ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2026, 41(1), https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-06
УДК: 373.5.091.3:512

СИСТЕМА ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ: КРИТЕРІЇ СТВОРЕННЯ, ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Василь ШВЕЦЬ
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
kmmvm@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-2084-1336

Алла ПРУС ✉
Житомирський державний університет імені Івана Франка, Україна
pruswork@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8869-2544

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *У Державних стандартах базової середньої (Міністерство освіти та науки України [МОН], 2020) та профільної середньої освіти (МОН, 2024) до обов'язкових результатів навчання здобувачів освіти названо вимоги, що визначені на основі компетентнісного підходу. Це так звані ключові компетентності. Їх одинадцять. Однією з них є математична компетентність. Вимоги, як результат навчальної діяльності, мають виконуватись, досягатися під час навчання учнів кожній навчальній дисципліні, зокрема і математики також. Одним з ефективних засобів формування ключових компетентностей під час навчання учнів математики є прикладні задачі – задачі, які існують поза межами математики, але розв'язуються за допомогою математичних знань. Їх часто поділяють на реальні, ті, що існують в дійсності, і уявні (квазі прикладні,) ті, що можуть виникати, існують в уяві людей і які їм ймовірно згодом доведеться розв'язувати. Тому вони і включаються в шкільні підручники з математики, в навчальні посібники, збірники задач, дидактичні матеріали. Це особливі задачі, які відрізняються від суто математичних своїм цільовим призначенням, методами розв'язування, культурою математичного мовлення тощо. За допомогою них в учнів формуються уміння і навички математичного моделювання, обізнаність і здатність застосовувати отримані математичні знання в побуті, під час вивчення суміжних навчальних дисциплін, в оволодінні професійними знаннями, в продовження освіти. Кількома такими задачами сформувати задекларовані компетентності неможливо. Тому мають бути створені добірки систем прикладних задач, які б відповідали як змісту математичної підготовки, так і віковим можливостям та інтересам здобувачів освіти. Для створення системи прикладних задач необхідно мати критерії відбору кожної з них у систему (добірку). Саме цій проблемі і присвячена дана стаття. В ній запропоновано розроблені авторами систему критеріїв для створення добірок прикладних задач з математики як засобу формування ключових компетентностей учнів.*

Матеріали і методи. *Для створення критеріїв відбору прикладних задач з математики було використано теоретичні (аналіз нормативних документів, науковий статей, довідкової та навчальної літератури з теорії та методики навчання математики, синтез отриманих результатів, їх узагальнення) та емпіричні (опитування вчителів, ознайомлення з передовим досвідом навчання учнів математики, вивчення і аналіз учнівських контрольних робіт, виконання тестових завдань) методи дослідження.*

SYSTEM OF APPLIED MATHEMATICAL PROBLEMS: CRITERIA FOR DEVELOPMENT AND FEATURES OF SOLUTION

Vasyl SHVETS
Dragomanov Ukranian State University, Ukraine
kmmvm@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-2084-1336

Alla PRUS ✉
Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine
pruswork@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8869-2544

ABSTRACT

Formulation of the problem. *The State Standards of Basic Secondary Education (Ministry of Education and Science of Ukraine [MES], 2020) and Specialized Secondary Education (MES, 2024) define mandatory learning outcomes for students based on a competence-based approach, namely, the key competences (eleven in total). One of them is mathematical competence. These requirements as learning outcomes must be achieved during the study of every school subject, including mathematics. One of the most effective means of forming key competences in mathematics lessons is applied problems—problems that exist beyond mathematics but are solved using mathematical knowledge. They are commonly classified into real problems, which exist in practice, and imaginary (quasi-applied) problems, which arise in people's imagination and may need to be solved in the future. Therefore, such problems are included in school mathematics textbooks, teaching aids, problem books, and didactic materials. These are special problems that differ from purely mathematical ones in their purpose, methods of solution, and the culture of mathematical communication. They help students develop skills in mathematical modelling, awareness, and the ability to apply mathematical knowledge in everyday life, in studying related subjects, and in acquiring professional knowledge in further education. A few isolated tasks cannot ensure the formation of the declared competences; therefore, systems of applied problems must be developed that correspond both to the content of mathematical training and to students' age-related abilities and interests. To design such systems, clear selection criteria are required. This article addresses this issue and proposes a set of criteria for developing sets of applied mathematical problems to foster students' key competences.*

Materials and methods. *To develop the criteria for selecting applied mathematical problems, theoretical methods (analysis of regulatory documents, scientific papers, reference and teaching literature on mathematics education; synthesis and generalization of results), and empirical methods (teacher surveys, study of best teaching practices, analysis of students' written work and test performance) were used.*

Results. *The outcome is a system of criteria for constructing sets of applied mathematical problems, along with methodological recommendations for their solution.*

Conclusions. *A system of applied mathematical problems is an effective means of forming key competencies among school students. Such problem sets should be an integral component of the task material in every topic of the school mathematics curriculum. Their solution makes a significant contribution to the development of students' key competences.*

Результати. *Результатом стала система критеріїв створення добірок прикладних задач з математики і методичні рекомендації щодо їх розв'язування.*

Висновки. *Одним з ефективних засобів формування у здобувачів шкільної освіти ключових компетентностей під час навчання математики є система прикладних задач. Добірки таких задач мають бути невід'ємною складовою частиною задачного матеріалу підручників з кожної навчальної програмної теми шкільного курсу математики. Їх розв'язування робить помітний внесок у формування в учнів ключових компетентностей.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стандарт освіти; ключові компетентності; прикладні задачі з математики; критерії створення системи задач, математичне моделювання; особливості розв'язування прикладних задач.

KEYWORDS: education standard; key competences; applied mathematical problems; criteria for designing problem systems; mathematical modelling; features of solving applied problems.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Швець В., Прус А. Система прикладних задач з математики: критерії створення, особливості розв'язування. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 1. С. 37-47. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-06.

FOR CITATION: Shvets, V., & Prus, A. (2026). System of applied mathematical problems: criteria for development and features of solution. *Physical and Mathematical Education*, *41*(1), 37-47. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-06.

ВСТУП

Постановка проблеми. Вимоги обох стандартів освіти (МОН, 2020) і (МОН, 2024) щодо *формування у школярів ключових компетентностей* під час навчання математики спонукають і науковців, і вчителів-практиків до пошуку ефективних засобів, методів, форм, технологій навчання для успішного формування визначених компетентностей. З такими вимогами українська шкільна освіта зіткнулася вперше, вони нові, а значного досвіду виконання ще не напрацьовано. Це вказує на *актуальність проблеми дослідження* та на *розробку методичного забезпечення* її вирішення. Названі вимоги стосуються всіх навчальних предметів, що вивчаються школярами, зокрема і математики також. Виникає цілком слушне запитання: «А що може привнести шкільний курс математики у виконання названого державного замовлення?». На наше глибоке переконання, математика володіє досить потужним потенціалом; як *засоби* – прикладні (доцільні і на застосування) задачі, навчальні проєкти, лабораторні та практичні роботи; як *методи навчання* – метод проєктів, метод навчання через розв'язування задач, евристичні бесіди, метод математичного моделювання; як *форми навчання* – бінарні чи інтегровані уроки, екскурсії тощо. Це далеко не весь перелік, ми його продовжувати не будемо.

