміни. Маємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 6} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2}. \end{aligned}$$

Введемо заміну $u = x + 1$. Тоді $du = dx$. Маємо:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 2}.$$

Даний інтеграл є табличним (див. стор. 6, формула 13). Отже,

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Інші інтеграли такого виду знаходяться аналогічно.

Інтеграли вигляду $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$

В випадку $A = 0$ отримаємо інтеграл попереднього типу (після винесення коефіцієнту B за знак інтеграла). Нехай $A \neq 0$. Наведемо спочатку загальний розв'язок такого інтеграла. Шляхом рівносильних алгебраїчних перетворень маємо

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx =$$

Розіб'ємо на суму двох інтегралів

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \\ &\quad (2ax + b)dx = d(ax^2 + bx + c) \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \\ &= \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \end{aligned}$$

Задача зводиться до знаходження інтеграла виду $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, який вже був розглянутий в цій секції.

Розглянемо цей алгоритм на прикладах.

Приклад 23. *Знайти*

$$\int \frac{3x + 5}{x^2 - 2x + 7}.$$

Розв'язання. Маємо: $d(x^2 - 2x + 7) = 2x - 2$. Нам необхідно записати чисельник в такому вигляді, щоб один із доданків націло поділився би на $2x - 2$. Отже,

$$\begin{aligned} &\int \frac{3x + 5}{x^2 - 2x + 7} dx = \int \frac{3x - 3 + 8}{x^2 - 2x + 7} dx = \\ &= \int \frac{3x - 3}{x^2 - 2x + 7} dx + \int \frac{8}{x^2 - 2x + 7} dx = \\ &= \int \frac{3}{2} \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 7} dx + \int \frac{8}{x^2 - 2x + 7} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 - 2x + 7)}{x^2 - 2x + 7} + 8 \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + (\sqrt{6})^2} = \\ &= \frac{3}{2} \ln |x^2 - 2x + 7| + \frac{8}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{\sqrt{6}} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

Можливі випадки, коли при виділенні повного квадрату в знаменнику число буде відніматися, а не додаватися. В таких випадках знадобиться 11-й табличний інтеграл.

Приклад 24. Знайти $\int \frac{5x-7}{x^2-8x+7} dx$.

Розв'язання. Будемо мати, що

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-7}{x^2-8x+7} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{2x - \frac{14}{5}}{x^2-8x+7} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x-8+8-\frac{14}{5}}{x^2-8x+7} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x-8}{x^2-8x+7} dx + \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{26}{5} \right) \int \frac{dx}{x^2-8x+7} = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2-8x+7)}{x^2-8x+7} + 13 \int \frac{dx}{x^2-2 \cdot 4x+16-16+7} = \\ &= \frac{5}{2} \ln |x^2-8x+7| + 13 \int \frac{dx}{(x-4)^2-9} = \\ &= \frac{5}{2} \ln |x^2-8x+7| + 13 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-4-3}{x-4+3} \right| + C = \\ &= \frac{5}{2} \ln |x^2-8x+7| + \frac{13}{6} \ln \left| \frac{x-7}{x-1} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Аналогічно до першому типу інтегралів з цієї секції, інтеграли такого типу розв'язуються за допомогою виділення повного квадрату (в даному випадку виразу, який знаходиться під коренем). Розглянемо цей алгоритм на прикладі.

Приклад 25. Знайти

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4x+7}}.$$

Розв'язання. Будемо мати, що

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4x+7}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{5 \left(x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{7}{5} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2 \cdot \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2 \cdot \frac{2}{5}x + \frac{4}{25} + \frac{7}{5} - \frac{4}{25}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{2}{5})^2 + \frac{31}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x + \frac{2}{5} + \sqrt{\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{31}{25}} \right| + C = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x + \frac{2}{5} + \sqrt{x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Тут був використаний 12-й табличний інтеграл (довгий логарифм). $\square$

Інтеграли вигляду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

Алгоритм аналогічний до інтегралів другого типу з цієї секції. Надамо спочатку розв'язок такого інтеграла в загальному вигляді (для випадку $A \neq 0$, інакше даний інтеграл є інтегралом виду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, який вже розглядався в цій секції). Маємо:

$$\begin{aligned}
&d(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)dx \\
&\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \\
&= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + B - \frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \\
&= \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \\
&= \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \\
&= \frac{A}{2a} \cdot 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \\
&= \frac{A}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.
\end{aligned}$$

Знаходження інтегралів типу $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ вже розглянуто у цьому параграфі.

Приклад 26. Знайти

$$\int \frac{5x + 1}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}} dx.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+6) + (1 - \frac{5}{2} \cdot 6)}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx = \\
 &= \frac{5}{2} \int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{x^2+6x+10}} + (1-15) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}} = \\
 &= \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2+6x+10)}{\sqrt{x^2+6x+10}} - 14 \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2 \cdot 3x+3^2)+10-3^2}} = \\
 &= \frac{5}{2} \cdot 2\sqrt{x^2+6x+10} - 14 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2+1}} = \\
 &= 5\sqrt{x^2+6x+10} - 14 \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2+1}} = \\
 &= 5\sqrt{x^2+6x+10} - 14 \ln |x+3 + \sqrt{(x+3)^2+1}| + C = \\
 &= 5\sqrt{x^2+6x+10} - 14 \ln |x+3 + \sqrt{x^2+6x+10}| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Приклад 27. Знайти

$$\int \frac{4x-5}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{4x-5}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx &= -2 \int \frac{-2x+2 + \frac{5}{2} - 2}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx = \\
 &= -2 \int \frac{-2x+2}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x-3)}} = \\
 &= -2 \int \frac{d(-x^2+2x+3)}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \\
 &= -4\sqrt{-x^2+2x+3} - \arcsin \frac{x-1}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Зауваження 1.8. При знаходженні останнього інтеграла ми скористалися табличним інтегралом №14 на стор. 6. В випадках, коли коефіцієнт перед x^2 від'ємний, для початку треба винести « $-$ » за дужки і після виділити повний квадрат.

