

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник

Житомир

2025

УДК 517.9

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол № 23 від 23 грудня 2025 року)*

Рецензенти:

Валерій ЖУРАВЛЬОВ – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної математики Поліського національного університету.

Олександр ПРИЛИПКО – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету «Житомирська політехніка».

Євген СЕВОСТЬЯНОВ – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Варіаційне числення: навчально-методичний посібник / Укладачі: Таргонський А. Л., Коломієць Т. Ю., Довгопятий О. П. Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2025. 65 с.

Навчально-методичний посібник призначений для вивчення здобувачами закладів вищої освіти фізико-математичних факультетів під керівництвом викладача на лекціях та практичних заняттях. Видання містить матеріали лекційного курсу з практичними прикладами та завданнями для самостійного виконання. Викладений матеріал включає тематику діючої програми Житомирського державного університету імені Івана Франка з освітньої компоненти «Варіаційне числення» для спеціальності Е7 Математика.

УДК 517.9

© Таргонський А. Л., Коломієць Т. Ю., Довгопятий О. П., 2025
©Житомирський державний університет імені Івана Франка, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП	5
Тема 1. Первісні поняття, означення функціонала. Предмет та задачі варіаційного числення	6
Практичні завдання до теми 1	8
Тема 2. Диференційовні функціонали	11
Лема про єдиність варіації диференційовного функціонала	12
Лема про рівність похідної і варіації функціонала.....	13
Приклади диференційовних функціоналів	14
Практичні завдання до теми 2	16
Тема 3. Екстремуми функціоналів	22
Необхідна умова екстремуму функціонала	23
Перша лема про інтеграл	23
Друга лема про інтеграл	25
Третя лема про інтеграл.....	28
Практичні завдання до теми 3	29
Тема 4. Найпростіша задача варіаційного числення	36
Необхідна умова екстремуму для найпростішої задачі варіаційного числення	37
Практичні завдання до теми 4	39
Тема 5. Умовний екстремум функціоналів	46
Метод дослідження умовного екстремуму	46
Екстремальна задача, якщо кінець рухається по вертикальній прямій.....	46
Алгоритм розв'язання екстремальних задач, коли кінець або кінці рухаються по вертикальним прямим.....	48

Екстремальна задача, якщо кінець рухається по кривій	49
Алгоритм розв'язання екстремальних задач, якщо кінець рухається по кривій	51
Практичні завдання до теми 5	52
Список рекомендованої літератури	65

ВСТУП

Варіаційне числення – це розділ математики, що надає математичний апарат для розв’язання задач оптимізації, пошуку екстремумів функцій (екстремалей) та екстремумів функціоналів. Методи варіаційного числення використовуються у фізиці, інженерії, економіці, біології, штучному інтелекті, допомагаючи моделювати природні явища, знаходити оптимальні траєкторії руху та покращувати алгоритми машинного навчання, що підкреслює його практичну цінність у сучасному світі технологій та науки.

Навчально-методичний посібник «Варіаційне числення» містить матеріал, який є необхідною складовою частиною навчального процесу і сприяє розвитку аналітичних та обчислювальних навичок студентів у вирішенні математичних завдань. Метою вивчення курсу «Варіаційне числення» є оволодіння здобувачами методологією та особливостями основ варіаційного числення. Зокрема, це не лише вивчення та розуміння теоретичних аспектів, а й отримання та розвиток практичних навичок і застосування цих знань в майбутніх наукових дослідженнях.

Навчально-методичний посібник «Варіаційне числення» повинен забезпечити у здобувачів високий рівень математичної підготовки з розв’язування оптимізаційних задач, що зводяться до дослідження на екстремум функцій та функціоналів, які широко застосовуються у різних галузях науково-природничих досліджень. Посібник містить стислі теоретичні відомості, приклади завдань з розв’язками та завдання для самостійного виконання за матеріалом курсу. Сподіваємось, що даний навчально-методичний посібник допоможе здобувачам в оволодінні методами та основними математичними підходами до розв’язку задач, буде корисним для викладачів під час проведення лекційних та практичних занять, а також стане у нагоді аспірантам і науковцям.

Тема 1. Первісні поняття, означення функціонала. Предмет та задачі варіаційного числення

Нехай $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, X – деяка множина елементів.

Означення 1. Множина елементів X називається лінійним простором, якщо для елементів цієї множини виконуються умови:

- 1) $\forall a, b \in X: a + b = b + a$ (комутативність);
- 2) $\forall a, b, c \in X: (a + b) + c = a + (b + c)$ (асоціативність);
- 3) $\exists 0 \in X: a + 0 = a$ (існування нульового елемента);
- 4) $\forall a \in X \exists (-a) \in X: a + (-a) = 0$ (існування протилежного елемента);
- 5) $\exists 1 \in X; \forall a \in X: a \cdot 1 = a$;
- 6) $\forall a \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – дійсні числа: $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$;
- 7) $\forall a \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – дійсні числа: $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$
(дистрибутивність відносно суми чисел);
- 8) $\forall a, b \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ (дистрибутивність відносно суми елементів).

Означення 2. Множина X називається нормованим простором, якщо на цій множині визначений такий функціонал $\|\cdot\|$, що для будь-яких елементів цього простору виконуються аксіоми:

- 1) $\forall a \in X: \|a\| \geq 0, \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0, \|a\|$ – норма;
- 2) $\forall a \in X, \forall \alpha$ – число: $\|\alpha \cdot a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$;
- 3) $\forall a, b \in X: \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (нерівність трикутника).

Означення 3. Функціоналом називається відображення деякого функціонального простору у числову множину.

Наприклад, нехай $\mathbb{C}_{[a;b]}$ – множина неперервних функцій на сегменті $[a; b]$. Функція

$$F: \mathbb{C}_{[a;b]} \rightarrow \mathbb{R}$$

переводить множину $\mathbb{C}_{[a;b]}$ у множину дійсних чисел $\mathbb{R}$ (рис. 1).

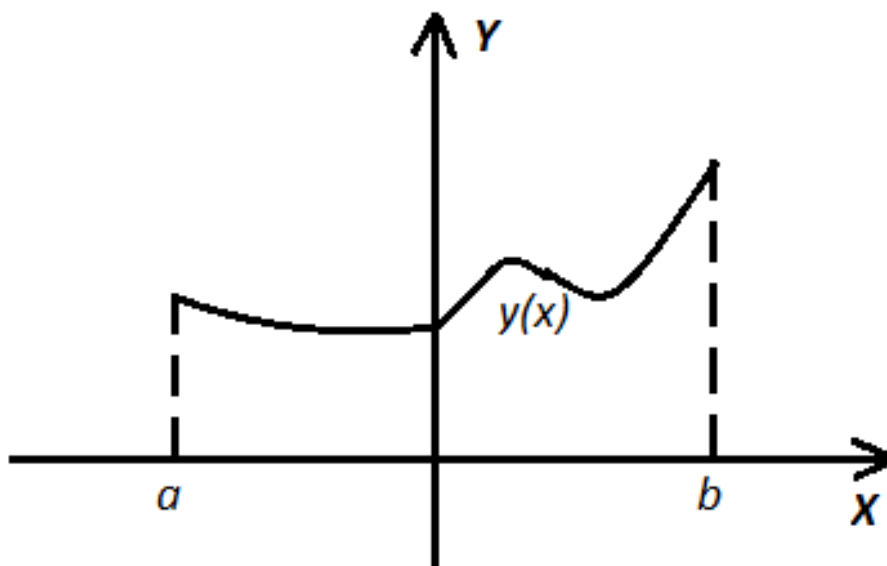


Рис. 1.

Функція $F = F(y(x))$ – функціонал, причому

$$F(y(x)) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx.$$

Означення 4. Функціонал $F(y)$ називається лінійним на деякій функціональній множині X , якщо для будь-яких двох елементів $x, y \in X$ і для будь-яких дійсних чисел α, β виконується рівність:

$$F(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot F(x) + \beta \cdot F(y).$$

Висновок. Функціонал від суми дорівнює сумі функціоналів і сталий множник виноситься за знак функціонала.

Предметом варіаційного числення є побудова аналогу диференціального числення для функціоналів.

Означення 5. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Означення 6. Функціонал $F(y)$ називається неперервним на деякому елементі y_0 функціонального простору $X(y_0 \in X)$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y: 0 < \|y - y_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |F(y) - F(y_0)| < \varepsilon.$$

$$y \in \mathbb{C}_{[a;b]}: \|y\| = \max_{x \in [a;b]} |y(x)|.$$

Означення 7. Функціонал $F(y)$ називається нескінченно малим на елементі y_0 , якщо:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y: 0 < \|y - y_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |F(y)| < \varepsilon.$$

Практичні завдання до теми 1

1.1. Обчислити функціонал при заданих значеннях аргументу:

а) $I[y] = y(4); y_1 = \sqrt{x}; y_2 = \cos \frac{\pi x}{4}.$

б) $I[y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} y; y_1 = \arctg x; y_2 = e^{-x}.$

в) $I[y] = y'(0); y_1 = \frac{x}{\cos x}; y_2 = \operatorname{tg}^2 x^3.$

г) $I[y] = \int_0^2 y^2(x) dx; y_1 = \sin \pi x; y_2 = x e^x.$

д) $I[y] = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx; y_1 = x; y_2 = \ln \cos x.$

е) $I[y, z] = \int_0^{\pi/2} y^3 z dx; y_1 = \cos x; z_1 = \sin^2 x.$

Розв'язання.

а) $I[y_1] = \sqrt{4} = 2; I[y_2] = \cos \frac{4\pi}{4} = -1.$

б) $I[y_1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \pi/2; I[y_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$

в) $I[y_1] = \left(\frac{x}{\cos x} \right)' \Big|_{x=0} = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} \Big|_{x=0} = 1;$

$$I[y_2] = (\operatorname{tg}^2 x^3)'|_{x=0} = 2\operatorname{tg} x^3 \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2 \Big|_{x=0} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{r) } I[y_1] &= \int_0^2 \sin^2 \pi x dx = \int_0^2 \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^2 \cos 2\pi x dx = \\ &= \frac{1}{2} x \Big|_0^2 - \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi x \Big|_0^2 = 1; \end{aligned}$$

$$I[y_2] = \int_0^2 x e^x dx = x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - e^x \Big|_0^2 = 2e^2 - e^2 + 2e^0 = e^2 - 1.$$

$$\text{д) } y_1' = x' = 1; I[y_1] = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + 1^2} dx = \sqrt{2} x \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6};$$

$$y_2 = (\ln \cos x)' = -\operatorname{tg} x; I[y_2] =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + (-\operatorname{tg} x)^2} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \Big|_0^{\pi/6} = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right| = \ln \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{е) } I[y_1, z_1] &= \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin x = u; du = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - u^2 \\ u_H = \sin 0 = 0; u_B = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| = \\ &= \int_0^1 u^2 (1 - u^2) du = \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити функціонал при заданих значеннях аргументу:

$$1) I[y] = \int_0^2 y^2(x) dx, \quad y_1 = \cos \pi x, y_2 = \ln x;$$

$$2) I[y] = \int_0^1 y^3(x) dx, \quad y_1 = \cos \pi x, y_2 = \ln x;$$

$$3) I[y] = y(1) + y'(1), \quad y_1 = \operatorname{tg} \pi x, y_2 = \arcsin \frac{1-x}{1+x};$$

$$4) I[y] = \int_0^1 (y + xy') dx, \quad y_1 = \sin \pi x, y_2 = \operatorname{arctg} x;$$

$$5) I[y] = y'(3), \quad y_1 = (5x + 3)e^{3-x}.$$

Тема 2. Диференційовні функціонали

Нехай:

$y = f(x)$ – деяка функція;

$\Delta x = x - x_0$, $x \neq x_0$ – приріст аргументу;

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – приріст функції.