Зосередимось детально на прикладних задачах з математики. Вони – особливі засоби. До них відносять задачі, які виникають за межами математики, але розв'язуються за допомогою знань з математики. Їх іноді поділяють на реальні (ті, що затребувані життям) і на уявні (квазіприкладні, ті, що ймовірно можуть виникати і до яких слід бути готовим розв'язувати). Не вдаючись в деталізацію, будемо всіх їх називати надалі прикладними. Сформувати ключові компетентності шляхом розв'язання кількох прикладних задач неможливо. Їх має бути не одна добірка, кожна з яких утворює *систему засобів*. Щоб створювати таку систему прикладних задач мають бути чітко визначені системоутворюючі критерії. Їх поки що немає. Саме цій проблемі – критерії створення системи прикладних задач з шкільного курсу математики і присвячене наше дослідження.

Аналіз актуальних досліджень. Слід зазначити, що глибокого і розлогого дослідження проблеми створення системи сучасних прикладних задач шкільного курсу математики ми в Україні не виявили. Але це не означає, що проблема прикладних задач не перебуває в полі зору дослідників з дидактики математики. В Україні, наприклад, окремі аспекти цієї проблематики активно розробляються в контексті оновлення змісту математичної освіти та впровадження компетентнісного підходу. Дослідники аналізують особливості навчання математики за новими програмами, акцентуючи увагу на практичній спрямованості та прикладному характері навчального матеріалу (Бурда & Васильєва, 2017). Значна увага приділяється формуванню в учнів умінь математичного моделювання як ключового механізму роботи з прикладними задачами (Катеринюк, 2020; Матяш, 2019; Прус 2023, 2024). У працях останніх років математичне моделювання розглядається як «лінза» пізнання реального світу та як перспективний напрям розвитку математичної освіти. Також досліджується методична діяльність із компетентнісними задачами у підготовці майбутніх учителів математики (Тарасенкова & Акуленко, 2025). Окремі напрацювання присвячені прикладним задачам природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу (Соколенко та ін., 2010). Водночас ці дослідження мають фрагментарний характер і не утворюють цілісної, системно обґрунтованої моделі сучасної системи прикладних задач шкільного курсу математики. У зарубіжних працях проблематика прикладних задач та математичного моделювання має значно довшу історію системних досліджень. Ретроспективний огляд розвитку цього напряму (Houston et al., 2009; Frejd & Vos, 2023) засвідчує, що вже понад п'ятдесят років світова спільнота дослідників активно працює над теоретичним обґрунтуванням та практичною реалізацією математичного моделювання в освіті. Зокрема, діяльність міжнародної групи ICTMA (International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications) протягом останніх 25 п'яти років суттєво вплинула на формування сучасних підходів до навчання через прикладні задачі. Теоретичні основи використання прикладних задач у навчанні математики закладені в класичних працях Вернера Блума (Blum, 1993), який обґрунтував необхідність математичного моделювання як невід'ємної складової математичної освіти. Подальший розвиток цих ідей знаходимо в роботах, що досліджують можливості навчання моделюванню (Blum & Borromeo Ferri, 2009) та його впровадження в шкільну практику (Borromeo Ferri, 2020). Важливим є висновок дослідників про те, що вміння математичного моделювання не лише може, але й повинно цілеспрямовано формуватися в учнів. Аналіз зарубіжної літератури виявляє множинність перспектив дослідження математичного моделювання та прикладних задач. Систематизація підходів (Abassian et al., 2020; Galbraith, 2012; Blomhøj, 2009; Kaiser et al., 2007) дозволяє виокремити кілька ключових напрямів: реалістичний (орієнтований на автентичні проблеми реального світу), освітній (зосереджений на навчальних цілях), контекстуальний (що враховує соціокультурні особливості) та когнітивний (спрямований на розвиток мисленнєвих процесів). Ця багатоперспективність свідчить про складність та багатогранність проблеми створення системи прикладних задач. Особлива увага в зарубіжних дослідженнях приділяється питанню автентичності прикладних задач. Кайзер та Шварц (Kaiser & Schwarz, 2010) наголошують на необхідності використання справжніх модельних проблем, які відображають реальні ситуації та потребують справжнього математичного аналізу. Водночас критичний аналіз текстових задач у шкільних підручниках (Depaepe et al., 2009) демонструє, що значна частина так званих "прикладних" задач має штучний, псевдореалістичний характер і не забезпечує справжнього зв'язку математики з реальністю. Концептуальне значення для розуміння сутності роботи з прикладними задачами має дослідження модельної перспективи навчання математики (Lesh & Doerr, 2003), яка розглядає моделювання не просто як застосування математики, а як фундаментальний спосіб математичного мислення. У цьому контексті важливим є визначення компетентностей математичного моделювання (Maaβ, 2006), що включають здатність розуміти реальні проблеми, структурувати їх, математизувати, працювати з математичними моделями, інтерпретувати результати. Соціокультурний вимір проблеми прикладних задач розкривається в дослідженнях, що розглядають математичне моделювання як інструмент критичного осмислення соціальних питань (Barbosa, 2006; Julie & Mudaly, 2007). Особливо важливим є досвід використання прикладних задач для аналізу соціальних проблем у південноафриканській освіті, що демонструє потенціал математики як засобу формування громадянської позиції учнів. Дидактичний аспект впровадження прикладних задач у навчальний процес ґрунтовно досліджено в контексті підготовки вчителів (Borromeo Ferri, 2018). Підкреслюється, що ефективне використання системи прикладних задач вимагає від учителів не лише глибоких математичних знань, але й розуміння процесів моделювання, здатності керувати навчальною діяльністю учнів у відкритих проблемних ситуаціях. Також наголошується на необхідності зв'язку шкільної математики з позашкільною реальністю через математичне моделювання (García et al., 2006). Ретроспективний огляд досліджень (Kutluca & Kaya, 2023; Burkhardt & Pollak, 2006) свідчить про еволюцію підходів до математичного моделювання в освіті: від епізодичного використання окремих прикладних задач до системного впровадження моделювання як наскрізної лінії курсу математики. Аналіз результатів досліджень у середній школі (Stillman, 2012) демонструє позитивний вплив систематичної роботи з прикладними задачами на розвиток математичного мислення учнів та їхню мотивацію до вивчення предмета.