1.11 Завдання для самоконтролю

1. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\int \frac{4x-5}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx = -4\sqrt{-x^2+2x+3} - \arcsin \frac{x-1}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4x+7}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x + \frac{2}{5} + \sqrt{x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\frac{5x-7}{x^2-8x+7} dx = \frac{5}{2} \ln |x^2-8x+7| + \frac{13}{6} \ln \left| \frac{x-7}{x-1} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.12 Завдання для самостійної роботи № 4

Задача 7. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція $f(x)$, точка x_0	Варіант	Функція $f(x)$, точка x_0
1	$\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$	16	$\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$
2	$\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$	17	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}$
3	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$	18	$\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$
4	$\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$	19	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$	20	$\int \frac{dx}{2x^2+3x}$
6	$\int \frac{dx}{2x^2-7x+1}$	21	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$
7	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$	22	$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$
8	$\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$	23	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$	24	$\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$
10	$\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$	25	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$	26	$\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$
12	$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$	27	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}$	28	$\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$
14	$\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$	29	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$	30	$\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$

Задача 8. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція $f(x)$, точка x_0	Варіант	Функція $f(x)$, точка x_0
1	$\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4} dx$	16	$\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx$
2	$\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx$	17	$\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2} dx$
3	$\int \frac{x+6}{3x^2+x+1} dx$	18	$\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}} dx$
4	$\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx$	19	$\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5} dx$
5	$\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6} dx$	20	$\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$
6	$\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx$	21	$\int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx$
7	$\int \frac{xdx}{2x^2+x+5} dx$	22	$\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}} dx$
8	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx$	23	$\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3} dx$
9	$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$	24	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}} dx$
10	$\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}} dx$	25	$\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13} dx$
11	$\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx$	26	$\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx$
12	$\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$	27	$\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx$
13	$\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8} dx$	28	$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx$
14	$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx$	29	$\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5} dx$
15	$\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1} dx$	30	$\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx$

1.13 Інтегрування частинами

Як можна зрозуміти зі змісту перших розділів, процес інтегрування є дещо складнішим в порівнянні з диференціюванням. На відміну від диференціювання, для інтегралів немає формули інтеграла від добутку, частку, або складеної функції. Це робить процес інтегрування менш механічним, в порівнянні з взяттям похідної. Проте, є певний аналог формули похідної від добутку.

Метод інтегрування частинами ґрунтується на формулі похідної добутку двох функцій. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ — неперервно диференційовні функції на проміжку I . Маємо

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності, отримаємо:

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx.$$

Позначивши $du = u'(x) dx$, $dv = v'(x) dx$, дістанемо **формулу інтегрування частинами**:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Дуже важливим є правильний вибір функцій u та dv . Зазвичай за u обирають таку функцію, похідна якої є простішою за саму функцію (наприклад, многочлен чи логарифм), а за dv — вираз, який легко інтегрувати (наприклад, експонента, тригонометрична функція).

Надалі наведемо деякі типові типи завдань, які виконуються цим методом і деякі орієнтири, які допоможуть при розв'язку.

Інтеграли від логарфмів, або логарифмів, помножених на многочлен

В інтегралах такого вигляду зручно позначати через u — логарифм, а все інше через dv .

Приклад 28. Знайти

$$\int \ln x dx.$$

Розв'язання. Позначимо через $u = \ln x$, а через $dv = dx$. Звідси $du = \frac{1}{x} dx$. Для того, щоб знайти v необхідно взяти інтеграл від її диференціала. Отже, $v = \int dx = x$.¹ Тепер у нас є усі необхідні величини, щоб скористатися інтегруванням частинами. Маємо:

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Приклад 29. Знайти

$$\int x \cdot \ln x dx.$$

Розв'язання. Позначимо через $u = \ln x$, а через $dv = x dx$. Звідси $du = \frac{1}{x} dx$, $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$,

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

¹При знаходженні функції v при інтегруванні частинами, вважаємо константу C рівною нулю

Зауваження 1.9. При інтегруванні виразів, які містять логарифм зі степенем, за u , як правило, зручно позначати логарифм разом зі степенем.

Деякі приклади вимагають багаторазового використання інтегрування частинами (2,3, або навіть більше). Розглянемо наступний приклад

Приклад 30. Знайти

$$\int x \cdot \ln^2 x dx.$$

Розв'язання. Позначимо через $u = \ln^2 x$, а через $dv = x dx$. Звідси $du = \frac{2}{x} \ln x dx$, $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$. Отже,

$$\int x \cdot \ln^2 x dx = \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{2}{x} \ln x = \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \ln x \cdot x dx.$$

За допомогою інтегрування частинами ми змогли понизити степінь біля інтеграла. Інтеграл $\int \ln x \cdot x dx$ вже знайдений в попередньому прикладі. Тому

$$\int x \cdot \ln^2 x dx = \ln^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Інтеграли від експоненти помноженій на многочлен

В завданнях такого типу за u зручно позначати многочлен.

Приклад 31. Знайти

$$\int x \cdot e^{-5x} dx.$$

Розв'язання. Позначимо через $u = x$, а через $dv = e^{-5x} dx$. Звідси $du = dx$, $v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$. Будемо мати, що

$$\int x \cdot e^{-5x} dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} \cdot x - \int -\frac{1}{5}e^{-5x} = -\frac{1}{5}e^{-5x} \cdot x - \frac{1}{25}e^{-5x} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Інтеграли від тригонометричних функцій помножених на многочлен

В інтегралах такого типу зручно позначати за u многочлен.

Приклад 32. Знайти $\int x \cdot \cos 8x \, dx$.

Розв'язання. Позначимо через $u = x$, а через $dv = \cos 8x \, dx$. Звідси $du = dx$, $v = \frac{1}{8} \sin 8x$. Маємо:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos 8x \, dx &= \frac{1}{8} \sin 8x \cdot x - \int \frac{1}{8} \sin 8x \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \sin 8x \cdot x + \frac{1}{64} \cos 8x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

Інтеграли від обернених тригонометричних функцій, помножених на многочлен, або просто обернених тригонометричних функцій

В інтегралах такого типу зручно позначати за u обернену тригонометричну функцію.

Приклад 33. Знайти

$$\int \arccos x \, dx.$$

Розв'язання. Позначимо через $u = \arccos x$, а через $dv = dx$. Звідси $du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $v = x$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Інтеграл $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ знайдемо заміною $t = 1 - x^2$. Тоді $dt = -2x dx$. Звідси $x dx = \frac{dt}{-2}$, крім того,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Отже,

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Інтеграли, що зводяться самі до себе (Циклічні інтеграли)

Метод зведення інтеграла до самого себе (або метод повторного інтегрування частинами) використовується для розв'язання певних типів інтегралів, де початковий інтеграл знову з'являється в процесі обчислення. Це дозволяє сформулювати рівняння та алгебраїчно знайти його значення. Цей метод застосовується, коли інтеграл має вигляд добутку двох функцій, що не «змінюються», або «повторюються» після диференціювання та інтегрування. Найбільш поширеними прикладами є добутки показникової та тригонометричної функцій, наприклад $\int e^{ax} \sin(bx) dx$ або $\int e^{ax} \cos(bx) dx$. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 34. *Знайти*

$$\int \frac{\ln x}{x}.$$

Розв'язання. Цей інтеграл найбільш доцільно знайти за допомогою методу підведення під спільний знак диференціала, або методом заміни (переконайтеся самостійно). Проте, ми підемо дещо іншим шляхом. Позначимо через $u = \ln x$, а через $dv = \frac{1}{x} dx$. Тоді $du = \frac{1}{x} dx$, а $v = \ln x$. Використаємо інтегрування частинами. Маємо:

$$\int \frac{\ln x}{x} = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

На перший погляд може здатися, що метод інтегрування частинами тут є неефективним. Справді, задача по знаходженню інтеграла $\frac{\ln x}{x}$ звелася до знаходження того самого інтеграла. Проте, ми можемо знайти цей інтеграл алгебраїчно. Справді, позначимо через $I = \frac{\ln x}{x}$. Маємо рівняння:

$$I = \ln^2 x - I, \quad 2I = \ln^2 x, \quad I = \frac{\ln^2 x}{2}.$$

Додамо константу до отриманого результату. Маємо кінцеву відповідь:

$$\int \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln^2 x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Приклад 35. *Знайти*

$$\int e^{2x} \cos(x) dx.$$

Розв'язання. Для інтегралів такого вигляду не є важливим, яку з функцій ми позначимо за u , а яку разом з dx позначимо за dv . Проте, важливо буде при повторному інтегруванні частинами дотримуватися тієї ж самої логіки позначень. Позначимо через $u = e^{2x}$, а через $dv = \cos x \, dx$. Тоді $du = 2e^{2x} dx$, $v = \sin x$. Застосуємо інтегрування частинами. Будемо мати:

$$\int e^{2x} \cos(x) \, dx = \sin x \cdot e^{2x} - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx .$$

Скористаємося аналогічними позначеннями в другому інтегралі. Нехай тепер $u = e^{2x}$, $dv = \sin x \, dx$. Тоді $du = 2e^{2x} dx$, $v = -\cos x$,

$$2 \int e^{2x} \sin x \, dx = -2e^{2x} \cos x + 4 \int e^{2x} \cos x \, dx .$$

Звідси маємо:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos(x) \, dx &= \sin x \cdot e^{2x} - \left[-2e^{2x} \cos x + 4 \int e^{2x} \cos x \, dx \right] = \\ &= \sin x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x \, dx . \end{aligned}$$

Нехай $I = \int e^{2x} \cos(x) \, dx$. Маємо рівняння

$$I = \sin x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cos x - 4I ,$$

$$5I = \sin x \cdot e^{2x} + 2 \cos x \cdot e^{2x} ,$$

$$I = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) ,$$

$$\int e^{2x} \cos(x) \, dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C , \quad C \in \mathbb{R} . \quad \square$$

1.14 Завдання для самоконтролю

1. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\int e^{2x} \cos(x) dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\int \arccos x dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\int x \cdot e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} e^{-5x} \cdot x - \frac{1}{25} e^{-5x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.15 Завдання для самостійної роботи № 5

Задача 9. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція $f(x)$,	Варіант	Функція $f(x)$,
1	$\int \operatorname{arctg} 2x \, dx$	16	$\int \arcsin 5x \, dx$
2	$\int x \cos 6x \, dx$	17	$\int \ln(x-7) \, dx$
3	$\int \arcsin 3x \, dx$	18	$\int x \cos(x+6) \, dx$
4	$\int \arccos 2x \, dx$	19	$\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \, dx$
5	$\int \operatorname{arctg} 8x \, dx$	20	$\int \ln(x+8) \, dx$
6	$\int x \sin(x-2) \, dx$	21	$\int \operatorname{arctg} \frac{x}{5} \, dx$
7	$\int \arcsin 8x \, dx$	22	$\int \ln(x+12) \, dx$
8	$\int x \sin(x+3) \, dx$	23	$\int \arcsin \frac{x}{5} \, dx$
9	$\int x \cos(x+4) \, dx$	24	$\int \ln(2x-1) \, dx$
10	$\int \arccos 7x \, dx$	25	$\int \ln(2x+3) \, dx$
11	$\int x \cos(x-7) \, dx$	26	$\int \arccos \frac{x}{5} \, dx$
12	$\int x \sin(x-5) \, dx$	27	$\int \operatorname{arctg} \frac{x}{4} \, dx$
13	$\int (x-4)e^x \, dx$	28	$\int \arcsin \frac{x}{7} \, dx$
14	$\int xe^{-6x} \, dx$	29	$\int \operatorname{arctg} 6x \, dx$
15	$\int \operatorname{arctg} 7x \, dx$	30	$\int \arccos \frac{x}{3} \, dx$

Задача 10. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція $f(x)$,	Варіант	Функція $f(x)$,
1	$\int \sqrt{1-x} \arccos \sqrt{x} dx$	16	$\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} dx$
2	$\int \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} dx$	17	$\int \operatorname{arctg} 2x dx$.
3	$\int x \operatorname{arctg} 2x dx$.	18	$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$
4	$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$	19	$\int \arcsin 2x dx$.
5	$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx$	20	$\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
6	$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$	21	$\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx$
7	$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$	22	$\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$
8	$\int x \arcsin x dx$	23	$\int x \operatorname{arctg} 2x dx$
9	$\int x \operatorname{arctg} x dx$	24	$\int \operatorname{arctg}(x+5) dx$
10	$\int x \operatorname{arctg} x dx$	25	$\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$
11	$\int \frac{x \arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$	26	$\int x \operatorname{arctg}^2 x dx$
12	$\int \arccos 2x dx$	27	$\int x^2 \cos \frac{x}{3} dx$
13	$\int \operatorname{arctg} x dx$	28	$\int x \operatorname{arctg}^2 x dx$
14	$\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$	29	$\int x^2 \sin 2x dx$
15	$\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	30	$\int (x^2+4)e^{2x} dx$

Задача 11. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція $f(x)$,	Варіант	Функція $f(x)$,
1	$\int e^{3x} \sin(4x)dx$	16	$\int e^{3x} \cos(4x)dx$
2	$\int e^{-2x} \sin(x)dx$	17	$\int e^{-2x} \cos(x)dx$
3	$\int e^x \sin(5x)dx$	18	$\int e^x \cos(5x)dx$
4	$\int e^{-4x} \sin(3x)dx$	19	$\int e^{-4x} \cos(3x)dx$
5	$\int e^{2x} \sin(6x)dx$	20	$\int e^{2x} \cos(6x)dx$
6	$\int e^{-3x} \sin(2x)dx$	21	$\int e^{-3x} \cos(2x)dx$
7	$\int e^{5x} \sin(x)dx$	22	$\int e^{5x} \cos(x)dx$
8	$\int e^{x/2} \sin(x)dx$	23	$\int e^{x/2} \cos(x)dx$
9	$\int e^{-x/3} \sin(4x)dx$	24	$\int e^{-x/3} \cos(4x)dx$
10	$\int e^{4x} \sin(\frac{x}{2})dx$	25	$\int e^{4x} \cos(\frac{x}{2})dx$
11	$\int e^x \sin(x)dx$	26	$\int e^x \cos(x)dx$
12	$\int e^{-x} \sin(x)dx$	27	$\int e^{-x} \cos(x)dx$
13	$\int e^{10x} \sin(10x)dx$	28	$\int e^{10x} \cos(10x)dx$
14	$\int e^{-5x} \sin(5x)dx$	29	$\int e^{-5x} \cos(5x)dx$
15	$\int e^x \sin(2x)dx$	30	$\int e^{2x} \cos(x)dx$