Означення 8. Функція називається диференційовною в точці x_0 , якщо її приріст можна представити у такому вигляді:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

де

$A - \text{const}$;

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$, α – нескінченно мала функція;

$A \cdot \alpha \cdot \Delta x = \alpha \cdot A \cdot \Delta x$;

$A(\Delta x_1 + \Delta x_2) = A \cdot \Delta x_1 + A \cdot \Delta x_2$;

$A \cdot \Delta x$ – лінійний функціонал.

Аналогічним чином вводиться поняття диференційовного функціоналу.

Означення 9. Функціонал $F(y)$ називається диференційовним на деякому елементі y_0 лінійного нормованого простору X ($y_0 \in X$), якщо приріст цього функціоналу можна представити у вигляді:

$$\Delta F = L(y_0, h) + r(y_0, h),$$

де

h – приріст аргументу, $h = y - y_0$;

ΔF – приріст функціоналу, $\Delta F = F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)$;

L – лінійний функціонал по h ;

r – неперервний та нескінченно малий функціонал більш високого порядку малості

$$\frac{|r(y_0, h)|}{\|h\|} < \varepsilon.$$

Означення 10. Функціонал $r(y_0, h)$ називається нескінченно малим більш високого порядку малості по h , якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall h: 0 < \|h\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |r(y_0, h)| < \varepsilon \cdot \|h\|.$$

$$\Delta F = L(y_0, h) + r(y_0, h).$$

Означення 11. Лінійний функціонал $L(y_0, h) = \delta F(y_0, h)$ називається варіацією функціонала F .

Лема про єдиність варіації диференційовного функціонала

Лема 1. Нехай функціонал $F(y)$ є диференційовним в деякому лінійному нормованому просторі X , $y_0 \in X$, тоді варіація функціонала на цьому елементі єдина.

Доведення (від супротивного):

Припустимо, що є хоча б дві таких різних варіації.

Перша:

$$\Delta F = \delta F_1(y_0, h) + r_1(y_0, h).$$

Друга:

$$\Delta F = \delta F_2(y_0, h) + r_2(y_0, h).$$

Прирівнюємо праві частини:

$$\delta F_1(y_0, h) + r_1(y_0, h) = \delta F_2(y_0, h) + r_2(y_0, h),$$

$$\delta F_1(y_0, h) - \delta F_2(y_0, h) = r_2(y_0, h) - r_1(y_0, h),$$

$$r_2(y_0, h) - r_1(y_0, h) = r(y_0, h),$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall h: 0 < \|h\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |r(y_0, h)| < \varepsilon \cdot \|h\|,$$

$$|\delta F_1(y_0, h) - \delta F_2(y_0, h)| = |r(y_0, h)|.$$

Нерівність

$$|r(y_0, h)| < \varepsilon \cdot \|h\|$$

виконується для правої частини.

Розглянемо приріст h , ($\|h\| \leq 1$)

$$|r(y_0, h)| < \varepsilon \cdot \|h\| \Rightarrow |r(y_0, h)| < \varepsilon \cdot \|h\| \leq \varepsilon \cdot 1$$

(замість $\|h\|$ підставимо найбільше значення)

$$|\delta F_1(y_0, h) - \delta F_2(y_0, h)| < \varepsilon.$$

Оскільки ε – будь-яке додатне дійсне число, а ліва частина нерівності не залежить від ε , то зменшуючи число ε , тобто роблячи його як завгодно малим, отримаємо, що і ліва частина по ε буде як завгодно малою, але так як вона не залежить від ε , то єдина можливість цього, коли вона дорівнює нулю. Тому робимо висновок, що ліва частина дорівнює нулю.

$$|\delta F_1(y_0, h) - \delta F_2(y_0, h)| = 0,$$

$$\delta F_1(y_0, h) = \delta F_2(y_0, h),$$

що й треба було довести. ■

Лема про рівність похідної і варіації функціонала

Лема 2. Нехай X – лінійний нормований простір, $F(y)$ – функціонал визначений у X , який є диференційовним на кожному елементі цього простору, y_0 – елемент цього простору.

Тоді функція $F(y_0 + t \cdot h)$ по числовій змінній t є диференційовною як функція однієї змінної по числовій змінній t , при $t = 0$ (в точці t – диференційовна) і при цьому похідна від цієї функції

$$F'(y_0 + t \cdot h)|_{t=0} = \delta F(y_0; h)$$

в точці $t = 0$ дорівнює варіації функціонала F .

Доведення.

$$F'(y_0 + t \cdot h)|_{t=0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + \Delta t \cdot h) - F(y_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F(y_0, \Delta t \cdot h)}{\Delta t}.$$

Функціонал диференційовний, отже, його приріст можна записати у такому вигляді:

$$\Delta F = \delta F(y_0; h) + r(y_0; h),$$

$$\begin{aligned} F'(y_0 + t \cdot h)|_{t=0} &= \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta F(y_0, \Delta t \cdot h) + r(y_0, \Delta t \cdot h)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t \cdot \delta F(y_0, h) + r(y_0, \Delta t \cdot h)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Оскільки Δt – сталий множник для лінійного функціоналу $\delta F(y_0, \Delta t \cdot h)$, то його можна винести за знак функціонала.

Поділимо почленно чисельник на знаменник, отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \delta F(y_0, h) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(y_0, \Delta t \cdot h)}{\Delta t} = \\ = \delta F(y_0, h) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(y_0, \Delta t \cdot h)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Для функціонала F виконується:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall h: 0 < \|h\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |r(y_0, \Delta t \cdot h)| < \varepsilon \cdot \|\Delta t \cdot h\|.$$

За другою властивістю норми маємо

$$|r(y_0, \Delta t \cdot h)| < \varepsilon |\Delta t| \cdot \|h\|.$$

Візьмемо приріст h , $\|h\| < 1$, тоді

$$|r(y_0, \Delta t \cdot h)| < \varepsilon |\Delta t| \cdot \|h\| < \varepsilon |\Delta t|,$$

$$|r(y_0, \Delta t \cdot h)| < \varepsilon |\Delta t|.$$

Поділимо обидві частини на $|\Delta t|$:

$$\left| \frac{r(y_0, \Delta t \cdot h)}{|\Delta t|} \right| < \varepsilon. \blacksquare$$

Лема 3. (Узагальнення лема 2). Нехай $F(y)$ є диференційовним у деякому лінійному нормованому просторі X . Тоді $F(y + t \cdot h)$ є диференційовною для будь-якого числового значення змінної t , $y \in X$, $y_0 = (y + t_0 \cdot h) \in X$.

Доведення.

Розпишемо число t на суму двох будь-яких чисел:

$$t = t_0 + \tau \Rightarrow \tau = t - t_0,$$

$$F(y + t \cdot h) = F(y + (t_0 + \tau) \cdot h) = F((y + t_0 \cdot h) + \tau \cdot h) = F(y_0 + \tau \cdot h).$$

З попередньої лема випливає, що функція диференційовна по $\tau = 0$, то замінюючи t_0 і враховуючи рівність $\tau = t - t_0$, отримаємо диференційовність при будь-якому числовому значенні t . ■

Приклади диференційовних функціоналів

1. $F(y)$ – лінійний функціонал.

Доведемо, що він диференційовний. Нехай $\Delta F = \delta F + r$.

Надаємо приріст аргументу h

$$\Delta F = F(y + h) - F(y) = F(y) + F(h) - F(y) = F(h).$$

Візьмемо $F(h)$ за приріст, тоді

$$\delta F = F(h), r = 0,$$

що й треба було довести.

Тобто доведено, що $\Delta F = \delta F + r$.

2. Доведемо, що

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot dx,$$

де

$y(x)$ — неперервна диференційовна функція однієї змінної;

f — функція двох змінних, неперервна з неперервними частинними похідними.

Надамо приріст аргументу

$$\Delta F = F(y + h) - F(y) = \int_a^b (f(x, y + h) - f(x, y)) dx = \int_a^b \Delta f dx,$$

$$\Delta f = f'_y \cdot h + \beta(h) \cdot h,$$

$$\Delta F = \int_a^b f'_y \cdot h \cdot dx + \int_a^b \beta(h) \cdot h \cdot dx,$$

$$\delta F(\alpha \cdot h_1 + \beta \cdot h_2) = \int_a^b f'_y(\alpha \cdot h_1 + \beta \cdot h_2) \cdot dx =$$

$$= \alpha \int_a^b f'_y \cdot h_1 \cdot dx + \beta \int_a^b f'_y \cdot h_2 \cdot dx = \alpha \cdot \delta F(h_1) + \beta \cdot \delta F(h_2),$$

$$\delta F = \int_a^b f'_y \cdot h \cdot dx,$$

$$r = \int_a^b \beta(h) \cdot h \cdot dx,$$

що й треба було довести.

Надалі будемо розглядати, в основному, функціонал вигляду

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

областю визначення якого служить клас функцій $C^1[a, b]$, що визначені та неперервні разом з першою похідною на відрізку $[a, b]$.

Практичні завдання до теми 2

Приклад 2.1. Знайти приріст функціоналу

$$I[y(x)] = y(x)y'(x)dx,$$

визначеного на просторі $C^1[a, b]$, якщо $y_0(x) = x$, а $y_1(x) = x^2$.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} I[y(x)] &= I[x^2] - I[x] = \int_0^1 x^2 2x dx - \int_0^1 x dx = \\ &= \int_0^1 (2x^3 - x) dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: 0.

Приклад 2.2. Знайти приріст ΔI і варіацію δI функціоналу

$$I[y(x)] = \int_a^b y^2(x) dx.$$

Розв'язання. Знайдемо приріст функціоналу

$$\Delta I = \int_a^b ((y + \delta y)^2 - y^2) dx = \int_a^b 2y\delta y dx + \int_a^b \delta^2 y dx.$$

Отже,

$$\Delta I = \int_a^b 2y\delta y dx + \int_a^b \delta^2 y dx.$$

Лінійний функціонал $\int_a^b 2y\delta y dx$ за означенням і буде варіацією функціоналу

$$\delta I = \int_a^b 2y\delta y dx,$$

оскільки

$$\lim_{\max|\delta y| \rightarrow 0} \delta^2 y dx = 0.$$

$$\text{Відповідь: } \Delta I = \int_a^b 2y\delta y dx + \int_a^b \delta^2 y dx, \quad \delta I = \int_a^b 2y\delta y dx.$$

Приклад 2.3. Для функціоналу

$$F(y) = \int_0^1 y^2 dx$$

покласти $y = 2x$, $h = x^2$ і знайти $\Delta F, \delta F$ —?

