УДК 373.5.016:514.11(477)
DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-28-50

Із чим найперше потрібно ознайомити учнів 7-го класу, розпочинаючи вивчення геометрії

Іван Ленчук

Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна

E-mail: lench456@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1923-9540

Анотація.

Геометрія в ЗЗСО мала б розпочинатися: із перерахування основних об’єктів дисципліни, з яких формують окремі фігури; основних відношень між такими об’єктами; виважено, однозначно сформульованих аксіом. Аксіоми є найпершими твердженнями, котрі вважаються суто геометричними і формулюються, як правило, виходячи з уявлень та вже чималенького досвіду учня. Подаються аксіоми системно, у вигляді несуперечливих, незалежних тверджень. До того ж, група аксіом у сукупності має бути повною системою, у формулюваннях яких використовують визначені зарання основні об’єкти і відношення між ними, а також похідні фігури. Основні об’єкти та основні відношення, в яких останні перебувають, ще називають основними поняттями. Ми посилаємося на підручник, який є класичним у справі подання аксіоматики, підручник О. В. Погорєлова – відомого, видатного геометра-теоретика і прикладника держави Україна. Напрацьована автором аксіоматика найкоротша, а змістова складова розбудови геометрії значно простіша в порівнянні, наприклад, із аксіоматикою Д. Гільберта.

У статті підкреслено, що основним об’єктом дисципліни є фігура, скомпонована з точок, прямих і площин, а найважливішим засобом навчання – рисунок. Наголошено, що геометрія в цілому поділена на позиційну і метричну. Відмічається роль і місце кожного з цих підрозділів. Наводяться переконливі факти прикладного характеру предмету, його можливого застосування в різних галузях науки і техніки. Подається коротка довідка про засновника геометрії Евкліда й деякі інші історичні факти. Далі, з красочно виконаними рисунками та авторськими коментарями і притримуючись схеми О. В. Погорєлова, наведено систему аксіом. На завершення викладу подається поняття теореми та її доведення, наведено приклад теореми, який теж узято з вище згадуваного підручника. Наводиться, окрім того, більш деталізоване поняття аксіоми, а також означення чого небудь, чим часто користуються в геометрії.

Ключові слова: аксіома, означення, основні поняття, теорема, точка, пряма.

UDC 373.5.016:514.11(477)
DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-28-50

What are the first things that 7th grade students need to get acquainted with, beginning the study of geometry

Ivan Lenchuk

Ivan Franko Zhytomyr State University, Zhytomyr, Ukraine

E-mail: lench456@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1923-9540

Abstract

Geometry in school should begin: with a list of the main objects of the discipline, from which individual figures are formed; the main relationships between such objects; well-balanced, clearly formulated axioms. Axioms are the very first statements that are considered purely geometric and are formulated, as a rule, based on the ideas and already considerable experience of the student. Axioms are presented systematically, in the form of non-contradictory, independent statements. In addition, the group of axioms as a whole have to be a complete system, in the formulations of which the basic objects and relations between them, as well as derived figures, are used. The basic objects and the basic relations in which the latter are located are also called basic concepts. We refer to the textbook, which is a classic in the presentation of axiomatics, the textbook of O. V. Pohorelov - a famous, outstanding geometer-theorist and applied scientist of Ukraine. The axiomatics developed by the author is the shortest, and the content component of the development of geometry is much simpler in comparison, for example, with the axiomatics of D. Hilbert.

In the article we emphasize that the main object of the discipline is a figure composed of points, lines and planes, and the most important means of teaching is a drawing. It is also emphasized that geometry as a whole is divided into positional and metric. The role and place of each of these subdivisions are noted. Convincing facts of the applied nature of the subject, its possible application in various fields of science and technology are presented. Brief information about the founder of geometry Euclid and some other historical facts is provided. Further, with colorfully executed drawings and author's comments and adhering to the scheme of O. V. Pohorelov, a system of axioms is given. At the end of the presentation, the concept of a theorem and its proof are presented, an example of a theorem is given, which is also taken from the above-mentioned textbook. In addition, a more detailed concept of an axiom is presented, as well as the definition of something that is often used in geometry.

Keywords: axiom, definition, basic concepts, theorem, point, line.

Постановка проблеми. Кожному, хто прагне досягти успіхів в опануванні геометрії, найперше варто мати на увазі, що *об'єктом* цієї специфічної дисципліни є *фігура*, а головним *засобом навчання* – якісний *рисунок* (Ленчук, Працьовитий, 2017, с. 26-27.).

Геометрія (від дав.-гр. *γη* – Земля і *μετρέω* – вимірюю; *вимірювання на землі*) – розділ математики, що є наукою про площинні й просторові форми, взаємне розташування і розміри фігур, логічно обумовлені відношення між ними та аргументовані узагальнення (доведення).

Геометрія поділяється на *позиційну*, котра вирішує питання взаємного розміщення і відшукання спільних елементів (інциденцій) фігур, та *метричну*, яка з'ясовує довжину відрізків, міру кутів, площу плоских фігур і поверхонь тощо. Позиційна геометрія цілком самодостатня й незалежна, а метрична геометрія без позиційної немислима.

Один із найбільш значимих французьких архітекторів XX ст. у галузі модернізму та функціоналізму Лє Корбюз'є в першій половині XX ст. висловив думку, що: «*... до цього часу ми не жили в такий геометризований період. Усе навкруги – геометрія*». Й справді, погляньте навколо себе: двері, вікно, стіл, картина мають форму прямокутника, горщик для квітів, димовідвідна труба котельні – конуса, футбольний м'яч, люстра чи глобус – кулі, дах будинку і комин на ньому – призматичні, єгипетські піраміди, автомобіль, літак, космічні апарати за формою і розмірами теж помітно «геометризовані» (рис. 1-4). Схожих об'єктів у природі й практичній діяльності людини безліч.

Рис. 1. Житловий будинок

Рис. 2. Renault Coupe Corbusier

Рис. 3. АН-225 «Мрія»

Рис. 4. Січ-1

Деякі геометричні фігури вам добре знайомі з дитинства, попередніх років навчання й власного життєвого досвіду, як-от: трикутник, квадрат, коло, ромб, куб, циліндр, куля, піраміда та ін. (рис. 5, 6).

Рис. 5

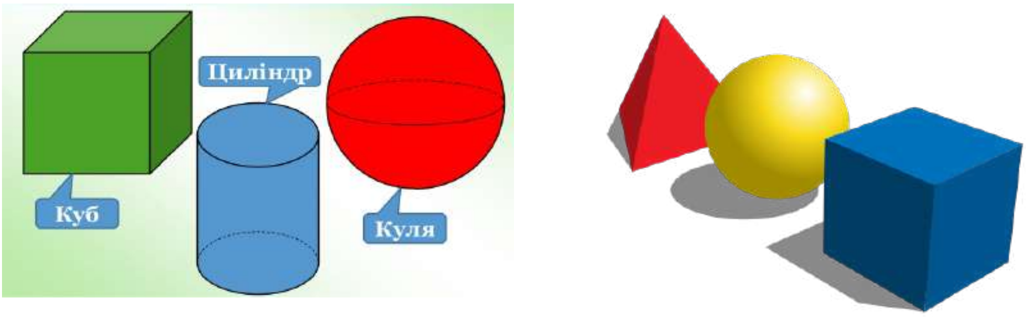


Рис. 6

Фігури, які вивчають у геометрії ЗЗСО, поділяють на площинні та просторові, котрі легко перерахувати. Усі вони складають багатовид фігур евклідової геометрії. Частину будь-якої геометричної фігури і об'єднання кількох фігур вважають геометричною фігурою. Плоска фігура (рис. 7) складена із трикутника та трьох квадратів, побудованих на сторонах трикутника, а кожен із квадратів, у свою чергу, вміщує по кілька трикутників й багатокутників. Уявлювану просторову фігуру (рис. 8) зображено із використанням чотирьох відрізків та двох рівних кіл (у формі еліпсів), що призвело до наочного представлення плоскою моделлю комбінації тіл конуса і циліндра.