1.16 Інтегрування раціональних функцій

Ця секція присвячена інтегруванню раціональних функцій (раціональних дробів). Це вирази виду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де чисельник і знаменник є многочленами степеня n і m відповідно. Нагадаємо, що степінь многочлена з однією змінною – це найбільший показник степеня серед усіх членів (одночленів) многочлена (наприклад, степінь многочлена $x^3 + 5x^2 + 7x - 5$ рівний – 3). Також згадаємо, що раціональний дріб називають правильним, якщо степінь чисельника менша за степінь знаменника. Як вже зазначалося раніше, достатньо багато операцій в математиці мають обернені. Ще зі шкільного курсу математики добре відомою є операція зведення до спільного знаменника. За допомогою цього прийому можна подавати суму кількох раціональних дробів у вигляді одного. Проте при інтегруванні може бути значно зручніше подавати підінтегральний раціональний вираз у вигляді суми кількох. Важливими є наступні теореми.

Теорема 1.3. *Кожен многочлен $P_n(x)$ із дійсними коефіцієнтами єдиним чином можна розкласти на дійсні множники вигляду*

$$x - a \quad \text{та} \quad x^2 + px + q,$$

де $a, p, q \in \mathbb{R}$, причому квадратичні множники не мають дійсних коренів і, отже, нерозкладні на дійсні лінійні множники. Об'єднуючи однакові множники, многочлен $P_n(x)$ можна записати як добуток

$$P_n(x) = a_0(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_k)^{\alpha_k} \times (x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1} \dots (x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l},$$

де $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$, $\mu_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, l$;

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k + 2\mu_1 + \dots + 2\mu_l = n.$$

Теорема 1.4. *Правильний дріб*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad (n < m)$$

зі знаменником

$$Q_m(x) = a_0(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_k)^{\alpha_k} \times (x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1} \dots (x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l},$$

де $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$, $\mu_j \in \mathbb{N}$, $p_j^2 - 4q_j < 0$, $j = 1, \dots, l$, можна єдиним чином розкласти на суму елементарних дробів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \frac{A_{k1}}{x - a_k} + \frac{A_{k2}}{(x - a_k)^2} + \dots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - a_k)^{\alpha_k}} \\
& + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_{1\mu_1}x + N_{1\mu_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} \\
& + \dots + \frac{M_{l1}x + N_{l1}}{x^2 + p_lx + q_l} + \dots + \frac{M_{l\mu_l}x + N_{l\mu_l}}{(x^2 + p_lx + q_l)^{\mu_l}}.
\end{aligned}$$

У цьому розкладі

$$A_{11}, \dots, A_{1\alpha_1}, \dots, A_{k1}, \dots, A_{k\alpha_k},$$

$$M_{11}, N_{11}, \dots, M_{1\mu_1}, N_{1\mu_1},$$

$$\dots, M_{l1}, N_{l1}, \dots, M_{l\mu_l}, N_{l\mu_l}$$

– деякі дійсні сталі, невизначені коефіцієнти, частина яких може дорівнювати нулеві. Їхня загальна кількість дорівнює степеню многочлена у знаменнику, тобто m .

Відзначимо, що у розкладі многочлена Q_n можуть бути лише многочлени першого, або другого степеня піднесені до деяких степенів. Цей прийом дозволяє зводити інтеграли до простіших. Відзначимо, що інтеграли тих типів, які при цьому виникають, вже розібрані в попередніх секціях. Для того, щоб знайти невідомі коефіцієнти в чисельниках, використовується наступна теорема:

Теорема 1.5. *Два многочлени можуть бути тотожно рівними тоді і лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x рівні між собою, тобто якщо*

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = b_1x^n + b_2x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n,$$

то маємо

$$a_1 = b_1,$$

$$a_2 = b_2,$$

$$\vdots$$

$$a_n = b_n.$$

Приклад 36. Знайти $\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} dx$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою 1.4. Тоді маємо, що

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \right) dx.$$

Коефіцієнти в чисельниках новоутворених дробів на даний момент невідомі. Знаходження цих коефіцієнтів в чисельниках відбувається за допомогою методу **невизначених коефіцієнтів**. Його суть полягає в тому, що ми хочемо підібрати коефіцієнти таким чином, щоб дріб, який був під інтегралом спочатку, був тотожно рівний сумі цих дробів. Тобто, будемо підбирати числа A, B, C таким чином, щоб

$$\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} = \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \right).$$

Зведемо до спільного знаменника праву частину. Будемо мати:

$$\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}.$$

Оскільки знаменники у лівій і правій частини рівні, то чисельники теж повинні будуть рівні. Маємо:

$$\begin{aligned} 2x-3 &= A(x-1)(x-2) + B(x-2)x + Cx(x-1), \\ 2x-3 &= Ax^2 - 3Ax + 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx^2 - Cx, \\ 2x-3 &= (A+B+C)x^2 + (-3A-2B-C)x + 2A. \end{aligned}$$

Скористаємося теоремою 1.5. Маємо систему:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -3A-2B-C=2 \\ 2A=-3 \end{cases}.$$

Звідси $A = -\frac{3}{2}, B = 1, C = \frac{1}{2}$. Знаючи коефіцієнти можемо повернутися до знаходження інтеграла. Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} dx &= \int \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2} \right) = \\ &= -\frac{3}{2} \ln |x| + \ln |x-1| + \frac{1}{2} \ln |x-2| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

Зауваження 1.10. При використанні методу невизначених коефіцієнтів виникає потреба в розв'язанні системи лінійних рівнянь. Для розв'язань систем можна використовувати будь-який з відомих методів (метод Гаусса, метод Крамера, матричний метод)

Зауваження 1.11. Якщо знаменник має різні дійсні корені, то зручнішим є метод **часткових значень** (ми продемонструємо його для порівняння на тому ж самому прикладі). В інших випадках може бути зручним поєднання методу невизначених коефіцієнтів і методу часткових значень.