Таким чином, зарубіжні дослідження формують потужну теоретичну та методичну базу для розробки системи прикладних задач. Кожен дослідник обрав для себе певний предмет дослідження, ми ж зосередили свою увагу на розробці критеріїв створення саме системи прикладних задач як засобу формування ключових компетентностей під час навчання учнів шкільного курсу математики. Цим і визначається новизна та актуальність нашого дослідження.

Мета статті. Запропонувати критерії створення системи сучасних прикладних задач з шкільного курсу математики для формування в учнів ключових компетентностей, що визначені в стандартах базової середньої та профільної середньої освіти.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні використано низку методів наукового пізнання: – *теоретичні* – аналіз нормативних документів, довідкової, навчальної та наукової літератури з теорії та методики навчання математики, синтез отриманих відомостей, їх узагальнення; – *емпіричні* – опитування вчителів, ознайомлення з передовим досвідом навчання учнів математики, анкетування учнів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Насамперед визначимось із змістом окремих термінів, які будемо вживати надалі. Найперший з них – *критерій*. Під терміном критерій ми розуміємо підставу для оцінки, для визначення або для класифікації певних об'єктів (у даному випадку прикладних задач). Таким чином критерій – це мірило, мірка якою визначається можливість включення прикладної задачі до системи (до добірки). Добираючи прикладні задачі до системи (добірки) важливо враховувати їх можливості, їх відповідність завданням формування ключових компетентностей. Таку відповідність ми назвали *валідністю*, виходячи з того, що під цим терміном розуміють міру того, наскільки дослідницький інструмент або висновок (в даному випадку прикладна задача) є необхідною та відповідає реальному явищу чи поставленій меті. Існують різні види валідності: статистична, змістовна, змістова, критеріальна, конструктивна та інші. У нашому випадку мова йде про *змістовну валідність* – відповідність змісту завдань (прикладних задач) поставленим цілям (вимогам) навчання математики. Виходячи з таких посилань, нами були розроблені наступні системоутворюючі критерії добірки прикладних задач з математики (дивись таблицю 1).

Таблиця 1. Критерії створення добірок прикладних задач до навчальної теми з математики

№	*Зміст критерію відбору прикладної задачі в систему (добірку)*	*Вид валідності*	*Ваговий коефіцієнт*	*Обґрунтування*
1	Задача має відповідати віковим потребам та інтересам учнів (молодший підліток, старший підліток чи юнацький вік)	потребнісна	0,06	Важливий — забезпечує психологічну готовність до навчання та формування стійкої внутрішньої мотивації.
2	Задача має відповідати віковим можливостям учнів, розвитку їх уяви, інтелектуальним можливостям, рівню мислення (наочно-предметне, наочно-образне чи теоретичне)	інтелектуальна	0,1	Значущий — забезпечує доступність матеріалу та когнітивний розвиток відповідно до зони найближчого розвитку учня.

№	*Зміст критерію відбору прикладної задачі в систему (добірку)*	*Вид валідності*	*Ваговий коефіцієнт*	*Обґрунтування*
3	Сюжет задачі має бути життєво важливим для учня, сприяти його загальному розвитку, відображати реалії життя в яких він перебуває	соціальна	0,2	Пріоритетний — без прямого зв'язку з досвідом учня задача втрачає свій прикладний сенс та виховний потенціал.
4	Задача має формулюватись діловою мовою, лаконічно, містити зрозумілі терміни, які легко пояснити чи знайти в довіднику	змістова	0,03	Технічний — визначає якість сприйняття умови та мінімізує сторонні перешкоди при побудові математичної моделі.
5	Задача має відповідати змісту навчальної теми з математики що вивчається, щоб отримані учнями знання використовувались під час розв'язування, під час застосування методу математичного моделювання чи виконання практико-орієнтованих завдань	освітня	0,15	Важливий — демонструє практичну цінність теоретичних знань та забезпечує цілісність процесу навчання.
6	Система задач має бути диференційовно реалізовною, різного рівня складності і разом з тим показувати важливість математичних знань для здобування знань з інших навчальних предметів	міжпредметна	0,08	Системний — підкреслює універсальність математичного апарату як інструменту для вивчення інших наук.
7	Задачі, що включені до добірки, мають служити і тренажером вироблення вмінь та навичок, і засобом контролю результатів навчання математики. Передбачати індивідуальну, групову чи колективну форму роботи щодо їх розв'язування	дидактична	0,12	Методичний — дозволяє ефективно інтегрувати задачі в структуру уроку та здійснювати моніторинг досягнень.
8	Задачі мають описувати реальні ситуації (дійсні чи ймовірно віртуальні), містити реальні числові показники, числові значення величин	реалістична	0,2	Пріоритетний — верифіковані дані формують довіру до предмета та запобігають відірваності математики від життя.
9	У добірку слід включати задачі пов'язані з історією математики, з діяльності її творців. Їх розв'язування має показувати учням що математика це пласт загально-людської культури, з яким має бути ознайомлена освітня людина	культурна	0,02	Допоміжний — сприяє гуманітаризації освіти та формуванню загальнокультурної компетентності особистості.
10	Кожна тематична добірка задач має забезпечувати наступність у формуванні ключових компетентностей, методу математичного моделювання, розвивати змістові лінії курсу математики	конструктивна	0,04	Фундаментальний — забезпечує цілісну логіку розвитку мислення та системність математичної підготовки

Джерело: авторська розробка.

Ми назвали найважливіші, на наш погляд, критерії, щоб створені на їх основі прикладні задачі давали змогу виконувати вимоги державного освітнього стандарту. У шкільних програмах з математики виокремлено багато навчальних тем. Саме для створення системи (добірок) прикладних задач до них і рекомендовані розроблені критерії. Зауважимо, що виходячи з навчального матеріалу теми відповідна добірка може бути створена із урахуванням лише окремих критеріїв. Важливо, щоб вони враховувались, по можливості, всі, а така добірка була *кульмінаційним засобом* застосування отриманих знань на практиці. Проілюструємо застосування критеріїв на прикладі вивчення окремих тем курсу стереометрії.

Добірка задач математичного моделювання (прикладних задач) до теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» старшої профільної школи

Задача 1 (про сховище під час повітряної тривоги).

Під час повітряної тривоги Ви з однокласниками перебуваєте в підвальному сховищі розміром 8 м × 6 м × 3 м. У сховищі є вентиляційна труба круглого перерізу діаметром 15 см, через яку повітря надходить зі швидкістю 0,1 м/с.

Завдання.

1. За який час через вентиляційну трубу повністю оновиться все повітря в сховищі?
2. Чи достатня така вентиляція для комфортного перебування у такому сховищі 30 осіб?