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(y + h) - F(y) = \\ &= \int_0^1 (2x + h)^2 dx - \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4x^2}{3} + 2h^2 + h^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + 1 = 1\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$$\Delta F = 1\frac{1}{5}.$$

$$\Delta F = \delta F(h) + r(h).$$

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(y + h) - F(y) = \\ &= \int_0^1 (y + h)^2 dx - \int_0^1 y^2 dx = \int_0^1 (y^2 + 2yh + h^2 - y^2) dx = \\ &= \int_0^1 (2yh + h^2) dx. \end{aligned}$$

$$\delta F(y) = \int_0^1 2yh dx = \int_0^1 4x^3 dx = x^4 \Big|_0^1 = 1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 2.4. Для функціоналу

$$F(y) = \int_0^1 xy^3 dx, \quad y = e^x, \quad h = x,$$

знайти $\Delta F, \delta F$ —?

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(y+h) - F(y) = \int_0^1 x(e^x + x)^3 dx - \int_0^1 xe^{3x} dx = \\&= \int_0^1 (xe^{3x} + 3x^2e^{2x} + 3x^3e^x + x^4) dx - \int_0^1 xe^{3x} dx = \\&= 3 \int_0^1 x^2e^{2x} dx + 3 \int_0^1 x^3e^x dx + \int_0^1 x^4 dx = 3 \left(\frac{1}{2}e^2 - 1 \right) + 3(6 - 2e) + \frac{1}{5} = \\&= \frac{3}{2}e^2 - 3 + 18 - 6e + \frac{1}{5} = \frac{3}{2}e^2 - 6e + 15\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3e^x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ dv = e^x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 3x^2 dx \\ v = e^x \end{array} \right] = x^3e^x \Big|_0^1 - 3 \int_0^1 x^2e^x dx = \\&= e - \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = e^x \end{array} \right] = e - 3 \left(x^2e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 xe^x dx \right) = \\&= e - 3e + 6 \int_0^1 xe^x dx = -2e + 6 \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = e^x \end{array} \right] = \\&= -2e + 6 \left(xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) = -2e + 6e - 6e + 6 = 6 - 2e.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^{2x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right] = \frac{1}{2}x^2e^{2x} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 xe^{2x} dx = \\&= \frac{1}{2}e^2 - 2 \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dv \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right] = \frac{1}{2}e^2 - xe^{2x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{2x} dx = \\&= \frac{1}{2}e^2 - 1.\end{aligned}$$

$$\Delta F = \delta F + r(h).$$

$$\begin{aligned}
\Delta F &= F(y+h) - F(y) = \int_0^1 x(y+h)^3 dx - \int_0^1 xy^3 dx = \\
&= \int_0^1 (xy^3 + 3xy^2h + 3xh^2y + xh^3 - xy^3) dx = \\
&= \int_0^1 (3xy^2h + 3xh^2y + xh^3) dx.
\end{aligned}$$

$$\delta F = 3 \int_0^1 xy^2 h(x) dx,$$

$$r = \int_0^1 (3xh^2y + xh^3) dx.$$

$$\delta F = 3 \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 3 \left(\frac{1}{2} e^2 - 1 \right) = \frac{3}{2} e^2 - 3,$$

$$r = \int_0^1 (3x^3 e^x + x^4) dx = 6 - 2e + \frac{1}{5}.$$

Відповідь: $6 - 2e + \frac{1}{5}$.

Перевірити диференційовність наступних функціоналів: $F(y) = y(a)$ в просторі $C_{[a,b]}$, $F = \delta F(h) + r(h)$.

$$\Delta F = F(y+h) - F(y) = y(a) + h(a) - y(a) = h(a) + 0 \leq |h(a)|.$$

Випадок 1

$$h(a) > 0, \quad \delta F = -h(a).$$

$$\Delta F = -y(a) - h(a) + y(a) = -h(a), \quad \delta F = -h(a).$$

Випадок 2

$$\Delta F = y(a) + h(a) + y(a) = 2y(a) + h(a), \quad \delta F = -h(a).$$

Приклад 2.5. Перевірити диференційовність функціоналу

$$\int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(2\pi) = 1.$$

Розв'язання.

$$f'_y = -2y; \quad f'_{y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx} f'_{y'} = 2y'';$$

$$-2y = 2y'',$$

$$2y'' + 2y = 0, \quad y'' + y = 0.$$

$$y = e^0 (C_1 \cos x + C_2 \sin x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

$$1 = C_1.$$

Відповідь: $y = \cos x + C \sin x$.

Приклад 2.6. Перевірити диференційовність функціоналу

$$\int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx, \quad y(-1) = 1, y(0) = 0.$$

Розв'язання.

$$f'_y = 12x; \quad f'_{y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx} f'_{y'} = 2y'';$$

$$2y'' = 12x;$$

$$y'' = 6x \rightarrow y' = 3x^2 + C_1 \rightarrow y = x^3 + C_1 x + C_2;$$

$$\begin{cases} 1 = -1 - C_1 + C_2, \\ 0 = C_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $y = x^3 - 2x$.

Завдання для самостійного виконання

Знайти прирости ΔI і варіації δI функціоналів:

$$1) I[y(x)] = \int_0^1 y(y+x)dx;$$

$$2) I[y(x)] = \int_0^{\pi} y'^2 \sin x \, dx;$$

$$3) I[y(x)] = \int_0^1 (y'y + xy'^2)dx;$$

$$4) I[y(x)] = \int_{-1}^1 (y'e^y + xy^2)dx;$$

$$5) I[y(x)] = \int_2^5 x^2 y'^3 dx.$$

Тема 3. Екстремуми функціоналів

Означення 12. Відстанню нульового порядку між кривими (функціями, лініями)

$$y = f(x) \text{ і } y = g(x)$$

на відрізку $[a; b]$ називають невід'ємне число

$$\rho_0 = \rho_0(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

При цьому вважаємо, що функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$.

Алгоритм знаходження відстані нульового порядку між кривими:

1. $\varphi(x) = |f(x) - g(x)|$
2. Знаходимо найбільше значення цієї функції на сегменті $[a, b]$, тобто

$$\rho_0 = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Означення 13. Відстанню n -го порядку ($n = 1, 2, \dots$) між кривими (функціями, лініями)

$$y = f(x) \text{ і } y = g(x)$$

на відрізку $[a; b]$ називають невід'ємне число

$$\rho_n(f, g) = \max_{x \in [a, b]} \{\rho(f, g), \rho(f', g'), \rho(f'', g''), \dots, \rho(f^{(n)}, g^{(n)})\}.$$

При цьому вважаємо, що функції $f(x)$ і $g(x)$ мають похідні до n -го порядку включно, які також неперервні на відрізку $[a; b]$.

Означення 14. Функція y_0 називається точкою максимуму функціоналу $F(y)$, якщо

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y: 0 < \|y - y_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow F(y) < F(y_0).$$

Означення 15. Функція y_0 називається точкою мінімуму функціоналу $F(y)$, якщо

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y: 0 < \|y - y_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow F(y) > F(y_0).$$

Означення 16. Точки максимуму і мінімуму називаються точками екстремуму функціонала.

Необхідна умова екстремуму функціонала

Теорема 1. Нехай y_0 — точка екстремуму диференційовного функціоналу $F(y)$ заданому у лінійному нормованому просторі E . Тоді

$$\delta F(y_0) = 0.$$

Доведення:

Введемо в розгляд таку функцію по числовій змінній t

$$F(y_0 + t \cdot h).$$

При $t = 0$ ця функція досягає екстремуму, тому що $F(y_0)$ — найбільше і найменше значення

$$t = 0 \Rightarrow F'_t(y_0 + t \cdot h)|_{t=0} = 0 \Rightarrow \delta F(y_0) = 0.$$

З використанням леми про рівність похідної і варіації, маємо, що похідна дорівнює варіації, а отже, вона дорівнює нулю.

Перша лема про інтеграл

$$\int_a^b a(x) \cdot h(x) \cdot dx.$$

Лема 4. Нехай функція $a(x)$ — неперервна на $[a; b]$ і

$$\int_a^b a(x) \cdot h(x) \cdot dx = 0$$

для будь-якої функції $h(x)$ диференційовної на сегменті $[a; b]$ такої, що

$$h(a) = h(b) = 0,$$

тоді функція $a(x) \equiv 0$ на сегменті $[a; b]$.

Доведення. Доведемо від супротивного.

Припустимо, що ця функція

$$a(x) \not\equiv 0,$$

$$\exists c \in (a; b): a(c) \neq 0.$$

І випадок. $a(c) > 0$ (рис. 2).

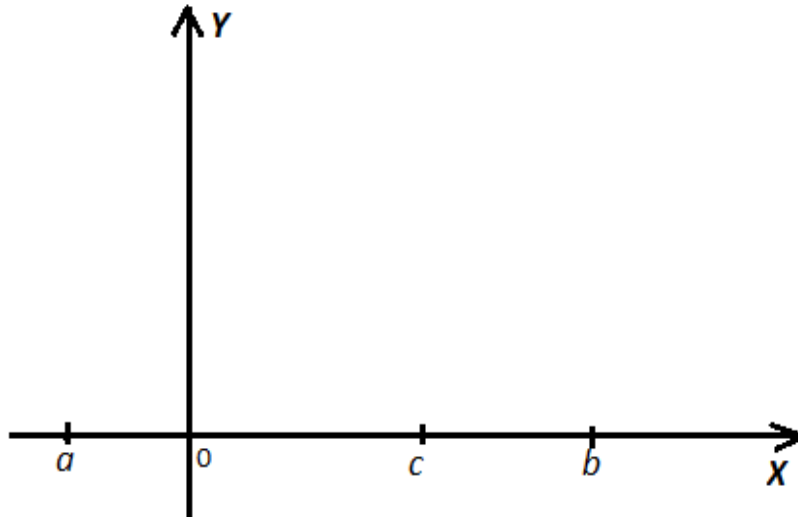


Рис. 2.

За властивістю збереження знаку неперервної функції:

$$\exists (c - \delta; c + \delta), \quad \forall x \in (c - \delta; c + \delta): a(x) > 0.$$

Доведемо неперервність функції h на сегменті $[a; b]$.

Нехай $x = c - \delta$, доведемо в цій точці, що

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [a; c - \delta] \cup [c + \delta; b], \\ (x - (c - \delta))^2 \cdot (x - (c + \delta))^2, & \text{якщо } x \in (c - \delta; c + \delta). \end{cases}$$

Знайдемо границі зліва і справа:

$$\lim_{x \rightarrow (c - \delta)^-} h(x) = 0 \text{ (зліва),}$$

$$\lim_{x \rightarrow (c - \delta)^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow (c - \delta)^+} (x - (c - \delta))^2 \cdot (x - (c + \delta))^2 = 0 \text{ (справа),}$$

$$f(c - \delta) = 0 \text{ (значення функції).}$$

Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow (c - \delta)^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow (c - \delta)^+} h(x) = 0$$

і значення функції $h(c - \delta) = 0$, то функція $h(x)$ неперервна в точці $c - \delta$.