Приклад 37. *Знайти*

$$\int \frac{2x - 3}{x(x - 1)(x - 2)} dx.$$

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнти іншим методом. Спочатку виконаємо ті ж самі кроки, що і при попередньому розв'язанні. Маємо:

$$2x - 3 = A(x - 1)(x - 2) + B(x - 2)x + Cx(x - 1).$$

Нам необхідно підібрати коефіцієнти таким чином, щоб $2x - 3$ і $A(x - 1)(x - 2) + B(x - 2)x + Cx(x - 1)$ були тотожно рівні. Якщо вони рівні при усіх значеннях змінної, то рівні і при деяких конкретних. Це дозволяє підставити деякі особливо зручні значення. Очевидно, що такими будуть такі значення змінної, при яких деякі коефіцієнти зникають, що дозволяє зводити задачу по пошуку коефіцієнтів до рівнянь з однією змінною. Такими значеннями тут є $x = 0, x = 1, x = 2$. Підставимо по черзі ці значення:

1)

$$x = 0$$

$$-3 = 2A$$

$$A = \frac{-3}{2} = -1.5$$

2)

$$x = 1$$

$$-1 = -B$$

$$B = 1$$

3)

$$x = 2$$

$$1 = 2C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

Подальші кроки після знаходження коефіцієнтів співпадають з попереднім методом. $\square$

Приклад 38. *Знайти*

$$\int \frac{x \, dx}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Розв'язання.

$$\int \frac{x \, dx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx,$$

$x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$. Розкривши дужки, отримуємо систему:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 2A + C = 1, \\ A - B - C = 0. \end{cases}$$

Звідси $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{2}$. Тоді

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{x \, dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln |x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C,$$

або скорочено

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2(x+1)} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square.$$

Приклад 39. *Знайти*

$$\int \frac{x \, dx}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Розв'язання. Розкладемо на прості дроби:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Домножимо на знаменник:

$$x = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

Розкриваємо дужки:

$$x = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C.$$

Згрупуємо:

$$x = (A + B)x^2 + (-B + C)x + (A - C).$$

Прирівнюємо коефіцієнти:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -C + B = -1, \\ A - C = 0. \end{cases}$$

Отримаємо:

$$A = C, \quad B = -A, \quad C - B = 1.$$

Звідси $2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$. Отже,

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

Інтеграл:

$$\int \frac{x \, dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Обчислюємо:

$$\frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Описаний алгоритм підходить для інтегрування правильних дробів. У випадку неправильного дробу необхідно спочатку поділити чисельник на знаменник.

Приклад 40. *Знайти*

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} \, dx.$$

Розв'язання. Виконаємо ділення чисельника на знаменник:

$$\frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = x - 2 + \frac{2x^2 + 10x - 5}{x(x^2 + 2x + 5)}.$$

Подано остачу від ділення у вигляді суми декількох дробів:

$$\frac{2x^2 + 10x - 5}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти, одержуємо систему

$$A + B = 2, \quad 2A + C = 10, \quad 5A = -5,$$

звідки знаходимо $A = -1$, $B = 3$, $C = 12$. Тоді

$$\frac{2x^2 + 10x - 5}{x(x^2 + 2x + 5)} = -\frac{1}{x} + \frac{3(x + 4)}{x^2 + 2x + 5}.$$

Отже,

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx = \int \left(x - 2 - \frac{1}{x} + \frac{3(x + 4)}{x^2 + 2x + 5} \right) dx.$$

Інтегруємо почленно:

$$\int \left(x - 2 - \frac{1}{x} + \frac{3(x + 4)}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \ln|x| + 3 \int \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Зробимо підстановку $u = x + 1$. Тоді $x^2 + 2x + 5 = u^2 + 4$, $x + 4 = u + 3$:

$$3 \int \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 5} dx = 3 \int \frac{u + 3}{u^2 + 4} du = \frac{3}{2} \ln(u^2 + 4) + \frac{9}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right).$$

Повертаючись до змінної x , остаточно одержуємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx &= \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \ln|x| + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) + \\ &+ \frac{9}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

1.17 Завдання для самостійної роботи № 6

Задача 12. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція	Варіант	Функція
1	$\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx$	16	$\int \frac{4x^2+32x+52}{(x^2+6x+5)(x+3)} dx$
2	$\int \frac{12}{(x-2)(x^2-2x+3)} dx$	17	$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx$
3	$\int \frac{43x-67}{(x-1)(x^2-x-12)} dx$	18	$\int \frac{2x^4+8x^3-17x-5}{(x^2+2x-3)(x+2)} dx$
4	$\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)} dx$	19	$\int \frac{2x^4+17x^2+40x^2+37x+36}{(x+1)(x^2+8x+15)} dx$
5	$\int \frac{8x}{(x^2+6x+5)(x+3)} dx$	20	$\int \frac{6x^2}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx$
6	$\int \frac{2x^4-7x^3+7x^2-8x}{(x^2-5x+6)(x+1)} dx$	21	$\int \frac{6x^4}{(x-1)(x^2+2)} dx$
7	$\int \frac{2x^4+8x^3-45x-61}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx$	22	$\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx$
8	$\int \frac{2x^4+17x^3+32x^2-7x}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx$	23	$\int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)} dx$
9	$\int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)} dx$	24	$\int \frac{2x^4-5x^3-15x^2+40x-70}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx$
10	$\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx$	25	$\int \frac{2x^4-7x^3+2x^2+13}{(x^2+x-2)(x+3)} dx$
11	$\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)} dx$	26	$\int \frac{6x^4-21x^2+3x+24}{(x^2+x-2)(x+1)} dx$
12	$\int \frac{2x^4-7x^3+3x+20}{(x-2)(x^2-2x-3)} dx$	27	$\int \frac{2x^4-3x^3-21x^2-26}{(x^2-5x+4)(x+3)} dx$
13	$\int \frac{3x^2-15}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx$	28	$\int \frac{7x^2-17x}{(x-2)(x^2-2x-3)} dx$
14	$\int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx$	29	$\int \frac{6x^4-30x^2+30}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx$
15	$\int \frac{6x}{x^3+2x^2-x-2} dx$	30	$\int \frac{3x^2-17x+2}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx$

Задача 13. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція	Варіант	Функція
1	$\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$	16	$\int \frac{6-9x}{x^3+8} dx$
2	$\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx$	17	$\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$
3	$\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$	18	$\int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx$
4	$\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$	19	$\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$
5	$\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx$	20	$\int \frac{19x-x^2-34}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$
6	$\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1} dx$	21	$\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$
7	$\int \frac{36}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$	22	$\int \frac{8}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx$
8	$\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$	23	$\int \frac{3x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$
9	$\int \frac{7x-10}{x^3+8} dx$	24	$\int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx$
10	$\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$	25	$\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8} dx$
11	$\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2} dx$	26	$\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$
12	$\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$	27	$\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1} dx$
13	$\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8} dx$	28	$\int \frac{6x}{x^2-1} dx$
14	$\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$	29	$\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx$
15	$\int \frac{3-9x}{x^3-1} dx$	30	$\int \frac{2x+2}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$

1.18 Інтегрування ірраціональних виразів

В цій секції розглянемо деякі прийоми інтегрування ірраціональних функцій. Деякі прийоми дозволяють звести інтегрування ірраціональних функцій певного вигляду до інтегрування раціональних функцій. Розглянемо деякі види з них.

Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x, \frac{ax+b}{cx+d}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i/s_i}\right) dx,$$

де R — раціональна функція, a, b, c, d — сталі, r_i, s_i — цілі додатні числа, $i = 1, \dots, \nu$.