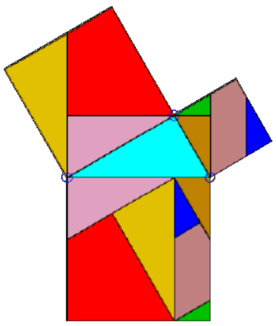


Рис. 7

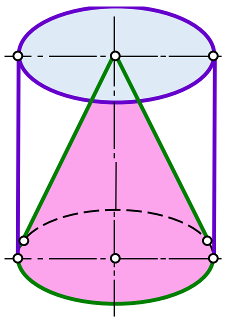


Рис. 8

Найпростішими фігурами (*основними об'єктами*) геометрії є *точка*, *пряма* і *площина*. Кожну ж геометричну фігуру уявляють складеною з точок.

Предмети життєдіяльності людини, які ми можемо споглядати, різняться між собою не лише формою і розмірами. Вони виготовлені з різного матеріалу, мають власну вагу, фіксовану якість обробки поверхонь, окрас, цільове призначення та інші спільні й відмінні характеристики. В геометрії, як уже відомо, ставляться завдання встановлення *взаємного розміщення* фігур та з'ясування їх *форми* і *розмірів*. Причому, природні об'єкти, які оточують нас, не містять прогнозованих форм, їх зримо вирізняє розум, уявлення. Спорідненим за формою елементам різних предметів ставлять у відповідність певні закономірні фігури, а всякий виріб, що проєктується конструктором із скінченного числа фахово скомпонованих й грамотно, раціонально розміщених геометричних фігур, реально матеріалізується (див. рис. 1-4).

Геометричні фігури, закономірності, що їм властиві, широко використовуються на практиці. Найперша з наук – *геометрія* – прикладна дисципліна. Не маючи геометричних знань, умінь і навичок *не можна виконати жодне креслення, визначити кількість рулонів шпалеру для обклеювання кімнат,* збудувати будинок, виготовити звичайні стіл і стілець, сконструювати автомобіль, літак чи космічний корабель, прокласти траєкторію руху на мапі, написати картину, *навіть у створенні ландшафту ніяк не обійтися без цієї стародавньої науки*. Нею змушені володіти спеціалісти всяких професій: інженери і техніки, будівельники, архітектори, столяри, художники, геологи, … та, врешті, робітники. Геометрія розвиває розум особистості й потрібна кожному, хто у власному бутті забажає здобути стабільні компетенції творчого мислення.

Евклід
(*III ст. до н. е.*)

Зважаючи на сказане, слід прийняти до уваги, що геометрія в житті людини відіграє не останню роль. Отож виходить, що це наука, яку варто ретельно опановувати.

Геометрія, системне знайомство з якою розпочинаємо, називається *евклідовою,* на честь давньогрецького вченого Евкліда, котрий першим створив логічно виважений посібник з математики (у 13-ти книгах) під назвою «Початки». Понад 2000 років геометрію вивчали за цими книгами.

Геометрія вміщує два розділи: *планіметрію* (від лат. *planum* – площина), де встановлюються властивості фігур на площині, та *стереометрію* (від гр. *stereos* – просторовий), в якому вивчаються властивості фігур у просторі.

Традиційно починають із планіметрії.

Аналіз джерел та останніх досліджень. Ми в даній праці не будемо вдаватися до ретельного аналізу шкільних підручників, адже їх надто багато. Зауважимо лише, що всі автори планіметрії (в тій чи іншій мірі) користуються аксіоматикою, напрацьованою О. В. Погорєловим (Погорєлов, 1998, с. 3-18). Такий стан речей пояснюється надто просто: 1) система аксіом найкоротша; 2) розбудова геометрії найпростіша.

Мета статті. Нам уявляється, що вчитель математики, роблячи вступ до планіметрії, не надає особливої уваги принципам розбудови дисципліни на аксіоматичній основі, не

Didactics of mathematics: theory, experience, innovations, 2025, № 4, 28-50.

висвітлює учням тонкощів, які справді існують у такому важливому питанні, адже від цього залежить бажання зрозуміти предмет й із задоволенням його вивчати. Отже, ми ставимо за мету подати в належному форматі матеріал, який стосується *аксіом* планіметрії, орієнтуючись виключно на «забутий» підручник О. В. Погорєлова.

Виклад основного матеріалу. *Точки, прямі і площини.* Цілком природно, що роль *основних об'єктів* у планіметрії виконують *точка* і *пряма* лінія. У стереометрії додається *площина*. Точки за домовленістю позначають на рисунках і в текстах великими буквами латинського алфавіту A, B, C, D, … , а прямі – малими буквами a, b, c, d, … .

Насправді точки, прямі та площини – об'єкти нереальні (абстрактні), таких у природі не існує. Отже, й описати, означити їх неможливо. Проте адаптувати ці найпростіші фігури до уявлюваних розумом понять зовсім нескладно. Покладіть долоню руки на поверхню письмового столу, і ви «фізично поспілкуєтесь» із площиною; проведіть по ребру стільниці, й ваша рука ковзатиме вздовж прямої лінії; нарешті, доторкніться до куточка стільниці, ви відчуєте точковий укол (Ленчук, 2015, с. 22-23).

Не секрет, що точка і пряма на площині можуть взаємно розташовуватися по різному. До того ж, усяка пряма чи площина вміщує безліч точок.

Бачимо (рис. 9) точку A і пряму a. Уявлення про точку A дає слід від гостро заточеного олівця (для ліпшого вирізнення оком – у зірчатому кружечку). Пряма a є нескінченною, а на рисунках зображується своєю частиною, хоч у уявленнях потрібно її вважати продовженою необмежено в обидва боки.

У якому розташуванні знаходяться точка A і пряма a? Очевидно, що точка A *лежить поза* прямою a. Ще говорять: точка *не належить* прямій.

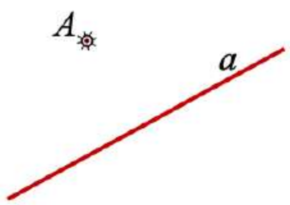


Рис. 9

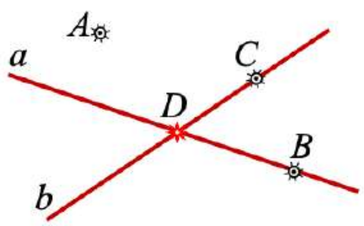


Рис. 10

А зараз погляньте на рисунок 10. Ви бачите прямі a, b та точки A, B, C і D. Міркуючи аналогічно, стверджуємо, що точка A *не належить* жодній із прямих. Наразі точки D і B *лежать* на прямій a, а точки D і C – на прямій b. Можна говорити й по іншому, що пряма b *проходить* через точки D і C, а пряма a – через точки D і B. Окрім того, точка B *належить* прямій a, проте *не належить* прямій b, а точка C – *не належить* прямій a. Бачимо, що точка D *належить* обом заданим прямим, тобто a і b *перетинаються* в точці D. Таку точку називають *точкою перетину* прямих a і b.

Звертаємо увагу на надважливий факт: *завдячуючи якісним рисункам*, нами *зримо зчитано* з них й описано словами результати взаємного розміщення точок і прямих на площині.

