

ПРО ДЕЯКІ ПІДХОДИ У ВИКОНАННІ РИСУНКІВ ДО ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Узагалі кажучи, в підручниках для ЗЗСО в розділі «Стереометрія» учнів не навчають правильно, наочно і просто виконувати проєкційні рисунки (зображення) до задач. Істинно великий німецьких математиків і, передусім, геометр Д. Гільберт писав: «У математиці, як і взагалі в наукових дослідженнях, зустрічаються дві тенденції: **тенденція до абстракції** – вона намагається виробити логічну точку зору на основі різного матеріалу і звести весь цей матеріал у систематичний зв'язок – і друга тенденція, **тенденція до наочності**, яка на противагу цьому прагне до живого розуміння об'єктів і їх внутрішніх співвідношень. Що стосується геометрії, то в ній тенденція до абстракції призвела до грандіозних систематичних побудов алгебричної геометрії, ріманової геометрії і топології, в яких знаходять широке застосування методи абстрактних міркувань, символіки і аналізу. Проте і нині **наочне розуміння** відіграє першорядну роль у геометрії, і до того ж не тільки як таке, що володіє великою доказовою силою в дослідженні, але і для розуміння та оцінки результатів дослідження».

Геометрія, як цілісна наукова структура і специфічний розділ математики, створює найкращі можливості не лише для розвитку логічного мислення, але й додає можливостей системно, осмислено формувати та розвивати просторові уявлення і уяву учня. Відомий математик-методист проф. Астряб О. М. із цього приводу зазначав: «Розвиток просторових уявлень є, безперечно, дуже важливе завдання. Але належного розвитку просторових уявлень учень повинен набути ще із пропедевтичного курсу геометрії, поступово розширюючи і поглиблюючи їх як під час вивчення планіметрії (велику роль відіграють тут задачі на побудову), так і, особливо, під час вивчення стереометрії (*при розв'язуванні стереометричних задач на побудову*, під час виготовлення моделей і рисунків просторових форм, опанування принципів і *техніки* проєкціювання тощо)» [1, с. 11].

У свою чергу, відомі в Україні вчені проф. Михайленко В. Є. та проф. Тесленко І. Ф. писали так: «Одним із важливих спільних завдань вивчення курсів геометрії і креслення є *розвиток у учнів просторових уявлень і просторової уяви, які є опорою геометричної думки*. Ці якості потрібні працівникам будь-якої професії. Як відомо, необхідною передумовою уяви є запас уявлень, які підлягають дальшій переробці. Відтворююча уява – це уява чогось нового для даної людини, що спирається на словесний опис або умовне зображення (рисунок, схема тощо). У шкільному віці уява спирається вже на досить значний життєвий досвід і на дедалі більші знання» [2, с. 30].

Провідна вітчизняна вчена з теорії та методики навчання математики проф. Слєпкань З. І. з цього приводу зауважувала: «Плоске зображення просторової фігури містить низку графічних умовностей. *Правильно і наочно* виконаний рисунок просторової фігури *сприяє розумовій діяльності учня*, а неправильне зображення фігури, навпаки, *гальмує розумову діяльність* і часто виявляється однією із причин невміння учня розв'язати задачу» [3, с. 51]. Одного разу, на одній із конференцій, де доповідь робила З. І. Слєпкань, вельми чітко було дано пояснення (наприклад) як варто виконувати рисунки правильних багатогранників.

Отже, рисунок у стереометрії відіграє не останню роль. Іноді говорять, що правильний і наочний рисунок є **ключем** до розв'язання задачі.

Учитель учить учнів виконувати рисунки у стереометрії за принципом «дивіться як я працюю на дошці, і ви так робіть у зошитах».

Ми ж пропонуємо **спрощено** виконувати всі стереометричні рисунки у прямокутній аксонометрії (ізометрії або диметрії). Для цих проєкційних рисунків можна просто провести осі на папері у клітинку та з допомогою циркуля і лінійки – на чистому папері (рис. 1).