***Практична інформація*.** Якість вентиляції критично важлива для безпеки людей у сховищі. Недостатня вентиляція може призвести до накопичення вуглекислого газу та зниження вмісту кисню, що небезпечно для здоров'я. На практиці можна наближено визначити швидкість руху повітря через вентилятор таким чином. Підносять до отвору вентилятора запалену свічку: якщо полум’я ледве відхиляється, то швидкість буде приблизно $20\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$; якщо відхиляється від вертикального напряму на 45°, то швидкість дорівнює $45\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$; якщо лягає горизонтально, то швидкість буде $80\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$; якщо сильно тріщить – $130\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$; якщо гасне, то швидкість $180\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$ і більше.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу соціальну валідність (критерій 3) – відображає реалії життя в умовах війни, є життєво важливою для учнів. Реалістична валідність (критерій 8) забезпечена реальними числовими показниками та практичними методами вимірювання. Задача формує потребнісну валідність (критерій 1), оскільки безпосередньо пов'язана з досвідом підлітків під час повітряних тривог. Освітня валідність (критерій 5) реалізується через застосування формул об'єму прямокутного паралелепіпеда, площі круга та роботу з одиницями вимірювання.

Задача 2 (про розрахунок площі поверхні тіла для медичних потреб).

У медицині для правильного дозування ліків (особливо під час хіміотерапії або інтенсивної терапії) лікарям потрібно знати площу поверхні тіла пацієнта. Відомо, що для дорослої людини масою 65 кг площа поверхні тіла становить у середньому 2 м².

Завдання.

Яка площа поверхні тіла у вашого однокласника, якщо його маса становить 50 кг?

Підказка. Маса тіла людини приблизно пропорційна об'єму тіла (тобто кубу лінійних розмірів), а площа поверхні – квадрату лінійних розмірів.

Практична інформація. Цей розрахунок важливий не лише в медицині. Спортивні тренери використовують співвідношення маси до площі поверхні тіла для складання індивідуальних програм тренувань та харчування.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача демонструє міжпредметну валідність (критерій 6) – зв'язок математики з біологією та медициною. Інтелектуальна валідність (критерій 2) виявляється у необхідності встановити пропорційні залежності між площею, об'ємом та лінійними розмірами. Задача має практичну значущість і показує застосування математичного моделювання у медичній практиці.

Задача 3 (про розпалювання вогнища).

Ви з друзями вирішили влаштувати пікнік на природі та розпалити багаття. У вас є поліно діаметром 15 см та довжиною 40 см, а також кілька тонких скіпок, відколотих від цього самого поліна.

Завдання.

1. Чому тонкі скіпки загоряються набагато швидше, ніж ціле поліно, від якого вони відколоті?
2. Обчисліть приблизну площу поверхні цілого поліна та порівняйте, як зміниться загальна площа поверхні, якщо поліно розколоти на 8 однакових скіпок?
3. Чому збільшення площі поверхні прискорює горіння?

Підказка. Так як нагрівання відбувається з поверхні і поширюється на весь об’єм тіла, то потрібно порівняти поверхню та об’єм скіпи, наприклад, квадратного перерізу, з поверхнею та об’ємом поліна тієї ж довжини і теж квадратного перерізу, щоб визначити, якої величини поверхня приходиться на кожен кубічний сантиметр деревини в обох випадках. Якщо товщина поліна в 10 разів більша товщини скипи, то бічна поверхня поліна більша поверхні скипи теж в 10 разів, а об’єм його більший об’єму скипи в 100 разів. Отже, на кожну одиницю поверхні в скипи приходиться вдесятеро менший об’єм, чим у поліні: однакова кількість тепла нагріває у скипи в десятеро менше речовини, - звідси і більш швидке запалення скипи, ніж поліна від одного й того ж джерела тепла. (Внаслідок поганої теплопровідності дерева, вказані відношення слід розглядати лише як приблизні, що характеризують загальний хід процесу. А не кількісну сторону).

Практична інформація. Це знання допомагає не лише в розпалюванні багаття, а й у розумінні правил пожежної безпеки (чому тирса або стружка загоряються миттєво), у кулінарії (чому дрібно нарізані продукти готуються швидше) та в промисловості (подрібнення матеріалів для прискорення хімічних реакцій).

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу потребнісну валідність (критерій 1) – пов'язана з активним дозвіллям підлітків. Соціальна валідність (критерій 3) виявляється у практичному застосуванні знань у повсякденному житті. Задача формує розуміння співвідношення між площею поверхні та об'ємом, демонструє міжпредметні зв'язки (критерій 6) з фізикою (теплопередача), хімією (швидкість реакції горіння) та основами безпеки життєдіяльності.

Задача 4 (про стійкість стебел папірусу).

Під час уроку біології ви вивчали рослини Стародавнього Єгипту. Папірус, з якого єгиптяни виготовляли папір для письма, має тригранне стебло висотою до 4,5 м.

Завдання.

1. Чому природа "обрала" саме тригранну форму для такого високого стебла?
2. Обчисліть площу поперечного перерізу тригранного стебла папірусу, якщо сторона трикутника дорівнює 3 см.
3. Обчисліть площу поперечного перерізу круглого стебла того ж периметру.
4. Порівняйте, яка форма забезпечує більшу площу перерізу (а отже, міцність) при однаковій кількості матеріалу.
5. Поясніть, чому тригранна форма вигідніша для високої рослини з точки зору стійкості до вітру.

Історична довідка. Папірус використовувався в Єгипті понад 3000 років. Стебла розрізали на смужки, викладали перпендикулярно один до одного та пресували – так виходив аркуш для письма.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має культурну валідність (критерій 9) – пов'язує математику з історією та біологією. Міжпредметна валідність (критерій 6) виражена у зв'язку з біологією, історією та фізикою (механіка, оптимізація конструкцій). Задача демонструє, що математика – це інструмент для розуміння законів природи та їх застосування людиною.

Задача 5 (про «геометрію кропиви» у вашому дворі).

Ви помітили, що на городі біля вашого будинку росте кропива дводомна з чотиригранним стеблом висотою 120 см. Ваша бабуся розповіла, що з кропиви можна зробити міцну тканину, а чотиригранна форма стебла не випадкова. Виміряйте (або уявіть) стебло кропиви з довжиною сторони квадрата в перерізі 0,8 см.

***Завдання*.**

1. Обчисліть площу його поперечного перерізу.
2. Обчисліть площу поперечного перерізу круглого стебла з таким самим периметром.
3. Визначте, на скільки відсотків чотиригранне стебло міцніше круглого при однаковій витраті матеріалу.
4. Дослідіть, чому чотиригранна форма краще протистоїть вигинанню, ніж кругла?

***Практична інформація*.** У будівництві та інженерії часто використовують балки квадратного або прямокутного перерізу замість круглих – це забезпечує кращу жорсткість конструкції. Природа "винайшла" це на мільйони років раніше за людину!