Із наведених прикладів неважко здогадатися, що для вирішення позиційних питань з точками і прямими недостатньо ввести лише поняття найпростіших геометричних фігур площини. В якості *основного*, до того ж, вкрай потрібно ввести *відношення «належати»* («*лежати на*»), в якому точки і прямі можуть перебувати.

«Належність», «неналежність», а також «перетин» найпростіших об'єктів у геометрії прийнято записувати символічно відповідно так: $B \in a$, $A \notin b$, $D = a \cap \cap b$.

Пряму можна позначати двома точками, які лежать на ній. Наприклад, пряму a (рис. 10) можна позначити DB, а пряму b – DC.

Ви маєте власний досвід побудови лінійкою й олівцем прямої лінії c, яка проходить через дві дані точки A і B (рис. 11). Скільки прямих можна провести таким способом через дві точки? Проведемо подумки експеримент. Уявіть собі, що під стелею кімнати на протилежних її стінах забито два цвяшки A і B «точкових розмірів», а між ними цупко натягнуто тонку нитку, котра образно символізує пряму лінію c. Якщо від одного цвяшка до іншого так само цупко натягнути ще одну нитку, чи у змозі буде око стороннього спостерігача розрізнити ці дві нитки? Напевно, що ні, адже обидві нитки зливаються в одну.

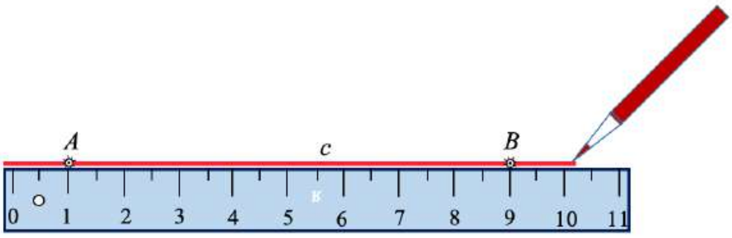


Рис. 11

Наведені вельми прості міркування стосовно точок і прямих площини дозволяють конкретизувати і явно сформулювати *о с н о в н і в л а с т и в о с т і відношення «належати»*:

I. *Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.*

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму лінію і лише одну.

Повернемося до рисунка 10, на якому прямі a і b перетинаються в одній точці D. У людини, котра навчена міркувати за законами логіки, висувати гіпотези та їх перевіряти природно з'являється запитання, а *чи не можуть ці прямі перетинатися у двох різних точках*? Строге *обґрунтування* відповіді на таке запитання якраз і дається шляхом посилання на щойно записані основні властивості відношення «належати».

Припустимо, що дані прямі справді мають дві відмінні точки перетину. Тоді через ці точки проходять дві різні прямі. Однак такий висновок нелогічний, оскільки це суперечить другій основній властивості (ОВ-ІІ) відношення «належати»: через дві точки можна провести лише одну пряму лінію. Отже, дві прямі не можуть перетинатися у двох точках.

Окремо підкреслимо, що зараз введено найперші з основних відношень. Проте варто пам’ятати, що *основні об’єкти* та *основні відношення* між ними, взяті разом, називають *основними поняттями* евклідової геометрії.

Відрізок, промінь, півплощина, кут. Точки, прямі й площини із задумом названо найпростішими фігурами (основними об’єктами) геометрії. По-перше, хоч вони й неозначувані, проте цілком уявлювані розумом і, по-друге, з них можна скомпонувати багато інших фігур, котрі називають *похідними*. Основні об’єкти є немовби будівельним матеріалом («цеглинками») в конструктивній розбудові багатовиду фігур усієї геометричної структури. До речі, оскільки пряма складена з точок, то будь-яку похідну фігуру (зокрема, криву лінію чи поверхню) компонують із точок, прямих і кривих.

Уважно огляньте рисунок 12, на якому зображено пряму a та три точки A, B і C, котрі належать цій прямій. Що можна сказати про взаємне розташування трьох точок на прямій a? Точка B *лежить між* точками A і C. Вона *розділяє* точки A і C. По іншому ще говорять, що точки A і C *лежать по різні боки* від точки B. Точки A і B лежать з одного боку від точки C, вони не розділяються точкою A. Так само точки B і C лежать з одного боку від точки A, яка також не розділяє пару точок B і C.

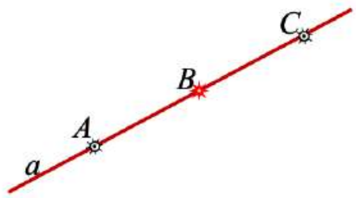


Рис. 12

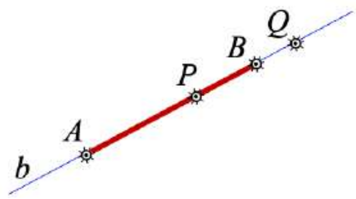


Рис. 13

Таким чином, у позиційній геометрії суть важливим є ще одне *відношення*, яке стосується точок і прямих. Його також зараховують до розряду *основних* й умовно описують і озвучують словами «*лежати між*». Уважно поглянувши на рисунок 12, нескладно сформулювати *основну властивість* відношення «*лежати між*»:

ІІІ. Із трьох точок прямої одна і лише одна лежить між двома іншими.

Важливо, що із введеними двома основними відношеннями тісно пов’язані означення найперших *похідних* фігур, без яких геометрію важко уявити.

Подивіться на рисунок 13. На ньому між двома довільними точками A і B прямої b її частину виділено жирною лінією. Так, практично, можна зримо змоделювати відрізок AB. Отже, тепер слід ввести *означення* відрізка.

Відрізком називається частина прямої, яка складена з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома даними її точками. Точки, котрі обмежують відрізок, називаються його кінцями.

Відрізок позначають, записуючи його кінці. Говорячи або пишучи «відрізок AB», мають на увазі відрізок з кінцями в точках A і B, які теж належать відрізку.

На рисунку 13 точка P лежить між точками A і B, тому вона належить відрізку AB і називається його *внутрішньою* точкою. Точка Q не лежить між точками A і B, тому вона є точкою прямої b і не належить відрізку AB.

Тепер проведемо деяку пряму a і візьмемо на ній довільну точку O (рис. 14). Ця точка розбиває пряму на дві частини, кожній з яких належить безліч точок. Якщо розглянути точку O і всі точки прямої, котрі розташовані з одного боку від неї (точка A – одна з них), то ми отримаємо напівпряму OA, котру ще називають *променем*. Отож:

Променем (напівпрямою) називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної на ній точки, яку називають *початковою точкою* (початком) *променя*.

Різні промені однієї і тієї ж прямої називаються доповняльними. Промені OA і OB (рис. 14) – доповнюють один одного до прямої a.

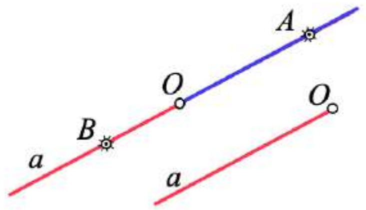


Рис. 14

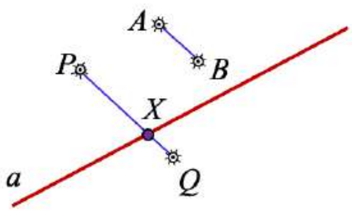


Рис. 15

Промені (як і прямі) можна позначати або малими латинськими буквами, або двома точками: початковою і ще якою-небуть точкою, яка належить променю. Початкову точку ставлять на першому місці. Наприклад, на рисунку промінь OA зображений синім кольором, а промінь OB (Oa) – червоним.