Доведемо в точці $x = c + \delta$.

Знайдемо границі зліва і справа:

$$\lim_{x \rightarrow (c + \delta)^+} h(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow (c + \delta)^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow (c + \delta)^-} (x - (c - \delta))^2 \cdot (x - (c + \delta))^2 = 0,$$

$f(c + \delta) = 0$ (значення функції).

Таким чином, функція $h(x)$ неперервна в точці $c + \delta$ і

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Отже, функція h підходить у введenu формулу.

Розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned} & \int_a^b a(x) \cdot h(x) \cdot dx = \int_a^{c-\delta} a(x) \cdot 0 \cdot dx + \\ & + \int_{c-\delta}^{c+\delta} a(x) \cdot (x - (c - \delta))^2 \cdot (x - (c + \delta))^2 \cdot dx + \int_{c+\delta}^b a(x) \cdot 0 \cdot dx = \\ & = \int_{c-\delta}^{c+\delta} a(x) \cdot (x - (c - \delta))^2 \cdot (x - (c + \delta))^2 \cdot dx > 0. \end{aligned}$$

(властивість неперервності означеного інтегралу).

Отримали протиріччя з того, що інтеграл має дорівнювати нулю, таким чином припущення не правильне, тому що він додатній. Цей випадок неможливий.

II випадок. $a(c) < 0$. Доведення аналогічне. ■

Друга лема про інтеграл

$$\int_a^b b(x) \cdot h'(x) \cdot dx.$$

Лема 5. Нехай функція $b(x)$ — неперервна на $[a; b]$ і така, що виконується

$$\int_a^b b(x) \cdot h'(x) \cdot dx = 0$$

для будь-якої функції $h(x)$ неперервної на сегменті $[a; b]$ з неперервною похідною $h'(x)$ на цьому сегменті такою, що $h(a) = h(b) = 0$. Тоді функція

$$b(x) \equiv \text{const}, \quad x \in [a; b].$$

Доведення.

Позначимо $g(x) = h'(x)$. Маємо:

$$h(x) = \int_a^x g(t) \cdot dt,$$

$$h(a) = \int_a^a g(t) \cdot dt = 0,$$

$$h(b) = \int_a^b g(t) \cdot dt = 0. (*)$$

- I) Доведемо, що для будь-якої неперервної функції $\varphi(x)$ існує $const\ c$ така, що

$$\int_a^b (\varphi(x) - c) \cdot dx = 0,$$

$$\exists \int_a^b \varphi(x) \cdot dx = M, \quad M = \int_a^b \frac{M}{b-a} \cdot dx,$$

$$\int_a^b \left(\varphi(x) - \frac{M}{b-a} \right) \cdot dx = 0, \quad c = \frac{M}{b-a}.$$

- II) Покажемо, що будь-яку неперервну функцію $f(x)$ на сегменті $[a; b]$ можна записати у вигляді такої суми

$$f(x) = \Lambda(x) + c,$$

де $c - const$; $\Lambda(x)$ – неперервна функція.

$$\int_a^b \Lambda(x) \cdot dx = 0,$$

$$\exists m: \int_a^b (f(x) - m) \cdot dx = 0 \Rightarrow \int_a^b \Lambda(x) \cdot dx = 0,$$

$$f(x) - m = \Lambda(x); \quad f(x) = \Lambda(x) + m,$$

що й треба було довести.

III) Якщо для неперервної функції $b(x)$

$$\exists c: \int_a^b (b(x) - c) \cdot dx = 0,$$

то для будь-якої неперервної функції $f(x)$ виконується

$$\begin{aligned} \int_a^b (b(x) - c) \cdot f(x) \cdot dx &= 0, \\ \int_a^b (b(x) - c) \cdot f(x) \cdot dx &= \\ \int_a^b (b(x) - c) \cdot (\Lambda(x) + m) \cdot dx &= \\ &= \int_a^b b(x) \cdot \Lambda(x) \cdot dx - \\ -c \int_a^b \Lambda(x) \cdot dx + m \int_a^b (b(x) - c) \cdot dx &= \\ &= \int_a^b b(x) \cdot \Lambda(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

Покажемо, що Λ грає роль h' . З другого випадку (*) бачимо, що для Λ виконується.

Отже, Λ можемо вважати за h' , а отже, цей інтеграл дорівнює нулю.

IV) Використаємо III етап

$$f(x) = b(x) - c: \int_a^b (b(x) - c)^2 \cdot dx = 0.$$

Це можливо, коли $b(x) \equiv c$. ■

Третя лема про інтеграл

$$\int_a^b (a(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot h'(x)) \cdot dx.$$

Лема 6. Нехай функції $a(x), b(x)$ неперервні на сегменті $[a; b]$, $b(x)$ – диференційовна і

$$\int_a^b (a(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot h'(x)) \cdot dx = 0$$

для будь-яких $h(x), h'(x), x \in [a; b]$;

$h(x)$ – неперервна функція з неперервною похідною, такою, що

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Тоді $a(x) = b'(x)$.

Доведення:

Розпишемо інтеграл від суми як суму інтегралів

$$\int_a^b a(x) \cdot h(x) \cdot dx + \int_a^b b(x) \cdot h'(x) \cdot dx.$$

Проінтегруємо за частинами

$$\begin{aligned} \int_a^b a(x) \cdot h(x) \cdot dx &= \left[\begin{array}{l} u = h(x) \\ dv = a(x) \cdot dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = h'(x) \cdot dx \\ v = \int_a^x a(t) \cdot dt \end{array} \right] = \\ &= h(x) \cdot \int_a^x a(t) \cdot dt \bigg|_a^b - \int_a^b h'(x) \cdot \left(\int_a^x a(t) \cdot dt \right) \cdot dx = \\ &= - \int_a^b h'(x) \cdot \left(\int_a^x a(t) \cdot dt \right) \cdot dx. \end{aligned}$$

Якщо застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца виникає $h(a)$ і $h(b)$:

$$- \int_a^b h'(x) \cdot \left(\int_a^x a(t) \cdot dt \right) \cdot dx + \int_a^b b(x) \cdot h'(x) \cdot dx = 0,$$

$$\int_a^b h'(x) \cdot \left(b(x) - \int_a^x a(t) \cdot dt \right) \cdot dx = 0.$$

Згідно другої леми

$$b(x) - \int_a^x a(t) \cdot dt \equiv c,$$

$$\left(\int_a^x a(t) \cdot dt \right)' = a(x),$$

$$b'(x) - a(x) \equiv 0,$$

$$b'(x) = a(x). \blacksquare$$

Практичні завдання до теми 3

Приклад 3.1. Показати, що функціонал

$$J[y(x)] = (x^2 + y^2)dx$$

на кривій $y = 0$ досягає строгого мінімуму.

Розв'язання.

Для будь-якої неперервної функції $y(x)$ на $[0; 1]$ маємо

$$\Delta J = J[y(x)] - J[0] = (x^2 + y^2)dx - x^2dx = y^2dx \geq 0,$$

причому знак рівності досягається лише при $y(x) \equiv 0$.

Приклад 3.2. Знайти відстань нульового порядку ρ_0 між кривими:

$$y = x, \quad y_1 = x^2, \quad x \in [0; 2].$$

Розв'язання.

$$\varphi(x) = |x - x^2|;$$

$$\varphi'(x) = |1 - 2x|;$$

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2};$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(2) = 2, \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$\rho_0(y, y_1) = \rho_0(x, x^2) = 2, \quad x \in [0; 2].$$

Відповідь: $\rho_0 = 2$.

Приклад 3.3. Знайти відстань нульового порядку ρ_0 між кривими:

$$f(x) = xe^{-x}, \quad f_1(x) = 0, \quad x \in [0; 2].$$

Розв'язання.

$$\varphi(x) = |xe^{-x}|;$$

$$\varphi'(x) = e^{-x} - xe^{-x};$$

$$e^{-x} - xe^{-x} = 0, \quad e^{-x}(1 - x) = 0;$$

$$e^{-x} \neq 0;$$

$$1 - x = 0, \quad x = 1;$$

$$\varphi(0) = 0;$$

$$\varphi(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0.37;$$

$$\varphi(2) = 2\frac{1}{e^2} = \frac{2}{e^2} = 0.27.$$

$$\rho_0(f, f_1) = \rho_0(xe^{-x}, 0) = \frac{1}{e}, \quad x \in [0; 2].$$

Відповідь: $\rho_0(xe^{-x}, 0) = \frac{1}{e}$.

Приклад 3.4. Знайти відстань нульового порядку ρ_0 між кривими:

$$f(x) = \sin 2x, \quad f_1(x) = \sin x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язання.

$$\varphi(x) = |\sin 2x - \sin x|;$$

$$\varphi'(x) = |2 \cos 2x - \cos x|;$$

$$2 \cos 2x - \cos x = 2(2\cos^2 x - 1) - \cos x = 4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0.$$

Введемо заміну: $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$. Тоді маємо:

$$4t^2 - t - 2 = 0,$$

$$D = 1 + 32 = 33,$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}, \quad x = \arccos \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}.$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}\right| = 1,$$

$$\varphi\left(\arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right) = \left|\sin 2 \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8} - \sin \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right| =$$

$$= \left|2 \sin \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \cdot \frac{1 + \sqrt{33}}{8} - \sin \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{30 - 2\sqrt{33}}{8}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{33}}{4} - 1\right) = \frac{(\sqrt{33} - 3)\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{32} < 1;$$

$$\sin \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8} = \sqrt{1 - \cos^2 \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{64 - 1 - 2\sqrt{33} - 33}{64}} = \frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{8}.$$

$$\rho_0(f, f_1) = \rho_0(\sin 2x, \sin x) = 1, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Відповідь: $\rho_0(\sin 2x, \sin x) = 1$.

Приклад 3.5. Знайти відстань нульового порядку ρ_0 між кривими:

$$f(x) = x, \quad f_1(x) = \ln x, \quad x \in [e^{-1}; e].$$

Розв'язання.

$$\varphi(x) = |x - \ln x|;$$

$$\varphi'(x) = \left| 1 - \frac{1}{x} \right|;$$

$$1 - \frac{1}{x} = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x = 1, \quad x \neq 0;$$

$$\varphi(1) = 1;$$

$$\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = \left| \frac{1}{e} + 1 \right| \approx 1.37;$$

$$\varphi(e) = |e - 1| \approx 1.7;$$

$$\rho_0(f, f_1) = \rho_0(x, \ln x) = |e - 1|.$$

Відповідь: $\rho_0(x, \ln x) = |e - 1|$.