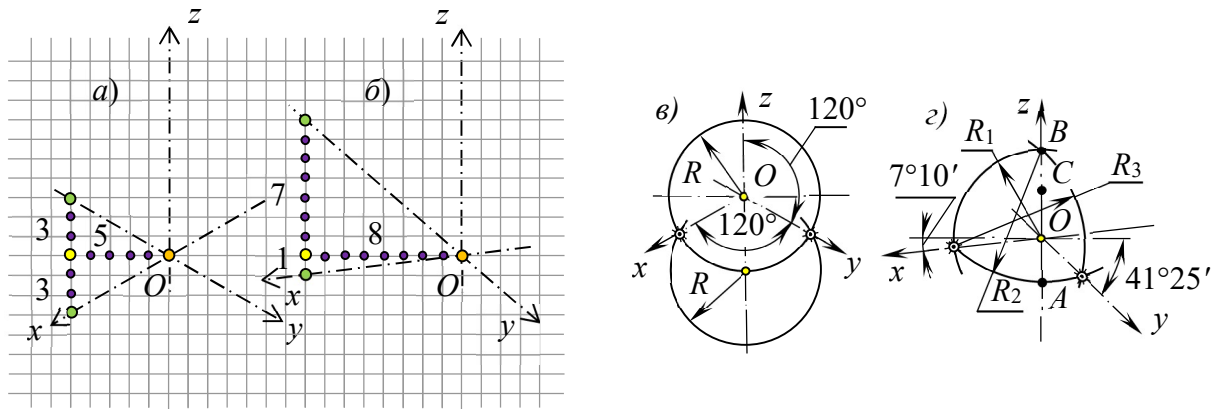


Рис. 1. Осі в аксонометрії

Решту побудов здійснюють за ортогональними проєкціями (див., наприклад, рис. 2).

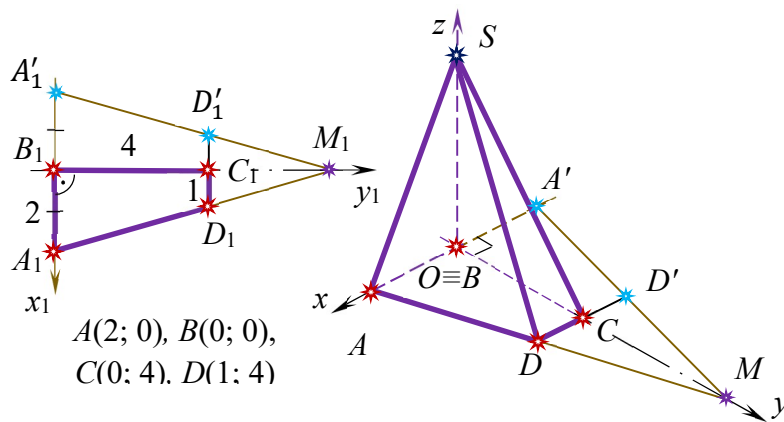


Рис. 2. Побудова наочного зображення в аксонометрії

Одним із найбільш поцінованих фахових пріоритетів учителя геометрії є усталені, напрацьовані вміння **швидко** і **якісно** виконувати проєкційні рисунки стереометричних фігур і їх комбінацій. Вагомий критерій «швидко» уособлює об'єктивну вимогу процесу навчання, адже педагог не у праві тратити час уроку на пояснення по ходу виконання допоміжного рисунка. В особистості, яка має на озброєнні метод Г. Монжа, з'являється реальна нагода вміло варіювати зображеннями і, як наслідок, відчутно економити час.

Однак у стереометрії часто-густо трапляються задачі, в яких рисунок, виконаний у будь-який спосіб, є непростим у побудовах і що цікаво – не таким уже й наочним, а точніше – **не** зовсім наочним. Для прикладу, розглянемо хоча б одну задачу.

Задача 1. Два конуси мають спільну вершину, а висота кожного з них лежить на бічній поверхні іншого. Знайти кут між лініями їхнього перетину, якщо кут між висотою і твірною в кожному з конусів дорівнює α .

Якісне наочне проєкційне креслення особливої комбінації двох рівних конусів в їх загальному розташуванні виконати важко, потрібно вміти професійно застосовувати теорію аксонометрії до комплексних креслень, що приходить із досвідом і досягається лише практикою. Поряд із цим, те ж комплексне креслення в уявленнях та графічному поданні пари конусів у системі двох площин проєкцій Π_2 і Π_3 слід вважати тривіальним.

Із умови задачі та уявлень вочевидь випливає, що задані конуси у власному перетині висікають рівнобедрений трикутник SAB , бічні сторони якого (SA, SB) є спільними твірними обох поверхонь, а основа (AB) – хордою перетину рівних кіл в основах даних конусів.