А зараз проаналізуйте рисунок 15. Пряма *a розбиває* (розмежовує) площину на дві частини (кажуть «на два куски»), які називають *півплощинами.* Півплощина без точок прямої a називається *відкритою*, а з точками розмежувальної прямої a – *закритою*. *Основні властивості* розміщення точок на площині відносно зображеної прямої надто добре зрозумілі з рисунка:

IV. Пряма розбиває площину на дві півплощини. Якщо кінці будь-якого відрізка належать одній із півплощин, то відрізок не перетинає пряму. Якщо ж кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму.

На рисунку 15 відрізок PQ перетинає пряму a в точці X ($X = a \cap PQ$), а відрізок AB – не перетинає.

Кутом називається фігура, яка складається з точки – вершини кута – і двох різних променів, котрі виходять із цієї точки, – сторін кута.

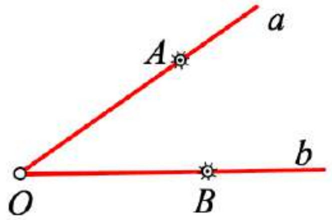


Рис. 16

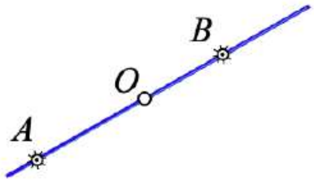


Рис. 17

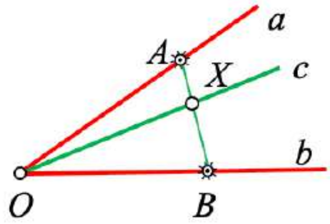


Рис. 18

Ви бачите кут (рис. 16) з вершиною O та сторонами a і b. Кут позначають або його вершиною, або сторонами, або трьома точками: вершиною і двома точками, які лежать на сторонах кута (точки на сторонах кута зображати не обов'язково). Слово «кут» за потреби замінюють умовним знаком $\angle$. Отже, з використанням цього знаку, кут на рисунку 16 можна символічно позначити трьома способами: $\angle O$, $\angle(a, b)$ і $\angle AOB$. У останньому позначенні кута буква, яка стосується його вершини, ставиться всередині. Іноді кути зручно позначати малими буквами грецького алфавіту α, β, δ, γ і т. ін. У цьому випадку перед буквами умовний знак кута ($\angle$) не проставляють.

Якщо сторони кута доповнюють одна іншу до прямої, то кут називають *розгорнутим*. Розгорнутий кут (рис. 17) зображено з вершиною O та сторонами OA і OB.

Промінь, який виходить з вершини кута й перетинає будь-який відрізок із кінцями на його сторонах, будемо називати таким, що *проходить* (*лежить*) *між* сторонами даного кута. Промінь c (рис. 18) проходить між сторонами кута AOB, оскільки він бере початок у точці O – вершині кута AOB – і перетинає відрізок AB у точці X ($X = c \cap AB$), який має кінці на його сторонах.

Для розгорнутого кута вважають, що довільний промінь, який виходить з його вершини і не зливається з жодною із сторін, проходить між сторонами кута.

Відрізок, *промінь* і *кут* – *найперші похідні* геометричні фігури.

Вимірювання відрізків і кутів. Видатний український математик (геометр-теоретик і прикладник) академік Погорєлов О. В. (1919-2002 рр.) запропонував доповнити список уже описаних вище *основних позиційних відношень* геометрії двома *метричними* відношеннями, які добре розуміє кожна пересічна людина: *довжина* (стосується відрізків) і *градусна міра* (стосується кутів). Саме це нововведення *суттєво спростило* викладення фактичного матеріалу в розбудові евклідової геометрії.

Меморіальна дошка на фасаді ХНУ імені В.Н. Каразіна

Практично, вимірюючи відрізки, застосовують різні інструменти. Найпростішим засобом є лінійка з поділками. Довжина відрізка AB (рис. 19) рівна 16 см, відрізка AC – 10 см, відрізка CB – 6 см. Немає жодних сумнівів, що довжина відрізка AB дорівнює сумі довжин двох відрізків AC і CB. До того ж (рис 20), бачимо як за допомогою лінійки, що проградуйована в дюймах (1 дюйм = 2, 54 см), можна виміряти довжину металевого ланцюжка.

Очевидно, що звідси отримуємо таку *основну властивість* вимірювання відрізків:

V. *Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.*

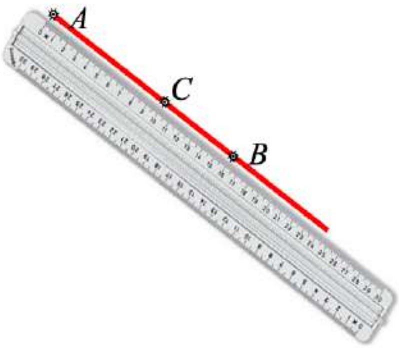


Рис. 19

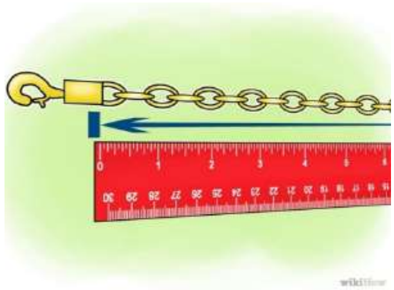


Рис. 20

Це означає, що оперуючи відрізком AB, ми можемо вибирати на ньому довільну точку C і, при цьому, довжина відрізка AB дорівнюватиме сумі довжин відрізків AC і CB. Довжину відрізка AB називають також *відстанню* між точками A і B.

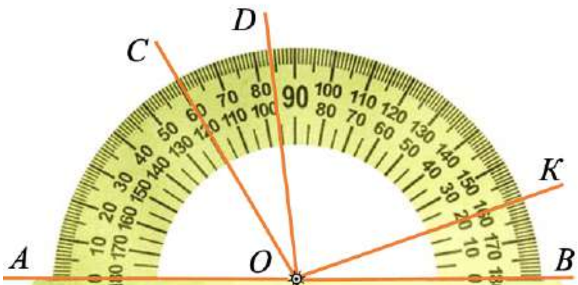


Рис. 21

Рис. 22

Кути, як відомо, вимірюються у *градусах* з допомогою транспортира. Одиничний кут мірою в один градус (позначають: 1°) отримали поділивши розгорнутий кут на 180 рівних частин. Тому градусна міра розгорнутого кута AOB дорівнює 180° (рис. 21). Для більш точного вимірювання кутів градуси поділяють на мінути, а мінути – на секунди. Мінутою (1′) називають 1/60 частину градуса, а секундою (1″) – 1/60 частину мінути. Наприклад, на рисунку 21 кут BOD приблизно дорівнює 95°55′.

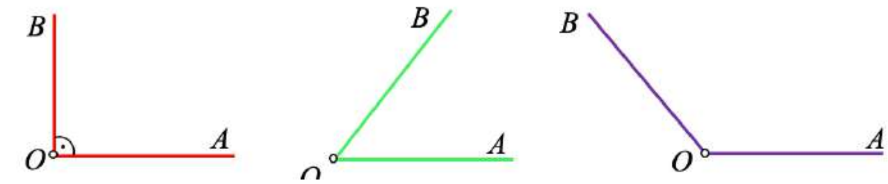
Дивлячись на шкалу транспортира, неважко помітити, що: $\angle BOC$ = 120°. Промінь OK проходить між сторонами кута BOC, $\angle BOK$ = 20°, а $\angle KOC$ = 100°. Не може бути сумнівів, що $\angle BOC = \angle BOK + \angle KOC$ = 20° + 100° = 120°.