Приклад 3.6. Знайти відстань першого порядку ρ_1 між кривими

$$f(x) = \ln x, \quad f_1(x) = x, \quad x \in [e^{-1}; e].$$

Розв'язання.

$$I) \quad \varphi_1(x) = |\ln x - x|;$$

$$\varphi_1'(e^{-1}) = \left| \frac{1}{e} + 1 \right|;$$

$$\varphi_1(1) = 1;$$

$$\varphi_1(e) = |e - 1| \approx 1.7;$$

$$\rho_0(\ln x, x) = |e - 1| \approx 1.7.$$

II)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = 1;$$

$$\varphi_2(x) = \left| \frac{1}{x} - 1 \right|;$$

$$\varphi_2'(x) = \left| \frac{1}{-x^2} \right| = \left| \frac{1}{x^2} \right|;$$

$$\varphi_2'(x) \neq 0 \text{ (порожня множина);}$$

$$\varphi_2(e^{-1}) = |e - 1| \approx 1.7;$$

$$\varphi_2(e) = \left| \frac{1}{e} - 1 \right| \approx 0.63;$$

$$\rho_1\left(\frac{1}{x}, 1\right) = |e - 1|.$$

Відповідь: $\rho_1(\ln x, x) = |e - 1|$.

Приклад 3.7. Знайти відстань другого порядку ρ_2 між кривими:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3, \quad x \in [0; 1].$$

Розв'язання.

I)

$$\varphi_1(x) = |x^2 - x^3|;$$

$$\varphi_1'(x) = 2x - 3x^2;$$

$$2x - 3x^2 = 0;$$

$$x(2 - 3x) = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{2}{3};$$

$$\varphi_1(0) = 0;$$

$$\varphi_1\left(\frac{2}{3}\right) = \left| \frac{4}{9} - \frac{8}{27} \right| = \frac{4}{27};$$

$$\varphi_1(1) = 0;$$

$$\rho_0(x^2, x^3) = \frac{4}{27}.$$

$$\text{II)} \quad \varphi_2(x) = |2x - 3x^2|;$$

$$\varphi_2'(x) = |2 - 6x|;$$

$$2 - 6x = 0, \quad 6x = 2, \quad x = \frac{1}{3};$$

$$\varphi_2(0) = 0;$$

$$\varphi_2(1) = 1;$$

$$\varphi_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3};$$

$$\rho_1(2x, 3x^2) = 1.$$

$$\text{III)} \quad \varphi_3(x) = |2 - 6x|;$$

$$\varphi_3'(x) = 6 \neq 0;$$

$$\varphi_3(0) = 2;$$

$$\varphi_3(1) = 4;$$

$$\rho_2(2, 6x) = 4.$$

Відповідь: $\rho_2(x^2, x^3) = 4$.

Приклад 3.8. Знайти відстань 1001-го порядку між кривими

$$f(x) = e^x, \quad f_1(x) = x, \quad x \in [0; 1].$$

$$\text{I)} \quad \varphi_1(x) = |e^x - x|;$$

$$\varphi_1'(x) = |e^x - 1|;$$

$$e^x = 1, \quad x = 0;$$

$$\varphi_1(0) = 1;$$

$$\varphi_1(1) = |e - 1|;$$

$$\rho_0(e^x, x) = |e - 1| \approx 1.7.$$

$$II) \quad f(x) = e^x, \quad f_1(x) = 1, \quad x \in [0; 1];$$

$$\varphi_2(x) = |e^x - 1|;$$

$$\varphi_2'(x) = |e^x|;$$

$$e^x \neq 0;$$

$$\varphi_2(0) = 0;$$

$$\varphi_2(1) = |e - 1|;$$

$$\rho(e^x, 1) = |e - 1| \approx 1.7.$$

$$III) \quad f(x) = e^x, \quad f_1(x) = 0, \quad x \in [0; 1];$$

$$\varphi_3(x) = e^x;$$

$$\varphi_3'(x) = e^x;$$

$$\varphi_3(0) = 1;$$

$$\varphi_3(1) = e.$$

Відповідь: $\rho_{1001}(e^x, x) = e$.

Завдання для самостійного виконання

Знайти відстані між заданими кривими на вказаних відрізках.

$$1) \quad y_1(x) = \sqrt{x}, \quad y_2(x) = \sqrt{x} \ln x, \quad x \in [e^{-2}; 1]; \quad \rho_0(\sqrt{x}, \sqrt{x} \ln x) - ?$$

$$2) \quad y_1(x) = 2 \arctg x, \quad y_2(x) = x, \quad x \in [0; \sqrt{3}]; \quad \rho_1(2 \arctg x, x) - ?$$

$$3) \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = 8 \ln x, \quad x \in [1; e]; \quad \rho_1(x^2, 8 \ln x) - ?$$

$$4) \quad y_1(x) = 2\sqrt{x}, \quad y_2(x) = x^2, \quad x \in [0; 2]; \quad \rho_2(2\sqrt{x}, x^2) - ?$$

$$5) \quad y_1(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad y_2(x) = \ln^2 x, \quad x \in [1; e^2]; \quad \rho_1\left(\frac{1}{2}x^2, \ln^2 x\right) - ?$$

Тема 4. Найпростіша задача варіаційного числення

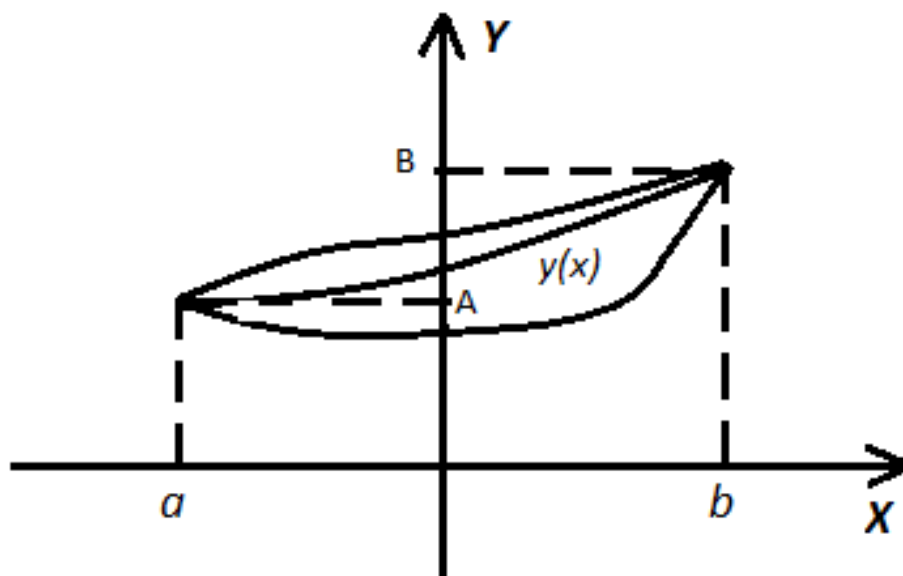


Рис. 3.

Розглянемо функціонал (рис. 3)

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y') dx.$$

Нехай $y(x)$ — неперервна функція, $y'(x)$ — неперервна на сегменті $[a; b]$, $f(x, y, y')$ — неперервна як функція трьох змінних з неперервними частинними похідними другого порядку включно, і

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Найпростіша задача варіаційного числення полягає в тому, що при умовах написаних вище знайти умови для екстремуму функціонала $F(y)$.

**Необхідна умова екстремуму для найпростішої задачі
варіаційного числення**

Нехай $y(x)$ – точка екстремуму функціонала

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx.$$

для найпростішої задачі варіаційного числення.

Тоді виконується рівняння Ейлера

$$f'_y = \frac{d}{dx} f'_{y'}.$$

Зауваження 1. В рівнянні Ейлера зліва – частинна похідна першого порядку, справа – звичайна похідна від частинної похідної, тобто похідна другого порядку.

Висновок: рівняння Ейлера – це диференціальне рівняння другого порядку.

Нехай

$$\delta F = 0, \quad \Delta F = \delta F + r.$$

Візьмемо елемент y , розглянемо приріст $y + h$.

Обчислимо приріст функціонала

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(y + h) - F(y) = \\ &= \int_a^b f(x, y + h, y' + h') dx - \int_a^b f(x, y, y') dx = \\ &= \int_a^b (f(x, y + h, y' + h') - f(x, y, y')) dx = \int_a^b \Delta f(x, y, y') dx = \\ &= \int_a^b (f'_y \cdot h + f'_{y'} \cdot h' + \beta(h) \cdot h + \gamma(h) \cdot h') dx = \\ &= \int_a^b (f'_y \cdot h + f'_{y'} \cdot h') dx + \int_a^b (\beta(h) \cdot h + \gamma(h) \cdot h') dx. \end{aligned}$$

Доведемо, що варіація лінійна $\alpha_1 \cdot h_1 + \alpha_2 \cdot h_2$.

$$\begin{aligned}
 \delta F(\alpha_1 \cdot h_1 + \alpha_2 \cdot h_2) &= \\
 &= \int_a^b \left(f'_y \cdot (\alpha_1 \cdot h_1 + \alpha_2 \cdot h_2) + f'_{y'} \cdot (\alpha_1 \cdot h'_1 + \alpha_2 \cdot h'_2) \right) dx = \\
 &= \int_a^b \left(\alpha_1 (f'_y \cdot h_1 + f'_{y'} \cdot h'_1) + \alpha_2 (f'_y \cdot h_2 + f'_{y'} \cdot h'_2) \right) dx = \\
 &= \alpha_1 \int_a^b (f'_y \cdot h_1 + f'_{y'} \cdot h'_1) dx + \alpha_2 \int_a^b (f'_y \cdot h_2 + f'_{y'} \cdot h'_2) dx = \alpha_1 \cdot \delta F(h_1) + \\
 &+ \alpha_2 \cdot \delta F(h_2).
 \end{aligned}$$

$$\int_a^b (f'_y \cdot h + f'_{y'} \cdot h') dx = 0.$$

$$\begin{array}{r}
 y(a) + h(a) = A \\
 y(a) = A \\
 \hline
 h(a) = 0.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 y(b) + h(b) = B \\
 y(b) = B \\
 \hline
 h(b) = 0.
 \end{array}$$

Використовуємо лему 6, враховуючи, що

$$f'_y = a(x); \quad f'_{y'} = b(x).$$

Отже, виконується рівняння Ейлера

$$f'_y = \frac{d}{dx} f'_{y'}.$$

Розв'язки рівняння Ейлера називаються екстремаліями, а саме рівняння Ейлера – диференціальним рівнянням екстремалей.