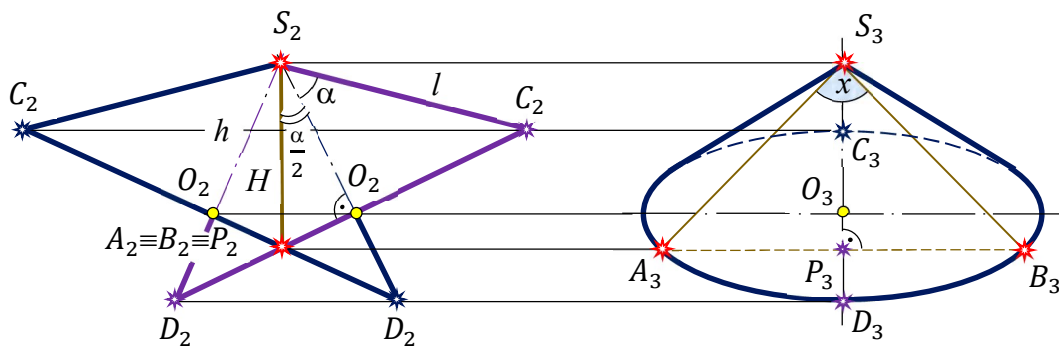


Рис. 3. Проекційний рисунок конусів за методом Г. Монжа

Розташовуємо в думці конуси так, щоб їхні осі були нахилені до горизонтальної площини проєкції Π_1 (підлоги) під одним і тим самим кутом, а кола в їх основах – перпендикулярними до фронтальної площини проєкції Π_2 (дошки). Тоді (рис. 3) на вигляді спереду конуси будуть зображені відповідно двома рівними рівнобедреними трикутниками $S_2C_2D_2$, а перетин їх поверхонь (ΔSAB) – відрізком вертикальної прямої S_2A_2 ($AB \perp \Pi_2, A_2 \equiv B_2$). На вигляді зліва досить зобразити лише один із конусів (адже інший його перебиває). Тут трикутник перетину конусів SAB , розташований паралельно Π_3 , буде його профільною проєкцією $S_3A_3B_3$. Привертаємо увагу читача, що задіяні елементи конусів проєкціюються лише в натуральну величину.

Увівши робочі позначення: $SC = SA = SB = l, SO = h, SP = H, \angle ASB = x$ (шуканий кут), із рисунка 3 навч матимемо: $\cos \frac{x}{2} = \frac{H}{l}$, де $l = \frac{h}{\cos \alpha}, H = \frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}}$.

Отже, $\cos \frac{x}{2} = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ і $x = 2 \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)$. В останніх дужках (у формулі) $\alpha < 90^\circ$, адже $2\alpha < 180^\circ$ – кут при вершині осьового перерізу конуса. Тому $\cos \frac{\alpha}{2} > \cos \alpha$ і $\frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} < 1$.

$$\text{АС: } x = 2 \cdot \arccos \frac{H}{l} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \arccos \frac{H}{l} \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{H}{l} \Leftrightarrow \left\{ H = \frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}}, l = \frac{h}{\cos \alpha} \right\}.$$

Література

1. Астряб О. М., Маєргойз Д. М., Гельфанд М.В. та ін. Методика викладання стереометрії / Астряб О. М. та ін. К.: «Радянська школа», 1956. – 280 с.
2. Слєпкань З. І. Методика навчання математики / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
3. Михайленко В. Є., Тєслєнко І. Ф. Зв'язки у викладанні геометрії і креслення / К.: «Радянська школа», 1956. – 83 с.
4. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10-11 класів середньої школи / А. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 2002. – 129 с.

Лєнчук І. Г. Про деякі підходи у виконанні рисунків до задач стереометрії.

Анотація. У тексті тез наведено три різних підходи (прийоми) виконання рисунків у задачах стереометрії. Перший – як навчають оперувати учнів на дошці та в зошитах учителі. Інші – із доречним застосуванням аксонометричних проєкцій та із виконанням зображень стереометричних фігур за методом Г. Монжа.

Ключові слова. Рисунки, задачі, стереометрія.

Lenchuk I. G. On some approaches to performing drawings for stereometry problems.

Abstract. These theses present three different approaches (techniques) to performing drawings for stereometry problems. The first is how teachers teach students to operate on the board and in notebooks. The others are with the appropriate use of axonometric projections and with the performance of images of stereometric figures according to the method of G. Monge.

Key words: Drawings, problems, stereometry.