Фотокартка (рис. 22) зображує транспортир, виготовлений спеціально для використання у промислових цілях.

Основними властивостями вимірювання кутів називатимемо такі:

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Це означає, що виконуючи операції з накресленим кутом BOC ми можемо проводити між його сторонами будь-який промінь OK і градусна міра кута BOC буде рівна сумі градусних мір кутів BOK й KOC.



Прямий кут *Гострий кут* *Тупий кут*

Рис. 23

Додамо, що кут називається *прямим*, якщо його градусна міра («..., коли він дорівнює») 90°; *гострим*, якщо він має градусну міру меншу 90°, і *тупим*, якщо градусна міра кута більша 90° й менша 180° (рис. 23).

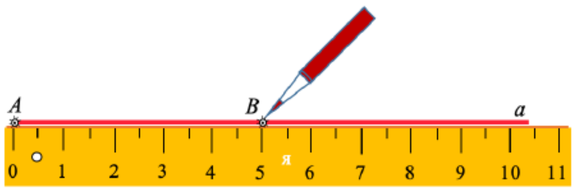


Рис. 24

Відкладання відрізків і кутів. На рисунку 24 показано, як за допомогою лінійки на промені a від його початкової точки A відкладають відрізок даної довжини (AB = 5 см).

На рисунку 25 промінь OA, разом зі своїм доповненням, розбиває площину на дві півплощини. Ви бачите, як за допомогою транспортира відкладають від променя OA у вибрану півплощину кут заданої градусної міри ($\angle AOB$ = 60°).

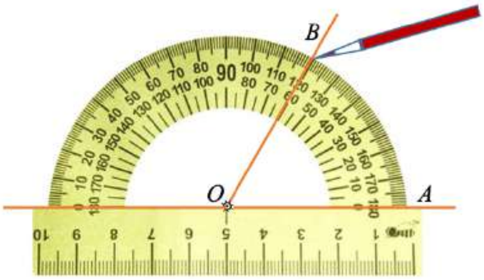


Рис. 25

Такі прості, добре знайомі кожному із власного досвіду практичні операції з олівцем, лінійкою та транспортиром, спонукають нас до формулювання *основних властивостей* відкладання відрізків і кутів:

VII. На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і лише один.

VIII. Від будь-якого променя у вибрану півплощину можна відкласти кут даної градусної міри, меншої 180°, і лише один.

Рис. 26

Зауважимо, що стародавні єгиптяни для вимірювань на землі користувалися досить примітивними (як на наш розсуд) інструментами (рис. 26): палицею, тінню, мотузкою, камінцем і, як не дивно, *сажнем* (польовим циркулем, розхил якого становить 213,36 см). Сажень у господарюванні на селі має прадавнє застосування й сьогодні.

У теперішніх умовах, у різних галузях людської діяльності, використовують набагато досконаліші інструменти для вимірювань як лінійних, так і градусних величин. Кожному відомі *масштабна лінійка*, якою користуються креслярі, *складний метр* вельми потрібний столяру, *клейончастий сантиметр* – кравцю, а *рулетка* – будівельнику (рис. 27, 28).

Рис. 27

Є багато інших, інструментів. Наприклад, у машинобудівній галузі для замірювання діаметрів циліндричних деталей використовують *кронциркулі* й *нутроміри* (рис. 29). Більш точними є *штангенциркулі* та *мікрометри* (зокрема, електронні, рис. 30).

Рис. 28

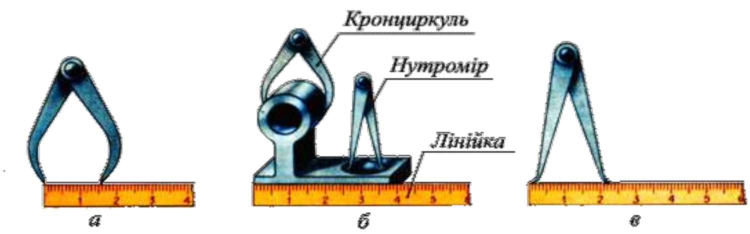


Рис. 29

Рис. 30

Що ж стосується кутових вимірювань, то до найбільш розповсюджених приладів-інструментів, котрі мають неабияке практичне впровадження, слід віднести вже відомий вам *транспортир* (див. рис. 21, 22), а також *астролябію* і *теодоліт* (рис. 31).

Рис. 31

Астролябія (лат. astron – зірка і labe – схоплювання) – кутовимірювальний прилад, яким до XVIII ст. користувались визначаючи широту і довготу в астрономії та навігації.

Призмова астролябія – сучасний прилад для визначення географічних координат.

Астролябія це давній астрономічний інструмент, створений для вирішення задач, пов'язаних з розрахунком часу доби і позиції Сонця та зірок на небосхилі. Існувало декілька типів астролябій. І досі користуються найпопулярнішим видом – планісферною астролябією, на якій небесна сфера проєкціюється на площину екватора.

Теодоліт (гр. *theaomai* - дивлюсь і *dolichos* - довгий) – маркшейдерсько-геодезичний[1] прилад для вимірювання горизонтальних і вертикальних кутів на місцевості. Застосовують теодоліт при виконанні геодезичних, маркшейдерських, астрономічних та інших робіт.

Найперші геометричні поняття «*довжина*» і «*градусна міра*» мають надто важливі втілення в реальних, діючих вимірювальних інструментах, які відіграють помітну роль у життєдіяльності сучасної людини.

Трикутник. Перед тим, як навести означення трикутника, нагадаємо, що метричні відношення «довжина» і «градусна міра» включені до розряду основних, неозначуваних понять. Поняття «відрізок» і «кут» – похідні, означувані. При цьому:

Два відрізки називаються рівними, якщо вони мають однакову довжину.

Два кути називаються рівними, якщо вони мають однакову градусну міру (інколи говорять «... однакову кутову міру в градусах»).

Трикутником називається фігура, яка складається із трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються вершинами трикутника, а відрізки – його сторонами.

На рисунку 32 зображено трикутник із вершинами A, B, C і сторонами AB, BC, AC. Трикутник позначають його вершинами. Замість слова «трикутник» часто вживають знак-символ Δ. Наприклад, трикутник (рис. 32) у символічному запису дозволяється позначити так: ΔABC.

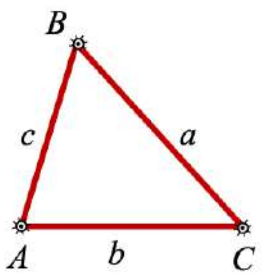


Рис. 32

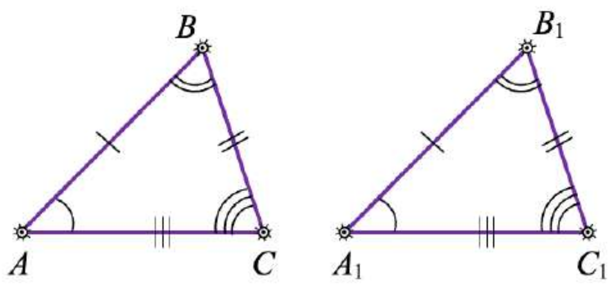


Рис. 33

[1] Маркшейдер – гірничий інженер або технік. Його головним завданням є організація будівництва підземних (і наземних) споруд, з урахуванням правил технічної експлуатації.

Сторони трикутника можна також позначати малими буквами латинського алфавіту a, b, c. Цим зручно скористатися при висвітленні деяких теоретичних питань геометрії та, особливо, при розв'язуванні задач з буквеними виразами, коли довжину сторін трикутника доводиться задавати буквами: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Тут корисно дотримуватися правила: проти кута A лежить сторона a, проти кута B – сторона b, а проти кута C – сторона c.