Такий інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції нової змінної u за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = u^m,$$

де число m — найменше спільне кратне (НСК) знаменників дробів $\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_\nu}{s_\nu}$, тобто

$$m = (s_1, \dots, s_\nu).$$

Зокрема, інтеграл виду

$$\int R(x, x^{r_1/s_1}, \dots, x^{r_\nu/s_\nu}) dx$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції нової змінної u за допомогою підстановки $x = u^m$.

Приклад 41. *Знайти*

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} - 1} dx.$$

Розв'язання. Оскільки $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, нам необхідно ввести заміну $x = t^4$ (бо 4 є НСК чисел 2 і 4). Далі пошук інтеграла зводиться до інтегрування раціонального дробу:

$$x = t^4; \quad t = \sqrt[4]{x}; \quad dx = 4t^3 dt.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} - 1} dx &= \int \frac{t^2}{t^3 - 1} \cdot 4t^3 dt = \\
 &= 4 \int \frac{t^2 ((t^3 - 1) + 1)}{t^3 - 1} dt = 4 \int t^2 dt + 4 \int \frac{t^2}{t^3 - 1} dt = \\
 &= \left\{ d(t^3 - 1) = 3t^2 dt \Rightarrow 4 \int t^2 dt + \frac{4}{3} \int \frac{d(t^3 - 1)}{t^3 - 1} dt \right\} = \\
 &= \frac{4}{3} t^3 + \frac{4}{3} \ln |t^3 - 1| + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \frac{4}{3} \ln \left| \sqrt[4]{x^3} - 1 \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Приклад 42. Знайти

$$\int \frac{dx}{(3 + 2x)^{\frac{2}{3}} - (3 + 2x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Розв'язання. Спільний знаменник дробів $\frac{2}{3}$ і $\frac{1}{2}$ дорівнює $s = 6$. Підстановка $3 + 2x = t^6$, тоді $dx = 3t^5 dt$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(3 + 2x)^{\frac{2}{3}} - (3 + 2x)^{\frac{1}{2}}} &= 3 \int \frac{t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t - 1}; \\
 3 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t - 1} dt &= 3 \int (t + 1) dt + 3 \int \frac{dt}{t - 1} = 3 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln |t - 1| \right) + C.
 \end{aligned}$$

Повертаємось до x :

$$t = \sqrt[6]{3 + 2x},$$

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dx}{(3 + 2x)^{\frac{2}{3}} - (3 + 2x)^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= 3 \left(\frac{\sqrt[3]{3 + 2x}}{2} + \sqrt[6]{3 + 2x} + \ln \left| \sqrt[6]{3 + 2x} - 1 \right| \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Приклад 43. Знайти $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$.

Розв'язання. Впровадимо заміну

$$t^2 = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Звідси

$$\begin{aligned}
 (1+x)t^2 &= 1-x, & t^2+t^2x &= 1-x, \\
 t^2x+x &= 1-t^2, & x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\
 dx &= -\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt, \\
 \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} &= \int -\frac{t \cdot 4t \cdot (1+t^2)}{(1+t^2)^2(1-t^2)}dt = \\
 &= 4 \int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt = 4 \int \frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}dt.
 \end{aligned}$$

Отримали інтеграл від раціонального дробу. За допомогою методу невизначених коефіцієнтів (переконайтеся в цьому самостійно) дріб під інтегралом можна представити наступним чином:

$$\begin{aligned}
 \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} &= \frac{1}{4} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2(t^2+1)}, \\
 4 \int \frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}dt &= \\
 &= 4 \left(\frac{1}{4} \ln(t-1) - \frac{1}{4} \ln(t+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right) + C = \\
 &= \ln|t-1| - \ln|t+1| + 2 \operatorname{arctg} t + C = \\
 &= \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1} \right| + 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right), \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Розглянемо ще деякі способи інтегрування ірраціональних функцій

Підстановки Ейлера

Розглянемо інтеграли вигляду

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + C}).$$

За допомогою підстановок Ейлера інтеграли такого вигляду зводяться до інтегралів від раціональної функції.

Перша підстановка Ейлера

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a} = t.$$

Цю підстановку можна використовувати, якщо $a > 0$.

Приклад 44. *Знайти*

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Розв'язання. Застосуємо першу підстановку Ейлера:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = x + t, \quad x = \frac{2 - t^2}{2(t - 1)}, \quad dx = -\frac{t^2 - 2t + 2}{2(t - 1)^2} dt.$$

Оскільки

$$x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2x + t = \frac{2 - t}{t - 1},$$

підінтегральний вираз набуває вигляду

$$\frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(t - 1)} + \frac{1}{t - 2} \right) dt.$$

Інтегруючи:

$$I = \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \ln |t - 1| + \ln |t - 2| + C.$$

Повертаючись до змінної x , де

$$t = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x,$$

отримуємо

$$I = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x) - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x - 1| + \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x - 2| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Друга підстановка Ейлера

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}.$$

Цю підстановку можна використовувати, якщо $c > 0$.

Приклад 45. *Знайти*

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + x + 1} \equiv tx + 1, \\ x = \frac{1 - 2t}{t^2 - 1}, \\ dx = \frac{2(t^2 - t + 1)}{(t^2 - 1)^2} dt \end{array} \right\} = \\
 &= \int \frac{2(t^2 - t + 1)}{(-t^2 - t)(t^2 - 1)} dt = \\
 &= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2(t+1)} - \frac{3}{(t+1)^2} - \frac{1}{2(t-1)} \right) dt = \\
 &= \\
 &= 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |t+1| + \frac{3}{t+1} - \frac{1}{2} \ln |t-1| + C = \\
 &= \left\{ t = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x} \right\} = \\
 &= 2 \ln \left| \sqrt{x^2 + x + 1} - 1 \right| - \frac{3}{2} \ln \left| \sqrt{x^2 + x + 1} - 1 + x \right| + \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{x^2 + x + 1} - 1 - x \right| + \\
 &\quad + \frac{3x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1 + x} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Третя підстановка Ейлера

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1),$$

де x_1 — один коренів квадратного тричлена. Третю підстановку Ейлера можна застосовувати, якщо квадратний тричлен має дійсні корені x_1 та x_2 .

Приклад 46. *Знайти*

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}.$$

Розв'язання. Застосуємо третю підстановку Ейлера:

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = t(x - 1) \implies t = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}{x - 1}.$$

Піднесемо до квадрату і виразимо x через t :

$$x = \frac{t^2 + 3}{t^2 + 1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{4t}{(t^2 + 1)^2} dt, \quad x - 1 = \frac{2}{t^2 + 1}, \\ x - 2 &= \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}, \quad \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \frac{2t}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Підставимо зроблені обчислення в інтеграл. Будемо мати:

$$\frac{dx}{(x - 2)\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} = \frac{-\frac{4t}{(t^2 + 1)^2}}{\frac{1 - t^2}{t^2 + 1} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1}} = \frac{2}{t^2 - 1} dt.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} &= \int \frac{2 dt}{t^2 - 1} = \\ &= \int \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right) dt = \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Повертаємося до змінної x :

$$t = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}{x - 1},$$

тому

$$\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} = \ln \left| \frac{\sqrt{-x^2 + 4x - 3} - (x - 1)}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + (x - 1)} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Зауваження 1.12. Використання підстановок Ейлера може приводити до достатньо громіздких обчислень. По цій причині, підстановки Ейлера слід використовувати коли інші методи не спрацьовують.