Практичні завдання до теми 4

Приклад 4.1. Знайти екстремалі функціоналу

$$J(y) = \int_1^2 ((y')^2 + 2yy' + y^2)dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 0.$$

Розв'язання.

$$f'_y = 2y' + 2y; \quad f'_{y'} = 2y' + 2y; \quad \frac{d(2y' + 2y)}{dx} = 2y'' + 2y';$$

$$y' = y; \quad y'' + ay' + by = 0;$$

$$k^2 + ak + b = 0.$$

I) $k_1 \neq k_2; \quad k_1, k_2 \in R$

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

II) $k_1 = k_2; \quad k \in R$

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

III) $k_{1,2} = \alpha \pm \beta$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

$$y' - y = 0; \quad k^2 - 1 = 0; \quad k_{1,2} = \pm 1.$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 e + C_2 e^{-1}, \\ 0 = C_1 e^2 + C_2 e^{-2}. \end{cases}$$

$$C_1 e^2 = C_2 e^{-2};$$

$$C_1 = -C_2 e^{-4};$$

$$1 = -C_2 e^{-3} + C_2 e^{-1};$$

$$C_2 = \frac{1}{e^{-1} - e^{-3}} = \frac{e^3}{e^2 - 1};$$

$$C_1 = -\frac{e^3}{e^3 - 1} \cdot e^{-4} = -\frac{1}{e(e^2 - 1)};$$

Відповідь: $y = -\frac{e^x}{e(e^2-1)} + \frac{e^3}{e^2-1} \cdot e^{-x}.$

Приклад 4.2. Знайти екстремалі функціоналу

$$\int_1^2 ((y')^2 - 2xy) dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 0.$$

Розв'язання.

$$f'_y = -2x; \quad f'_{y'} = 2y'; \quad \frac{d(2y')}{dx} = 2y'';$$

$$-2x = 2y'' \rightarrow y'' = -x \rightarrow y' = -\frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2;$$

$$\begin{cases} -1 = -\frac{1}{6} + C_1 + C_2, \\ 0 = -\frac{4}{3} + 2C_1 + C_2; \end{cases}$$

$$1 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{6} + C_1 \rightarrow C_1 = \frac{13}{6};$$

$$0 = -\frac{4}{3} + \frac{13}{3} + C_2 \rightarrow C_2 = -3.$$

Відповідь: $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{13x}{6} - 3.$

Приклад 4.3. Знайти екстремалі функціоналу

$$\int_1^3 (3x - y)y dx; \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 0.$$

Розв'язання.

$$f'_y = 3x - 2y; \quad f'_{y'} = 0; \quad \frac{d0}{dx} = 0;$$

$$3x - 2y = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2}x.$$

Відповідь: немає розв'язків.

Приклад 4.4. Знайти екстремалі функціоналу

$$\int_0^1 (12xy - (y')^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad x = 1.$$

Розв'язання.

$$f'_y = 12; \quad f'_{y'} = -2y'; \quad \frac{d}{dx} f'_{y'} = -2y'';$$

$$-2y'' = 12x \rightarrow y'' = -6x \rightarrow y' = -3x^2 + C_1;$$

$$y = -x^3 + C_1x + C_2;$$

$$\begin{cases} 1 = C_2, \\ -2y(1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 1, \\ -2(-3 + C_1) = 0; \end{cases} \quad C_1 = 3.$$

$$y' = -3x^2 + C_1.$$

Відповідь: $y = -x^3 + 3x + 1$.

Приклад 4.5. Знайти екстремалі функціоналу

$$\int_0^1 y(y')^2 dx; \quad y(0) = 1; y(1) = \sqrt[3]{4}.$$

Розв'язання.

$$f'_y = (y')^2;$$

$$f'_{y'} = 2yy';$$

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} = (2yy')'_x = 2y' * y' + y''2y = 2(y')^2 + 2yy'';$$

$$(y')^2 = 2(y')^2 + 2yy'';$$

$$(y')^2 + 2yy'' = 0;$$

$$2y''y + (y')^2 = 0.$$

Введемо заміну: $y' = z$, тоді:

$$y'' = \frac{dz}{dy} * \frac{dy}{dx};$$

$$y'' = \frac{dz}{dy} z;$$

$$2 \frac{dz}{dy} zy + z^2 = 0;$$

$$2 \frac{dz}{dy} y + z = 0;$$

$$2 \frac{dz}{dy} y = -z;$$

$$2 \frac{y}{dy} = -\frac{z}{dz};$$

$$\int \frac{dy}{2y} = \int -\frac{dz}{z};$$

$$\ln z = -\frac{1}{2} \ln y + \ln C_1;$$

$$\ln z = \ln \frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$z = \frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$\int \sqrt{y} dy = \int C_1 dx;$$

$$\frac{2y\sqrt{y}}{3} = C_1 x + C_2;$$

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{3(C_1 x + C_2)}{2};$$

$$1 = \frac{3}{2} C_2;$$

$$C_2 = \frac{2}{3};$$

$$\frac{2}{3} : (\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{2}} = C_1 + C_2;$$

$$\frac{4}{3} = C_1 + C_2;$$

$$\frac{4}{3} = C_1 + \frac{2}{3};$$

$$C_1 = \frac{2}{3};$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x + \frac{2}{3};$$

$$y^{\frac{2}{3}} = x + 1;$$

$$y = (x + 1)^{\frac{2}{3}}.$$

Відповідь: $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2}.$

Приклад 4.6. Знайти екстремум функціоналу

$$F(y) = \int_0^{\pi} (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

Розв'язання.

$$F_y = 4y \cos x - 2y;$$

$$F_{y'} = 2y';$$

$$\frac{d(y')}{dx} = 2y'';$$

$$y'' + y = 2 \cos x.$$

$$I) \quad y'' + y = 0.$$

$$k^2 + 1 = 0 \rightarrow k_{1,2} = \pm i;$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

$$f(x) = 2 \cos x, \quad \alpha = 0, \beta = 1;$$

$$P_n(x) = 2, \quad n = 0;$$

$$Q_m(x) = 0, \quad m = 0;$$

$$t = 0, \quad \alpha + \beta i = i, s = 1;$$

$$\tilde{y} = e^0 * x^1 (A \cos x + B \sin x);$$

$$\tilde{y} = x(A \cos x + B \sin x);$$

$$\tilde{y}' = 1(A \cos x + B \sin x) + x(A \sin x + B \cos x);$$

$$\tilde{y}'' = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x) =$$

$$= -2A \sin x + 2B \cos x - x(A \cos x + B \sin x) - 2A \sin x + 2B \cos x -$$

$$- x(A \cos x + B \sin x) + x(A \cos x + B \sin x) = 2A \cos x -$$

$$-2A \sin x + 2B \cos x = 2 \cos x.$$

$$-2A = 0, \quad 2B = 2, \quad B = 1.$$

$$\tilde{y} = x \sin x;$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x;$$

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 0 = -C_1. \end{cases}$$

$$y = (C + x \sin x).$$

Відповідь: $y = (C + x) \sin x$.

Завдання для самостійного виконання

Знайти екстремалі функціоналів:

$$1) I[y] = \int_0^1 (x + (y')^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2.$$

$$2) I[y] = \int_0^1 (\sin y' + 2(y')^2) dx; \quad y(0) = 3; \quad y(1) = 1.$$

$$3) I[y] = \int_0^1 ((y')^2 - y^2 - y) e^{2x} dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = e^{-1}.$$

$$4) I[y] = \int_1^e (x(y')^2 + yy') dx; \quad y(1) = 0; \quad y(e) = 1.$$

$$5) I[y] = \int_1^2 (y'(1 + x^2 y')) dx; \quad y(1) = 3; \quad y(2) = 5.$$

Тема 5. Умовний екстремум функціоналів

Означення 15. Елемент y_0 називається екстремумом функціонала $F(y)$, якщо y_0 є точкою екстремуму функціонала $F(y)$, при умові, що функціонал $G(y) = \alpha$.

Метод дослідження умовного екстремуму:

- 1) складаємо допоміжний функціонал $F + \lambda G$, де λ – невідомий числовий параметр;
- 2) використовуючи рівняння Ейлера для функціонала з першого кроку, складаємо диференціальне рівняння та розв'язуємо його (для інтегрального функціонала);
- 3) використовуючи фіксовані точки, умову умовного екстремуму та розв'язок диференціального рівняння, складаємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими, розв'язуючи яку, знаходимо сталі розв'язки диференціального рівняння та параметр λ ;
- 4) записуємо можливу екстремаль, використовуючи знайдені значення.

Екстремальна задача, якщо кінець рухається по вертикальній прямій

Нехай один або два кінці будуть рухатися по вертикальній прямій, правий кінець – по вертикальній прямій, а лівий кінець фіксований (рис 4).

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx.$$

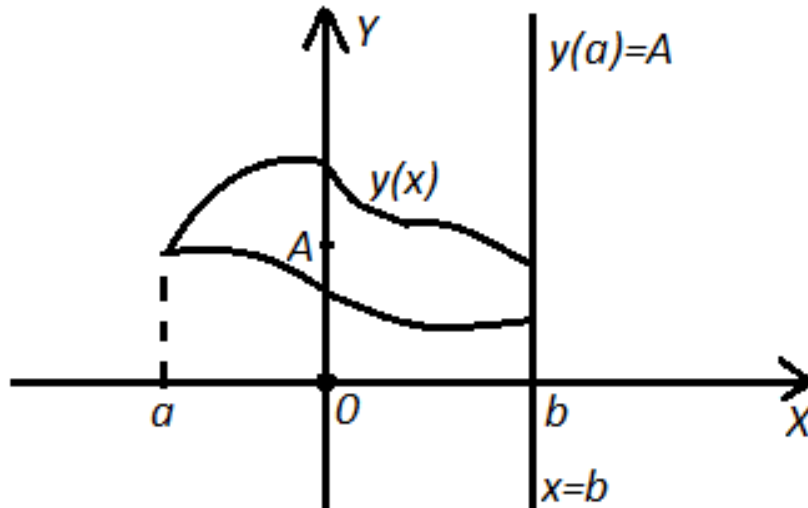


Рис. 4.

Умови на функції $f(x, y, y')$, $y(x)$ накладаються такі, як і на найпростіші задачі варіаційного числення.

$\delta F = 0$ – необхідна умова екстремуму,

$h(a) = 0$,

$h(b) \neq 0$ – нефіксована точка.

$$\delta F = \int_a^b (f'_{y'} \cdot h + f'_{y'} \cdot h') dx = \int_a^b f'_{y'} \cdot h \cdot dx + \int_a^b f'_{y'} \cdot h' \cdot dx.$$

Проінтегруємо другий інтеграл

$$\begin{aligned} \int_a^b f'_{y'} \cdot h' \cdot dx &= \left[\begin{array}{l} u = f'_{y'} \\ dv = h' \cdot dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = \frac{d}{dx} f'_{y'} dx \\ v = h \end{array} \right] = \\ &= h(x) \cdot f'_{y'}(x) \Big|_a^b - \int_a^b h(x) \cdot \frac{d}{dx} f'_{y'} dx = \\ &= h(b) \cdot f'_{y'}(b) - h(a) \cdot f'_{y'}(a) - \int_a^b h(x) \cdot \frac{d}{dx} f'_{y'} dx = \end{aligned}$$

Підставляємо у варіацію

$$= h(b) \cdot f'_{y'}(b) + \int_a^b h(x) \cdot \left(f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} \right) dx = h(b) \cdot f'_{y'}(b).$$

Рівняння Ейлера

$$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} = 0.$$

Згідно необхідної умови екстремуму:

$$h(b) \cdot f'_{y'}(b) = 0,$$

$$h(b) \neq 0.$$

Необхідна умова екстремуму, коли один з кінців рухається по вертикальній прямій

$$f'_{y'}(b) = 0.$$

Якщо лівий кінець рухається по вертикальній прямій $x = a$, то необхідна умова матиме вигляд

$$f'_{y'}(a) = 0.$$

Алгоритм розв'язання екстремальних задач, коли кінець або кінці рухаються по вертикальним прямим

1) Складаємо рівняння Ейлера та розв'язуємо його як диференціальне рівняння другого порядку.