Кутом трикутника ABC при вершині A називається кут, утворений променями AB і AC. Аналогічно означують кути з вершинами B і C.

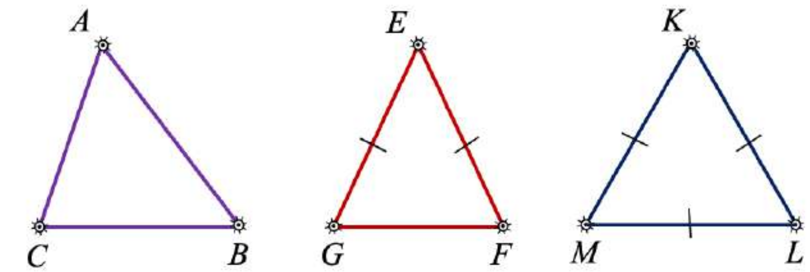
Трикутники називаються рівними, якщо в них відповідні сторони і відповідні кути рівні. При цьому відповідні кути мають лежати проти відповідних сторін.

На рисунку 33 зображені два рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. У них, згідно означенню: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

З метою кращого «бачення» рисунка у візуальному прочитанні, його унаочнюють: рівні відрізки відмічають однією, двома або трьома рисками, а рівні кути – однією, двома або трьома дужками.

Для позначення рівності трикутників у запису користуються звичним знаком рівності =. Приміром, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ прочитується так: «Трикутник ABC рівний трикутнику $A_1B_1C_1$». Тут порядок розташування в запису вершин трикутника має принципове значення, а саме: рівність $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ означає, що $AB = A_1B_1$, $BC = = B_1C_1$, …, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, …. Рівність $\Delta ABC = \Delta B_1A_1C_1$ означає зовсім інше: $AB = B_1A_1$, $BC = A_1C_1$, …, $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, … . Можна помітити, що рівність відповідних сторін і кутів зримо зчитується безпосередньо із символічного запису: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, чим на практиці зручно користуватися.

Трикутники, залежно від *довжини сторін* (рис. 34) та *міри кутів у градусах* (рис. 35), поділяють відповідно на такі види:



Різносторонній *Рівнобедрений* *Рівносторонній*

Рис. 34

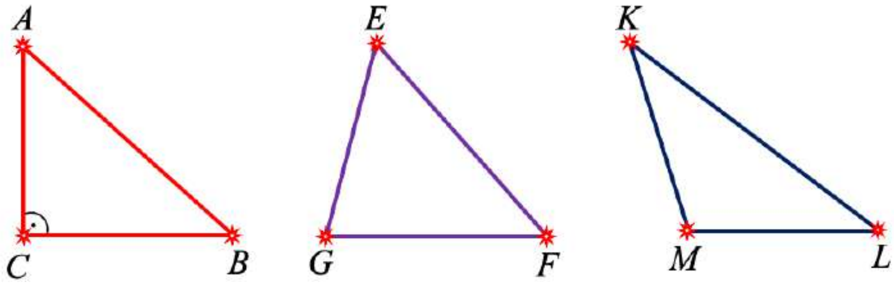
– *різносторонні*, в них усі сторони різної довжини;

– *рівнобедрені*, в них дві сторони рівні;

– *рівносторонні*, в них усі сторони мають однакову довжину;– *прямокутні*, в них один із кутів прямий;

– *гострокутні*, в них усі кути гострі;

– *тупокутні*, в них один із кутів тупий.



Прямокутний *Гострокутний* *Тупокутний*

Рис. 35

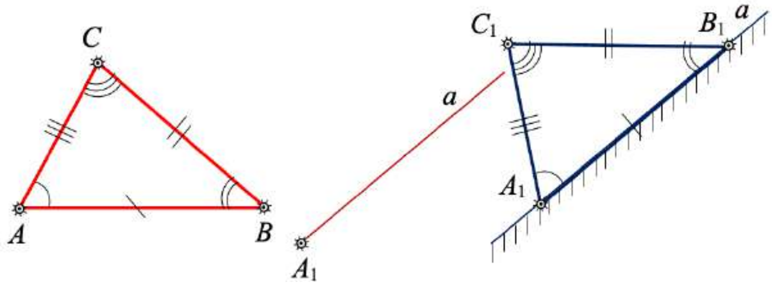
Додамо, що в рівнобедреному трикутнику рівні сторони ($EF = EG$) називають *бічними*, а третю сторону (GF) – *основою*. Сторони (AC і BC) прямокутного трикутника, які утворюють прямий кут, називають *катетами* (від гр. *κάθετος* – висок, перпендикуляр), а сторону (AB), що лежить навпроти прямого кута, – *гіпотенузою* (від гр. *ὑποτείνουσα* – та, що стягує).

Існування трикутника, що дорівнює даному. Нехай дано (накреслено) трикутник ABC і деінде промінь a (рис. 36, *а*). Не змінюючи форми і розмірів трикутника ABC, перемістимо його так, щоб вершина A збіглася з початком A_1 променя a, вершина B попала на промінь a, а вершина C розмістилася у вибраній півплощині відносно променя a (разом із доповненням). Вершини заданого трикутника в його новому розташуванні позначимо A_1, B_1, C_1 (рис. 36, *б*).

Очевидно, що трикутник $A_1B_1C_1$ рівний трикутнику ABC.

Існування трикутника $A_1B_1C_1$, який дорівнює заданому трикутнику ABC і розміщений зазначеним способом відносно заданого променя a, теж відносять до *основних властивостей* найпростіших (похідних) фігур. Ця властивість формулюється так:

IX. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому в даному розміщенні відносно даного променя.



а) *б*)

Рис. 36

Окремо зауважимо, що операція моделювання трикутника $A_1B_1C_1$, рівного трикутнику ABC у так встановленому розташуванні, тісно переплітається з основними властивостями відкладання відрізків (ОВ-VII) і кутів (ОВ-VIII), адже $A_1B_1 = AB$, $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$, а $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$. По іншому, вже зараз, маючи у власному розпорядженні лінійку і транспортир, можна інтуїтивно й візуально – способом *замірювань* і *відкладання* – досить точно побудувати $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$:

1. На промені a від точки A_1 відкладайте відрізок A_1B_1, рівний відрізку AB.
2. Від променя a у вибрану півплощину відкладайте $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$.
3. Від променя B_1A_1 у ту ж півплощину відкладайте $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.
4. Зафіксуйте точку C_1 перетину променів A_1C_1 і B_1C_1.

Трикутник $A_1B_1C_1$, рівний трикутнику ABC, побудовано.

Паралельні прямі. Дві прямі на площині, у взаємному розташуванні (позиційно), можуть мати або одну єдину спільну точку (*перетинатися*), або не мати спільних точок (*не перетинатися*).

Кажуть, що кожна із двох прямих, які не мають спільних точок, розташована відносно іншої прямої *паралельно* (гр. *paralelos* – що проходить поряд).

Отже, *дві прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються*.

Іноді, при злитті двох прямих, зручно вважати це частинним випадком паралельності (позначають: $a \equiv b$). Тут $\equiv$ – знак-символ, що означає злиття двох геометричних фігур.

Дві прямі a і c (рис. 37) перетинаються в тоці A: $A = a \cap c$ та прямі a і b паралельні одна іншій. Паралельність прямих символічно позначають знаком $\|$. Запис $a \parallel b$ (чи $AB \parallel CD$) потрібно читати і озвучувати так: «Пряма a (AB) паралельна прямій b (CD)». Відрізки та промені, які лежать на паралельних прямих, теж вважають паралельними.