Інтегральний біном

Нехай a і b – дійсні числа, а m, n, p – раціональні числа. *Диференціальним біномом* (або біноміальним диференціалом) називається вираз виду $I = x^m(a + bx^n)^p$. Доведено, що інтеграли такого типу зводяться до

інтегралів від раціональних функцій. В усіх інших випадках інтеграл не виражається через елементарні функції. Розглянемо ці випадки.

Перший випадок

Нехай p – ціле число. Використовується підстановка $x = t^k$, де k – спільний знаменник дробів m і n .

Приклад 47. Знайти

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x^{1/3})^2} dx.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{x}}{(1+x^{1/3})^2} dx = \{u = x^{1/6} \Rightarrow x = u^6, dx = 6u^5 du\} = \\ &= 6 \int \frac{u^8}{(1+u^2)^2} du = 6 \int \left(u^4 - 2u^2 + 3 - \frac{4}{1+u^2} + \frac{1}{(1+u^2)^2} \right) du = \\ &= 6 \left(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + 3u - 4 \operatorname{arctg} u + \int \frac{du}{(1+u^2)^2} \right) + C = \\ &= 6 \left(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + 3u - 4 \operatorname{arctg} u + \frac{u}{2(1+u^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u \right) + C = \\ &= \frac{6}{5} u^5 - 4u^3 + 18u + \frac{3u}{1+u^2} - 21 \operatorname{arctg} u + C; \\ I &= \frac{6}{5} x^{5/6} - 4x^{1/2} + 18x^{1/6} + \frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} - 21 \operatorname{arctg}(x^{1/6}) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

Другий випадок

Нехай $\frac{m+1}{n}$ – ціле число. Заміна $ax^n + b = t^k$, де k – знаменник дробу p .

Приклад 48. Знайти

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}.$$

Розв'язання. У даному випадку $m = 3$, $n = 2$, тому

$$p = -\frac{3}{2}, \quad \frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}.$$

Виконаємо заміну змінної:

$$t = \sqrt{1 + 2x^2} \Rightarrow 1 + 2x^2 = t^2.$$

Тоді

$$x = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{2}}, \quad dx = \frac{t}{2\sqrt{2(t^2 - 1)}} dt.$$

Підставимо у вираз під знаком інтеграла:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1 + 2x^2)^3}} = \int \frac{\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^{3/2}}{t^3} \cdot \frac{t}{2\sqrt{2(t^2 - 1)}} dt.$$

Після скорочення та спрощення:

$$= \frac{1}{4} \int \frac{t^2 - 1}{t^2} dt = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

Інтегруємо:

$$= \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{t}\right) + C = \frac{t^2 + 1}{4t} + C.$$

Повертаючись до змінної x , отримаємо:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1 + 2x^2)^3}} = \frac{1 + x^2}{2\sqrt{1 + 2x^2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Третій випадок

Нехай $\frac{m+1}{n} + p$ — ціле. Заміна $\frac{ax^n + b}{x^n} = t^k$, де k — знаменник дробу p .

Приклад 49. Знайти

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1 + x^4}}.$$

Розв'язання. Тут маємо:

$$m = -11, \quad n = 4, \quad p = -\frac{1}{2}, \quad \frac{m+1}{n} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}, \quad p + \frac{m+1}{n} = -3 - \text{ціле}.$$

Тому робимо заміну:

$$t = \sqrt{\frac{1 + x^4}{x^4}}.$$

Звідси:

$$t = \sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}} \Rightarrow 1+x^4 = t^2 x^4 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{t^2-1}.$$
$$x = (t^2-1)^{-1/4}, \quad dx = -\frac{1}{2}(t^2-1)^{-5/4} t dt.$$

Підставимо це у початковий інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{2} \int (t^2-1)^{11/4} (t^2-1)^{-5/4} \frac{t dt}{t^3} = -\frac{1}{2} \int (t^2-1)^2 t dt.$$

Розкриваємо дужки:

$$-\frac{1}{2} \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t \right) + C.$$

Повертаємось до змінної x :

$$t = \sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2},$$

тоді остаточно маємо:

$$-\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2} \left(\frac{(1+x^4)^2}{5x^8} - \frac{2(1+x^4)}{3x^4} + 1 \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Зауваження 1.13. Доведено, що в інших випадках інтеграл від диференціального бінома не виражається в елементарних функцій (не береться).

1.19 Завдання для самостійної роботи № 7

Задача 14. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція $f(x)$	Варіант	Функція $f(x)$
1	$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$	16	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$
2	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$	17	$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx$
3	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}$	18	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-7}}$
4	$\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}$	19	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-4}}$
5	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}}$	20	$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$
6	$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx$	21	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}$
7	$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$	22	$\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+10}$
8	$\int \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} dx$	23	$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$	24	$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+3)}}$	25	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$
11	$\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx$	26	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$
12	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$	27	$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$
13	$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-1}}$	28	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}$
14	$\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$	29	$\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$
15	$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$	30	$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$

Задача 15. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція $f(x)$	Варіант	Функція $f(x)$
1	$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}dx$	16	$\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}}dx$
2	$\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}dx$	17	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$
3	$\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$	18	$\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}-\sqrt{x-1}}dx$
4	$\int \frac{(\sqrt[3]{x+1})(\sqrt{x+1})}{\sqrt[6]{x^5}}dx$	19	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}}$
5	$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$	20	$\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}dx$
6	$\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}+1}dx$	21	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$
7	$\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}$	22	$\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$
8	$\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$	23	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$
9	$\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}$	24	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$
10	$\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{2\sqrt[6]{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$	25	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}$
11	$\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$	26	$\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}dx$
12	$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$	27	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$
13	$\int \frac{\sqrt[3]{x+3}dx}{\sqrt[6]{x+3}+\sqrt{x+3}}$	28	$\int \frac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}}dx$
14	$\int \frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[6]{x+1})}dx$	29	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$
15	$\int \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x}}dx$	30	$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}}dx$

1.20 Інтеграли від тригонометричних функцій

В попередніх секціях ми вже розглядали інтеграли від функцій, які містять тригонометричні вирази. Розглянемо деякі додаткові прийоми.