2) З умов задачі

$$\text{а) } \begin{cases} y(a) = A, \\ f'_{y'}(b) = 0; \end{cases} \quad (a - \text{фіксована}, b - \text{рухається});$$

$$\text{б) } \begin{cases} f'_{y'}(a) = 0, \\ y(b) = B; \end{cases} \quad (a - \text{рухається}, b - \text{фіксована});$$

$$\text{в) } \begin{cases} f'_{y'}(a) = 0, \\ f'_{y'}(b) = 0; \end{cases} \quad (\text{обидва кінці рухаються});$$

3) З другого пункту знаходимо c_1 , c_2 та записуємо відповідь.

Екстремальна задача, якщо кінець рухається по кривій

Нехай маємо функціонал (рис 5).

$$F(y) = \int_a^{\xi} f(x, y, y') dx$$

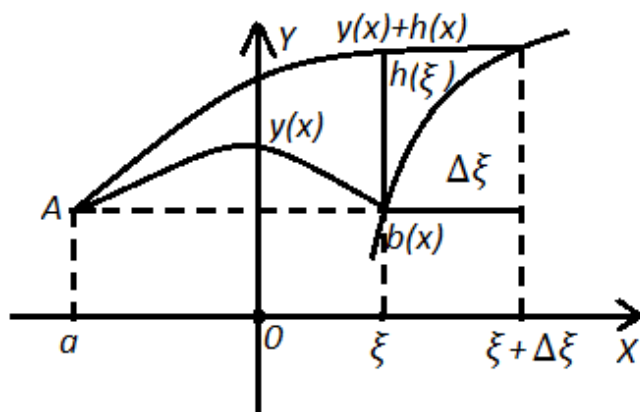


Рис. 5.

Умови на функції f і $y(x)$ накладаються такі, як на найпростіші задачі варіаційного числення.

Функція $b(x)$ є неперервною з неперервною похідною.

Дослідимо функціонал на екстремум

$$\delta F = 0; \quad \Delta F = \delta F + r,$$

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(y+h) - F(y) = \int_a^{\xi+\Delta\xi} f(x, y+h, y'+h') dx - \int_a^{\xi} f(x, y, y') dx = \\ &= \int_a^{\xi} f(x, y+h, y'+h') dx + \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x, y+h, y'+h') dx - \int_a^{\xi} f(x, y, y') dx = \\ &= \int_a^{\xi} (f(x, y+h, y'+h') - f(x, y, y')) dx + \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x, y+h, y'+h') dx. \end{aligned}$$

З виведення рівняння Ейлера варіація буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}\delta G &= \int_a^\xi (f(x, y + h, y' + h') - f(x, y, y')) dx = \\ &= \int_a^\xi (f'_y \cdot h + f'_{y'} \cdot h') dx = h(\xi) \cdot f'_{y'}(\xi) - h(a) \cdot f'_{y'}(a) - \\ &- \int_a^\xi h(x) \cdot \frac{d}{dx} f'_{y'} \cdot dx + \int_a^\xi f'_y \cdot h \cdot dx = h(\xi) \cdot f'_{y'}(\xi) + \\ &+ \int_a^\xi h(x) (f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'}) dx.\end{aligned}$$

Згідно теореми про середнє:

$$\int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x, y + h, y' + h') dx = f(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \cdot \Delta\xi.$$

Можна довести, що

$$b'(\xi) \cdot \Delta\xi - y'(\xi) \cdot \Delta\xi = h(\xi);$$

$$\Delta\xi = \frac{h(\xi)}{b'(\xi) - y'(\xi)}.$$

Підставимо у інтеграл

$$\int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x, y + h, y' + h') dx = f(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \cdot \Delta\xi,$$

$$f(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \cdot \frac{h(\xi)}{b'(\xi) - y'(\xi)}.$$

Об'єднуємо

$$f(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \cdot \frac{h(\xi)}{b'(\xi) - y'(\xi)}$$

з δG і отримаємо δF .

Врахувавши рівняння Ейлера

$$f'_{y'} - \frac{d}{dx} f'_{y'} = 0,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \delta F &= h(\xi) \cdot f'_{y'}(\xi) + f(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \cdot \frac{h(\xi)}{b'(\xi) - y'(\xi)} = \\ &= h(\xi) \cdot \frac{f'_{y'}(\xi) \cdot (b'(\xi) - y'(\xi)) + f(\xi, y(\xi), y'(\xi))}{b'(\xi) - y'(\xi)} = 0, \\ h(\xi) &\neq 0. \end{aligned}$$

Розв'язуємо рівняння

$$f'_{y'}(\xi) \cdot (b'(\xi) - y'(\xi)) + f(\xi, y(\xi), y'(\xi)) = 0. \quad (1)$$

Формула (1) – необхідна умова екстремуму функціонала у випадку, якщо правий кінець рухається по кривій. Вона називається умовою *трансверсальності*.

**Алгоритм розв'язання екстремальних задач, якщо кінець
рухається по кривій**

- 1) Складаємо рівняння Ейлера та розв'язуємо його.
- 2) а) складаємо систему для фіксованого лівого кінця, а правий кінець зміщується на $b(\xi)$:

$$\begin{cases} y(a) = A, \\ (1) \text{ умова трансверсальності для правого кінця,} \\ y(\xi) = b(\xi); \end{cases}$$

б) складаємо систему для фіксованого правого кінця, а лівий зміщується на $a(\eta)$:

$$\begin{cases} y(b) = B, \\ (1) \text{ умова трансверсальності для лівого кінця,} \\ y(\eta) = a(\eta); \end{cases}$$

в) складаємо систему, коли два кінці рухаються (лівий рухається по $a(\eta)$, правий рухається по $b(\xi)$):

$$\begin{cases} (1) \text{ умова трансверсальності для лівого кінця,} \\ (1) \text{ умова трансверсальності для правого кінця,} \\ y(\xi) = b(\xi), \\ y(\eta) = a(\eta). \end{cases}$$

Практичні завдання до теми 5

Приклад 5.1. Знайти екстремаль в ізометричній задачі:

$$F(y) = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad G = \int_0^1 y(x) dx = 3; \quad y(0) = 1, y(1) = 6.$$

Розв'язання.

$$F + \lambda G = \int_0^1 ((y')^2 + \lambda y) dx;$$

$$f'_y = \lambda;$$

$$f'_{y'} = 2y';$$

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} = 2y'';$$

$$\lambda - 2y'' = 0;$$

$$2y'' - \lambda = 0;$$

$$\int 2y'' = \int \lambda ;$$

$$2y' = \lambda x + C_1 \rightarrow 2y = \frac{\lambda x^2}{2} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \frac{\lambda x^2}{4} + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx^2}{2} + C_1 + C_2 \right);$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} C_2, \\ 6 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \lambda + C_1 + C_2 \right), \\ \int_0^1 y dx = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 2, \\ \frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{2} C_1 + 1 = 6, \\ \frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{2} C_1 = 5; \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} C_1 = 5 - \frac{1}{4} \lambda;$$

$$C_1 = 10 - \frac{1}{2} \lambda;$$

$$y = \frac{\lambda x^2}{4} + 5x - \frac{1}{4} \lambda x + 1;$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\lambda x^2}{4} + 5x - \frac{1}{4} \lambda x + 1 \right) dx = 3;$$

$$\left(\frac{1}{4} \lambda \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{4} \lambda \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = 3;$$

$$\left(\frac{\lambda x^3}{12} + \frac{5x^2}{2} - \frac{\lambda x^2}{8} + x \right) \Big|_0^1 = 3;$$

$$\frac{\lambda}{12} + \frac{5}{2} - \frac{\lambda}{8} + 1 = 3;$$

$$2\lambda + 60 - 3\lambda + 24 - 72 = 0;$$

$$-\lambda = -12;$$

$$\lambda = 12;$$

$$y = 3x^2 + 5x - 3x + 1 = 3x^2 + 2x + 1.$$

Відповідь: $y = 3x^2 + 2x + 1$.

Приклад 5.2. Знайти екстремаль в ізометричній задачі:

$$F(y) = \int_0^1 (x^2 + (y')^2) dx, \quad G = \int_0^1 y^2(x) dx = 2, \quad y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Розв'язання.

$$F + \lambda G = \int_0^1 (x^2 + (y')^2 + \lambda y^2) dx;$$

$$f'_y = 2\lambda y;$$

$$f'_{y'} = 2y';$$

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} = 2y'';$$

$$2\lambda y - 2y'' = 0;$$

$$y'' - \lambda y = 0;$$

$$k^2 - \lambda = 0;$$

$$k^2 = \lambda.$$

$$I) \quad L = 0, k_{1,2} = 0$$

$$y = C_1 + C_2 x;$$

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 0 = C_1 + C_2, \\ \int_0^1 y^2 dx = 2; \end{cases}$$

$$C_1 = 0;$$

$$C_2 = 0, \quad y = 0, \quad \emptyset.$$

$$II) \quad L > 0, \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{\pi}$$

$$y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x};$$

$$0 = C_1 + C_2;$$

$$0 = C_1 e^{\sqrt{\pi}} + C_2 e^{-\sqrt{\pi}};$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ C_2 (e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{\sqrt{\lambda}}) = 0, \\ \int_0^1 y^2 dx = 2. \end{cases}$$

$$1) \quad C_2 = 0, C_1 = 0, y = 0.$$

$$2) \quad e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{\sqrt{\lambda}} = 0;$$

$$e^{-\sqrt{\lambda}} = e^{\sqrt{\lambda}};$$

$$-\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda};$$

$$-2\sqrt{\lambda} = 0;$$

$$\sqrt{\lambda} = 0, \quad \lambda = 0, \quad \emptyset.$$

$$III) \quad L < 0, \quad k_{1,2} = \pm i\sqrt{-\pi}$$

$$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x);$$

$$0 = C_1;$$

$$0 = C_1 \cos \sqrt{-\lambda} + C_2 \sin \sqrt{-\lambda};$$

$$C_2 \sin \sqrt{-\lambda} = 0;$$

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin \sqrt{-\lambda} = 0, \\ \int_0^1 y^2 dx = 2. \end{cases}$$

$$1) C_2 \sin \sqrt{-\lambda} = 0$$

$$C_2 = 0, \quad C_1 = 0, \quad y = 0, \quad \emptyset.$$

$$2) \sin \sqrt{-\lambda} = 0$$

$$\sqrt{-\lambda} = \lambda n, \quad \lambda \in Z;$$

$$-\lambda = \lambda^2 n^2;$$

$$n = -(\lambda n)^2, \quad n \in Z;$$

$$\sin x = 0;$$

$$x = \lambda n;$$

$$y = C_2 \sin |\lambda n| x = C_2 \sin \lambda x |n| = 0, \quad \emptyset.$$

Відповідь: $\emptyset$.

Приклад 5.3. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(-1; 5)$ до параболи $y^2 = x$.