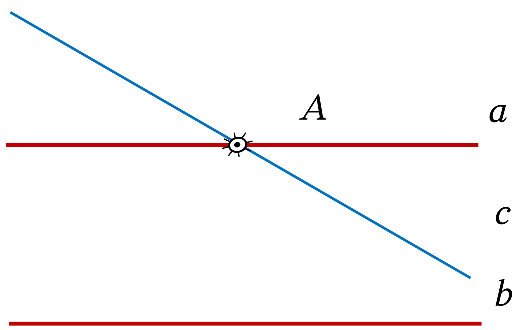


Рис. 37

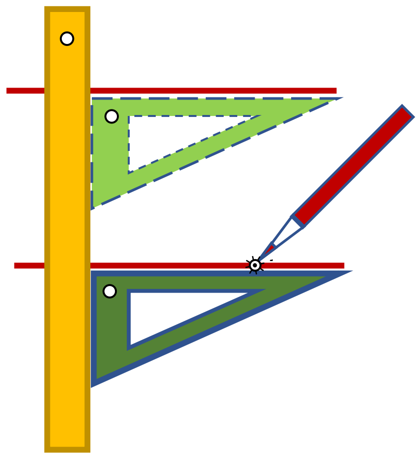


Рис. 38

Основну властивість паралельних прямих слід формулювати так:

X. Через точку, котра не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній.

Побудову прямої b, що проходить через дану точку B, паралельно даній прямій a, зручно виконувати за допомогою лінійки і прямокутного трикутника (рис. 38).

Твердження, які випливають із сформульованої аксіоми або доведеної теореми, називають їх *наслідками*. Наслідки обов'язково доводять, використовуючи базове твердження й уже відомі істинні факти.

Наслідок*. Якщо пряма перетинає одну із двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу пряму.*

Справді, нехай a і b – паралельні прямі, а пряма c перетинає пряму a в деякій точці A (рис. 38). Коли б пряма c не перетинала пряму b, то через точку A проходило б дві прямі (a і c), які не перетинають пряму b. Це неможливо за властивістю паралельних прямих (ОВ-**X**). Тому пряма c, яка перетинає пряму a, обов'язково перетинає й пряму b, паралельну прямій a.

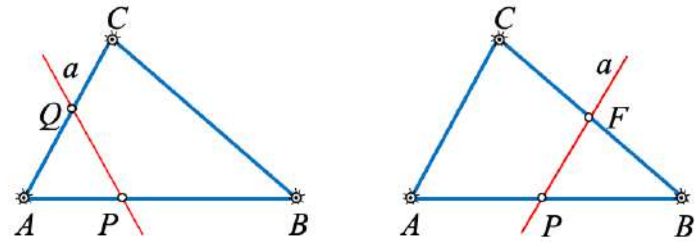
Теореми і доведення. У виваженій, строгій розбудові евклідової геометрії – дисципліни, що має *науковий* характер, будь-яке твердження обґрунтовується шляхом *логічних міркувань*, за винятком основних властивостей (І-Х), неозначуваних відношень між основними об'єктами та деякими найпростішими (зокрема, похідними) фігурами. Такі логічні міркування називають *доведенням*. Саме твердження, котре підлягає доведенню, називають *теоремою*.

Теорема (давньо-гр. $\theta\epsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha$ – доведення; вигляд, погляд; подання, положення).

Міркуючи логічно, з посиланням на ОВ-ІІ, ми вже мали змогу довести, що прямі не можуть перетинатися у двох різних точках, не називаючи це теоремою. Наведемо ще один приклад доведення, тепер уже у формі теореми.

Теорема 1.1 (за О. В. Погорєловим). Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає лише одну з двох інших сторін.

Доведення. Нехай пряма a не проходить через жодну з вершин трикутника ABC і перетинає його сторону AB у деякій точці P (рис. 39).



а) *б*)

Рис. 39

Логіка міркувань надто проста. Пряма a розбиває площину на дві півплощини. Точки A і B лежать у різних півплощинах, адже відрізок AB перетинає пряму a (ОВ - **IV**). Точка C лежить в одній із цих двох півплощин.

Якщо точка C лежить в одній півплощині з точкою B (рис. 39, *а*), то відрізок BC не перетинає пряму a, а відрізок AC перетинає цю пряму, адже точки A і C лежать у різних півплощинах.

Якщо точка C лежить у одній півплощині з точкою A (рис. 39, *б*), то відрізок BC перетинає пряму a, а відрізок AC – не перетинає.

У обох можливих випадках пряма a перетинає лише одну із двох інших сторін AC чи BC трикутника ABC ($P = a \cap AB$ – за умовою). *Доведення завершено*.

Формулювання теореми завжди складається із двох частин, які записують символічно біля якісно виконаного рисунка.

У одній частині, котра називається *умовою* теореми, говориться про те, що дано: трикутник ABC (ΔABC), пряму a (a), яка не проходить через жодну з вершин трикутника і перетинає одну з його сторін у деякій точці P ($a \cap AB = P$). У другій частині, що називається *висновком* теореми, говориться про те, що потрібно довести: пряма a перетинає тільки одну із двох інших сторін заданого трикутника ($a \cap AC = Q$ або $a \cap BC = F$, рис. 39).

У навчальному матеріалі систематичного курсу геометрії ознайомленню учнів з теоремами та їх доведенням відведено помітне місце. Крім теорем у курсі геометрії 7 класу передбачено значну кількість задач на доведення, які у класичних підручниках геометрії (О. В. Погорєлова) відігравали роль теорем. Доведення, як один із надто важливих етапів на шляху до результату, виконують також у процесі розв'язання задач на побудову.

Які ж вимоги програми до математичної підготовки учня, що стосуються теорем та їх доведення? На рівні обов'язкового мінімуму програма вимагає розв'язувати типові задачі на обчислення, доведення і побудову, проводити доказові логічні міркування (доведення), спираючись на відомі теоретичні факти.

Чи повинні учні знати доведення всіх теорем, передбачених програмою курсу? Тут варто дотримуватися прописної істини: *не суть важливо пам'ятати доведення тієї чи іншої теореми, потрібно знати <u>методи</u> доведення <u>і вміти</u> користуватися ними*. Під час вивчення певної теми на рівні обов'язкових результатів навчання ви повинні *знати* теорему як факт і, за потреби, відтворити основні етапи доведення, міркуючи логічно. Більш важливо здобути стабільні вміння й навички застосовування теорем до будь-яких задач, зокрема, практичного (прикладного) характеру і змісту.

Доведення дають змогу учням засвоїти евристичні прийоми розумової діяльності, формують позитивні якості особистості, зокрема: обґрунтованість суджень, стислість та чіткість висловлення думки.

Людині сьогодення випадає жити і працювати в суспільстві інформаційних технологій. У науці та техніці, в інших галузях життєдіяльності необхідні спеціалісти, які б уміли аналізувати проблеми, встановлювати системні зв’язки, виявляти протиріччя, знаходити шляхи їх вирішення, прогнозувати можливі варіанти розвитку таких рішень, творчо застосовувати набуті знання в нових умовах, а отже, – обґрунтовувати. Особистість такого толку готова до постійних змін у технологіях будь-якої сфери діяльності.

Платон і Аристотель

Аксіоми (більш детально). Давньогрецький вчений-енциклопедист, філософ і логік Аристотель (учень Платона, 384-322 рр. до н. е.) був переконаний, що «Всі науки, в яких наявні доведення, застосовують аксіоми … . *Аксіоми володіють найвищим ступенем загальності й* ***є*** *початком усього*».

Аксіома (гр. *axiōma* – загальноприйняте, безперечне; *axiō* – вважаю гідним, наполягаю, вимагаю).