Екологічна довідка. Кропива – цінна рослина. Вона збагачує ґрунт азотом, її листя використовують як добриво, а молоді пагони їстівні та багаті на вітаміни.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу соціальну валідність (критерій 3) – використовує об'єкт з безпосереднього оточення учня (город біля будинку, бабусині розповіді). Міжпредметна валідність (критерій 6) виявляється у зв'язку з біологією, екологією та інженерією. Задача формує дослідницькі компетентності та демонструє біонічний підхід – вивчення природних рішень для технічних застосувань.

<u>Задача 6</u> (про оптимізацію виробництва ефірної олії з м'яти).

Уявіть, що Ваша родина вирішила створити невелике фермерське господарство з вирощування м'яти холодної для виробництва ефірної олії. М'ята холодна – багаторічна рослина з чотиригранним стеблом висотою 25-80 см. Для бізнес-плану потрібно розрахувати оптимальні параметри.

***Завдання*.**

1. Стебло м'яти має форму правильної чотиригранної призми. Обчисліть при висоті 60 см та довжині сторони основи 0,6 см: об'єм одного стебла; площу бічної поверхні стебла (з якої виділяється ефірна олія).

2. Зазвичай на 1 м² висаджують 16 рослин м'яти, кожна з яких дає в середньому 8 стебел. Обчисліть загальну площу бічної поверхні всіх стебел з 1 м² плантації.

3. Відомо, що з 1 см² поверхні стебла можна отримати 0,002 мл ефірної олії. Скільки літрів олії можна отримати з плантації площею 1 гектар?

4. Ринкова ціна ефірної олії м'яти становить близько 800 грн за 100 мл. Розрахуйте потенційний дохід з 1 гектара.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу соціальну валідність (критерій 3) – пов'язана з актуальною темою розвитку власного бізнесу та підприємництва. Реалістична валідність (критерій 8) забезпечена реальними економічними показниками та технологічними параметрами. Задача формує фінансову грамотність та демонструє практичне застосування математики у сільському господарстві й економіці. Конструктивна валідність (критерій 10) виявляється у поетапному ускладненні розрахунків – від одиничного об'єкта до масштабування на площу плантації та економічного аналізу.

<u>Задача 7</u> (про «карпатську аптеку»).

Уявіть, що Ви берете участь у шкільній еко-експедиції в Карпати та досліджуєте лікарські рослини. Пухівка широколиста – цінна лікарська рослина з тригранним стеблом довжиною до 17 см, яку місцеві жителі використовують для лікування простуди та загоєння ран.

***Завдання*.**

1. Стебло пухівки має форму правильної тригранної призми. При довжині 15 см та довжині сторони основи (правильного трикутника) 0,4 см визначте: об'єм стебла; повну поверхню стебла; радіус описаного кола навколо основи

2. Для приготування лікувального настою потрібно 50 г подрібненої пухівки. Густина сухої рослини становить 0,3 г/см³. Скільки стебел потрібно зібрати для одного курсу лікування (10 порцій настою)?

3. Дослідіть: чому тригранна форма стебла оптимальна для невисокої рослини з точки зору механічної міцності?

***Екологічна довідка*.** Пухівка занесена до списку рослин, що потребують раціонального використання. При зборі можна зривати не більше 30% рослин на ділянці.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача поєднує соціальну валідність (критерій 3) – екологічне виховання та збереження природи – з культурною валідністю через традиційні знання про лікарські рослини. Міжпредметна валідність (критерій 6) виражена у зв'язку з біологією, екологією, хімією та народознавством. Задача формує екологічну свідомість та відповідальне ставлення до використання природних ресурсів.

<u>Задача 8</u> (інженерія природи – конструкція стебла хмелю).

Уявіть, що Ви працюєте над проєктом з біоніки (використання природних принципів у техніці) та досліджуєте хміль звичайний. Ця рослина має унікальні шестигранні порожнисті стебла довжиною до 18 м, здатні витримувати власну вагу та вагу шишок.

Завдання.

1. Стебло хмелю – порожниста шестигранна призма. Зовнішня сторона правильного шестикутника основи становить 1,2 см, товщина стінки – 0,15 см. При довжині стебла 12 м обчисліть: об'єм матеріалу стінок стебла; об'єм порожнини всередині; масу стебла, якщо густина матеріалу 0,4 г/см³.

2. Порівняйте міцність конструкції: яка форма (шестигранна порожниста чи кругла суцільна) при однаковій масі матеріалу витримає більше навантаження на вигин?

3. Стебло хмелю росте вертикально, обвиваючи опору. Якщо воно робить один повний оберт навколо опори діаметром 5 см на кожні 30 см висоти, яка реальна довжина стебла, що досягло висоти 10 м?

4. На одному стеблі розвивається до 500 шишок масою по 0,8 г кожна. Розрахуйте, чи витримає стебло таке навантаження, якщо максимально допустиме напруження на розтяг становить 2 МПа?

***Практична інформація*.** У будівництві використовують порожнисті шестигранні металеві профілі – вони на 40% легші за суцільні при збереженні міцності. Природа винайшла цей принцип мільйони років тому!

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має найвищу складність у добірці і демонструє дидактичну валідність (критерій 7) – може використовуватись для диференціації за рівнями. Міжпредметна валідність (критерій 6) виявляється у зв'язку з фізикою (механіка, міцність матеріалів), біологією та інженерією. Задача формує біонічне мислення – розуміння того, як природні рішення можна застосовувати у техніці. Інтелектуальна валідність** (критерій 2) вимагає просторової уяви та комплексних обчислень.

Задача 9 (про цистерну з пальним).

На автозаправній станції встановлено горизонтальну підземну цистерну для зберігання пального. З міркувань безпеки її майже повністю закопали в землю, залишивши лише верхню частину над поверхнею. Поверхня ґрунту навколо цистерни — горизонтальна. Екологічна інспекція проводить перевірку. За нормами безпеки не менше 85 % об'єму цистерни повинно бути під землею (щоб зменшити ризик вибуху, перегріву та витоку пального). Якщо виявиться, що під землею менше 85 % об'єму, власнику загрожує штраф від 120 000 до 300 000 грн, або він повинен буде перемістити цистерну, що коштуватиме 450 000 грн. Відомо, що цистерна має форму прямого кругового циліндра радіусом 1,2 м і довжиною 6 м. Над поверхнею землі виступає 0,4 м від найвищої точки циліндра.

Завдання.

1. Обчисліть об'єм частини цистерни, що знаходиться під землею., та визначте, який це відсоток від повного об'єму.
2. З'ясуйте, чи загрожують власнику штрафні санкції.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу реалістичну валідність (критерій 8) – описує реальну ситуацію з конкретними нормативами та економічними наслідками. Соціальна валідність (критерій 3) виявляється у темі екологічної безпеки та відповідальності бізнесу. Задача формує розуміння практичного застосування математики у контролюючих органах та знайомить з професією інспектора. Змістова валідність (критерій 4) забезпечена чіткою діловою мовою та зрозумілими термінами.