Універсальна тригонометрична підстановка

Виведемо деякі формули. Скористаємося основною тригонометричною тотожністю, а також формулою синуса подвійного кута $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Будемо мати:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на $\cos^2 \frac{x}{2}$ та врахуємо, що $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$. Маємо наступну формулу:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Користуючись формулою косинуса подвійного кута можна вивести наступну формулу (виведіть самостійно):

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Позначимо $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Звідси маємо:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Виведемо також чому дорівнює dx в термінах нової змінної:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t,$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{t^2 + 1}.$$

Ця заміна дозволяє зводити функції вигляду $R(\sin x, \cos x) dx$ (де $R(x, y)$ – раціональна функція).

Приклад 50. *Знайти*

$$\int \frac{dx}{8 + 7 \cos x + \sin x}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{8 + 7 \cos x + \sin x} &= \int \frac{2 dt}{(1 + t^2) \left(8 + \frac{7(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right)} \\ &= 2 \int \frac{dt}{8 + 8t^2 + 7 - 7t^2 + 2t} = 2 \int \frac{dt}{15 + t^2 + 2t} = 2 \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 14} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t+1}{\sqrt{14}} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{14}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square\end{aligned}$$

Зауваження 1.14. В багатьох випадках універсальна тригонометрична підстановка призводить до достатньо складних обчислень. Якщо інтеграл береться за допомогою методів розглянутих раніше, то починати треба з них.

В деяких випадках можливі підстановки простіші за універсальну тригонометричну. Наведемо деякі випадки:

1. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (непарність відносно синуса). В таких випадках за нову змінну приймають $t = \cos x$.

2. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (непарність відносно косинуса). В таких випадках за нову змінну приймають $t = \cos x$.

3. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (парність відносно синуса і косинуса одночасно). В таких випадках за нову змінну приймають $t = \cos x$.

Приклад 51. Знайти

$$\int \frac{\cos^3 x \, dx}{2 + \sin x}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\int \frac{\cos^3 x \, dx}{2 + \sin x} = \frac{(-\cos x)^3}{2 + \sin x} = -\frac{\cos^3 x}{2 + \sin x}.$$

Оскільки функція непарна відносно $\cos x$, то вводимо нову змінну:

$$t = \sin x.$$

Маємо:

$$\int \frac{\cos^2 x \cos x \, dx}{2 + \sin x} = \int \frac{1 - \sin^2 x}{2 + \sin x} d(\sin x) = \int \frac{1 - t^2}{2 + t} dt;$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1-t^2}{2+t} dt &= \int \left(-t + 2 - \frac{3}{2+t} \right) dt = -\frac{t^2}{2} + 2t - 3 \ln |t+2| + C = \\ &= -\frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x - 3 \ln |\sin x + 2| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square\end{aligned}$$

1.21 Завдання для самоконтролю

1. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\int \frac{\cos^3 x \, dx}{2 + \sin x} = -\frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x - 3 \ln |\sin x + 2| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\int \frac{dx}{8 + 7 \cos x + \sin x} = \frac{2}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{14}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. Перевірте формулу за допомогою диференціювання:

$$\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.22 Завдання для самостійної роботи № 8

Задача 16. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція $f(x)$	Варіант	Функція $f(x)$
1	$\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$	16	$\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$
2	$\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$	17	$\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x} dx$
3	$\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x} dx$	18	$\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$
4	$\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$	19	$\int \frac{4\sin x+3\cos x+5}{7+6\sin x-5\cos x} dx$
5	$\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$	20	$\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$
6	$\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$	21	$\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x} dx$
7	$\int \frac{dx}{5-3\cos x}$	22	$\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$
8	$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$	23	$\int \frac{dx}{5+3\cos x}$
9	$\int \frac{dx}{3+5\cos x}$	24	$\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$
10	$\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$	25	$\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$
11	$\int \frac{dx}{5+4\sin x}$	26	$\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$
12	$\int \frac{dx}{8+4\cos x}$	27	$\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$
13	$\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$	28	$\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$
14	$\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$	29	$\int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$
15	$\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$	30	

Задача 17. Знайти $\int f(x)dx$.

Варіант	Функція $f(x)$	Варіант	Функція $f(x)$
1	$\int \frac{dx}{8 \sin^2 x - 16 \sin x \cos x}$	16	$\int \frac{dx}{3 \cos^2 x - 2}$
2	$\int \frac{dx}{16 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x}$	17	$\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 3 \cos^2 x}$
3	$\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$	18	$\int \frac{dx}{5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}$
4	$\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$	19	$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x}$
5	$\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}$	20	$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + 4 \cos^4 x} dx$
6	$\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} dx$	21	$\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 16 \sin^2 x}$
7	$\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \cos^2 x}$	22	$\int \frac{dx}{2 \cos^2 x + 3}$
8	$\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}$	23	$\int \frac{dx}{3 - 2 \sin^2 x}$
9	$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$	24	$\int \frac{3 \operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx$
10	$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$	25	$\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin^2 x} dx$
11	$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$	26	$\int \frac{dx}{2 \sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}$
12	$\int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 8 \sin x \cos x}$	27	$\int \frac{dx}{6 - 3 \cos^2 x}$
13	$\int \frac{\sin 2x}{4 \sin^4 x + \cos^4 x} dx$	28	$\int \frac{dx}{6 - 3 \cos^2 x}$
14	$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$	29	$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx$
15	$\int \frac{dx}{4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x}$	30	$\int \frac{\sin^2 x}{3 \sin^2 x - \cos^2 x} dx$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

- [1] Баранівська А.Ф., Герус О.Ф., Осадчий М.М., Таргонський Л.П. *Курс математичного аналізу. Функції однієї змінної*. – Житомир. – 2002. – 326 с.
- [2] Баранівська А.Ф., Осадчий М.М., Таргонський Л.П. *Курс математичного аналізу. Функції багатьох змінних*. – Житомир. – 2000. – 296 с.
- [3] Давидов М.О. *Курс математичного аналізу. Ч.1*. – К.: Вища школа. – 1990. – 383 с.
- [4] Давидов М.О. *Курс математичного аналізу. Ч.2*. – К.: Вища школа. – 1991. – 368 с.
- [5] Давидов М.О. *Курс математичного аналізу. Ч. 3*. – К.: Вища школа. – 1992. – 360 с.
- [6] Шунда Н.М., Томусяк А.А. *Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення*. – К.: Вища школа, 1993.
- [7] Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. *Математичний аналіз: Частина I*. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Видавництво ЖДУ імені Івана Франка, 2022.
- [8] Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. *Математичний аналіз: Частина II*. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Видавництво ЖДУ імені Івана Франка, 2023.
- [9] Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. *Математичний аналіз: Частина III*. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Видавництво ЖДУ імені Івана Франка, 2024.
- [10] Севостьянов Є.О., Скворцов С.О., Таргонський А.Л. *Елементи теорії функцій дійсної змінної*. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Видавництво ЖДУ імені Івана Франка, 2018.