Розв'язання.

$$F(y) = \int_a^{b(x)} \sqrt{1 + y'^2} dx;$$

$$y^2 = x;$$

$$y = \pm \sqrt{x};$$

$$y = C_1 x + C_2;$$

$$y' = C_1;$$

$$b(x) = \pm\sqrt{x};$$

$$b'(x) = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + C_1^2} + \left(\pm\frac{1}{2\sqrt{x}} - C_1 \right) * \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} \Big|_{x=b_0=0} \\ 5 = -C_1 + C_2, \\ C_1 b_0 + C_2 = \pm\sqrt{b_0}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + C_1^2 + \left(\pm\frac{C_1}{2\sqrt{b_0}} - C_1^2 \right) = 0, \\ C_2 = 5 + C_1, \\ C_1 b_0 + 5 + C_1 = \pm\sqrt{b_0}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pm\frac{C_1}{2\sqrt{b_0}} = -1, \\ C_2 = 5 + C_1, \\ C_1(b_0 + 1) = \pm\sqrt{b_0} - 5; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pm\frac{C_1}{2\sqrt{b_0}} = -1, \\ C_2 = 5 + C_1, \\ C_1(b_0 + 1) = \pm\sqrt{b_0} - 5; \end{array} \right.$$

$$\pm C_1 = -2\sqrt{b_0}, \quad C_1 = \mp 2\sqrt{b_0};$$

$$\mp 2\sqrt{b_0}(b_0 + 1) = \pm\sqrt{b_0} - 5;$$

$$\pm\sqrt{b_0} \pm 2\sqrt{b_0}(b_0 + 1) = 5;$$

$$\pm\sqrt{b_0}(1 + 2b_0 + 2) = 5;$$

$$\left(\pm\sqrt{b_0}(2b_0 + 3) \right) = 5;$$

$$b_0(2b_0 + 3)^2 = 25;$$

$$b_0(4b_0^2 + 12b_0 + 9) = 25;$$

$$4b_0^3 + 12b_0^2 + 9b_0 - 25 = 0, \quad b_0 = 1;$$

	4	12	9	25
1	4	6	25	0

$$4b_0^2 + 16b_0 + 25 = 0;$$

$$D = 16^2 - 16 * 25 < 0;$$

$$C_1 = \mp 2, \quad C_2 = 5 \mp 2;$$

$$C_1 = -2, \quad C_2 = 3, \quad y = -2x + 3;$$

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 7, \quad y = 2x + 7;$$

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1+4} dx = \sqrt{5}x \Big|_{-1}^1 = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}.$$

Відповідь: $\sqrt{20}$.

Приклад 5.4. Знайти відстань між колом $x^2 + y^2 = 1$ та прямою $x + y = 4$.

Розв'язання.

$$F(y) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx;$$

$$y = C_1x + C_2, \quad y' = C_1;$$

$$x^2 + y^2 = 1;$$

$$y^2 = 1 - x^2;$$

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2} = a(x);$$

$$x + y = 4;$$

$$y = 4 - x = b(x);$$

$$b'(x) = -1;$$

$$a'(x) = \pm \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} * (-2x) = \mp \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+C_1^2} + \left(\mp \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - C_1 \right) * \frac{C_1}{\sqrt{1+a^2}} \Big|_{x=a_0=0} \\ \sqrt{1+C_1^2} + (-1-C_1) * \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} \Big|_{x=b_0=0} \\ C_1 a_0 + C_2 = \pm \sqrt{1-a_0^2}, \\ C_1 b_0 + C_2 = 4 - b_0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + C_1^2 \mp \frac{a_0 C_1}{\sqrt{1-a_0^2}} - C_1^2 = 0, \\ 1 + C_1^2 - C_1 - C_1^2 = 0, \\ C_1 a_0 + C_2 = \pm \sqrt{1-a_0^2}, \\ C_1 b_0 + C_2 = 4 - b_0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pm \frac{C_1 a_0}{\sqrt{1-a_0^2}} = 1, \\ C_1 = 1, \\ C_1 a_0 + C_2 = \pm \sqrt{1-a_0^2}, \\ C_1 b_0 + C_2 = 4 - b_0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 1, \\ \pm \frac{a_0}{\sqrt{1-a_0^2}} = 1, \\ a_0 + C_2 = \pm \sqrt{1-a_0^2}, \\ b_0 + C_2 = \pm \sqrt{1-b_0^2}; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ \pm a_0 = \pm \sqrt{1 - a_0^2}, \\ a_0 + C_2 = \pm \sqrt{1 - a_0^2}, \\ b_0 + C_2 = \pm \sqrt{1 - b_0^2}; \end{cases}$$

$$a_0^2 = 1 - a_0^2;$$

$$2a_0^2 = 1;$$

$$a_0^2 = \frac{1}{2};$$

$$a_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$C_2 = \pm \sqrt{1 - a_0^2} - a_0;$$

$$C_1 = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \mp \sqrt{\frac{1}{2}} = 0;$$

$$b_0 = 4 - b_0;$$

$$2b_0 = 4;$$

$$b_0 = 2;$$

$$l = \int_{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}}^2 \sqrt{2} dx = \sqrt{2} x \Big|_{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}}^2 = 2\sqrt{2} \mp 1.$$

Відповідь: $2\sqrt{2} \mp 1$.

Приклад 5.5. Знайти найкоротшу відстань між точкою $A(-1; 3)$ та прямою $y = 1 - 3x$.

Розв'язання.

$$F(y) = \int_a^{b(x)} \sqrt{1 + y'^2} dx;$$

$$y = C_1 x + C_2, \quad y' = C_1;$$

$$a = -1;$$

$$b(x) = 1 - 3x, \quad b'(x) = -3;$$

$$\begin{cases} \left. \sqrt{1 + y'^2} + (-3 - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right|_{x=b_0=0} \\ -C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 b_0 + C_2 = 1 - 3b_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1 + C_1^2} + (-3 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0, \\ -C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 b_0 + C_2 = 1 - 3b_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + C_1^2 - 3C_1 - C_1^2 = 0, \\ C_2 = 3 + C_1, \\ C_1 b_0 + C_2 = 1 - 3b_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}, \\ C_2 = \frac{10}{3}, \\ \frac{1}{3} b_0 + \frac{10}{3} = 1 - 3b_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}, \\ C_2 = \frac{10}{3}, \\ b_0 = -\frac{7}{10}; \end{cases}$$

$$l = \int_{-1}^{-\frac{7}{10}} \sqrt{1 + \frac{1}{9}} dx = \int_{-1}^{-\frac{7}{10}} \sqrt{\frac{10}{9}} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{10}x}{3} \Big|_{-1}^{-\frac{7}{10}} = -\frac{7}{10} * \frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{3}{10} * \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Приклад 5.6. Знайти відстань між параболою $y = x^2$ і прямою $x - y = 5$.

Розв'язання.

$$F(y) = \int_{a(x)}^{b(x)} \sqrt{1 + (y')^2} dx;$$

$$a(x) = x^2; \quad b(x) = x - 5;$$

$$f'_y = 0; \quad f'_{y'} = \frac{1 * y'}{2 * \sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}};$$

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} = \frac{y'' \sqrt{1 + (y')^2} - y' * \frac{1 * 2y'y''}{2\sqrt{1 + (y')^2}}}{1 + (y')^2} = \frac{2y''(1 + (y')^2) - 2(y')^2 * y''}{2(1 + (y')^2)\sqrt{1 + (y')^2}} =$$

$$= \frac{y''}{(1 + (y')^2)\sqrt{1 + (y')^2}};$$

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)\sqrt{1 + (y')^2}} - 0 = 0 \rightarrow y'' = 0 \rightarrow y' = C_1 \rightarrow y = C_1 x + C_2;$$

$$\begin{cases} (f + (a'(x) - y') * f'_{y'})|_{x=a_0=0} \\ (f + (b'(x) - y') * f'_{y'})|_{x=b_0=0} \\ a(a_0) = y(a_0), \\ b(b_0) = y(b_0); \end{cases}$$

$$a'(x) = 2x; \quad b'(x) = 1;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sqrt{1 + (y')^2} + (2x - y') * \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) \Big|_{x=a_0=0} \\ \left(\sqrt{1 + (y')^2} + (1 + y') * \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) \Big|_{x=b_0=0} \\ a_0^2 = C_1 a_0 + C_2, \\ b_0 - 5 = C_1 b_0 + C_2; \end{array} \right.$$

$$y = C_1 x + C_2 \rightarrow y' = C_1;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + C_1^2} + (2a_0 - C_1) * \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0, \\ \sqrt{1 + C_1^2} + (1 - C_1) * \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0, \\ a_0^2 = C_1 a_0 + C_2, \\ b_0 - 5 = C_1 b_0 + C_2; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + C_1^2 - (2a_0 - C_1)C_1 = 0, \\ 1 + C_1^2 + (1 - C_1)C_1 = 0, \\ a_0^2 = C_1 a_0 + C_2, \\ b_0 - 5 = C_1 b_0 + C_2; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2a_0 C_1 = 0, \\ 1 + C_1 = 0, \\ a_0^2 = C_1 a_0 + C_2, \\ b_0 - 5 = C_1 b_0 + C_2; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = -1, \\ a_0 = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + C_2, \\ b_0 - 5 = -b_0 + C_2; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} C_1 = -1, \\ a_0 = \frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{3}{4}, \\ 2b_0 = 5 + C_2 \rightarrow b_0 = \frac{23}{8}; \end{cases}$$

$$y = -x + \frac{3}{4}; \quad y' = -1;$$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \sqrt{2}x \Big|_{1/2}^{23/8} = \frac{19}{8}\sqrt{2}.$$

Відповідь: $\frac{19}{8}\sqrt{2}$.

Завдання для самостійного виконання

1) Знайти екстремаль в ізометричній задачі:

$$F(y) = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad G = \int_0^1 y^2(x) dx = 1; \quad y(0) = 2, y(1) = 4.$$

2) Знайти найкоротшу відстань між точкою $A(2; -3)$ та прямою $y = 4x - 5$.

3) Знайти найкоротшу відстань від точки $A(1; -5)$ до параболи $x^2 = y$.

4) Знайти відстань між параболою $y = x^2$ і прямою $x - y - 2 = 0$.

5) Знайти відстань між колом $x^2 + y^2 = 4$ та прямою $x + y = 2$.

Список рекомендованої літератури

1. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. *Математичне програмування та елементи варіаційного числення*: Навчальний посібник. Київ: Знання, 2008. 368 с. (Вища освіта ХХІ століття).
2. Дубовик В. П., Юрик І. І. *Вища математика*: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – 4-те вид. К.: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
3. Клименко М. І., Панасенко Є. В., Стреляєв Ю. М., Ткаченко І. Г. *Варіаційне числення та методи оптимізації*. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 84 с.
4. Клименко М. І., Швидка С. П. *Варіаційне числення та методи оптимізації*: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Прикладна математика» освітньо-професійної програми «Прикладна математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2020. 91 с.
5. Моклячук М. П. *Варіаційне числення. Екстремальні задачі*. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2010. 399 с.
6. Перестюк М. О., Станжицький О. М., Капустян О. В., Ловейкін Ю. В. *Варіаційне числення та методи оптимізації*. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2010. 144 с.
7. Піддубний О. М., Харкевич Ю. І. *Варіаційне числення та методи оптимізації*. Луцьк: Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, 2017. 332 с.
8. Соколов С. В. *Оптимальні та адаптивні системи*: навчальний посібник. Суми: Сумський державний університет, 2018. 221 с.