Задача 10 (моделювання автоматизованої вертикальної ферми).

Стартап з вирощування мікрозелені в урбаністичних умовах розробляє модульну систему для вертикального фермерства. Кожен модуль має форму зрізаного конуса для оптимального розподілу поживних речовин та води. Технічні характеристики модуля: 1) площа основи: 113 см²; 2) висота модуля: 20 см; 3) довжина по твірній: 20,5 см. Компанія планує запустити пілотну лінію з 10 модулів. За даними агрономічних досліджень, коренева система мікрозелені займає 40% об'єму контейнера, решта — субстрат (кокосове волокно з вермікулітом).

Завдання.

1. Розрахуйте масу субстрату, необхідного для заповнення всіх модулів, якщо густина субстрату становить 1,5 г/см³.
2. Оцініть собівартість субстрату, якщо 1 кг коштує 45 грн.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу соціальну валідність (критерій 3) – пов'язана з актуальними темами урбанізації, продовольчої безпеки та стартап-культури. Реалістична валідність (критерій 8) забезпечена реальними технічними параметрами інноваційних агротехнологій. Задача знайомить учнів з сучасними професіями у сфері агротехнологій та формує підприємницьке мислення.

Задача 11 (як клітини нашого тіла можуть дихати).

Червоні кров'яні тільця (еритроцити) переносять кисень по всьому організму. Цікаво, що вони поглинають кисень лише через свою поверхню. Тому природа "спроектувала" їх особливим чином. Фізіологи стверджують, що загальна поверхня всіх еритроцитів у крові дорослої людини становить 3200 м² (це майже половина футбольного поля!)

Завдання.

1. Перевірте твердження фізіологів.
2. Поясніть, чому еритроцити мають саме таку форму. Порівняйте площу поверхні диска з площею кулі того ж об'єму. Яка форма ефективніша для транспортування кисню?
3. При анемії кількість еритроцитів може знижуватися до 3 000 000 (на1 мм³). На скільки відсотків зменшується загальна поверхня для поглинання кисню?

Медико-біологічна довідка. У 1 мм³ крові людини міститься приблизно 5 000 000 еритроцитів. Загальний об'єм крові людини ≈ 5 л. Кожен еритроцит має форму диска (як гральна шашка) з діаметром 0,007 мм та висотою 0,002 мм.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу міжпредметну валідність (критерій 6) – інтегрує математику з біологією та медициною. Інтелектуальна валідність (критерій 2) виявляється у необхідності працювати з надзвичайно малими величинами та великими числами одночасно. Задача демонструє оптимізаційний підхід природи – як форма об'єкта визначає його функціональність. Потребнісна валідність (критерій 1) пов'язана з інтересом підлітків до власного організму та здоров'я.

Задача 12 (про Архімеда та золоту корону).

Царю Гієрону II Сіракузькому ювелір виготовив золоту корону вагою 1000 г. Цар запідозрив майстра в обмані – що той додав до золота срібло. Він звернувся до Архімеда з проханням перевірити, чи справді корона зроблена з чистого золота, але при цьому не пошкодити корону. Архімед знайшов геніальне рішення! Він занурив корону у посудину, повністю наповнену водою, і виміряв об'єм витісненої води – вийшло 52 см³. Потім він провів той самий експеримент зі зливком чистого золота масою 1000 г і отримав 51,8 см³ витісненої води.

Завдання.

1. Обчисліть густину матеріалу корони та порівняйте її з густиною чистого золота (19,3 г/см³).
2. Визначте, чи обманув ювелір царя.
3. Якщо в короні є домішка срібла (густина 10,5 г/см³), обчисліть приблизно, скільки грамів золота та срібла у короні.
4. Поясніть, чому метод Архімеда був геніальним для свого часу.

Історична довідка. За легендою, Архімед (287–212 до н.е.) відкрив свій закон про виштовхувальну силу під час купання у ванні. Усвідомивши принцип виміру об'єму через витіснення води, він вискочив на вулицю з криком "Еврика!" ("Знайшов!"). Архімед був одним з найвидатніших математиків і механіків античності. Його праці заклали основи гідростатики, а винаходи (гвинт Архімеда, системи важелів, метальні машини) використовувались століттями. Під час облоги Сіракуз римлянами Архімед сконструював катапульти та систему дзеркал для спалення ворожих кораблів. Він загинув у 212 році до н.е., коли римський солдат убив його, незважаючи на наказ полководця Марцелла зберегти життя вченому.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має культурну валідність (критерій 9) – розповідає про історію математики та її творців, показує математику як частину загальнолюдської культури. Міжпредметна валідність (критерій 6) виявляється у зв'язку з фізикою (закон Архімеда, густина), хімією (властивості металів).

<u>Задача 13</u> (про екологічну упаковку та економію матеріалів).

Ваша родина вирішила відкрити невелике виробництво домашнього меду. Для продажу меду потрібно обрати оптимальну форму скляної банки місткістю 500 мл (500 см³). Виробники пропонують три варіанти банок циліндричної форми з однаковим об'ємом, але різними пропорціями. Варіант А: висока і вузька (висота 15 см, радіус основи 3,26 см). Варіант Б: середня (висота 10 см, радіус основи 3,99 см). Варіант В: низька і широка (висота 6 см, радіус основи 5,15 см). Вартість виготовлення банки залежить від площі скла, необхідного для її виробництва. Ціна 1см² скла становить 0,08 грн. Ви плануєте продавати 1000 банок меду на рік.

***Завдання*.**

1. Обчисліть площу поверхні кожного варіанта банки.
2. Визначте, який варіант найекономічніший з точки зору витрат матеріалу.
3. Розрахуйте, скільки грошей можна зекономити за рік, обравши найоптимальнішу форму замість найменш вигідної.
4. Поясніть, чому при однаковому об'ємі різні пропорції циліндра мають різну площу поверхні. Яке співвідношення висоти до діаметра дає мінімальну площу поверхні?
5. Дослідіть: чи є банка у формі куба з таким самим об'ємом більш економічною за циліндричну? Обчисліть площу поверхні куба об'ємом 500 см³ та порівняйте з циліндрами.

Практична інформація. У промисловості задачі мінімізації витрат матеріалу при заданому об'ємі є надзвичайно важливими. Наприклад, виробники напоїв постійно оптимізують форму пляшок та банок – економія навіть 1% матеріалу на мільйонах одиниць продукції дає величезний ефект. Це не лише зменшує собівартість, а й знижує екологічне навантаження – менше скла чи пластику потрібно виробити та утилізувати.