У дедуктивних наукових теоріях під *аксіомами* розуміють:

1. Основні вихідні положення чи твердження, що не викликають сумнівів, з яких шляхом дедукції, тобто *логічними* засобами, одержують весь інший зміст теорії.

2. Те, що не потребує жодних обґрунтувань, самоочевидні, наочні, непорушно істинні факти, відомі без досвіду, незалежні від нього, спроба обґрунтовувати які спроможна була б лише підірвати їх очевидність (так розумів аксіоми Евклід).

3. Твердження, заперечення якого заперечує самі основи логічного мислення.

4. Це – складові елементи теорії, підтвердження якої є одночасно обґрунтовуванням істинності й самих аксіом.

Аксіоматичний метод – один із методів побудови наукового знання. Він має обмежене застосування, оскільки вимагає високого рівня розвитку змістової теорії, котра підлягає аксіоматизації. Цей метод дає можливість створення закінчених, логічно завершених наукових теорій. Не менше значення має й те, що геометрична (математична) теорія, побудована аксіоматично, часто знаходить застосування на практиці – в інших науках і техніці.

При доведенні теорем, розв'язуванні задач потрібно користуватися якісним рисунком, який унаочнює, геометризує умову теореми (задачі), записану словами. Не дозволяється під час міркувань використовувати властивості фігур, які видно на рисунку, якщо ми не можемо їх обґрунтувати, спираючись на аксіоми і доведені теореми. Проте якісно, акуратно виконаний рисунок у змозі наштовхнути будь-кого на правильний шлях подальших міркувань.

В унікальній за змістом книзі «Елементарна геометрія», адресованій виключно вчителю, О. В. Погорєлов зі знанням справи стверджує: «Викладання геометрії у школі має за мету не лише сповіщати учням геометричні результати, але також навчити їх методу, за допомогою якого ці результати одержуються. Як відомо, геометричні результати (теореми) одержуються шляхом логічних міркувань (доведень) із деяких вихідних тверджень (аксіом). Логічні міркування є необхідною складовою всякого пізнання. Геометрії притаманні виразність і простота як у формулюванні результату, так і в тих вихідних положеннях, з яких цей результат повинен бути одержаний. *Тому геометрія дає нам найкращі можливості для* *розвитку логічного мислення у школі».* Цю ж тезу ще більш категорично виголошує й наступний абзац книги: «Пропонуючи цей курс, ми виходили з того, що *головна задача викладання геометрії – навчити учнів логічно міркувати, аргументувати свої твердження, доводити.* Дуже мало хто з тих, що закінчують школу, будуть математиками, тим більше геометрами. Будуть і такі, котрі в їх практичній діяльності жодного разу не скористаються теоремою Піфагора. Однак навряд чи знайдеться хоча б один, якому не доведеться міркувати, аналізувати, доводити».

У викладенні геометричних текстів, окрім аксіом і теорем, вагоме місце займають *означення*. В найпростішому розумінні означення будь-якого поняття передбачає пояснення, що це таке, спираючись на відомі поняття і факти. В усякому означенні в мовленій, символічній чи зображувальній формі подаються загальні істотні властивості, тобто розкривається зміст поняття.

Наприклад, коли говорять: «Дайте означення відрізка». Відповідають так: «*Відрізком називається частина прямої, яка складена з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома даними її точками*. *Точки*, *котрі обмежують відрізок*, *називаються його кінцями*».

Крім цього, відомі також означення променя, кута, трикутника, паралельних прямих, а також рівності відрізків, кутів і трикутників.

Висновки. Специфіка дисципліни «Геометрія» полягає в тому, що її розбудова ведеться на аксіоматичній основі, що *неявно* виражено в інших дисциплінах ЗЗСО, таких як алгебра, фізика, хімія, біологія і т ін. До того ж, дедуктивна побудова евклідової геометрії, що спирається на систему аксіом Евкліда-Гільберта, надто складна (Гільберт – німецький математик кінця XIX й початку XX століть). Непорозуміння виникають відразу, коли вводять поняття міри для відрізків і кутів. Тому аксіоматику О. В. Погорєлова приймають за базову.

Вихідні об'єкти та відношення між ними і, врешті, аксіоми певною мірою знайомі учням із попередніх років навчання. Вивірений системний підхід до засвоєння геометрії варто кваліфікувати як результат ретельного аналізу змісту евклідової геометрії, обов'язково з урахуванням правил і методів формулювання означень й доведення теорем.

Зараз, як не дивно, серед науковців і педагогів панує думка, що відмова від логіко-дидактичної схеми розбудови геометрії, поверхневе знайомство з аксіомами дозволяє учням глибше зрозуміти предмет. Так, на нашу думку, автори підручників докладають зусиль *спростити* подання фактичного матеріалу формулюваннями і обґрунтуваннями істинної сутності дисципліни. Однак усі схожі удосконалення вельми сумнівні – ми на початку знайомства з першою з наук втрачаємо *систему*, ламаємо *структуру* дедуктивного методу розбудови геометрії, яка має продуману і остаточно удосконалену аксіоматику (Ленчук, 2015, с. 22).

Увесь багатовіковий досвід навчання геометрії свідчить, що традиційна (з часів Евкліда) система її подання учням найбільш раціональна. Удосконалення не повинно стосуватися розумних і глибоко продуманих фактів диво-науки, в чому як учитель, так і учень мають бути переконаними. Отже, найперше, варто чітко формулювати основні питання, які виникають у висвітленні основ аксіоматичної розбудови першої з наук, демонструвати їх глибоко осмисленими прикладами практичного, прикладного характеру, якісними і ретельно виконаними рисунками.

Стосовно подальших досліджень у цьому ракурсі ми вважаємо, що підручник О. В. Погорєлова недосконалий, у ньому є чимало недоліків. Ставимо собі за мету розкрити, підправити невдало описані теми та окремі питання.

Конфлікт інтересів. *Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.*

Використання засобів штучного інтелекту. *Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.*

Список використаних джерел

Ленчук, І та Працьовитий, М. (2017). Роль рисунка в задачах планіметрії. Наук.-метод. журнал «Математика в рідній школі», №6, 26-32. http://eprints.zu.edu.ua/31419/.

Ленчук, І. (2015). Точки, прямі, площини, … аксіоми і теореми: введення в евклідову геометрію. Наук.-метод. журнал «Математика в рідній школі», №5, 21-25. http://eprints.zu.edu.ua/19658/.

Погорєлов, О. (1998). Геометрія: Планіметрія: Підручник для 7-9 класів середньої школи. Київ. «Освіта».

References

Lenchuk, I., & Pratsiovytyi, M. (2017). Rol' rysunka v zadachakh planimetrii [in Ukrainian] (The role of the drawing in planimetry problems). Matematyka v ridnii shkoli, 6, 26–32. http://eprints.zu.edu.ua/31419/

Lenchuk, I. (2015). Tochky, priami, ploshchyny, … aksiomy i teoremy: vvedennia v evklidovu heometriiu [in Ukrainian] (Points, lines, planes, … axioms and theorems: An introduction to Euclidean geometry). Matematyka v ridnii shkoli, 5, 21–25. http://eprints.zu.edu.ua/19658/

Pohorielov, O. (1998). Heometriia: Planimetriia. Pidruchnyk dlia 7–9 klasiv serednoi shkoly [in Ukrainian] (Geometry: Planimetry. Textbook for grades 7–9 of secondary school). Osvita.

Отримано / Received 21.10.2025
Прийнято до друку / Accepted 26.11.2025
Опубліковано / Published 22.12.2025