***Екологічна довідка*.** Виробництво 1 кг скла вимагає 1,8 кг піску, 0,27 кг соди та 0,36 кг вапняка, а також великої кількості енергії (температура плавлення скла – 1400-1600°C). Оптимізація форми упаковки допомагає зменшити споживання ресурсів та викиди CO_2. Саме тому математики працюють разом з дизайнерами упаковки в усіх великих компаніях.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу соціальну валідність (критерій 3) – пов'язана з актуальною темою підприємництва та сімейного бізнесу, що є важливим у сучасних українських реаліях. Реалістична валідність (критерій 8) забезпечена реальними економічними показниками та технічними параметрами виробництва. Задача формує економічне мислення та демонструє практичне застосування оптимізаційних задач. Екологічна складова показує відповідальне ставлення до ресурсів. Міжпредметна валідність (критерій 6) виявляється у зв'язку з економікою, екологією, хімією (виробництво скла) та підприємництвом. Конструктивна валідність (критерій 10) реалізується через підведення учнів до розуміння задач математичної оптимізації, що будуть вивчатися у старших класах (похідна, екстремуми функцій).

Зауважимо, що створена добірка прикладних задач з теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» демонструє підхід до навчання математики через життєву актуалізацію змісту. Вона органічно поєднує український контекст з глобальними викликами сучасності: від реалій воєнного часу (задача про сховище) до інноваційних агротехнологій (вертикальні ферми), від традиційних знань про лікарські рослини Карпат до біонічних принципів інженерії. Така контекстуалізація робить математику не абстрактною наукою, а практичним інструментом розуміння світу та вирішення реальних проблем. Цінним є збалансоване представлення різних рівнів складності – від базових задач (розрахунок площі та об'єму) до комплексних міжпредметних завдань, що вимагають інтеграції знань з математики, фізики, біології, хімії та економіки. Це забезпечує можливість диференціації навчання та формування ключових компетентностей на різних рівнях засвоєння матеріалу. Створена система задач має виховний потенціал: формує екологічну свідомість (збереження лікарських рослин), підприємницьке мислення (бізнес-плани виробництва), патріотизм через звернення до українських реалій, а також демонструє математику як невід'ємну частину світової культури через історичні екскурси. Це цілком відповідає сучасним вимогам компетентнісно орієнтованої освіти, де предметні знання є засобом формування цілісної особистості учня. Слід також зазначити, що запропонована вище система прикладних задач укладена на основі матеріалів нашого попереднього збірника Швець В., Прус А. (2007). При цьому задачі були оновлені, модернізовані та доповнені актуальною інформацією з урахуванням сучасних тенденцій і потреб практики.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

На нашу думку, впровадження запропонованої системи критеріїв та системи вагових коефіцієнтів дозволяє об'єктивізувати процес відбору та оцінювання задач, що особливо важливо при створенні навчально-методичних комплексів, підручників та дидактичних матеріалів. Гнучкість системи (можливість адаптації залежно від профілю навчання) робить її універсальним інструментом для різних освітніх контекстів – від базової основної школи до профільної старшої школи та позашкільної роботи з обдарованими учнями. Система вагових коефіцієнтів надає можливість не лише якісно, а й кількісно оцінити відповідність задачі встановленим критеріям, що робить процес відбору задач більш об'єктивним та обґрунтованим.

Рекомендації щодо використання системи для вчителів: використовуйте систему вагових коефіцієнтів при відборі задач для уроків; залучайте учнів до експертного оцінювання – це формує критичне мислення; створюйте власні задачі та перевіряйте їх якість за системою критеріїв. Рекомендації щодо використання системи для методистів та авторів підручників: система може стати основою для експертної оцінки якості навчальних матеріалів; рекомендується створити банк задач з оцінками за всіма критеріями; можна розробити цифровий інструмент (калькулятор) для автоматичного підрахунку балів. Рекомендації щодо використання системи для дослідників: система потребує емпіричної валідації на великій вибірці задач; доцільно провести експертне опитування для уточнення вагових коефіцієнтів; цікаво дослідити кореляцію між оцінкою задачі та навчальними результатами учнів.

Зі змісту системи задач видно, що їх використання потребує від вчителя знань і вмінь не тільки математичних із відповідної теми, а й з багатьох суміжних галузей знань, додаткової підготовки щодо розв’язування. Зрозуміло, що такі задачі доцільно розв’язувати з учнями на завершенні вивчення великої теми і не одну, а кілька. В цілому, від теми до теми, вони вводять учнів у світ цікавих, актуальних реальних процесів і явищ, тим самим, роблять їх обізнаними і здатними реагувати на різні проблеми реального життя, пізнавати навколишній світ крізь «математичні окуляри».

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це дослідження не передбачало використання окремих наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (REFERENCES)

1. Бурда, М., & Васильєва, Д. (2017). Особливості навчання математики за новими програмами. *Математика в рідній школі*, №7-8, 2-9.
2. Катеринюк, Г. Д. (2020). Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи. [Неопубл. дис. канд. пед. наук]. Вінницький державний педагогічний університет Михайла Коцюбинського.
3. Матяш, О. І., & Катеринюк, Г. Д. (2019). *Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання*. ТОВ «Твори».
4. Постанова Кабінету міністрів України «Про деякі питання державних стандартів базової середньої освіти» №989 (2020). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898
5. Постанова Кабінету міністрів України «Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти» №851 (2024). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennia-derzhavnoho-standartu-profilnoi-serednoi-osvity-851-250724
6. Тарасенкова, Н., & Акуленко, І. (2025). Методична діяльність із компетентнісними задачами (К-задачами) у системі методичної підготовки майбутнього вчителя математики. *Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького*, 2, 205-212.
7. Прус, А. (2023) Математичне моделювання як лінза реального світу. *Фізико-математична освіта,* 38(4), 56–61. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008
8. Прус, А. В. (2024). Підходи, перспективи та траєкторії математичного моделювання в освіті. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, 71, 216-225. https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/5621/5056 (in Ukrainian)
9. Соколенко, Л.О., Філон, Н.Г., & Швець, В.О. (2010). *Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу*. НПУ імені М.П.Драгоманова.
10. Швець, В.О., & Прус, А.В. (2007). *Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії*. ЖДУ ім. І. Франка.
11. Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2020) Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education, *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.159536
12. Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 293–301.
13. Berry, J., & Houston, K. (1995). *Mathematical modelling*. Elsevier.
14. Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In Blomhøj, M. and Carreira, S. (Eds*.), Proceedings from topic study group 21 at the 11th Iinternational congress on mathematical education* (pp. 1-17). Monterrey, Mexico.
15. Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. *Teaching and learning mathematics in context,* 3-14.
16. Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*, 45–58.
17. Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.
18. Borromeo Ferri, R. (2020). Make mathematical modeling marvelous! Follow teacher Mr. K. for your lesson tomorrow. *The New Jersey Mathematics Teacher*, *78*(1), 44-53.
19. Burkhardt, H., & Pollak, H.O. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zeitschrift fur Didaktik der Mathematik*, *38* (2), 178-195.

20. Depaepe, F., De Corte, E., & Verschafel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders. In Verschafel, L., Greer, B., Van Dooren, W., Mukhopadhyay, S. (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 245– 263). Sense Publishers
21. Frejd, P., & Vos, P. (2023). The spirit of mathematical modeling – a philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education, *The Mathematics Enthusiast*, *21*(1), 269-300.
22. Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(5), 3–16.
23. García, F.J., Gascón, J., Ruiz, Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 226-246.
24. Houston, K., Galbraith, P., & Kaiser, G. (2009). *ICTMA: The first twenty-five years*. *History of ICMI.* https://www.icmihistory.unito.it/ictma.php#up
25. Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In Blum, W., Galbraith, P., Niss, M., Henn, H.-W. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 503-510). New York: Springer.
26. Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal fu¨r Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 51–76
27. Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., & Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications-differentiating perspectives and delineating commonalties. *Paper presented at the Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2035-2041) Larnaca, Cyprus.
28. Kutluca, T., & Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, *11* (21), 240-274. https://doi.org/10.18009/jcer.1242785
29. Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In Lesh, R., Doerr, H. M. (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum
30. Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38* (2), 113-142.
31. Stillman, G. (2012). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? *In Preproceedings of ICME12.* Korea, Seoul.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Burda, M., & Vasylieva, D. (2017). Osoblyvosti navchannia matematyky za novymy prohramamy [Features of teaching mathematics according to new programs]. *Matematyka v ridnii shkoli – Mathematics in your home school, 7-8*, 2-9.(in Ukrainian)
2. Kateryniuk, H. D. (2020). Formuvannia umin matematychnoho modeliuvannia v uchniv profilnoi shkoly [Formation of mathematical modeling skills in students of specialized schools]. Neopubl. dys. kand. ped. nauk. Vinnytskyi derzhavnyi pedahohichnyi universytet Mykhaila Kotsiubynskoho. (in Ukrainian)
3. Matiash O. I., Kateryniuk H. D. (2019). Metodychnyi instrumentarii formuvannia zdatnosti uchniv do matematychnoho modeliuvannia [Methodological tools for developing students' ability to mathematical modeling]. TOV «Tvory». (in Ukrainian)
4. Postanova Kabinetu ministriv Ukrainy «Pro deiaki pytannia derzhavnykh standartiv bazovoi serednoi osvity» №989 [Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine "On Some Issues of State Standards of Basic Secondary Education" No. 989] (2020). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898 (in Ukrainian)
5. Postanova Kabinetu ministriv Ukrainy «Pro zatverdzhennia Derzhavnoho standartu profilnoi serednoi osvity» №851 [Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine "On Approval of the State Standard of Specialized Secondary Education" No. 851]. (2024). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennia-derzhavnoho-standartu-profilnoi-serednoi-osvity-851-250724 (in Ukrainian)
6. Tarasenkova N., & Akulenko I. (2025). Metodychna diialnist iz kompetentnisnymy zadachamy (K-zadachamy) u systemi metodychnoi pidhotovky maibutnoho vchytelia matematyky [Methodical activities with competency-based tasks (K-tasks) in the system of methodological training of future mathematics teachers]. *Visnyk Cherkaskoho natsionalnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho – Bulletin of the Bohdan Khmelnytskyi Cherkasy National University, 2*, 205-212. (in Ukrainian)
7. Prus, A. (2023). Matematychne modeliuvannia yak linza realnoho svitu [Mathematical modeling as a lens of the real world]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education, 38*(4), 56-61. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008 (in Ukrainian)
8. Prus A. V. (2024) Pidkhody, perspektyvy ta traiektorii matematychnoho modeliuvannia v osviti [Approaches, prospects and trajectories of mathematical modeling in education]. *Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy – Modern information technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems, 71*, 216-225. https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/5621/5056 (in Ukrainian)
9. Sokolenko L.O., Filon N.H., Shvets V.O. (2010). *Prykladni zadachi pryrodnychoho kharakteru v kursi alhebry i pochatkiv analizu [Applied problems of a natural science nature in the course of algebra and the beginnings of analysis].* NPU imeni M.P.Drahomanova. (in Ukrainian)
10. Shvets V.O., Prus A.V. (2007). *Teoriia ta praktyka prykladnoi spriamovanosti shkilnoho kursu stereometrii [Theory and practice of the applied orientation of the school course in stereometry].* ZhDU im. I. Franka. (in Ukrainian)
11. Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2020) Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education, *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.159536
12. Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 293–301.
13. Berry, J., & Houston, K. (1995). *Mathematical modelling*. Elsevier.
14. Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In Blomhøj, M. and Carreira, S. (Eds*.), Proceedings from topic study group 21 at the 11th Iinternational congress on mathematical education* (pp. 1-17). Monterrey, Mexico.
15. Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. *Teaching and learning mathematics in context,* 3-14.
16. Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*, 45–58.
17. Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.
18. Borromeo Ferri, R. (2020). Make mathematical modeling marvelous! Follow teacher Mr. K. for your lesson tomorrow. *The New Jersey Mathematics Teacher*, *78*(1), 44-53.
19. Burkhardt, H., & Pollak, H.O. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zeitschrift fur Didaktik der Mathematik*, *38* (2), 178-195.

20. Depaepe, F., De Corte, E., & Verschafel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders. In Verschafel, L., Greer, B., Van Dooren, W., Mukhopadhyay, S. (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 245– 263). Sense Publishers
21. Frejd, P., & Vos, P. (2023). The spirit of mathematical modeling – a philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education, *The Mathematics Enthusiast*, *21*(1), 269-300.
22. Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(5), 3–16.
23. García, F.J., Gascón, J., Ruiz, Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 226-246.
24. Houston, K., Galbraith, P., & Kaiser, G. (2009). *ICTMA: The first twenty-five years*. *History of ICMI.* https://www.icmihistory.unito.it/ictma.php#up
25. Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In Blum, W., Galbraith, P., Niss, M., Henn, H.-W. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 503-510). New York: Springer.
26. Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal fu¨r Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 51–76
27. Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., & Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications-differentiating perspectives and delineating commonalties. *Paper presented at the Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2035-2041) Larnaca, Cyprus.
28. Kutluca, T., & Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, *11* (21), 240-274. https://doi.org/10.18009/jcer.1242785
29. Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In Lesh, R., Doerr, H. M. (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum
30. Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38* (2), 113-142.
31. Stillman, G. (2012). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? *In Preproceedings of ICME12.* Korea, Seoul.

| *Матеріал надійшов до редакції: 02.12.2025 р.* | *Прийнято до друку: 15.01.2026 р.* | *Опубліковано: 28.02.2026 р.* |